LP 12 - Traitement d'un signal / Étude spectrale

Niveau : Licence

Pré-Requis : Électrocinétique
Oscilloscope
Effet Doppler

Matériel :
Micro + Ampli + Enceinte
Oscilloscope
PC + Regressi + Latis Pro + Carte Acquisition
Banc Doppler
Boîtes à décades (R et C), solénoïdes
Fils, coaxs. RLC-mètre

Introduction

Lorsqu'on observe un phénomène physique, on cherche à le décrire quantitativement en utilisant une ou plusieurs grandeurs physiques. La mesure d'une de ces grandeurs produit un signal, souvent de nature électrique : une tension ou un courant est l'image par un capteur de la grandeur mesurée. Un signal est donc une forme physique d'une information, transmise depuis sa source à son destinataire.

Il faut ensuite "faire parler" le signal, c'est à dire en extraire l'information qui nous intéresse. Les signaux sont souvent transformés, pour les adapter à un mode de transmission particulier, pour pouvoir mieux les analyser (amplification, élimination du bruit, choix d'une représentation).

I - Représentations temporelle et fréquentielle d'un signal

1°/ Signal et représentation temporelle

Lorsqu'on observe un phénomène, on cherche à le décrire en utilisant une ou plusieurs grandeurs physiques. La mesure d'une de ces grandeurs produit un signal, souvent de nature électrique. Un courant ou une tension est l'image de la grandeur mesurée.

La représentation la plus naturelle pour nous est une représentation temporelle :

$$s(t) \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}, \text{ le temps}$$

L'évolution d'un signal dans le temps peut nous renseigner sur certaines de ses propriétés, par exemple la périodicité.

<u>Ex:</u> signal sinusoïdal de période T :

$$s(t) = s_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \Rightarrow \boxed{s(t) = s(t+T)}$$

signal carré de période T

$$s(t) = \begin{cases} s_0 & \text{si } t \in [0, \frac{T}{2}[\\ -s_0 & \text{si } t \in [\frac{T}{2}, T[\end{cases}$$

On peut en extraire une amplitude moyenne, une amplitude efficace

$$s_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \, s(t)$$

$$s_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T dt \, s^2(t)}$$

2°/ Représentation fréquentielle d'un signal périodique

On définit la fréquence d'un signal périodique comme

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{où } f \text{ est mesurée en Hz } (s^{-1})$$

<u>Tout signal périodique</u> peut être décomposé sous la forme d'une <u>superposition de signaux sinusoïdaux</u> de fréquences $f_m = m f$ où $m \in \mathbb{N}$

Ainsi,

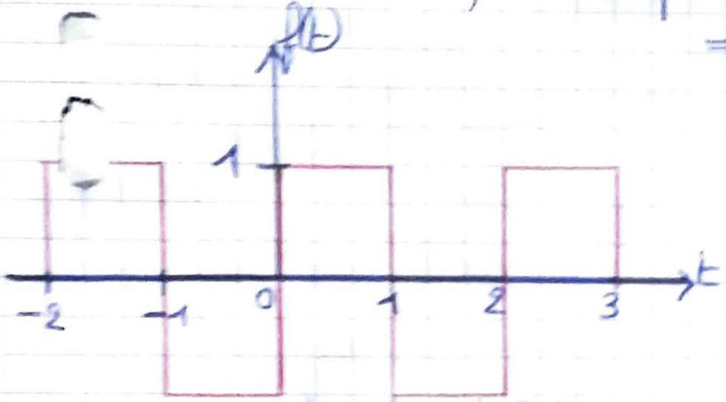
$$s(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\overset{\text{coefficients de Fourier}}{a_m \cos(2\pi f_m t) + b_m \sin(2\pi f_m t)} \right) \qquad f_m = mf$$

avec $a_m = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T s(t) \cos(2\pi m f t)\, dt$, $b_m = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T s(t) \sin(2\pi m f t)\, dt$

Ici $f_1 = f$ est la fréquence du mode fondamental

$f_m = mf$ est la fréquence de l'harmonique de rang, d'ordre m, $m \geq 2$

Pour s'en convaincre, un exemple : décomposition d'un signal carré



$\Rightarrow$ on vérifie la périodicité

$T = 2 \qquad s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ -1 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$

$\Rightarrow s(t) = s(t+T)$

• $\Rightarrow$ on donne les résultats $a_0 = 0$; $a_m = \dots$; $b_m = \dots$

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin(m\pi t) \quad \text{où } m = 2k-1$$

que des harmoniques impaires

$\Rightarrow$ Scilab, superposition pour un signal carré

Symétries : lien entre la parité d'une fonction et ses coefficients de Fourier

Fonction paire $s(t) = s(-t) \Rightarrow b_m = 0$ · série de cosinus

impaire $s(t) = -s(-t) \Rightarrow a_m = 0$ série de sinus

• Rq la fonction périodique doit remplir les conditions de Dirichlet.

$f(t)$ valeur unique sur son ensemble de définition

$f(t)$ nombre fini de discontinuités finies sur n'importe quelle portion de son ensemble de définition

$f(t)$ nombre fini de valeurs maximales et minimales sur n'importe "

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\, dt < \infty \quad \forall t_0$$

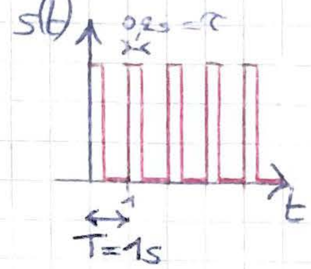
• Séries exponentielles de Fourier : on développe $\sin(m\omega t)$ et $\cos(m\omega t)$, on définit c_m $\quad c_0 = a_0$; $c_m = \dfrac{a_m - j b_m}{2}$ $(m>0)$ et $c_{-m} = \dfrac{a_m + j b_m}{2}$ $(m>0)$

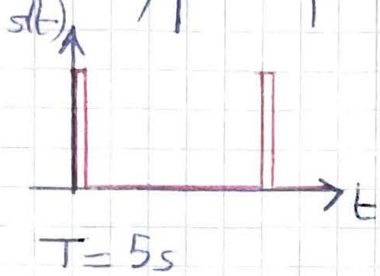
alors $s(t) = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{jm\omega t}$ avec $c_m = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(t) e^{-jm\omega t}\, dt$

On définit le spectre d'amplitude : $|c_m(f)|$
le spectre de phase : $\arg[c_m(f)]$

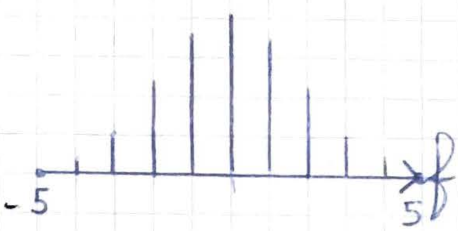
3°/ Étude spectrale d'un signal non périodique (Sadiku p 809)

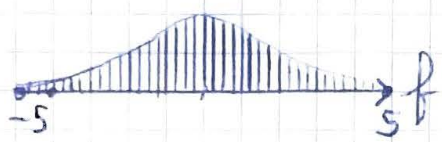
Soit un ensemble d'impulsions carrées, périodique





⇒ éventuellement Scilab





Au fur et à mesure que T augmente
$\Delta f = f_{m+1} - f_m$
diminue

Si $T \to \infty$ (une seule période, donc signal non périodique), $\Delta f \to 0$

⇒ spectre continu :

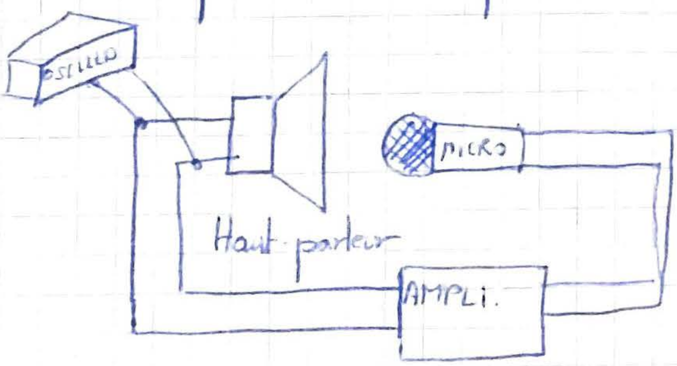
$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$; $\Delta\omega \to d\omega$ et $m\omega \longrightarrow \omega$; $c_m \to \hat{f}(\omega)$

d'où $\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega}$ avec $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, d\omega$

TRANSFORMÉE DE FOURIER
⇒ spectre

Rq: $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega) \Rightarrow |\hat{f}(-\omega)| = |\hat{f}(\omega)|$
⇒ on ne regarde que $\omega > 0$

⇒ Représentation spectrale d'un signal caractérisation de l'effet Larsen



- Déclencher un Larsen, expliquer le principe
- Acquisition (single run)
- Transformée de Fourier à l'oscillo
  ⇒ discuter le spectre, mesurer la fréquence du pic Larsen.

Harmoniques ⇔ saturation liée au bouclage

Le signal nuisible précédent se résume à un pic de fréquence dans l'espace de Fourier.

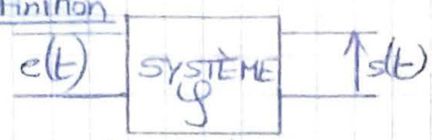
II - Filtrage linéaire

Peut on filtrer/atténuer/éliminer ce pic, et donc éliminer l'effet Larsen ?

Le filtrage linéaire est un exemple de traitement du signal linéaire que nous allons détailler

1) Système linéaire

- Définition



Système quelconque

Soit $\mathcal{F}$ l'opération exercée par le système $\mathcal{S}$ sur le signal d'entrée $e(t)$, conduisant au signal de sortie $s(t)$. $s(t) = \mathcal{F}(e(t))$

Si le système est linéaire, alors $\mathcal{F}$ est linéaire

et $\mathcal{F}(\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)) = \lambda_1 \mathcal{F}(e_1(t)) + \lambda_2 \mathcal{F}(e_2(t))$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$= \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$

$\Rightarrow$ Traitement d'une somme de signaux $\Leftrightarrow$ somme des signaux traités individuellement.

$\Rightarrow$ Un traitement linéaire n'ajoute pas de nouvelles fréquences au signal

- Utilité de la représentation spectrale :

$$e(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$ où $\tilde{E}(\omega)$ est le spectre de l'entrée

$$s(t) = \mathcal{F}(e(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega)\, \mathcal{F}(e^{j\omega t})\, d\omega$$ par linéarité, et $\mathcal{F}$ agissant sur t

Si on sait calculer $\mathcal{F}(e^{j\omega t})$, on connait $s(t)$ $\forall\, e(t)$.

Les fonctions $e^{j\omega t}$ formant une base propre des opérateurs linéaires

$$\mathcal{F}(e^{j\omega t}) = H(\omega)\, e^{j\omega t}$$ où $\boxed{H(\omega) \text{ réponse harmonique ou fonction de transfert}}$

et

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) H(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\tilde{S}(\omega)}_{\text{spectre de } s(t)}\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

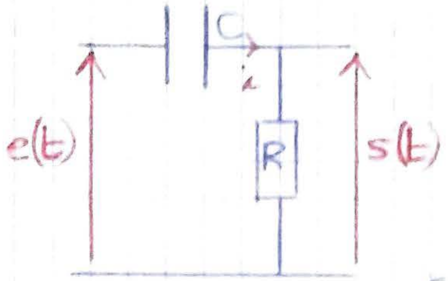
Par complétude de la base

$$\boxed{H(\omega) \triangleq \frac{S(\omega)}{E(\omega)}}$$

$$\begin{tikzcd} e(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "TF"'] & s(t) \\ E(\omega) \arrow[r, "\times H(\omega)"] & S(\omega) \arrow[u, "TF^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

2°/ Filtre linéaire d'ordre 1

- Ordre d'un filtre : on peut toujours écrire $H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$ où N et D sont des polynômes en $j\omega$. L'ordre de D est l'ordre du filtre.
- Cellule CR :



- Pour un filtre d'ordre 1, $\boxed{H(jx) = \frac{N(jx)}{1+jx}}$ où $x = \frac{\omega}{\omega_{ref}}$, où ω_{ref} est une pulsation caractéristique du circuit. $N(jx)$ polynôme de degré 0 ou 1.

On a $e(t) = Ri(t) + \frac{\int i(t)dt}{C}$, or on cherche des solutions du type $g(t) = G(\omega)e^{j\omega t}$

$\Rightarrow E(\omega) = RI(\omega) + \frac{I(\omega)}{jC\omega}$, et de même $S(\omega) = RI(\omega)$ $\Rightarrow$ Impédances

d'où $\boxed{H(\omega) = \frac{jx}{1+jx}}$ avec $\boxed{\omega_{Ref} = \frac{1}{RC}}$

On définit :
- le gain en tension en décibels dB $\boxed{G(\omega) = 20\log_{10}|H(\omega)|}$ Rq : en puissance on met un 10
- le déphasage en radians rad $\boxed{\phi(\omega) = \arg[H(\omega)]}$ entre la sortie et l'entrée

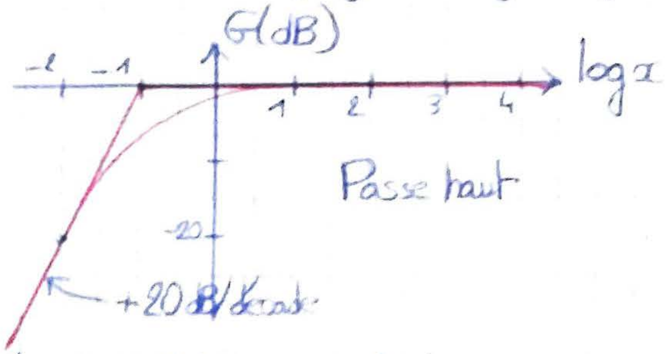
Le diagramme de Bode est constitué des deux courbes $G(\omega)$ et $\phi(\omega)$

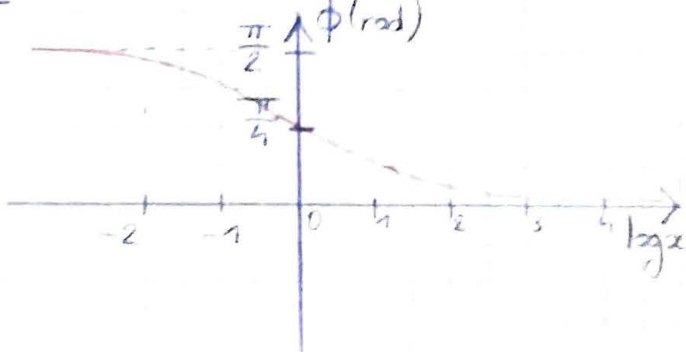
ex. cellule CR

- $G(x) = 20\log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 20\log x - 10\log(1+x^2)$

  Si $x \to 0$ $G(x) \to 20\log x$. Si $x \to \infty$ $G(x) \to 0$

- $\phi(x) = \arg(jx) - \arg(1+jx) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$





Interprétation aux limites ⟺ diagramme asymptotique

Si $\omega \to 0$ rien ne passe à cause du condensateur : $Z_C \to \infty$ (condensateur = interrupteur ouvert)

Si $\omega \to \infty$ le condensateur se comporte comme un fil

- Bande passante et coupure :

Bande passante intervalle de fréquences tel que

$$G(\omega) > G(\omega_c) = G_{MAX} - 3\,dB$$

où G_{MAX} gain maximal

ω_c : pulsation de coupure : $G(\omega_c) \simeq G_{MAX} - 3dB$

Pour le CR : $G_{MAX} = 0$, d'où $\omega_c = ?$

$$-3 = 20 \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \boxed{\omega_c = \omega_{ref} = \frac{1}{RC}}$$

⇒ Interprétation intelligente :

$$G(\omega_c) = G_{MAX} - 3dB \Leftrightarrow H(\omega_c) = \frac{H_{MAX}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow S = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

⇒ on divise la puissance maximale par 2 à $\omega = \omega_c$.

3°/ Filtre linéaire d'ordre 2

- Un filtre linéaire d'ordre 2 a une fonction de transfert de la forme :

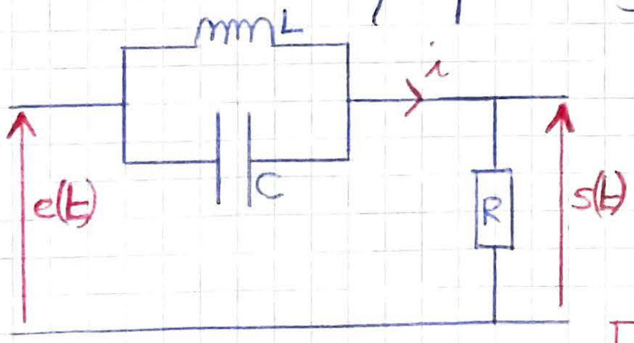
$$\boxed{H(j\omega) = H_0 \frac{-a\omega^2 + jb\omega + c}{-a'\omega^2 + jb'\omega + c'}} \qquad a, b, c, a', b', d \text{ réels } \geq 0$$

- Les FL d'ordre 1 n'ont qu'une fréquence de coupure ⇒ passe bas ou passe haut

Les FL d'ordre 2 peuvent en avoir 2 ⇒ passe bas, passe haut (si 1 fréquence)

passe bande, coupe bande (si 2 fréquences)

Pour éliminer le Larsen, on peut envisager un filtre coupe-bande



$$S(\omega) = I(\omega) R$$

$$E(\omega) = I(\omega)\left(R + \frac{Z_C Z_L}{Z_L + Z_C}\right) \qquad Z_L = jL\omega \qquad Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{R(1 - LC\omega^2)}{jL\omega + R(1 - LC\omega^2)}$$

$$\boxed{H(\omega) = \frac{\omega_{RF}^2 - \omega^2}{\omega_{RF}^2 - \omega^2 + j\underbrace{\frac{L}{R}}_{\tau}\omega\omega_{RF}^2}} \qquad \omega_{RF} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

⇒ Tracer le Bode   par décades : 1 et 3 puis densifier autour du pic

composants : pour $f_{Ref} \sim 9\,kHz$ $L = 2{,}2\,mH$, $C = 142\,nF$, $R = 100\,\Omega$

On choisit L et C de façon à ce que la bande rejetée corresponde au spectre du Larsen. Minimiser R pour accroître l'atténuation.

$$G = 20\log|H(\omega)| = 20\log\left|\frac{\omega_{Ref}^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_{Ref}^2-\omega^2)^2 + \omega^2\tau^2\omega_{Ref}^4}}\right| \quad \begin{cases} \omega \to 0 & G \to 0 \\ \omega \to \infty & G \to 0 \\ \omega = \omega_{Ref} & G \to -\infty \end{cases}$$

$$\phi = -\arctan\left(\frac{\omega\tau\omega_{Ref}^2}{\omega_{Ref}^2 - \omega^2}\right) \quad \begin{matrix} \omega \to 0 & \phi \to 0 \\ \omega = \omega_{Ref} & \\ \omega \to \infty & \phi \to 0 \end{matrix}$$

III - Traitement non-linéaire

Par les transmissions radio, les fréquences des signaux mis en jeu sont dans le domaine audible, typiquement entre 20 Hz et 20 kHz. La transmission directe est problématique :

- antennes encombrantes :

- la taille de l'antenne dépend de la fréquence à envoyer

- besoin de beaucoup de puissance

Une méthode usuelle de transmission des informations audio (basse fréquence) est de transmettre un signal haute fréquence (signal porteur) et de le moduler pour correspondre à l'information audio. Trois caractéristiques d'une porteuse peuvent être contrôlées pour transporter un signal contenant l'information (le signal modulé) : l'amplitude, la fréquence, la phase.

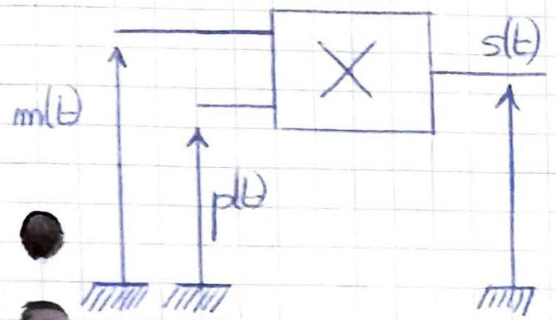
1°/ Modulation d'amplitude

C'est la première technique à avoir été inventée.

Le signal modulant est multiplié par un signal porteur :

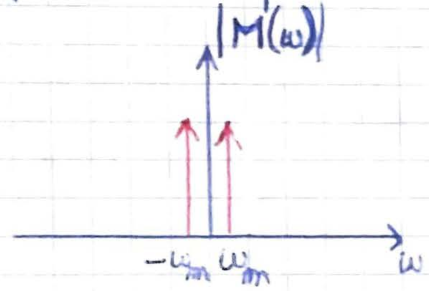
$m(t) = V_m \cos(\omega_m t)$ $\qquad p(t) = V_p \cos(\omega_p t)$ $\qquad \omega_p \gg \omega_m$

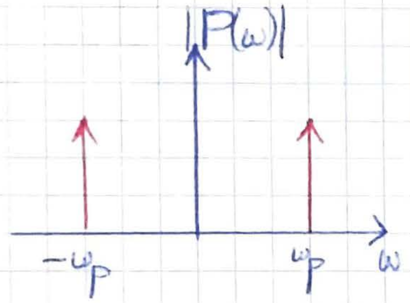
au moyen d'un circuit multiplieur

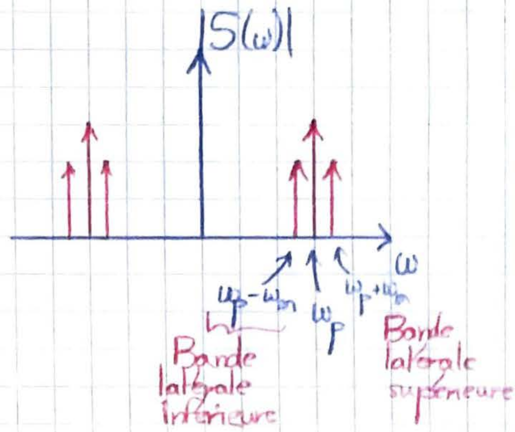


$$s(t) = k V_m V_p \cos(\omega_m t)\cos(\omega_p t)$$
$$= \frac{1}{2} k V_m V_p \left(\cos((\omega_m - \omega_p)t) + \cos((\omega_m + \omega_p)t)\right)$$

Spectres en amplitude :

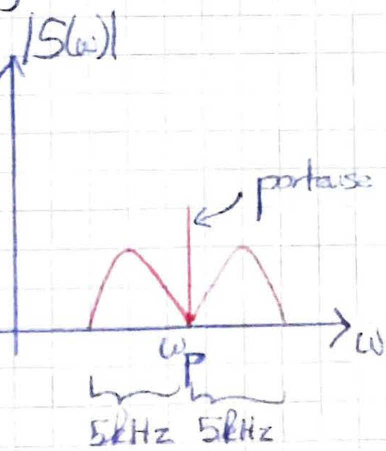






En réalité, m(t) est souvent un spectre large, typiquement entre 0 et 5kHz.

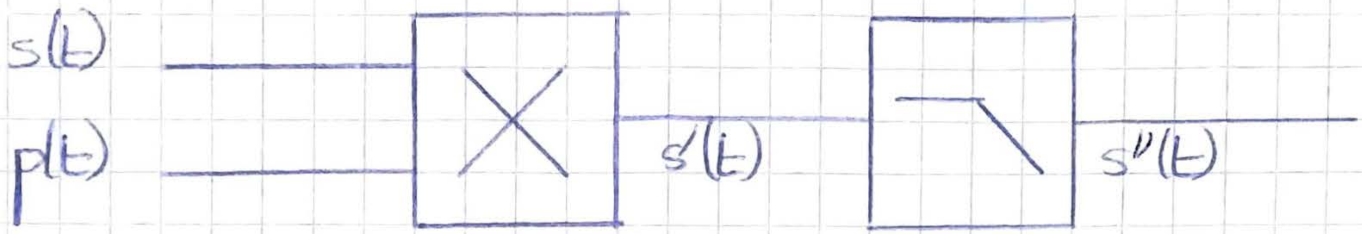
Le spectre du signal s est donc du type



Pour éviter des interférences, les ondes porteuses des stations radio AM sont espacées d'au moins 10kHz, sinon risque d'interférences.

2/ Détection synchrone

Méthode de démodulation : pour récupérer le signal modulant.



$$s'(t) = \underbrace{\frac{1}{2} k^2 V_m V_p^2}_{V_s'} \cos(\omega_p t)\left(\cos\left[(\omega_p - \omega_m)t\right] + \cos\left[(\omega_p + \omega_m)t\right]\right)$$

$$= V_s' \frac{1}{2}\left(\cos\left((2\omega_p - \omega_m)t\right) + \cos(\omega_m t) + \cos\left((2\omega_p + \omega_m)t\right) + \cos(\omega_m t)\right)$$

$$= V_s' \cos(\omega_m t) + \frac{V_s'}{2} \cos\left((2\omega_p - \omega_m)t\right) + \frac{V_s'}{2} \cos\left((2\omega_p + \omega_m)t\right)$$

Le Filtre passe bas élimine les 2 derniers termes et on récupère ω_m.

__Application:__ banc Doppler, éventuellement (voir ondes acoustiques et livre