Agrégation 2019/2020

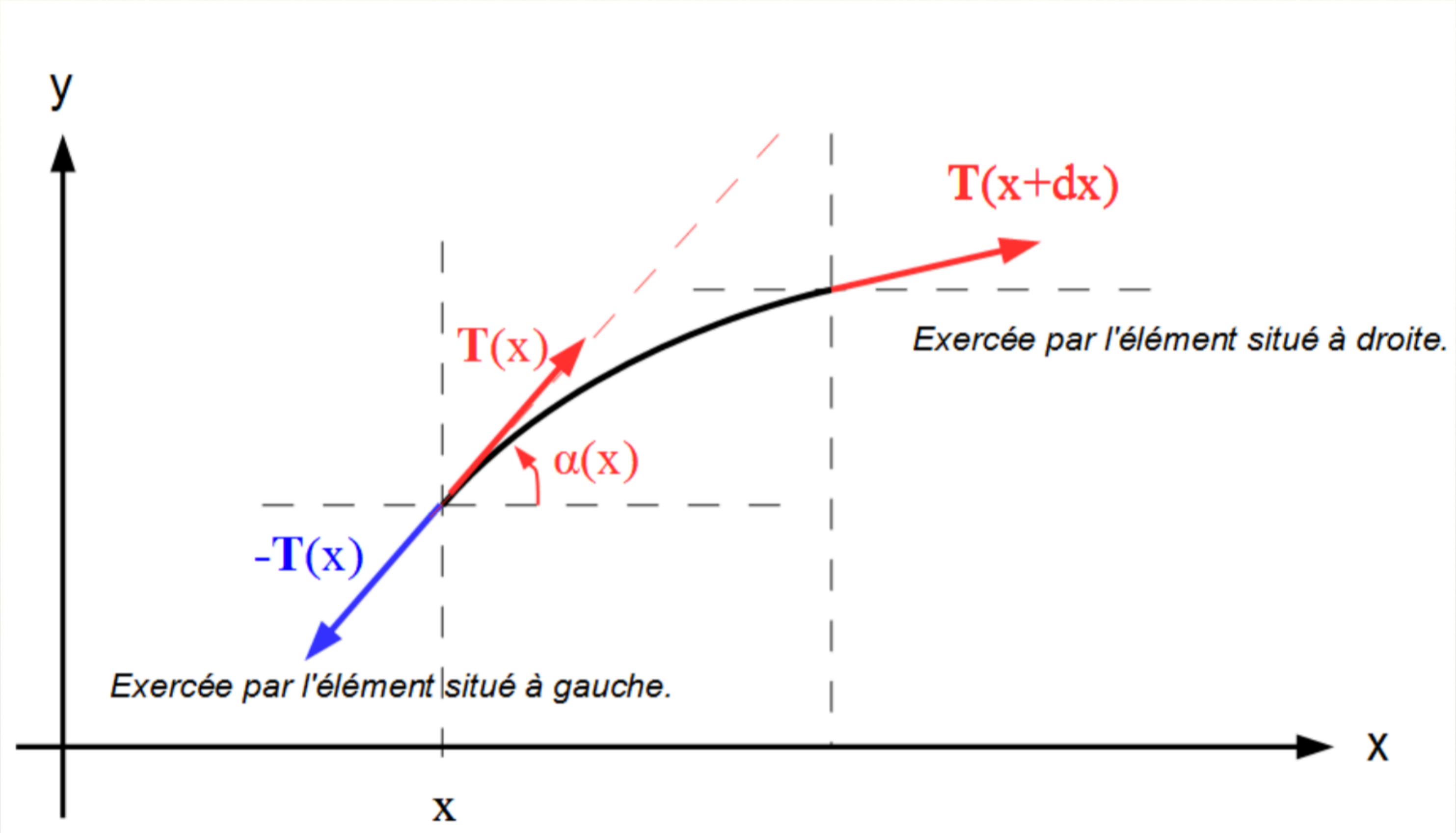
LP.24 Ondes progressives, ondes stationnaires

Maria Ubero Gonzalez

Pré-requis

- Equation de d'Alembert
- Solutions de l'équation de d'Alembert
- Développement en série de Fourier
- Equation oscillateur harmonique

Corde



PFD

Equation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$F_y = -T\alpha = -T\frac{\partial y}{\partial x}$$

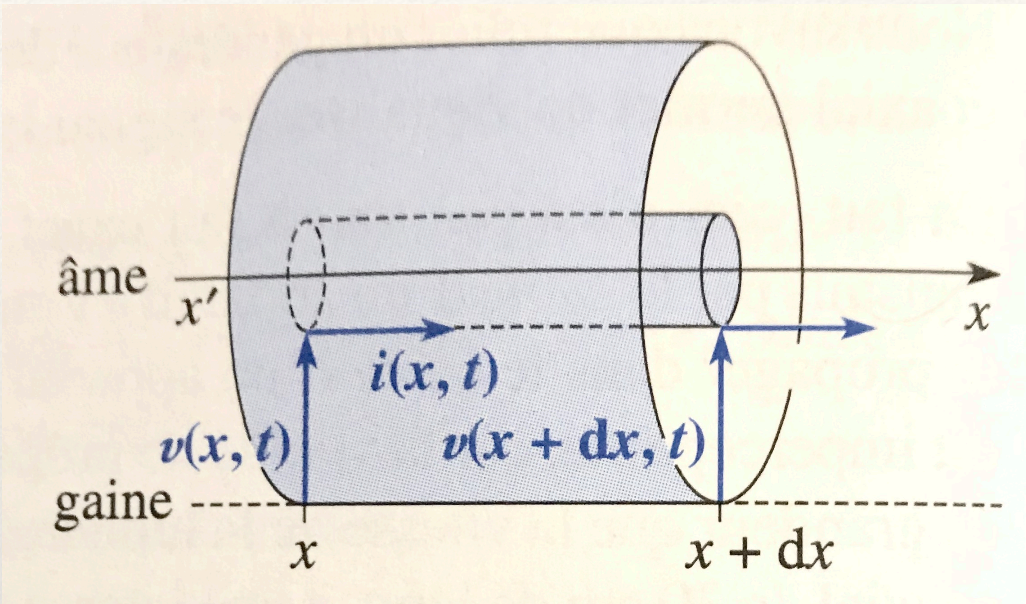
$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

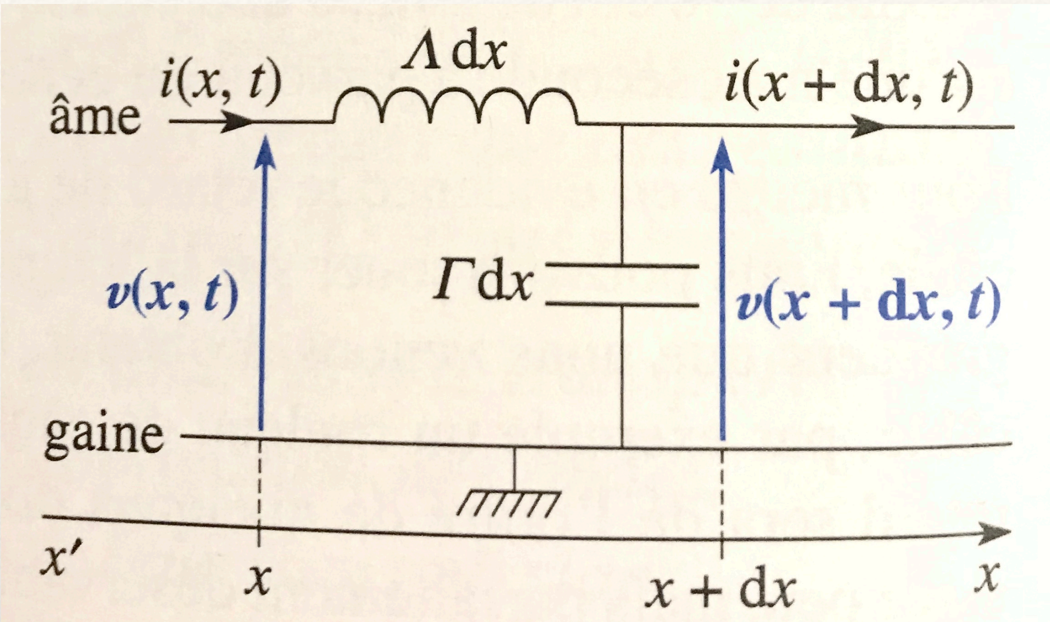
Système d'équations couplées

$$\frac{\partial v_y(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial F_y(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_y(x,t)}{\partial t} = -T\frac{\partial v_y(x,t)}{\partial x}$$

Cable coaxial





Λ Inductance par unité de longueur

Γ Capacité par unité de longueur

La *loi de noeuds* et la *loi des mailles* nous ont permis de trouver **le système d'équations couplées :**

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

Et l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

Bilan et généralités

	Corde	Cable coaxial	Onde acoustique	Onde EM
Grandeur excitation (s1)	F_y	u	p	$\overrightarrow{E}$
Grandeur réponse (s2)	v_y	i	v	$\overrightarrow{H}$
Inertie (b)	μ	Λ	ρ_0	μ_0
Raideur (a)	T	$\frac{1}{\Gamma}$	$\frac{1}{\chi_s}$	$\frac{1}{\epsilon_0}$
Célérité (c)	$\sqrt{\frac{T}{\mu}}$	$\frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$	$\frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$

Bilan et généralités

Système d'équations couplées

$$\frac{\partial s_1(x,t)}{\partial t} = -a\frac{\partial s_2(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial s_2(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{b}\frac{\partial s_1(x,t)}{\partial x}$$

Equation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2} = 0$$

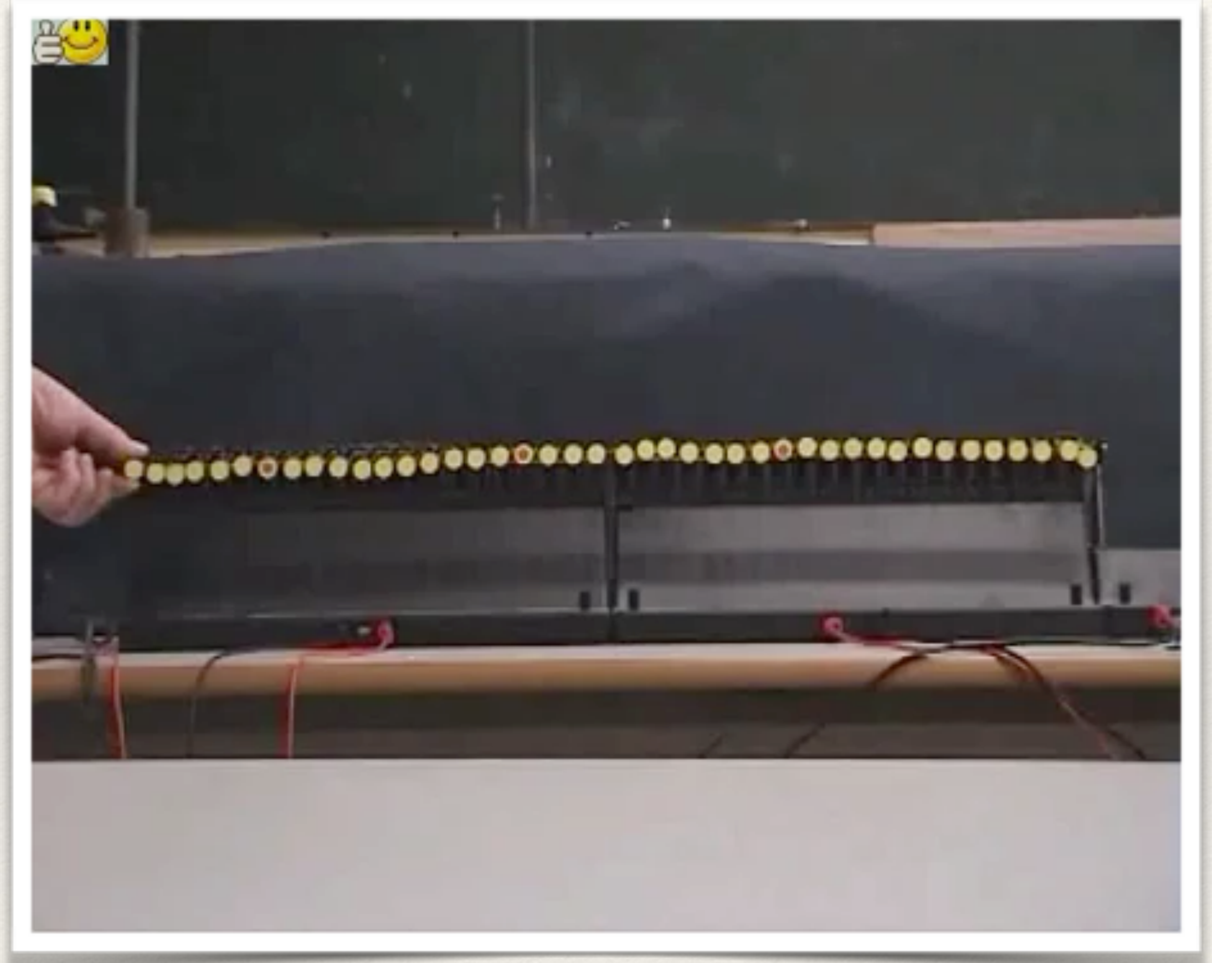
$$c^2 = \frac{a}{b}$$

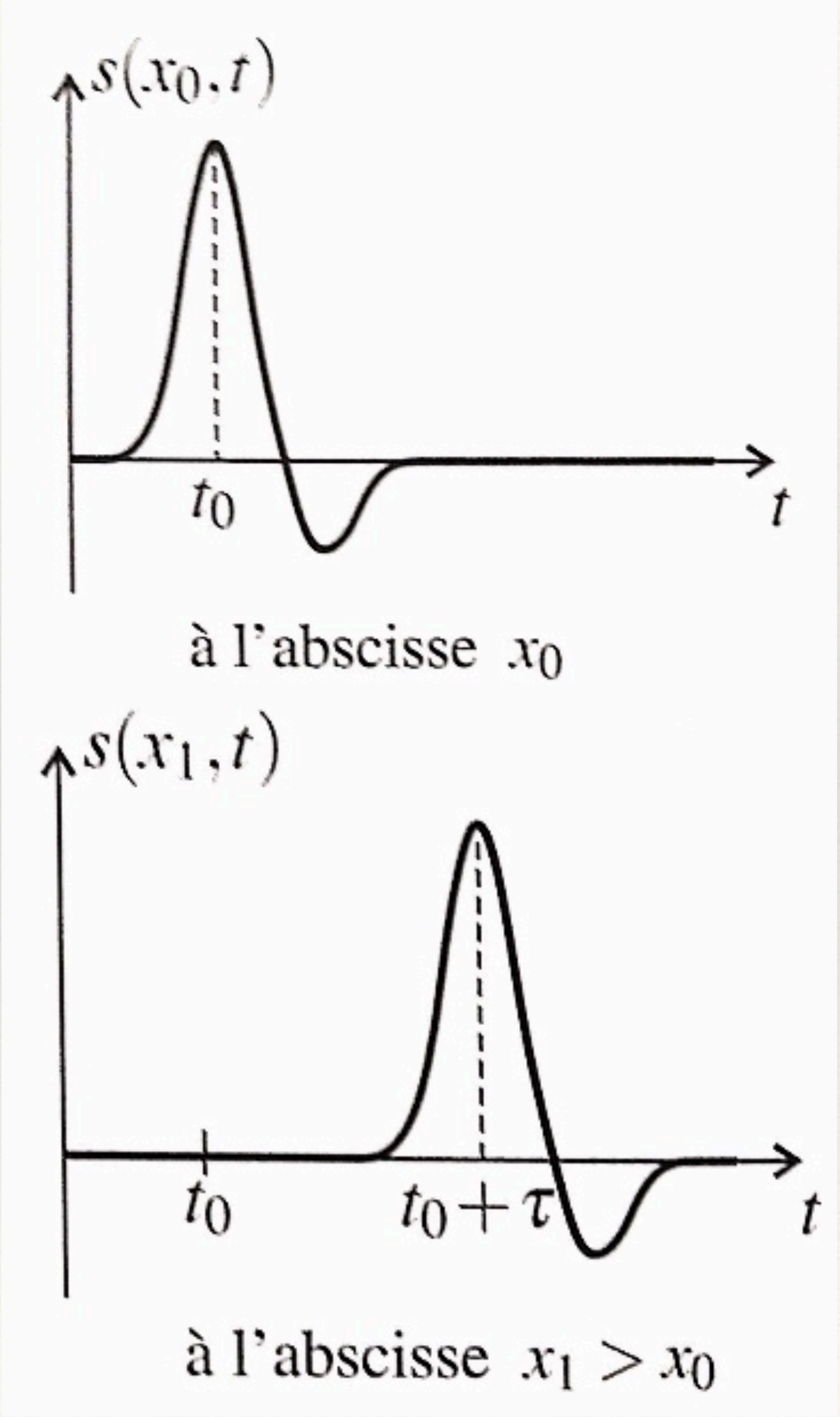
Solutions équation de d'Alembert

$$s(x,t) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$$

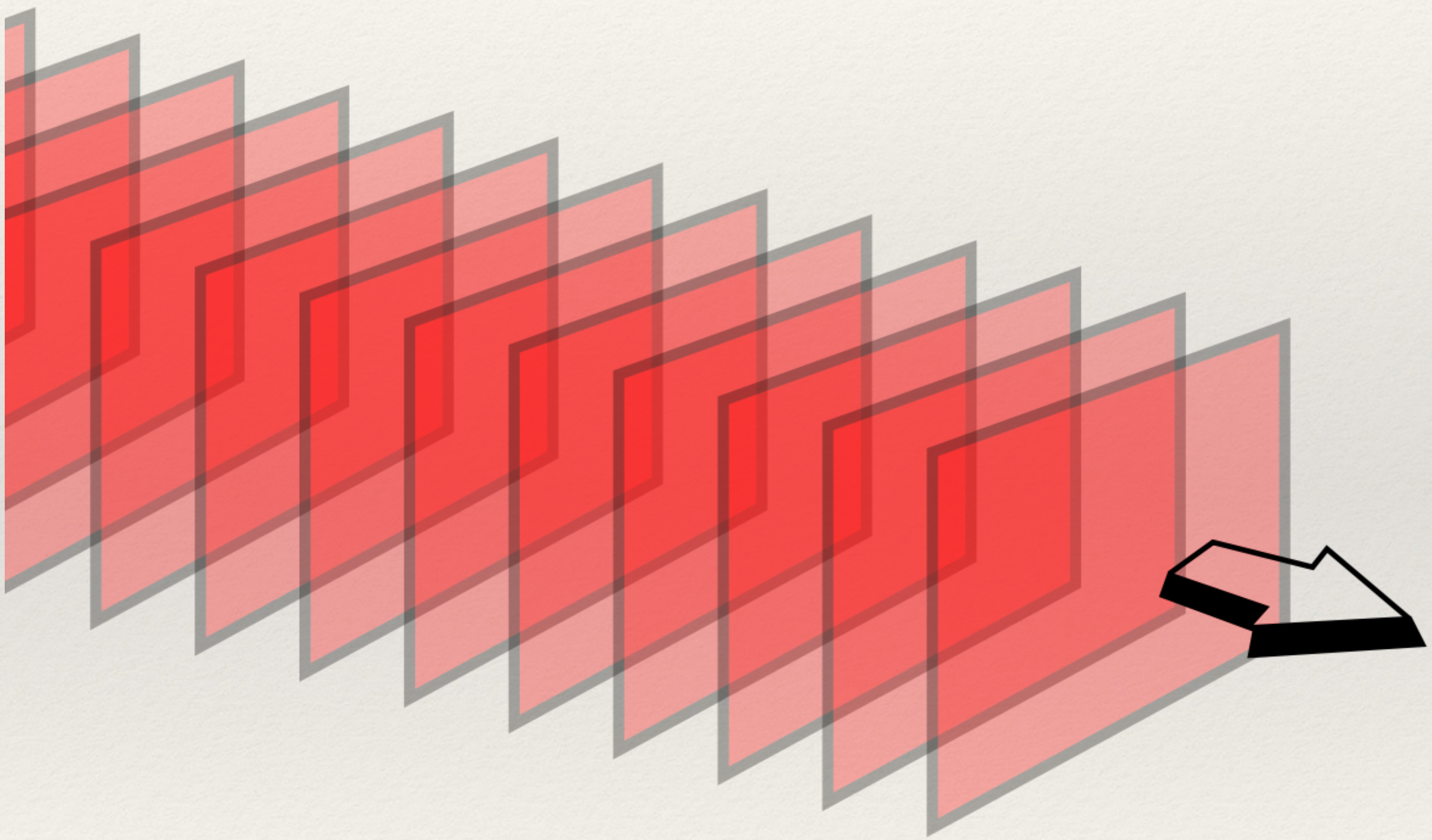
Physiquement ?

Ondes progressives. Définition





Onde plane

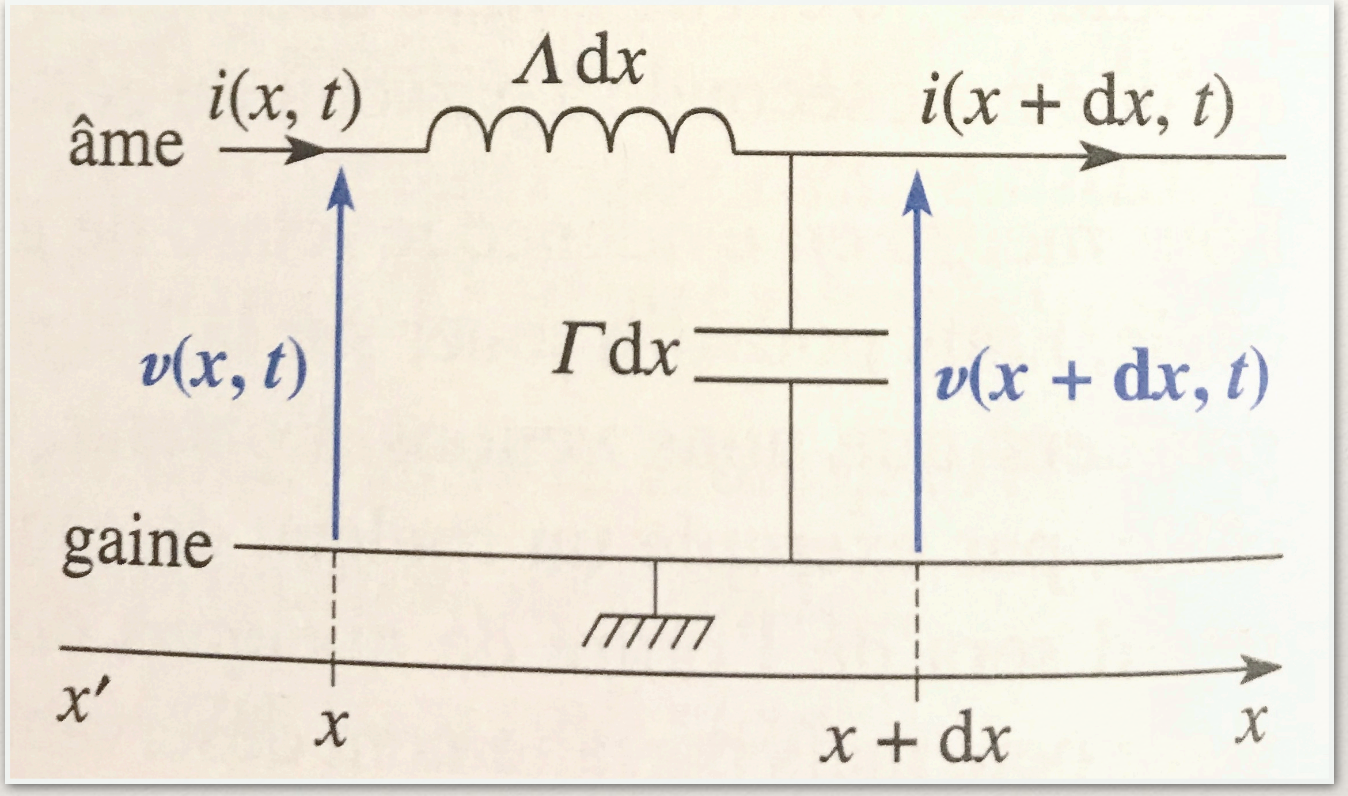


I3.1 a) Impédance caractéristique. Cable coaxial.

Dans le cas général, la ligne est parcourue par l'onde unidimensionnelle la plus générale :

$$\boxed{\begin{aligned} i(x,t) &= f(t-\frac{x}{c}) + g(t+\frac{x}{c}) \\ v(x,t) &= Z_c\left(f(t-\frac{x}{c}) - g(t+\frac{x}{c})\right) \end{aligned}}$$

I.3 b) Cable coaxial. Aspects énergétiques



$$\boxed{iu(x,t) - iu(x+dx,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{1}{2}\Gamma u^2 + \frac{1}{2}\Lambda i^2\right) dx\right)}$$

II.1 Ondes stationnaires

Développement du cosinus de l'expression d'une OPPH :

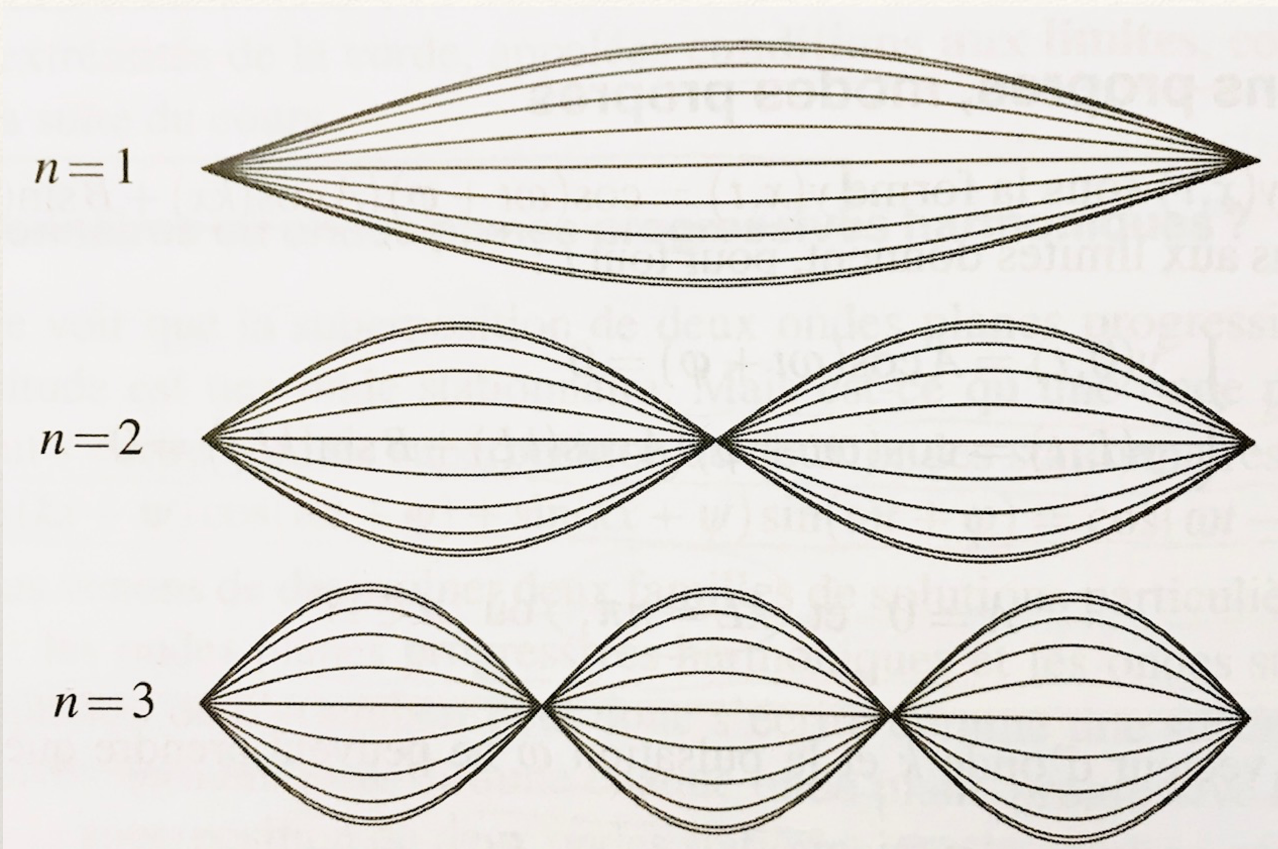
$$s(x,t) = s_0 cos(wt - kx + \phi)$$

$$s(x,t) = s_0 \left(cos(wt + \phi) \cdot cos(kx) + sin(wt + \phi) \cdot sin(kx)\right)$$

$$s(x,t) = s_0 \left(cos(wt + \phi) \cdot cos(kx) + cos(wt + \phi - \frac{\pi}{2}) \cdot cos(kx - \frac{\pi}{2})\right)$$

<u>**Une OPPH s'écrit comme la somme de deux OS**</u>

Corde de Melde. Oscillations libres



$$\frac{\lambda}{2} = L$$

$$\frac{2\lambda}{2} = L$$

$$\frac{3\lambda}{2} = L$$

$$\boxed{L = \frac{n\lambda}{2}}$$

Noeud ⟶ Amplitude nulle

Ventre ⟶ Amplitude maximale

n=1 : fondamentale

n>1 : harmonique de rang n

Corde de Melde. Oscillations libres

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Psi_{0,n} cos(nw_1 t + \phi_n) sin(n\frac{\pi}{L}x)$$

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n cos(nw_1 t) + B_n sin(nw_1 t))\, sin(n\frac{\pi}{L}x)$$

Les deux coefficients peuvent être obtenus à partir des **conditions initiales**, ils s'identifient aux coefficients du développement en série de Fourier définissant les c.i.

VIDEO

Oscillations forcées. Corde de Melde

Conditions initiales $\Psi(x=0,t) = Acos(w_0 t)$

$\Psi(x=L,t) = 0$

$$\boxed{\Psi(x,t) = \Psi_0 cos(wt+\phi')cos(kx+\phi)}$$

La première condition donne $\Psi(0,t) = \Psi_0 cos(wt+\phi')cos(\phi) = Acos(w_0 t)$

d'où : $A = \Psi_0 cos\phi \qquad \phi' = 0 \qquad w = w_0 \qquad k_0 = \frac{w_0}{c}$

La deuxième condition donne $cos(k_0 L+\phi) = 0 \qquad k_0 L + \phi = (n+\frac{1}{2})\pi \qquad \phi = (n+\frac{1}{2})\pi - k_0 L$

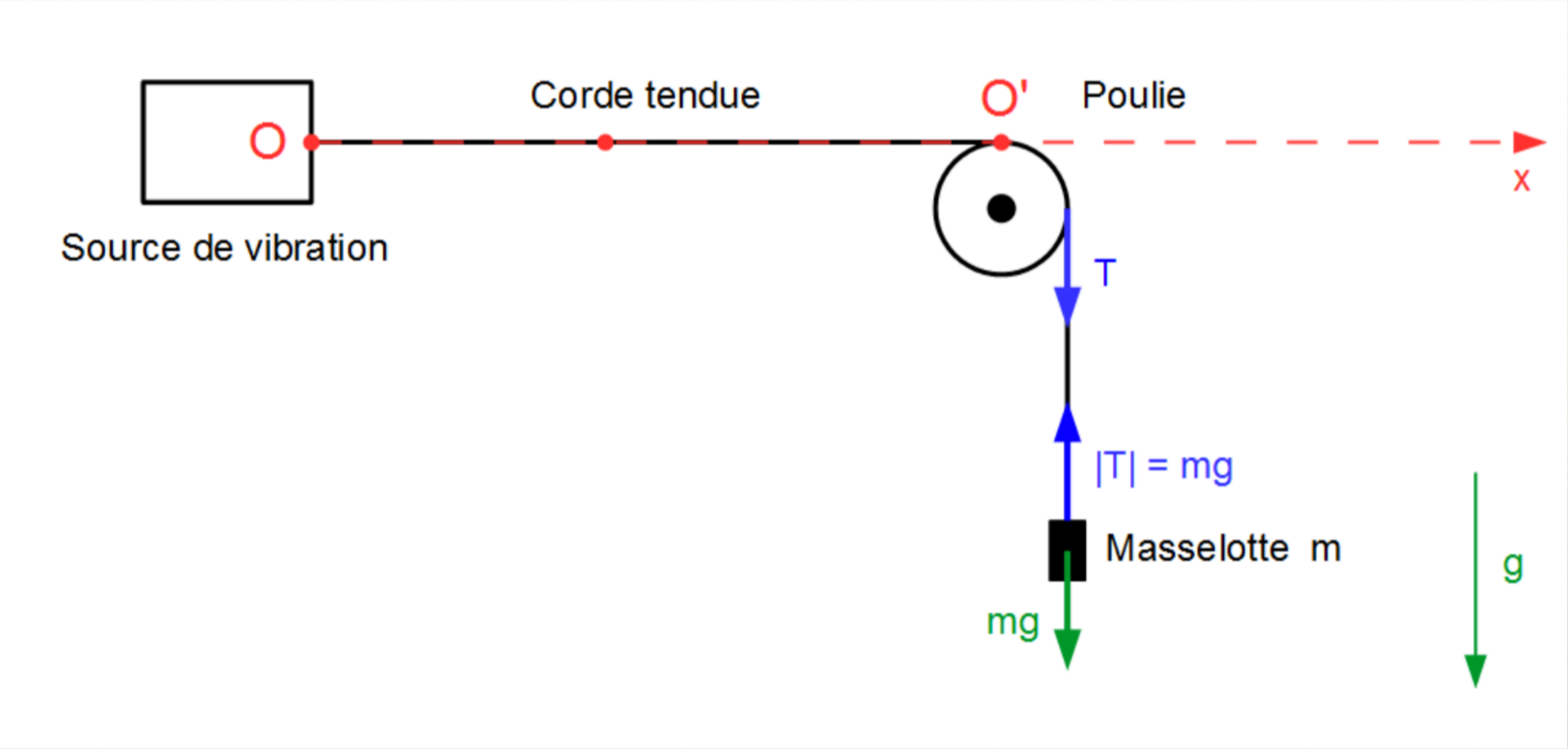
On obtient : $cos(k_0 x+\phi) = cos(k_0(x-L)+n\pi+\frac{\pi}{2}) = (-1)^n sin(k_0(L-x))$

On applique ce résultat en x=0 $cos\phi = (-1)^n sin(k_0 L)$

On en déduit $\Psi_0 = \frac{A}{cos\phi} = \frac{A}{(-1)^n sin(k_0 L)}$

Et finalement $$\boxed{\Psi(x,t) = \frac{A}{sin(k_0 L)}cos(w_0 t)sin(k_0(L-x))}$$

Oscillations forcées. Corde de Melde



Corde :

$m_c = 0,68g$

$l_c = 1,73m$

$\boxed{\mu = 0,39 \cdot 10^{-3} kg/m}$

Tension :

$m = 49,9g$

$\boxed{T = 489,6 \cdot 10^{-3} N}$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$\boxed{c = 35,43m/s}$

$L = 1m$

$$f = \frac{c}{2L} n$$

$\boxed{f_1 \approx 17,7Hz}$

$\boxed{f_2 \approx 35,5Hz}$