LP.35 Diffraction de Fraunhofer

Maria Ubero Gonzalez

20 juin 2020

Pour cette leçon

Quand on parle de fréquences spatiales, essayer de faire le lien avec la TF en élec, temps - fréquence temporelle, space - fréquence spatiale.

Suivre la leçon de Pierre (regarder aussi celle de Mathieu). OJO car dans la première figure pour trouver l'expression de la diffraction, la figure de la leçon de Pierre et celle de Mathieu ont les notations de x,y minuscules et majuscules inversées.

Nombre de Fresnel : $F = \frac{a^2}{\lambda}$. $k = nk_0$ et $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$. Avec la notation de Pierre :

$$u = \frac{X}{\lambda f'} \qquad v = \frac{Y}{\lambda f'} \tag{1}$$

Transformée de Fourier

Pour f une fonction de deux variables, on appelle $\mathcal{F}[f]$ sa transformée de Fourier définie par :

$$\mathcal{F}[f](u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-2j\pi(ux+vy)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

La transformée inverse vérifie alors :

$$f(x,y) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](u,v)\, e^{2j\pi(ux+vy)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

Propriétés :

$$\mathcal{F}[f(-x,-y)] = \mathcal{F}^{-1}[f(x,y)] \qquad (1)$$

$$\mathcal{F}[f(ax,by)](u,v) = \frac{1}{|ab|}\mathcal{F}[f(x,y)]\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right) \qquad (2)$$

$$\mathcal{F}[f^*](u,v) = \mathcal{F}^*[f](-u,-v) \qquad (3)$$

Produit de convolution

Le produit de convolution $f * g$ de deux fonctions est défini par :

$$(f*g)(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x', y-y')g(x',y')\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y'$$

Il vérifie les propriétés suivante pour les transformées de Fourier :

$$\mathcal{F}[f*g] = \mathcal{F}[f]\times\mathcal{F}[g] \qquad (4)$$

$$\mathcal{F}[f\times g] = \mathcal{F}[f]*\mathcal{F}[g] \qquad (5)$$

où $\times$ désigne le produit habituel de deux nombres.

Pour la partie diffraction d'une fente : suivre Pierre et Mathieu. Regarder comment Mathieu démontre que si on prend une fente fine, la diffraction ne se fera que dans une direction. OJO parce qu'il écrit : $sinc(X) = 0$ ce X ne correspond pas au X d'avant, c'est juste tout ce qu'il y a à l'intérieur du $sinc$.

$$\mathrm{sinc}(\pi ua) = 0 \qquad \pi ua = n\pi$$

Démo translation de la pupille :

Translation

On considère une pupille diffractante, dans le plan xOy, de transmittance complexe $\underline{t}(x,y)$. Cette pupille subit une translation de x_0 suivant $\vec{e}_x$ (on ne considère pas celle de $\vec{e}_y$ pour alléger les calculs mais on pourrait le faire avec les deux).

On a alors : $\underline{t}'(x,y) = \underline{t}(x-x_0,y)$.

$$\underline{s}'(u,v) = \underline{s}_0 \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} \underline{t}'(x,y)\exp\left(-i2\pi[ux+vy]\right)dxdy.$$

On fait un changement de variable : $x' = x - x_0$.

$$\underline{s}'(u,v) = \underline{s}_0 \exp\left[-2i\pi[ux_0+vy_0]\right] \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{t}(x',y)\exp\left(-2i\pi[ux'+vy']\right)dx'dy'}_{\text{si on renote } x' \text{ en } x\text{, on a cette expression } = \underline{s}(u,v)}$$

L'amplitude diffractée par la pupille translatée est la même que celle diffractée par la pupille de départ, à un déphasage uniforme près.

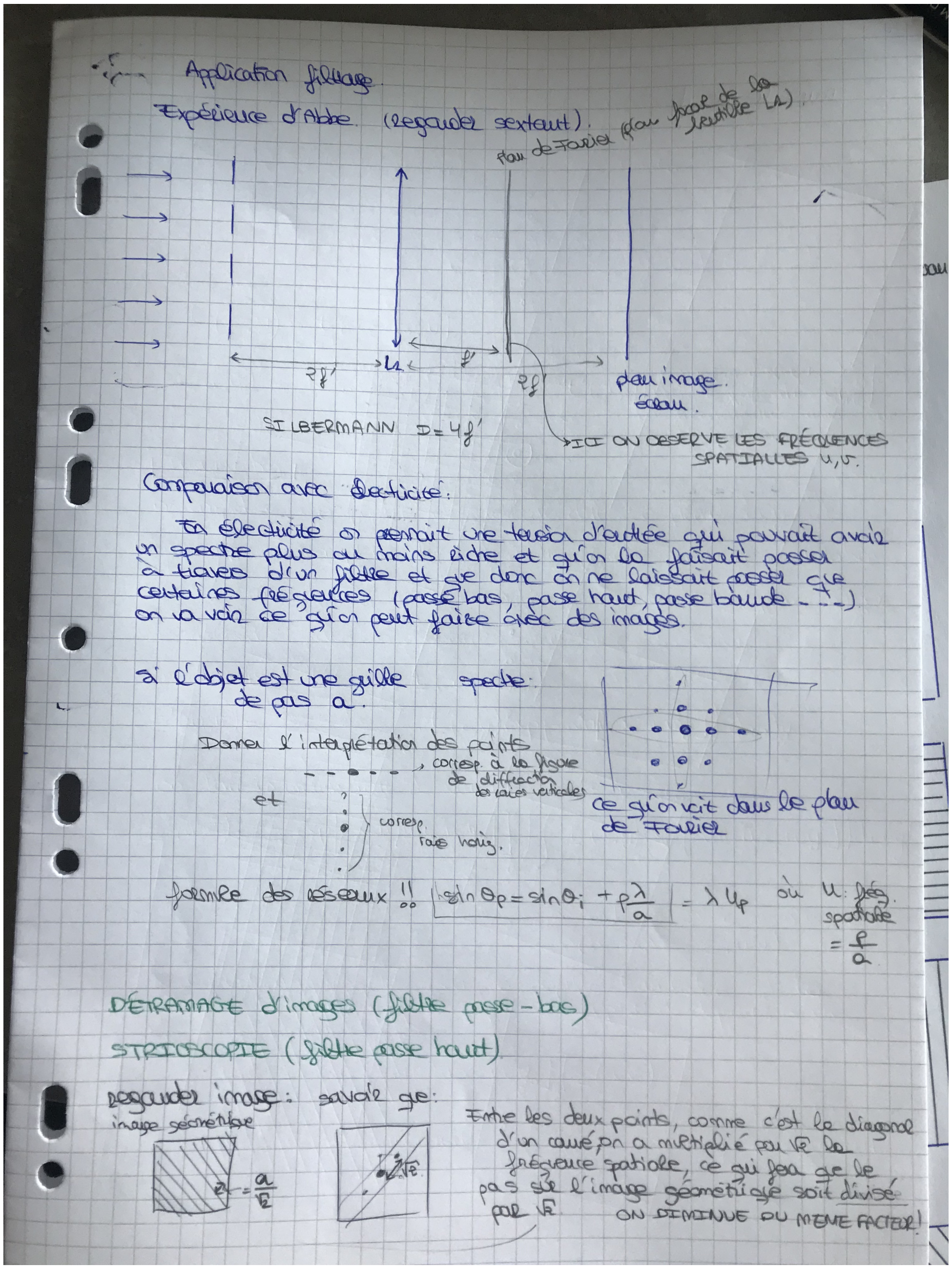
$$\boxed{\underline{s}'(u,v) = \exp\left[-2i\pi[ux_0+vy_0]\right]\underline{s}(u,v).}$$

(si on calcule l'éclairement : $\exp^{i} \cdot \exp^{-i} = 1$ → même éclairement.

Démo rotation de l'éclairage : leçon de Mathieu très bien, suivre ses diapos, elles sont géniales ! la figure de diffraction se forme autour de l'image géométrique de la source donc si on translate la source, on translate la figure de diffraction mais elle reste la même !.

Application : Limite de résolution regarder l'exercice de Sayrin, en plus il y a pas mal d'images qui sont très bien.

Application : optique de Fourier.



Application filtrage.

Expérience d'Abbe (regarder sextant).

Compuaison avec électricité:

En électricité on prenait une tension d'entrée qui pouvait avoir un spectre plus ou moins riche et qu'on la faisait passer à travers d'un filtre et que donc on ne laissait passer que certaines fréquences (passe bas, passe haut, passe bande ...) on va voir ce qu'on peut faire avec des images.

si l'objet est une grille de pas a. spectre:

formule des réseaux !! $\boxed{\sin\theta_p = \sin\theta_i + p\frac{\lambda}{a}} = \lambda u_p$ où u: fréq. spatiale $= \frac{p}{a}$

DÉTRAMAGE d'images (filtre passe-bas)

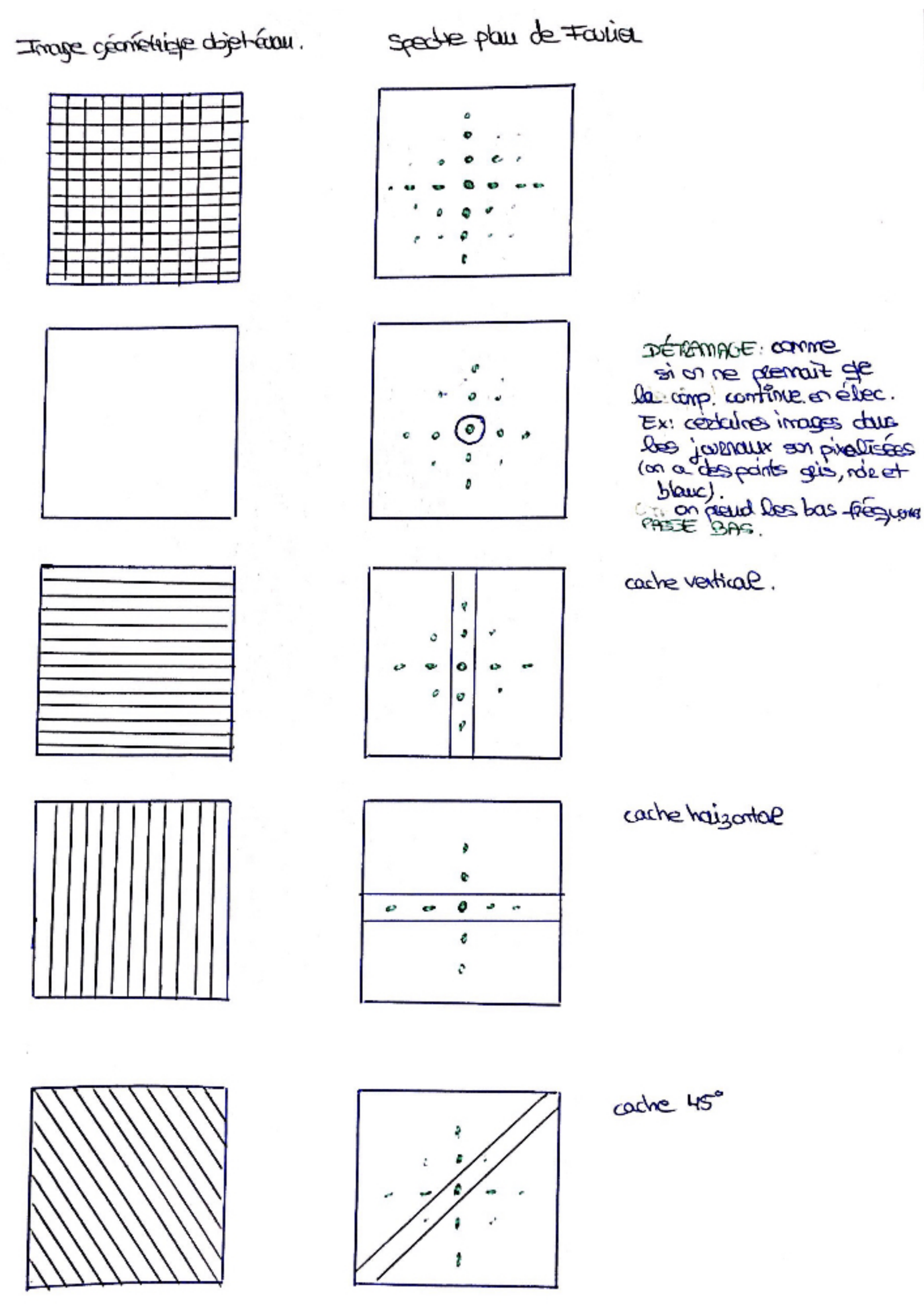
STRIOSCOPIE (filtre passe haut)

regarder image: savoir que:

Entre les deux points, comme c'est la diagonal d'un carré, on a multiplié par $\sqrt{2}$ la fréquence spatiale, ce qui fera que le pas sur l'image géométrique soit divisé par $\sqrt{2}$

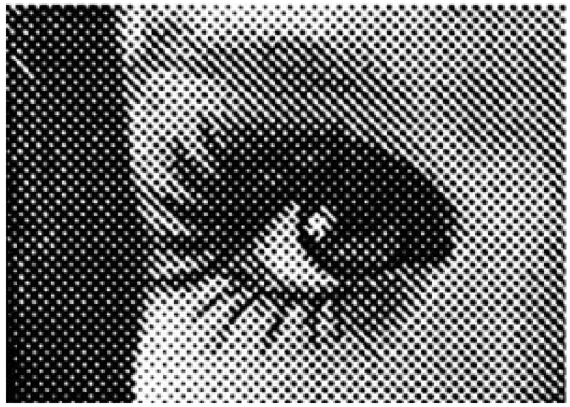
ON DIMINUE DU MEME FACTEUR!

OJO quand on laisse passer que le trou central on laisse passer les très basses fréquences quand même. On prend tout le point central.



Dans le cas de la Strioscopie, ce qu'on fait c'est mettre une pastille qui couvre point central de la figure dans l'espace Fourier (composante continue en élect) pour ne laisser passer QUE LES HAUTES FRÉQUENCES. On supprime le fond de l'image ce qui nous laisse voir miuex les détails.

Image tramée



Strioscopie