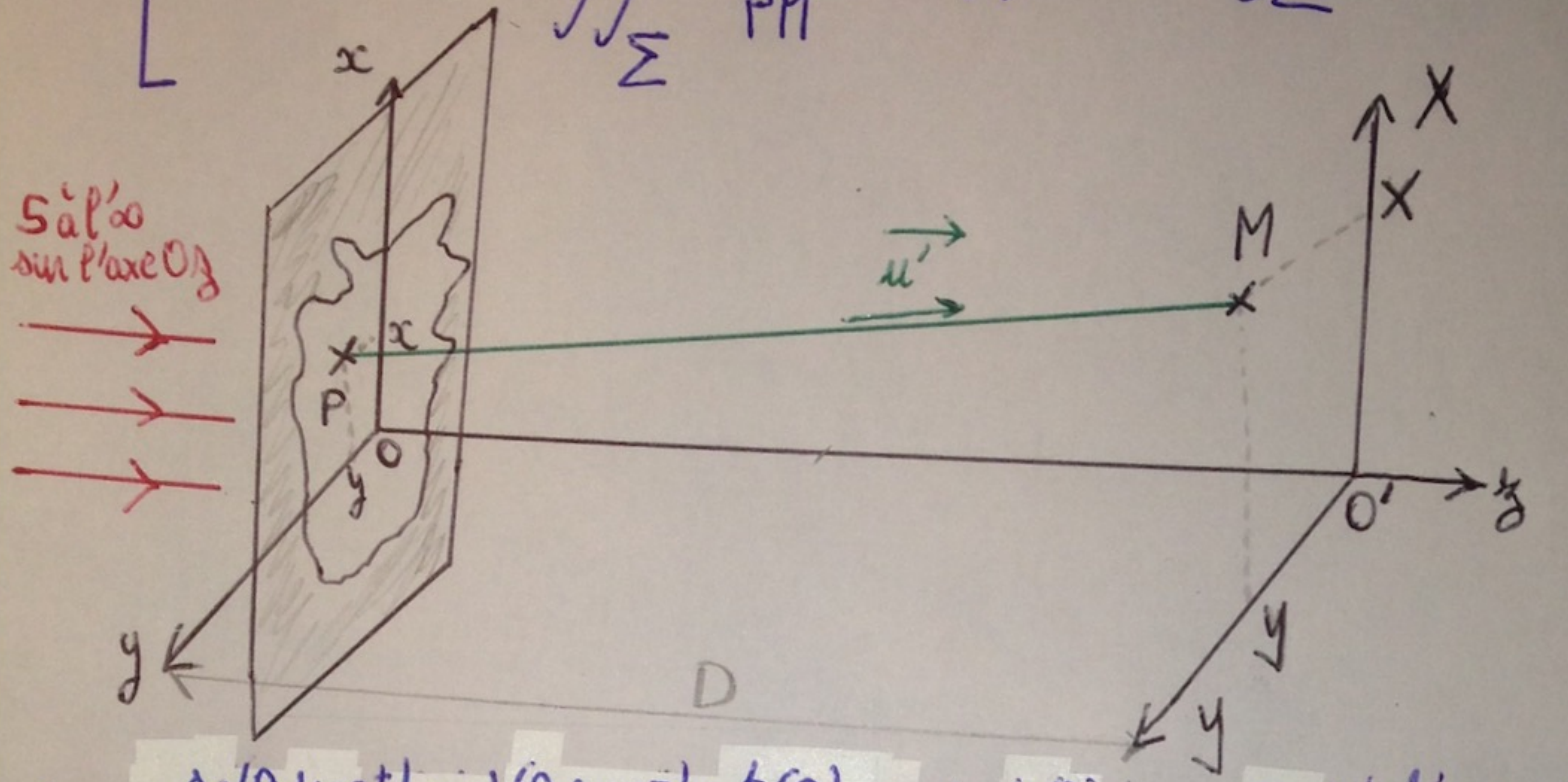
Mise en équation du principe de Huygens-Fresnel

$$\underline{s}(M) = \iint_{\Sigma} \frac{Q}{PM}\, s_i(P)\, e^{ikPM}\, d\Sigma \qquad [1]$$



- $s_i(P, z=0^+) = s(P, z=0^-) \times \underline{t}(P) = s_0\, \underline{t}(P)$ car S est à l'∞ sur l'axe Oz [2]
- $PM = \sqrt{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PM}} = \sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+D^2}$

  $PM = D(1+\varepsilon)^{1/2}$ avec $\varepsilon = \dfrac{(X-x)^2+(Y-y)^2}{D^2}$

  $PM \simeq D\left(1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$

- DL d'ordre 0 sur l'amplitude : $\dfrac{Q}{PM} \approx \dfrac{Q}{D}\left(1-\cancel{\dfrac{\varepsilon}{2}}\right)$ $\qquad \varepsilon \sim \dfrac{(1\,cm)^2}{(1\,m)^2} \sim 10^{-4}$ [3]
- DL d'ordre 1 en ε sur la phase :

  erreur absolue sur D : 100 µm

  $k \times PM = \dfrac{2\pi D}{\lambda_0}\left(1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ car

  $\dfrac{D\varepsilon}{2\lambda_0} \sim \dfrac{1\,m \times 10^{-4}}{10^{-6}\,m} \sim 100$ [4]

  $\dfrac{D\varepsilon^2}{4\lambda_0} \sim \dfrac{1\,m \times 10^{-8}}{10^{-6}\,m} \sim 10^{-2}$ négligeable

Donc $\underline{s}(M) = \dfrac{Q\, s_0\, e^{ikD}}{D} \displaystyle\iint_{\Sigma} \underline{t}(x,y) \exp\left(\frac{2\pi m i}{\lambda_0}\left[\frac{(X-x)^2+(Y-y)^2}{2D}\right]\right) d\Sigma$ [5]

• Diffraction de Fraunhofer

→ néglige les termes quadratiques dans la phase : $kPM = \frac{-2\pi n}{\lambda_0}\left[\frac{X x}{D} + \frac{Y}{D} y\right]$ [6]

→ Limite de validité :

dimension de la pupille

$$\frac{x^2}{\lambda D} \leq \frac{a^2}{\lambda D} \ll 1$$ [7]

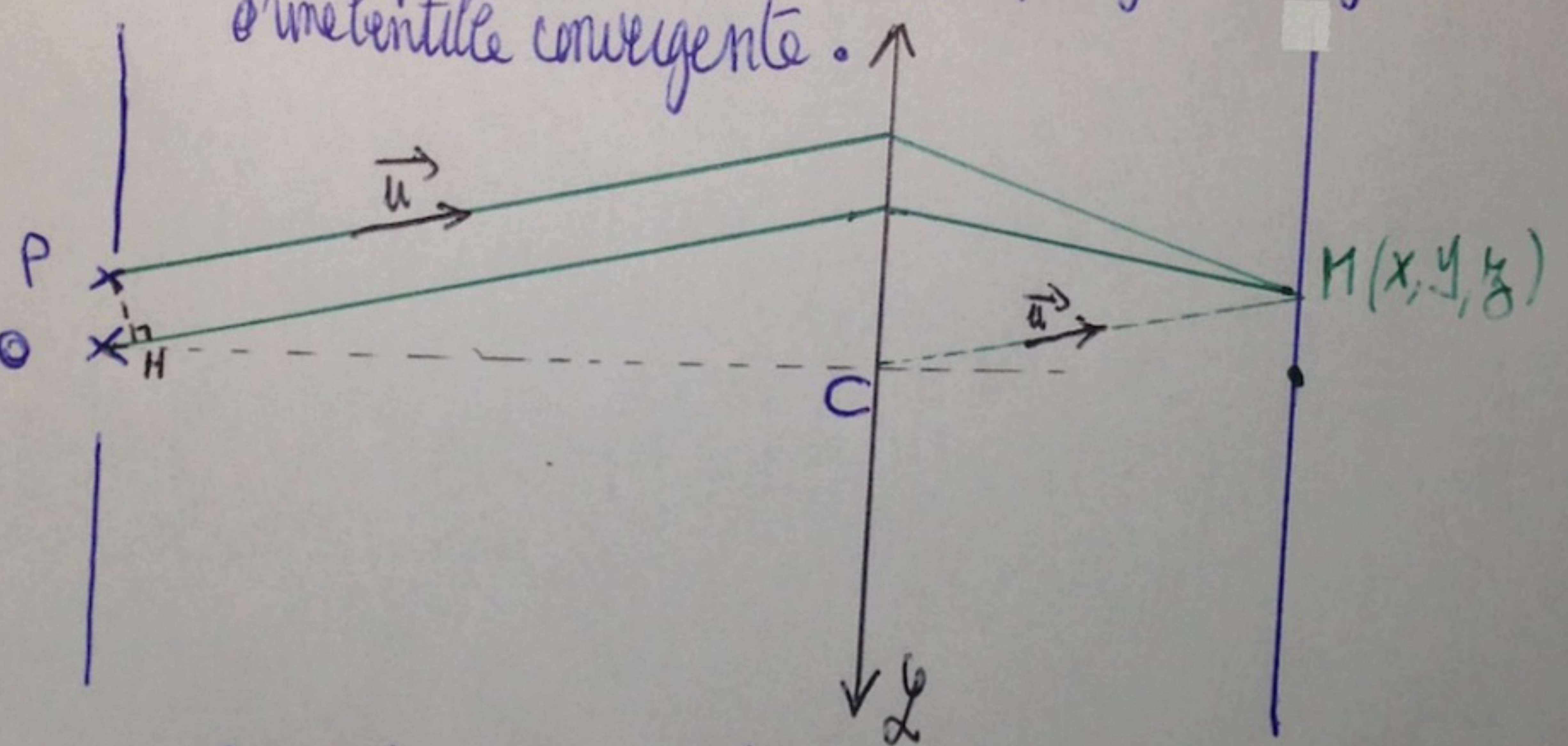
$$D \gg D_c = \frac{a^2}{\lambda}$$ [8]

A.N : $\begin{cases} a = 1\,mm \\ \lambda = 0{,}5\,\mu m \end{cases} \longrightarrow D_c = 2\,m$

$\begin{cases} a = 0{,}1\,mm \\ \lambda = 0{,}5\,\mu m \end{cases} \longrightarrow D_c = 2\,cm$

→ Condition de Fraunhoffer strictes : $D \to \infty$

• En pratique, observation dans le plan focal image d'une lentille convergente.



$\exp(i\,k\,PM) = \exp(i k_0 (PM))$

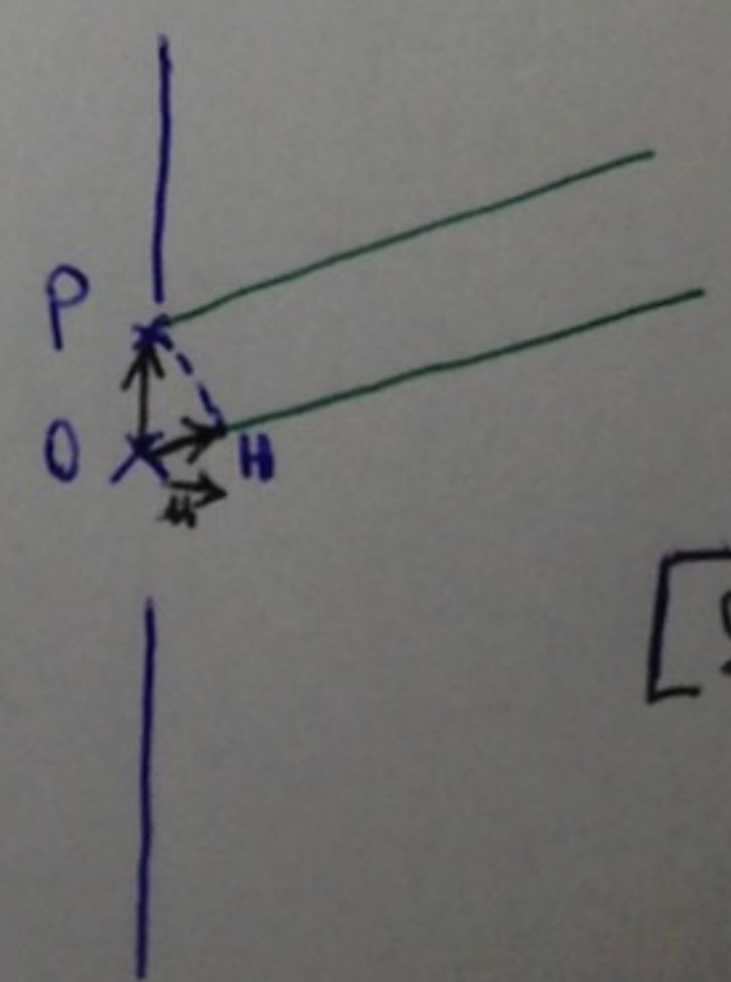
$(PM) = (PM) - (OM) + (OM)$ ⟶ cst d'intégration

$(PM) = (OH) + cst$

$(PM) = -n(\vec{OP} \cdot \vec{u}) + cst$

$\vec{u} = \frac{\vec{CM}}{\|\vec{CM}\|} \approx \frac{X}{f'}\vec{u_x} + \frac{Y}{f'}\vec{u_y} \quad (f' \gg X, Y)$

$(PM) = -n\left(\frac{Xx}{f'} + \frac{Yy}{f'}\right) + cst$



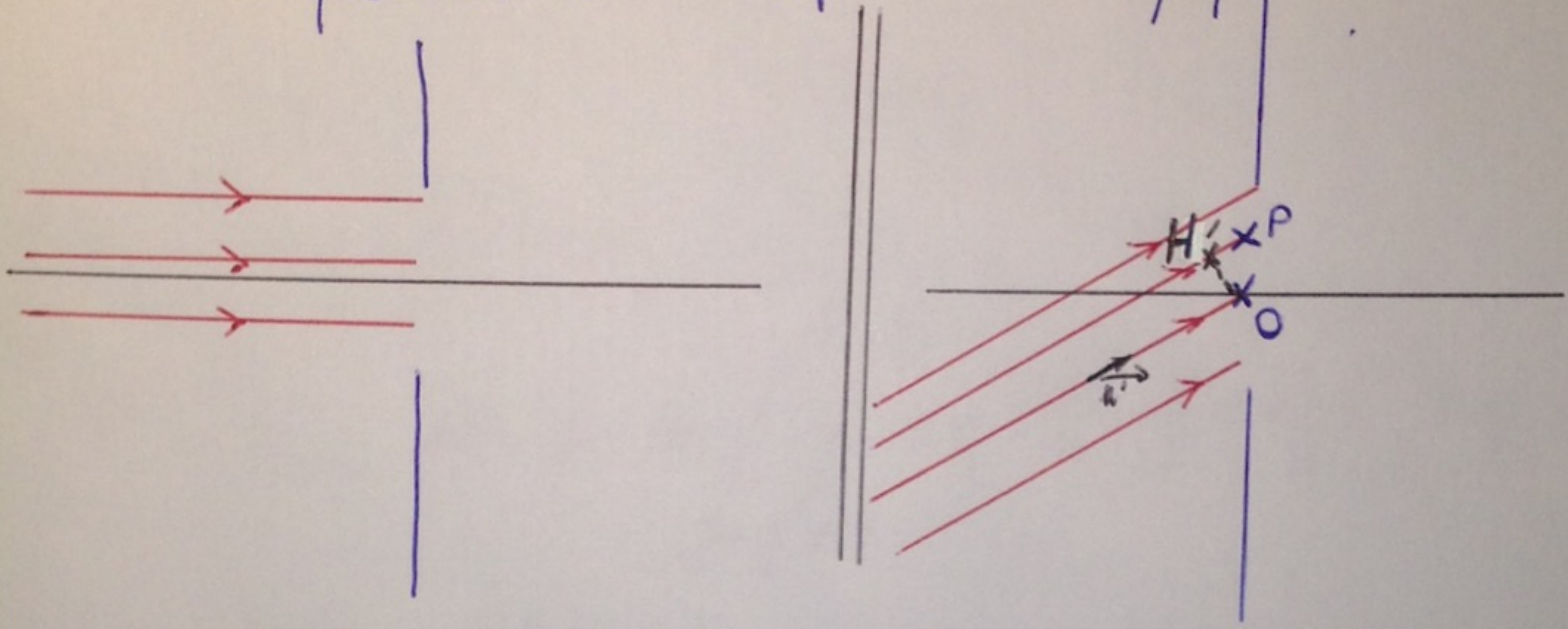
[9]

$$\underline{s}(M) = \underline{s_0} \iint_{xy} \underline{t}(x,y) \exp\left(-\frac{2\pi i n}{\lambda_0}\left(\frac{X}{f'}x + \frac{Y}{f'}y\right)\right) dx\,dy \quad [10]$$

$$\mathcal{E}(M) \propto \underline{s}(M)\,\underline{s}^*(M)$$

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \left| \iint_{xy} \underline{t}(x,y) \exp\left(-\frac{2\pi i n}{\lambda_0}\left(\frac{X}{f'}x + \frac{Y}{f'}y\right)\right) dx\,dy \right|^2 \quad [11]$$

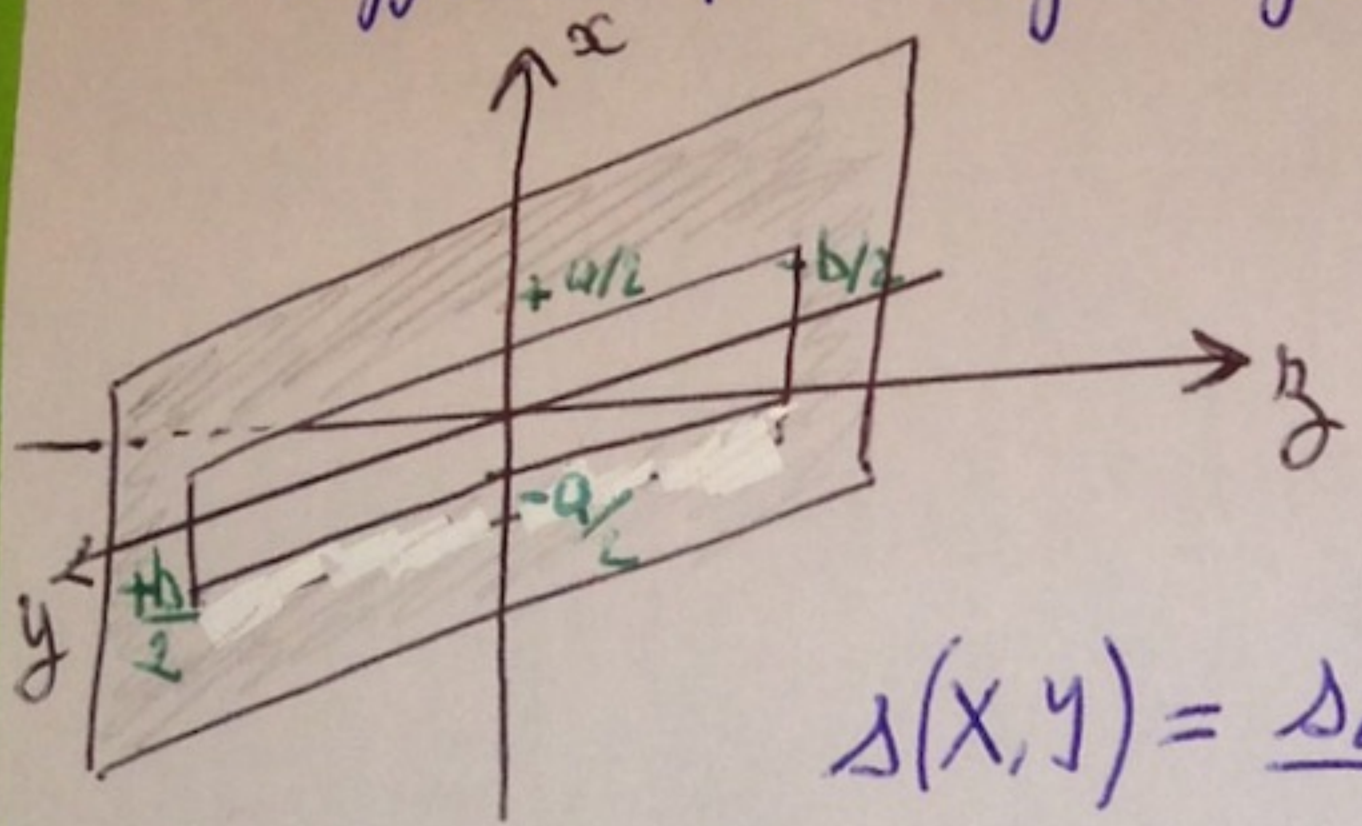
→ Remarque : si la source n'est pas sur l'axe optique



$$\underline{s}(M) = \underline{s_0} \iint_{xy} t(x,y) \exp\left(\frac{-2i\pi n}{\lambda_0}\left[\frac{(X-X_0)}{f'}x + \frac{(Y-Y_0)}{f'}y\right]\right) dx\,dy \quad [12]$$

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} \frac{X_0}{f'} \\ \frac{Y_0}{f'} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diffraction par une fente fine :



$$\underline{t}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] \\ 0 & \end{cases}$$

$$\underline{s}(X,Y) = \underline{s_0} \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp\left(-\frac{2\pi i n}{\lambda_0}\left[\frac{X}{f'}x + \frac{Y}{f'}y\right]\right) dx\,dy$$

$$\underline{s}(X,Y) = \underline{s_0} \times a \,\mathrm{sinc}\left(\pi \frac{X n}{\lambda_0 f'} a\right) \times b \,\mathrm{sinc}\left(\pi \frac{Y n}{\lambda_0 f'} b\right)$$

$$\mathcal{E}(X,Y) = \mathcal{E}_0 \,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a n}{\lambda_0 f'} X\right) \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi n b}{\lambda_0 f'} Y\right) \qquad [13]$$

figure CAP PRÉPA p840

La figure de diffraction est observée sur un écran d'observation placé à une certaine distance du bord de la lame (voir figure 28.1).

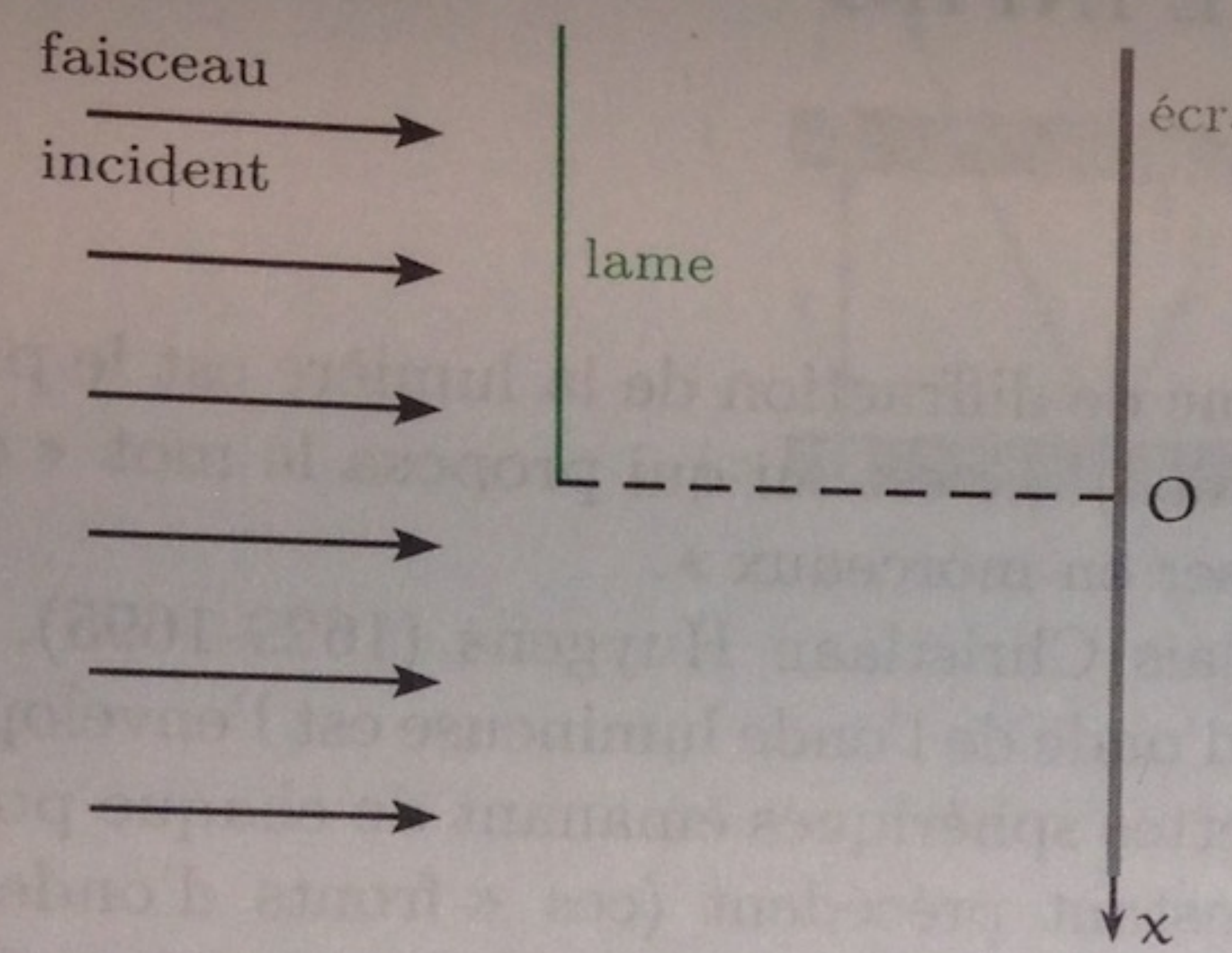


Fig. 28.1. Diffraction par un plan demi-infini (lame de rasoir).

L'optique géométrique suggère que l'éclairement est nul derrière la lame, et maximal ailleurs (normalisé à 1 sur la figure 28.2). L'expérience montre des oscillations (franges) dans la partie la plus éclairée ainsi qu'une intensité non nulle dans l'ombre géométrique de la lame.

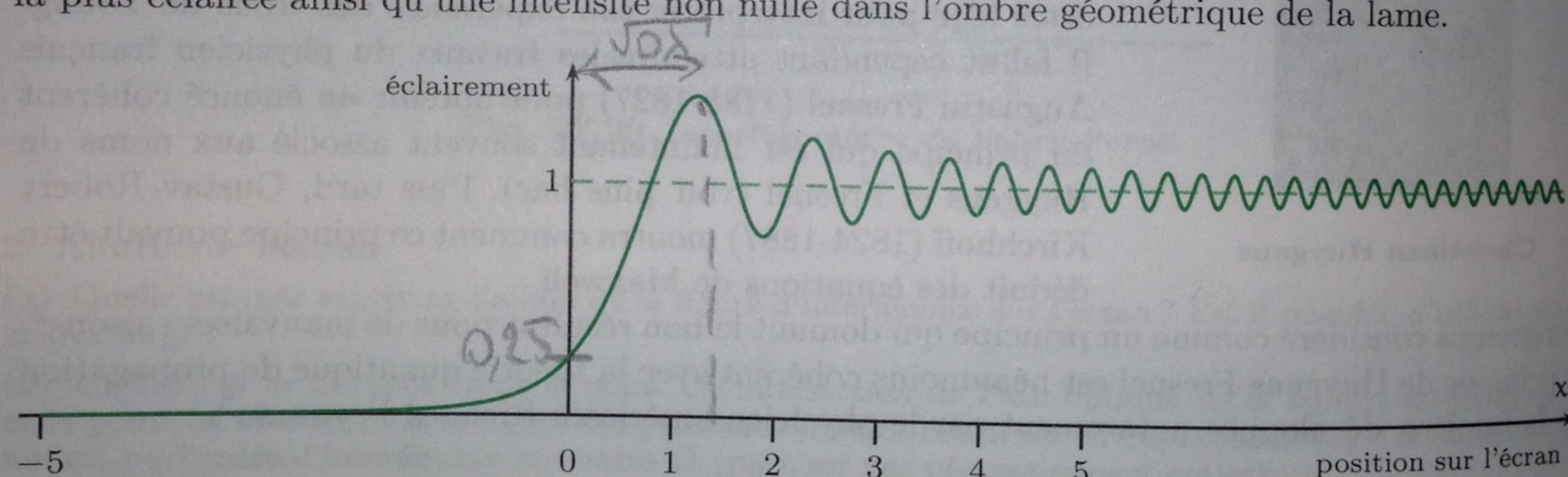


Fig. 28.2. Éclairement normalisé dans le cas de la diffraction par un bord d'écran (voir texte). En pointillé, l'éclairement attendu si les lois de l'optique géométrique étaient respectées.

Dans le cas d'une lame éclairée par un laser (632 nm de longueur d'onde) et une observation à 1 m du bord d'écran, l'abscisse 1 sur la courbe correspond à une distance de 0,45 mm de l'image géométrique du bord d'écran.

I.1.2. Diffraction par un trou circulaire

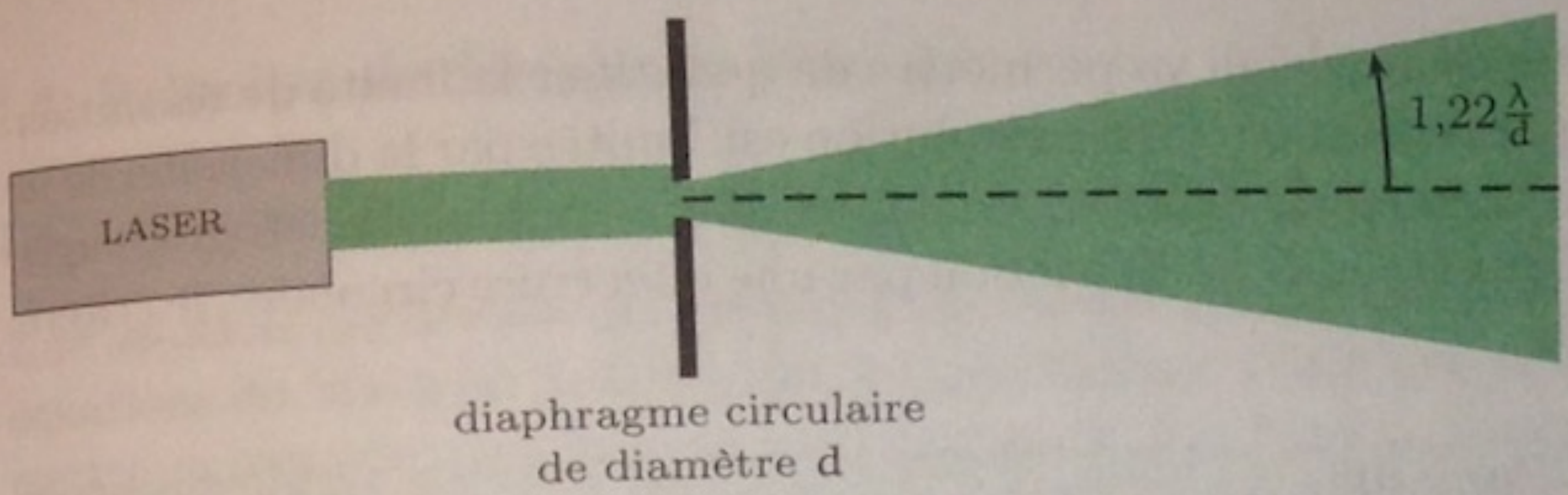


FIG. 28.3. Diffraction par un trou circulaire de diamètre d.

L'image géométrique est un point à l'infini, la figure de diffraction expérimentale est représentée sur la figure 28.4. On observe des oscillations (il s'agit d'une fonction d'Airy[6], s'exprimant à l'aide d'une fonction de Bessel).

La largeur angulaire de la tache centrale (tache d'Airy) est $1{,}22\,\lambda/R$.

Ce résultat est à retenir, il ne serait pas rappelé dans un problème.

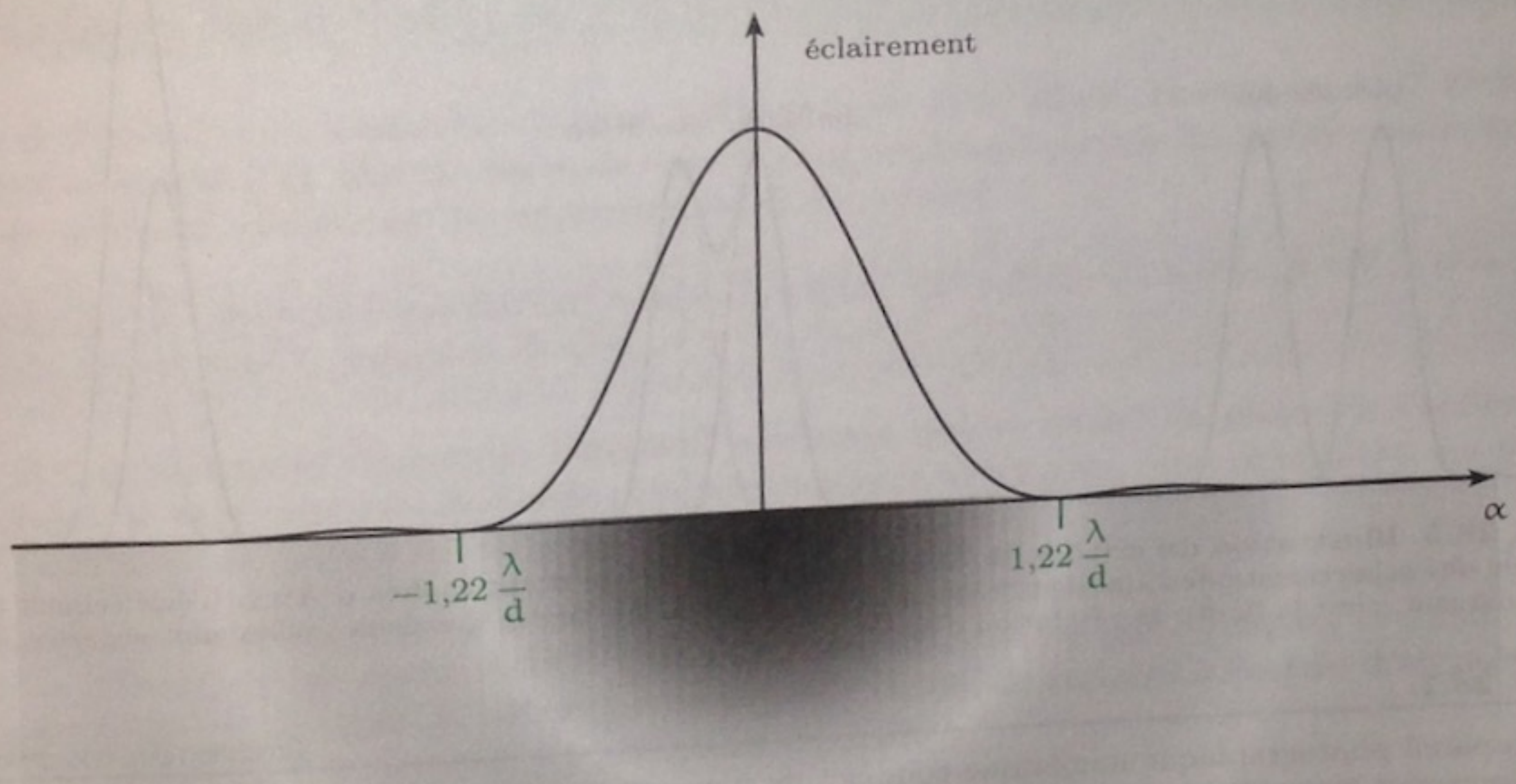


FIG. 28.4. Diffraction par un trou circulaire. En haut, l'éclairement en fonction de $\alpha = \sin\theta$. En bas, la moitié inférieure de la figure de diffraction en négatif : les parties les plus sombres correspondent à l'éclairement le plus grand. L'éclairement des maxima secondaires a été artificiellement augmenté afin de les rendre visibles sur la figure du bas.

[6] Sir George Biddell Airy (1801-1892) est un scientifique britannique.

soit encore :

$$\underline{s}(\alpha,\beta,t) = K\,\underline{s}_0\,e^{i\omega t}\,\frac{\lambda}{\pi(\alpha-\alpha')}\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}(\alpha-\alpha')a\right)\,\frac{\lambda}{\pi(\beta-\beta')}\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}(\beta-\beta')b\right).$$

On voit ainsi apparaître deux sinus cardinaux (voir section III.1.2 du chapitre 25) :

$$\underline{s}(\alpha,\beta,t) = K\,\underline{s}_0\,ab\,e^{i\omega t}\,\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}(\alpha-\alpha')\right)\,\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b}{\lambda}(\beta-\beta')\right). \tag{28.14}$$

Pour obtenir l'éclairement il faut calculer le carré du module de l'amplitude précédente. Posons $\mathcal{E}_0 = K^2|\underline{s}_0|^2\,a^2b^2$ l'éclairement obtenu dans la direction de l'optique géométrique ($\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$), alors :

$$\mathcal{E}(\alpha,\beta) = \mathcal{E}_0\,\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}(\alpha-\alpha')\right)\,\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}(\beta-\beta')\right). \tag{28.15}$$

Ce résultat mérite d'être retenu car il revient très souvent. La figure de diffraction est représentée sur la figure 28.12.

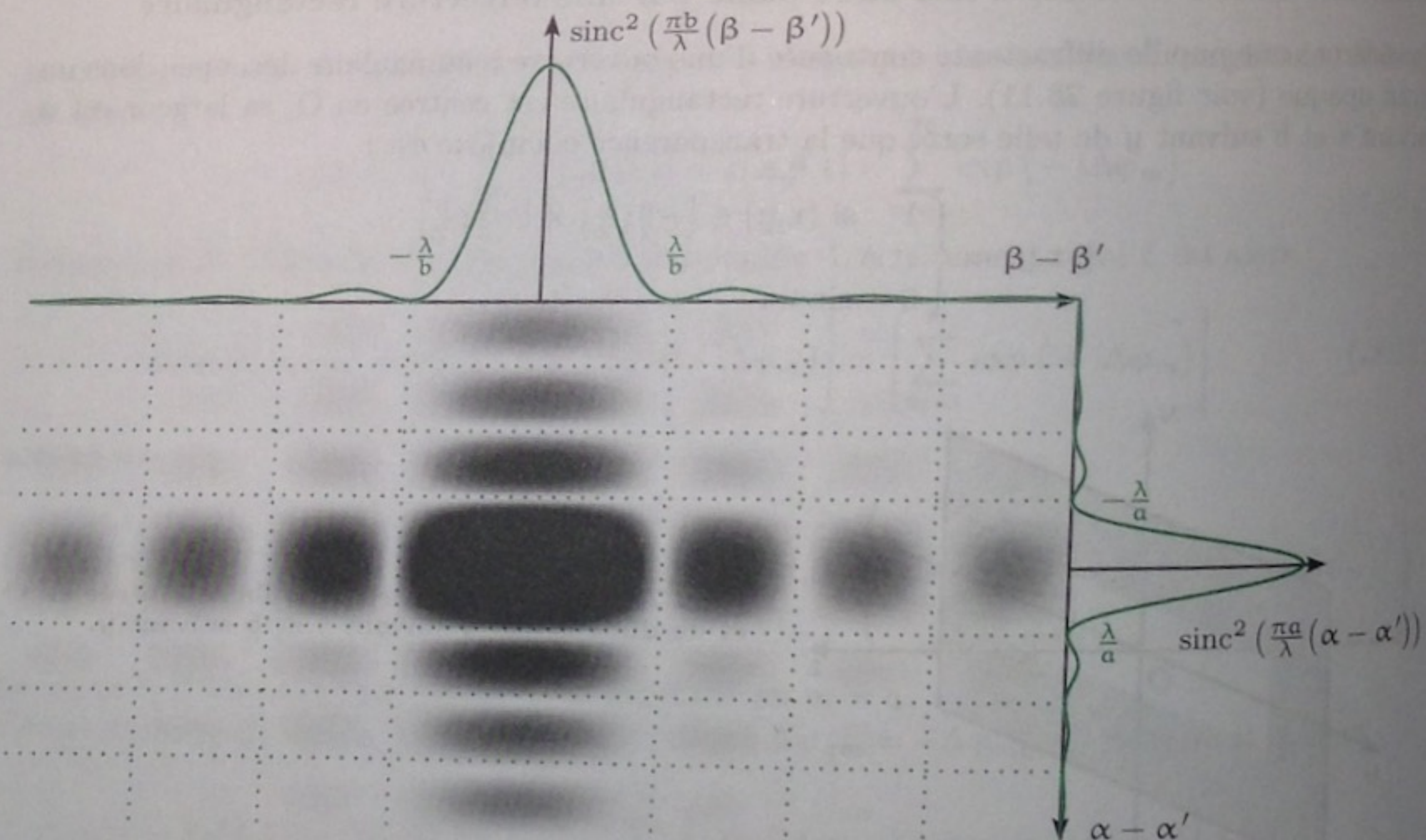


FIG. 28.12. Figure de diffraction à l'infini par une ouverture rectangulaire. La figure est représentée en noir et blanc, et en négatif (les zones noires sont en réalité des zones éclairées, rouges dans le cas d'un laser usuel). La fente diffractante produisant cette figure est deux fois plus haute que large ($a = 2b$). Les deux sinus cardinaux dont l'éclairement est le produit sont tracés, en couleur sombre, en haut et à droite de la figure. Leurs annulations coïncident avec les annulations de l'éclairement (voir pointillés).

Comme dans le cas de l'ouverture circulaire, nous y constatons :

◇ d'une part, que la position du maximum correspond à la direction de l'optique géométrique;

◇ d'autre part, que si les dimensions de la pupille sont infiniment grandes (physiquement, a et b sont à comparer à λ), la propagation de la lumière se fait de manière rectiligne ($\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$) conformément aux lois de l'optique géométrique.