Introduction :

Bonjour, dans cette leçon nous allons nous interesser à des phenomènes ondulatoires et aux propriétés des ondes lorsqu'il y a propagation pour les ondes progressives ou non pour les ondes stationnaires.

Nous nous plaçons à un niveau de 2ème année de Licence ou de CPGE.

Nous cotoyons au quotidien les ondes, on les voit apparaître lorsque l'on jette un [redacted] cailloux dans la mer, on peut les ressentir lors de seisme. Elles sont aussi utilisées pour transmettre de l'information, par la radio par exemple ou bien dans le cas des instruments de musique comme par exemple une guitare où on a une corde que l'on excite, comme ici.

— le faire sur la corde.

On peut même forcer l'excitation grace à un moteur, nous verrons dans ce cas un phenomène particulier apparaitre.

Commençons notre etude à travers quelques exemples en commençant par la propagation d'une onde dans une corde.

1- Exemples de phenomènes ondulatoires :

1-1- La corde vibrante

1-2- Le cable coaxial

1-3- Bilan et generalité

2- Ondes progressives :

2-1- Solution de l'equation de d'Alembert

2-2- Onde plane progressive et impedance caracteristique

2-3- Aspect energetique

2-4- Onde plane progressive harmonique OPPH

3- Ondes stationnaire

3-1- Definition et propriétés

3-2- Oscillations libre : la corde de Melde

3-3- Oscillations forcées : la corde de Melde.

Dans cette leçon nous avons vu le caractère general des ondes, que le couplage entre deux grandeurs permet la propagation. Nous avons vu le lien entre differents types d'onde et l'influence de la limitation de l'extension du milieu de propagation.

Neamoins, dans notre etude nous avons fait plusieurs hypothese, petites deformations pour la corde, pas de pertes, pas de dissipation.

Pour aller plus loin et comprendre les phenomènes d'absorption ou d'atténuation d'une onde incidente dans un milieu il faut lever certaine de ses hypotheses.

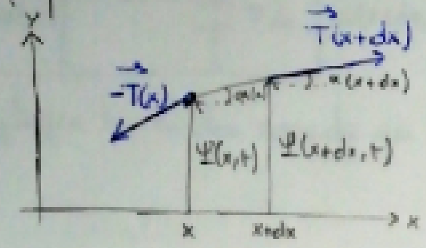
Neamoins les conclusions generale que nous avons enoncé reste vraie.

- aspect energetique OPPH
  équipartition de l'energie.
- discussion choix Au^2 dans onde stationnaire.

1- Exemples de phénomènes ondulatoires :

1-1- La corde vibrante :

→ retour sur l'exemple de l'intro
→ projeter schéma :



Pour décrire le phénomène, on s'intéresse à un élément de la corde supposé sans raideur, de masse linéique μ.
À l'équilibre la corde est à l'horizontale suivant l'axe (Ox).
Lorsque écarté de sa position d'équilibre on admet que chacun de ses points conservent ~~leurs~~ abscisses x initiale.
On considère donc que la déformation de la corde évolue le long de l'axe (Oy) perpendiculaire à la direction de propagation : on dit que l'onde est transversale.
$\Psi(x,t)$ est l'écart à la position d'équilibre

De plus, on suppose que les mouvements transverseaux sont petit, c'est à dire : $\alpha \ll 1$

en effet : $\tan\alpha \simeq \alpha = \frac{\Psi(x+dx,t) - \Psi(x,t)}{dx} \simeq \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} \ll 1$ ce qui correspond bien à des petits mouvements transverseaux

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à notre élément de corde de masse μdx :

$$m\vec{a} = \mu dx \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\vec{e_y} = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\vec{e_y} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x}$$

la corde se déplace verticalement — exercé par la partie droite — exercé par la partie gauche.

projetons sur l'axe Ox : $\frac{\partial T\cos\alpha}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial x} \simeq 0$ car $\cos\alpha \sim 1$

$\Rightarrow T(x,t) = T(t)$ la force T ne dépend pas de x.

projetons sur l'axe Oy : $\mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial T\sin\alpha}{\partial x} = T\frac{\partial \sin\alpha}{\partial x} \simeq T\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ or on a montré que $\alpha \simeq \frac{\partial \Psi}{\partial x}$

finalement : $\mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0}$ de plus : μ en $kg.m^{-1}$, T en $kg.m.s^{-2}$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ en $m.s^{-1}$

on peut réécrire notre équation : $\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0}$ on a obtenu l'équation régissant les mouvement transverseaux d'une corde.

elle décrit le phénomène de propagation d'une onde se propageant à la vitesse c.

de plus si on pose : $v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ et $F_y = -T\frac{\partial \Psi}{\partial x}$

le principe fondamental de la dynamique nous donne : $\boxed{\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial F_y}{\partial x}}$

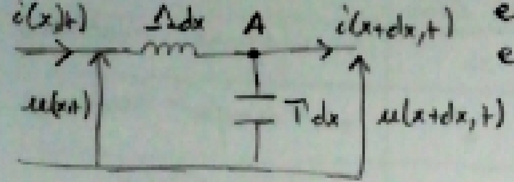
et la dérivé de F_y par rapport au temps : $\boxed{\frac{\partial F_y}{\partial t} = -T\frac{\partial v_y}{\partial x}}$

qui sont des relations de couplage entre deux grandeurs couplés.

Nous avons donc obtenu une équation de propagation pour une corde. La question maintenant est qu'en est il pour une autre situation physique. Pour y répondre on va regarder la propagation d'une onde électrique dans un cable coaxial.

1-2- Le cable coaxial

→ projeter schema :



Un cable coaxial utilisé en travaux pratique ou bien pour la télévision et les box internet peuvent être modélisé par une ligne dont chaque elements dx est un circuit LC d'inductance Λdx et de capacité Γdx, Λ est donc l'inductance lineique et Γ la capacité lineique. On ne prend pas en compte les pertes.

Applique la loi des noeuds au point A : $i(x,t) = i(x+dx,t) + \Gamma dx \dfrac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t}$

$$\Leftrightarrow \frac{i(x+dx,t) - i(x,t)}{dx} = -\Gamma \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} \simeq -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}} \quad (1)$$

Appliquons maintenant la loi des mailles : $u(x,t) - \Lambda dx \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} - u(x+dx,t) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{u(x+dx,t) - u(x,t)}{dx} = -\Lambda \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}} \quad (2)$$

en remplaçant u par F_y, i par v_y, Λ par μ et Γ^{-1} par T on a retrouvé les mêmes relations de couplage que pour la corde.

si on derive maintenant l'equation (1) par rapport à x :

$$\frac{\partial}{\partial x}(1) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x} u\right) = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad \text{avec l'equation (2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

avec : Γ en $A^2 s^4 m^{-2} kg^{-1} m^{-1}$

Λ en $A^{-2} kg\, m^2 s^{-2} m^{-1}$ $\Rightarrow (\Gamma \Lambda)^{-\frac{1}{2}}$ en $m.s^{-1}$

on peut reecrire $\boxed{\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0}$

de même en derivant l'equation (2) par rapport à x on obtient : $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$

Nous venons de voir que pour deux phenomènes physique a priori differents nous trouvons les mêmes equations regissant l'evolution de notre systeme. On est alors en droit de se demander si la propagation d'une onde est un phenomène que l'on peut generaliser.
Interessons nous à d'autres exemples et essayons de tirer des conclusions

1-3-Bilan et generalités :

→ montrer tableaux recapitulatif :

	cable coaxial	corde	onde acoustique	onde electromagnetique
grandeur "excitation" s_1	u	F_y	p : surpression	$\vec{E}$
grandeur "reponse" s_2	i	v_y	v : vitesse	$\vec{H}$
inertie : b	Λ	μ	ρ	μ_0
elasticité : a	Γ^{-1}	T	χ_S^{-1}	ε_0^{-1}
celerité	$\frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$	$\sqrt{\frac{T}{\mu}}$	$\frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_S}}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

equations couplées : $\begin{cases} \dfrac{\partial s_1}{\partial t} = -a\dfrac{\partial s_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial s_2}{\partial t} = -\dfrac{1}{b}\dfrac{\partial s_1}{\partial x} \end{cases}$

equation de propagation $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s_2}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$ $\quad c^2 = \dfrac{a}{b}$

Voici un tableau recapitulatif de nos resultats, dans le cas d'une onde acoustique et electromagnetique nous pourrions montrer que nous obtenons les mêmes equations.

Nous avons une grande ~~dif~~ diversité de phenomènes ondulatoires, cette diversité rend la definition d'une onde delicate.

Ce que nous pouvons dire c'est qu'une onde correspond à la propagation d'une perturbation à travers un milieu.

Pour qu'il y ait propagation, il faut qu'il existe un couplage entre deux grandeurs (appelés excitation et reponse) appelées grandeurs couplés. Le couplage se traduit par des echanges d'energies entre les grandeurs couplées. Leurs produit est homogène à une puissance ou eventuellement une puissance surfacique.

Le decouplage des equations couplées permet d'obtenir l'equation de propagation qui est la même pour les deux grandeurs couplés.

La propagation peut être à plusieurs dimensions, les grandeurs peuvent être scalaire ou vectoriel (ou même tensoriel pour les ondes gravitationnelles)

l'onde peut être longitudinale : c'est à dire que la perturbation est colineaire à la direction de propagation, comme pour les ondes acoustique

ou transversale : quand la perturbation est orthogonale à la direction de propagation comme pour les ondes electromagnetiques.

Nous avons vu dans les exemples precedents que nous obtenions la même equation de propagation. Cette equation est lineaire, nous reviendrons sur cette propriété plus tard

Cette equation est appelée equation de d'Alembert dont nous allons chercher les solutions

2 - Ondes progressives

2-1- Solution de l'equation de d'Alembert:

— montrer solution flexcam On se place à 1 dimension.

fonction à 1 dimension $s(x,t)$

equation de d'Alembert: $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

changement de variable $\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$

donc: $\cdot \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = c\left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2}{\partial u^2}\right)$

$\cdot \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{2\partial}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$

l'equation de d'Alembert se reecrit:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \frac{2\partial^2 s}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 s}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 s}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 s}{\partial v^2} = 0$$

$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = 0 = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)$

integration sur u: $\frac{\partial s}{\partial v} = G(v)$

integration sur v: $s(u,v) = f(u) + g(v)$

finalement: $s(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

On peut resoudre l'equation de d'Alembert. Pour cela on procede à un changement de variable $u = x - ct$ et $v = x + ct$
En utilisant la formule des fonctions composées ont peut reecrire les derivées par rapport à x et au temps ce qui nous permet de reecrire l'equation de d'Alembert en fonction de u et v, on obtient alors

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = 0$$

en integrant sur u on obtient une fonction independante de u $G(v)$
en integrant sur v on obtient une fonction independante de v et une primitive de G
finalement $s(x,t)$ se reecrit comme la somme de ~~deux ondes de~~ fonctions, l'une de $x - ct$, l'autre de $x + ct$.

Nous venons de trouver une solution particulière de l'equation de d'Alembert. Pour obtenir une solution generale il faudrait fair appel aux fonctions de Green. Interessons nous à cette solution et a son sens physique

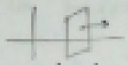
2-2- Ondes planes progressives et impedance caracteristique :

Rappelons que l'on appelle surface d'onde une surface continue de l'espace dont tous les points sont dans le même etat vibratoire, c'est à dire que le champ s y prend la même valeur.

Une onde est dite plane si ses surfaces d'onde sont des plans parallèles, ces plans sont appelés plan d'onde.

Ces plans sont associés à un vecteur normal $\vec{n}$ qui definit la direction de propagation, ainsi dans un repère bien choisi, une onde plane est à une dimension cartesienne.

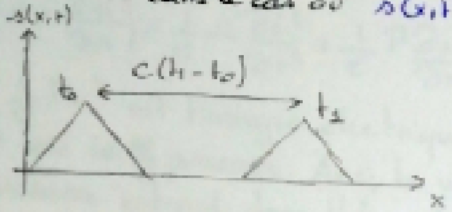
→ montrer sur schema.



une onde plane ne dependant que de la variable $x-ct$: $s(x,t) = f(x-ct)$ ou $x+ct$: $s(x,t) = g(x+ct)$ est dite progressive

interpretons cette onde dans le cas où $s(x,t) = f(x-ct)$

→ schema :



à deux instants differents t_0 et t_1 on a :

$s(x,t_1) = f(x-ct_1) = f(x-c(t_1-t_0)-ct_0) = s(x-c(t_1-t_0), t_0)$

donc à t_1 l'onde à le même profil qu'à t_0 mais translaté de $c(t_1-t_0)$

ainsi $f(x-ct)$ est une onde progressive se propageant vers les x croissant, de même on montre que $g(x+ct)$ est une onde progressive se propageant vers les x decroissant.

Ainsi toute onde plane solution de l'equation de d'Alembert à une dimension peut s'ecrire sous la forme de deux ondes planes progressives se propageant à la vitesse c, l'une vers les x croissants l'autre vers les x decroissant.

Nous venons d'obtenir une solution de l'equation de d'Alembert pour un seul champ, or nous avons vu qu'il devait y avoir couplage entre deux champs pour avoir un phenomène de propagation.
Cherchons une relation reliant les deux champs en prenant pour exemple le cable coaxial

on envoit une onde plane progressive de courant : $i(x,t) = f(x-ct)$

rappelons notre relations de couplage : $\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \Lambda c f'(x-ct)$

en integrant sur x : $u(x,t) = \Lambda c f(x-ct) + \phi(t)$

u et f sont solution de l'equation de d'Alembert, par linearité ϕ doit l'être aussi, ϕ ne depend que du temps, on a donc : $\frac{d^2\phi}{dt^2} = 0$ donc ϕ est une fonction affine, si sa pente est non nulle on a une divergence non physique lorsque t tend vers l'infini, ainsi ϕ est une constante que l'on prendra nulle par la suite.

finalement : $u(x,t) = \Lambda c f(x-ct) = \Lambda c\, i(x,t) = \Lambda \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} i(x,t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\, i(x,t)$

on pose $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$; on a $\boxed{u(x,t) = Z_c\, i(x,t)}$ Z_c est l'impedance caracteristique et depend du milieu de propagation.

dans le cas d'une onde plane progressive vers le x decroissant on aurait obtenu $u = -Z_c i$, Ainsi en general : pour $i = f(x-ct) + g(x+ct)$ on a $u(x,t) = Z_c(f(x-ct) - g(x+ct))$

Nous avons obtenu une relation, qui est une relation de proportionalité dans notre cas, cette relation est appelée relation de structure

En ajoutant à l'impedance caracteristique la celerité on caracterise integralement le couplage entre deux grandeurs couplées.

En effet à l'interface entre deux milieux les coefficients de reflexion et de transmission dépendent que des impedances propagatives des deux milieux
Du point de vue d'une seule grandeur couplées la celerité caracterise sa propagation dans un milieu homogene et l'impedance la façon dont elle est transformée à une interface entre deux milieux

On peut mesurer l'impedance caracteristique du cable coaxial avec le montage suivant

→ schema montage + calcul à la flexcam.

→

2-3- Aspect energetique:

si temps, peut être le projeter.

Reprenons l'exemple du cable coaxial, on a remarqué que le produit des deux grandeurs couplées ui était une puissance, essayons de faire apparaitre cette puissance.

Si on multiplie la première relation de couplage par u on obtient:

$$u\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma u\frac{\partial u}{\partial t} = -\Gamma\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t}$$

de même, en multipliant la seconde relation de couplage par i on a:

$$i\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda i\frac{\partial i}{\partial t} = -\Lambda\frac{1}{2}\frac{\partial i^2}{\partial t}$$

en sommant ces deux equations:

$$-\left(u\frac{\partial i}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\Lambda\frac{\partial i^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\Gamma\frac{\partial u^2}{\partial t} \Leftrightarrow -\partial_x(ui) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\Lambda i^2 + \frac{1}{2}\Gamma u^2\right)$$

le terme $\frac{1}{2}\Gamma u^2$ est l'energie electrique du condensateur, $\frac{1}{2}\Lambda i^2$ l'energie magnetique de la bobine et ui la ~~p~~ puissance. Ainsi, la variation d'energie de notre element dx est egale au flux de puissance entrant dans l'element.

On a donc obtenu l'equation de conservation de l'energie de notre système.

Ce resultat est general, en effet pour d'autres phenomènes ondulatoire on a:

→ montrer tableau:

	cable coaxial	corde	onde acoustique	onde electromagnetique
Z_c	$\frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$	$\sqrt{\frac{T}{\mu}}$	$\frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_S}}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$
energie volumique	$\frac{1}{2}\Lambda i^2 + \frac{1}{2}\Gamma u^2$	$\frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{T}$	$\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\chi_S p^2$	$\frac{1}{2}\mu_0 H^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$
flux de puissance	ui	Fv	$\lvert p\vec{v}\rvert$	$\lvert\vec{E}\wedge\vec{H}\rvert$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\text{elasticité}}{\text{inertie}}}$$

equation de conservation de l'energie: $\partial_t\left(\frac{1}{2}\frac{s_1^2}{a} + \frac{1}{2}b s_2^2\right) + \frac{\partial(s_1 s_2)}{\partial x} = 0$

on obtient les mêmes equation et une impedance caracteristique qui est la racine carré du rapport du coefficient d'elasticité sur celui d'inertie.

Nous montrons là encore le caractere general des phenomènes ondulatoires

Maintenant, pour finir cette partie, nous allons nous interesser à un cas particulier des ondes planes progressives. Les ondes planes progressives harmonique, et nous allons voir leur interet pour l'etude des phenomènes ondulatoires.

2-4- Les ondes planes progressives harmonique (OPPH):

Une onde plane progressive harmonique est une onde plane dont la dépendance en temps est sinusoïdale

$s(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$ $\vec{k} = k\vec{n}$ le vecteur d'onde.

en injectant cette solution dans l'équation de d'Alembert on obtient:

$-k^2 S_0 \cos(\omega t - kx + \phi) - \frac{\omega^2}{c^2}\cos(\omega t - kx + \phi) = 0 \quad \Leftrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

cette relation reliant la périodicité spatiale et temporelle est appelée relation de dispersion.

- la phase du cosinus se factorise sous la forme : $-k(x - \frac{\omega}{k}t) + \phi$ ainsi $\frac{\omega}{k}$ s'interprète comme la vitesse de phase de l'OPPH. $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$

dans notre cas $v_\varphi = \pm c$ mais il se peut que v_φ dépendent de ω dans ce cas on a une propagation dispersive.

Les OPPH ont une extension spatiale et temporelle infinie, donc une énergie infini, elles n'ont donc pas de sens physique. Néanmoins les OPPH constituent une base de l'espace de Fourier sur laquelle ont peu décomposer une onde quelconque.
Autrement dit, la linéarité de l'équation de d'Alembert nous permet de chercher des solutions de la forme des OPPH puisque ces solutions donne accès à l'ensemble des solutions par combinaison linéaire.

Dans cette partie nous nous sommes intéressé ~~au~~ des solutions couplant le temps et la position.
Néanmoins cela ne permet pas d'expliquer le phénomène observé avec la corde en introduction.
Nous nous intéressons maintenant à ce types de phénomènes

3 - Ondes stationnaires (OS):

3-1- Definition et propriétés:

Une onde stationnaire est une onde dont la dependance spatiale et temporelle sont decouplées.
Formellement le champ d'une onde plane stationnaire s'écrit. $s(x,t) = f(x)\,g(t)$
On peut chercher les ondes stationnaire solution de l'equation de d'Alembert.
$\longrightarrow$ projeter la demo:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2}g''(t)f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow c^2\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2\dfrac{f''(x)}{f(x)} = -\omega^2 \\ \dfrac{g''(t)}{g(t)} = -\omega^2 \end{cases}$$

on injecte dans l'equation de d'Alembert et on obtient une egalité où les variables temp et espace sont ~~deco~~ separées donc chaque membre ~~est~~ egale a une constante negative pour ne pas avoir de divergence
On obtient des equations de type oscillateur harmonique que l'on peut resoudre.

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(x) + \dfrac{\omega^2}{c^2}f(x) = 0 \\ g''(t) + \omega^2 g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f_0\cos(\frac{\omega}{c}x + \phi) = f_0\cos(kx+\phi) \\ g(t) = g_0\cos(\omega t + \phi') \end{cases}$$

on obtient finalement que
$s(x,t) = s_0\cos(\omega t + \phi)\cos(kx + \phi')$
ici k est le nombre d'onde et on ne definit pas de vecteur d'onde car il n'y a pas de propagation.

finalement. $s(x,t) = s_0\cos(\omega t + \phi)\cos(kx + \phi)$

On peut developper le cosinus:

$$s(x,t) = \frac{s_0}{2}\cos(\omega t - kx + \phi' - \phi) + \frac{s_0}{2}\cos(\omega t + kx + \phi' + \phi)$$

Ainsi une onde stationnaire est la somme de deux OPPH de même amplitude, dephasées se propageant dans des sens opposés.

Nous pouvons de même developper le cosinus d'une OPPH

$$\begin{aligned} s(x,t) &= s_0\cos(\omega t - kx + \phi) \\ &= s_0\left[\cos(\omega t + \phi)\cos(kx) - \sin(\omega t + \phi)\sin(-kx)\right] \\ &= s_0\left[\cos(\omega t + \phi)\cos(kx) + \cos(\omega t + \phi - \tfrac{\pi}{2})\cos(kx - \tfrac{\pi}{2})\right] \end{aligned}$$

Donc une OPPH s'ecrit comme la somme de deux ondes stationnaires

Comme les OPPH forment une base des solutions de l'equation de d'Alembert les ondes stationnaires aussi.
On peut alors se demander quand utiliser les OPPH et les ondes stationnaire. Nous allons voir un exemple où les conditions aux limites imposent un noeud de vibration, nous reviendrons sur cette terminologie. Dans ce cas il est naturel de chercher des solutions sous forme d'onde stationnaire pour reconstruire toutes solutions par combinaison lineaire.
Prenons l'exemple de la corde de Melde.

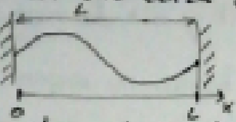
3-2- Oscillations libres : la corde de Melde :

Donc reprenons l'exemple de la corde vibrante, et écrivons l'écart à la position d'équilibre sous forme d'onde stationnaire :

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \cos(kx + \Phi_0)\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Une corde de Melde est une corde dont les extrémités sont fixées

→ montrer schéma :



aux extrémités le déplacement vertical est nul et on a ce qu'on appelle des noeuds : cela justifie notre approche en onde stationnaire

les conditions aux limites s'écrivent : $\begin{cases} \Psi(0,t) = 0 \\ \Psi(L,t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\phi_0) = 0 & ① \\ \cos(kL + \phi_0) = 0 & ② \end{cases}$

① nous donne $\phi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ à π près on prend $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$ on peut réécrire notre onde :

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \sin(kx)\cos(\omega t + \varphi_0)$$

② nous donne alors $\sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$ et donc $L = \frac{n\lambda}{2}$

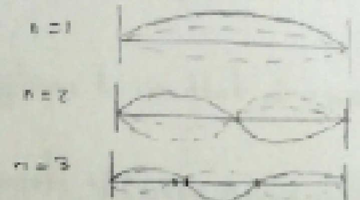
de plus avec la relation de dispersion : $c = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega_n = c k_n = \frac{n\pi}{L} c$

Les pulsations spatiales et temporelles prennent des valeurs discrètes.

On a donc une solution de l'équation de d'Alembert : $\Psi_n(x,t) = \Psi_{0n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}ct + \phi_n\right)$

une telle solution est appelée mode propre, regardons ce que l'on a pour différents n :

→ montrer schéma



on voit que l'on a des noeuds et des ventres

on a des noeuds où l'amplitude est nulle et des ventres lorsqu'elle est maximale.

un mode est tel que tous les points vibrent en phase ou en opposition de phase

Le mode n=1 est appelé le fondamental, les modes n>1 harmonique de rang n (même terminologie qu'en musique) c'est en effet ce qui se passe pour un instrument à corde.

On a vu que les ondes stationnaires forment une base des solutions, ainsi l'écart à l'équilibre d'une corde vibrante fixée à ses extrémités s'écrit :

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{0n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}ct + \phi_n\right)$$

On peut s'intéresser à l'énergie des modes :

→ peut être à la flexcam :

sur un élément dx : $e_n = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial x}\right)^2$

$$= \frac{\Psi_{0n}^2}{2}\left(\mu\omega_n^2 \sin^2(k_n x)\sin^2(\omega_n t + \phi_n) + T_0 k_n^2 \cos^2(k_n x)\cos^2(\omega_n t + \phi_n)\right)$$

On a vu l'expression de l'énergie de l'élément dx de notre corde que l'on peut calculer avec notre solution.

or : $c^2 = \frac{T_0}{\mu} = \frac{\omega^2}{k^2} \Rightarrow = \frac{\Psi_{0n}^2}{2} T_0 k_n^2\left(\sin^2(k_n x)\sin^2(\omega t + \phi_n) + \cos^2(k_n x)\cos^2(\omega t + \phi_n)\right)$

On développe et utilise ensuite des relations trigonométriques pour simplifier notre expression

on utilise : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ et $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\Rightarrow e_n = \frac{\Psi_{0n}^2}{4} T_0 k_n^2 \left\{1 + \cos(2k_n x)\left(1 - 2\sin^2(\omega t + \phi_n)\right)\right\}$$

l'énergie d'un mode est alors l'intégrale sur la longueur L de la corde de l'énergie d'un élément dx.

On montre que l'intégrale de $\cos(2k_n x)$ est nulle

$E_n = \int_0^L e_n \, dx$ or $\int_0^L \cos(2k_n x)\,dx = \frac{1}{2k_n}\left(\sin(2k_n L) - \sin(0)\right) = \frac{1}{2k_n}\left(\sin(2n\pi) - \sin(0)\right) = 0$

$$\Rightarrow E_n = \frac{\Psi_{on}^2 T_0 k_n^2}{4}\int_0^L dx = \frac{\Psi_{on}^2 T L k_n^2}{4}$$ On obtient finalement l'expression de l'energie d'un mode.

finalement $E_n = \frac{n^2\pi^2}{4}\Psi_{on}^2\frac{T}{L}$ Cette energie ne depend pas du temps, ainsi sans apport d'energie ni de processus dissipatif l'energie d'un mode propre ne varie pas au cours du temps.

Et l'energie totale des oscillations libres de la corde de Melde est la somme des energies injectées dans chaque modes par les conditions initiales sans qu'il y ait de reorganisation ulterieur de l'energie entre les modes.

Nous pouvons maintenant nous interesser au montage que nous avons devant nous c'est à dire lorsque nous forceons les oscillations

3-3- Oscillation forcées : corde de Melde.

On peut forcer l'extremité de la corde, en $x=0$, à osciller à une pulsation ω_0 fixée
→ le montrer
Les conditions aux limites sont alors:

$$\begin{cases} \Psi(0,t) = A\cos(\omega_0 t) & ① \\ \Psi(L,t) = 0 & ② \end{cases}$$

la condition en $x=L$ impose un noeud de vibration, on cherche donc une solution en onde stationnaire:

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \cos(\omega t+\phi)\cos(kx+\phi')$$

la condition 1 nous donne:

$$\Psi_0\cos(\omega t+\phi)\cos\phi' = A\cos(\omega_0 t) \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ A = \Psi_0\cos\phi' \\ \omega = \omega_0 \end{cases}$$

la pulsation de l'onde stationnaire est donc la pulsation de forçage, que ce soit une pulsation propre ou non, ainsi $k = k_0 = \frac{\omega_0}{c}$
regardons maintenant la condition 2:

$$\cos(k_0L+\phi') = 0 \Rightarrow k_0L+\phi' = (n+\tfrac{1}{2})\pi$$
$$\Rightarrow \phi' = -k_0L + (n+\tfrac{1}{2})\pi$$

$$\Rightarrow \cos(k_0x+\phi') = \cos\left(k_0(x-L)+n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n\sin(k_0(x-L))$$

$\frac{\pi}{2}$ nous donne le sinus et $n\pi$ le $(-1)^n$

si on applique le resultat à $x=0$ on a: $\cos\phi' = (-1)^n\sin(k_0L) \Rightarrow \Psi_0 = \dfrac{A}{(-1)^n\sin(k_0L)}$

finalement: $\Psi(x,t) = A\cos(\omega_0 t)\dfrac{\sin(k_0(L-x))}{\sin(k_0L)}$

on voit que si $k_0L = n\pi$ c'est à dire si $\frac{\omega_0}{c}L = n\pi \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{n\pi}{L}c = n\omega_1$ donc si la pulsation de forçage est celle d'une mode propre, on a divergence
Observons ce phenomène, on a une corde de longueur $L = 104$ cm de masse linéique $\mu = 8{,}4 \cdot 10^{-4}$ kg m^{-1} et de tension $T = 2{,}1 \Rightarrow c = 50{,}3$ m.s^{-1} donc $f_1 = \frac{1}{2L}c = 23{,}6$ Hz forçons la corde à une frequence propre $f_0 = nf_1$
$f_2 = 47{,}2$

→ montrer la resonance 1 et 2 → ça correspond aux frequence attendue.

On observe ce qu'on appelle un phenomène de resonance.
L'amplitude n'est pas infini, nous n'avons pas pris en compte les phenomènes de dissipation ou de non linearité!

De manière generale un systeme physique entre en resonance lorsqu'il est excité à une frequence egale à l'une de ses frequences propres.
En d'autre terme, il y a resonance lorsque le transfert de puissance de l'excitateur vers l'oscillateur est maximale.

(à la resonance le systême peut stocker l'energie car frequence est frequence mode propre).