LP 3 (b) Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.

Manip : Vase de Mariotte

Source : Guyon et al Hydrodynamique

Pré-requis : - Cinématique des fluides, milieux continus, particule fluide
- Equation d'Euler
- Cinétique des gaz, statique des fluides
- Conduction thermique, Loi de Fourier, Equation de la chaleur

Intro : Dans la modélisation de la dynamique des écoulements parfaits, on ne prend pas en compte les effets de la viscosité et cela mène à l'équation d'Euler. Montrer par une expérience introductive que cette équation est incomplète et qu'il est nécessaire de tenir compte de cette propriété. (Chute d'une bille dans éprouvette remplie d'eau ou de glycérol) Δ grosse bille

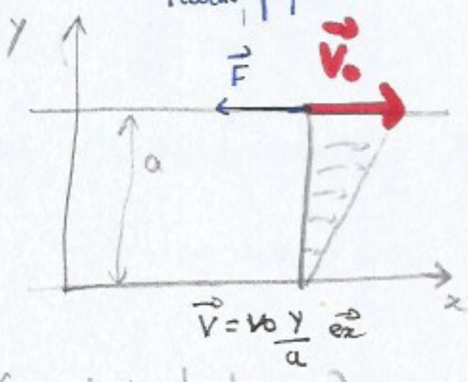
$\rho_{eau} = 1000\ kg.m^{-3}$
$\rho_{gly} = 1260\ kg.m^{-3}$

Objectif de la leçon : Comprendre l'origine et les effets de la viscosité sur la dynamique de l'écoulement, en vue de corriger l'équation d'Euler. Ainsi, nous serons capables de réaliser une étude précise de la dynamique d'un écoulement visqueux (Couette, Poiseuille, etc)

I Viscosité d'un fluide

1) Définition macroscopique (Phénoménologique) Guyon p65

(couche→plaque)



$\vec{V} = v_0 \frac{y}{a} \vec{e_x}$

Système : Deux plaques de dimensions infinies, parallèles, distante de a. Plaque inférieure : immobile
Plaque supérieure : vitesse constante suivant $\vec{e_x}$

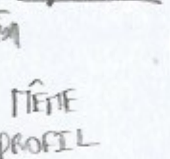
Écoulement stationnaire, Fluide visqueux et incompressible (pour toute la leçon)

Présenter le système, introduire la notion d'écoulement de cisaillement. Le fluide est entraîné !

Modèle du fluide coupé en tranches. Profil linéaire de vitesse en régime permanent

Analogie avec la conduction thermique : Loi de Fourier ! $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\nabla} T$

$\vec{j}_{th}$ ($W.m^{-2}$) : Densité de flux thermique ; λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$) : Conductivité thermique



$$\boxed{\frac{F}{S} = -\eta \frac{V_0}{a}} \Leftrightarrow j = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{a}$$

Contrainte de cisaillement (Pa) ; η : viscosité dynamique (Pa.s) ⇒ Plusieurs OdG pour fluides d'intérêt

$\frac{\vec{F}}{S} = -\eta \vec{\nabla} \vec{v_0}$ PRODUIT TENSORIEL (couche → plaque !)

MÊME PROFIL LINÉAIRE

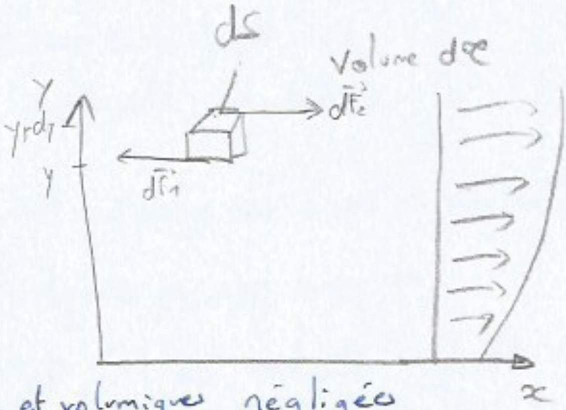
A l'échelle macroscopique viscosité est reliée à une force d'entrainement ou de freinage, force visqueuse ! ⇒ action mécanique tangentielle à l'interface entre couches de l'écoulement de cisaillement (ce qui écarte la pression de toute suspicion)

Nous souhaitons corriger Euler ⇒ besoin de regarder à l'échelle de la particule fluide.

2°/ Force visqueuse volumique. Guyon p66.

Système : particule fluide cubique volume $d\tau$, faces dS

Écoulement instationnaire ! ⇒ $\vec{v}(y,t) = v(y,t)\,\vec{e_x}$



On sait que $\vec{F}_{\text{couche}\to\text{plaque}} = -\eta S \vec{\nabla}\otimes\vec{v}$

On effectue un bilan des forces: ⚠ Forces de pression et volumiques négligées
- Uniquement sur les deux faces en regard selon (Oy)

- Face située en y : $\vec{dF_1}_{\text{couche inf}\to\text{particule fluide}} = -\eta\, dS \dfrac{\partial v(y,t)}{\partial y}\,\vec{e_x}$

- Face située en $y+dy$: $\vec{dF_2}'_{\text{couche sup}\to p.f} = -\vec{dF_2}_{p.f\to\text{couche sup}} = \eta\, dS \dfrac{\partial v(y+dy,t)}{\partial y}\,\vec{e_x}$

$$\Rightarrow \vec{dF} = \vec{dF_1} + \vec{dF_2}' = \eta\, dS \left[\frac{\partial v(y+dy,t)}{\partial y} - \frac{\partial v(y,t)}{\partial y}\right]\vec{e_x}$$

$$\overset{\text{DL }1^{\text{er}}\text{ ordre}}{=} \eta \underbrace{dS\, dy}_{d\tau} \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \vec{f_\eta} = \frac{\vec{dF}}{d\tau} = \eta \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2}$$

En généralisant à 3D pour un fluide newtonien incompressible : $\vec{f_\eta} = \eta \Delta\vec{v}$

Ainsi on obtient $\rho\left[\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right] = \eta\Delta\vec{v}$ et en divisant par ρ : $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \nu\Delta\vec{v}$

Dérivée particulaire / viscosité cinématique ($m^2.s^{-1}$)

IDENTIFICATION AVEC ÉQUATION DE LA CHALEUR : $\dfrac{dT}{dt} = K\Delta T$

Coefficient de diffusion thermique ($m^2\,s^{-1}$)

⇒ ν : coefficient de diffusion de quantité de mouvement !!

À l'échelle mésoscopique, la viscosité engendre un transport diffusif de la qté de mouvement dans la direction transverse à l'écoulement

Pour mieux comprendre, origine, effets, besoin de s'intéresser à l'échelle microscopique.

3°/ Modèle microscopique. NECESSITÉ DE DISTINGUER : Gaz et Liquides !
↳ TROP COMPLIQUÉ

⇒ ÉCOULEMENT DE CISAILLEMENT, $\vec{v} = v(y)\,\vec{e_x}$, STATIONNAIRE

Gaz incompressible et visqueux.

À l'échelle microscopique : $\vec{v}_{gaz} = \vec{v}_{écoulement} + \vec{u}$
molécules individuelles.
↳ Agitation thermique

↳ COLLISIONS ⇒ POSSIBILITÉ DE MOUVEMENT DANS TOUTES LES DIRECTIONS

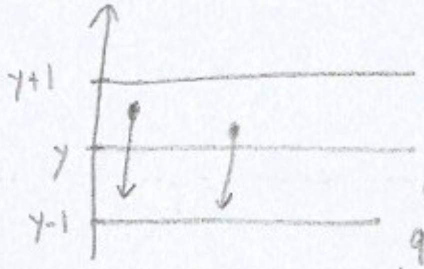
l : libre parcours moyen

$\bar{u}$: vitesse d'agitation thermique moyenne

m : masse molécules

n : nombre de molécules dans un volume donné.

Couches de gaz



Diffusion ⇓ Transfert de molécules (de qté de mvt) entre 2 couches !

$\hookrightarrow \eta = \frac{1}{3} m n \bar{u} l$

↳ pour gaz parfait

↳ $\frac{1}{2} m \bar{u}^2 = \frac{3}{2} k_B T$

↳ $\eta \propto \sqrt{T}$

Plus généralement $\eta_{gaz} \nearrow$ avec T

(Agitation thermique ↗
↳ collisions ↗
↳ η ↗)

⇒ Pour les liquides, distances entre particules trop petites
↳ modèle utilisé avec gaz plus valable.

On passe les détails

↳ $\eta_{liq} \propto e^{+\frac{\Delta E}{k_B T}}$ → ↘ avec T

⇒ Cohésion moins importante pour T grand ⇒ voir Guyon

Maintenant que nous avons apporté la réponse à la question soulevée en intro (la correction) nous pouvons corriger l'équation d'Euler

II Dynamique des écoulements visqueux

1°/ Equation de Navier Stokes ⇒ historique

Référentiel galiléen, fluide Newtonien, incompressible :

$$\underbrace{\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right.}_{\text{Instationnarité}} + \underbrace{\left.(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right]}_{\text{Advection de qté de mouvement}} = \underbrace{-\vec{\nabla}p + \vec{f}_{vol}}_{\text{forces de pression et volumiques}} + \underbrace{\eta\,\Delta\vec{v}}_{\text{Diffusion de quantité de mouvement}}$$

⇒ NON-Linéaire, besoin d'approximations !

On adimensionne NS pour faire apparaître Re ⇒ essentiel pour fluide visqueux.

2°/ Nombre de Reynolds (INTRODUIRE EGALEMENT : couche limite)

↳ je sais pas comment

RAISONNEMENT EN TERMES D'ORDRE DE GRANDEUR.

→ On considère un écoulement caractérisé par une longueur caractéristique L et une vitesse caractéristique U.

$x = L\tilde{x}$ ↳ grandeur adimensionné , $\vec{v} = U\tilde{\vec{v}}$, $t = \frac{L}{U}\tilde{t}$

$\vec{\nabla} = \frac{1}{L}\tilde{\vec{\nabla}}$, $\Delta = \frac{1}{L^2}\tilde{\Delta}$

On fait apparaître $Re = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}}{\eta\Delta\vec{v}}$

$= \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme diffusif}}$

· Selon sa valeur, plusieur régimes (description puis exemples du quotidien!)

□ $Re \ll 1$: Les forces visqueuses domine nettement les forces d'inertie

Faibles vitesses
Système de petites tailles
Viscosité Forte

⇒ Equilibre entre forces de pression (et volumiques) et frottement visqueux.

L'écoulement est stable avec profils bien définis ⇒ écoulements rampants

BACTERIE

Trouver un exemple OdG

□ $Re < 1000$: Ecoulements laminaires, pilotés par viscosité.

↳ Pas de frontière stricte! peut dépendre d'autres aspects (géométrie, etc)

Exemple

□ Re grand : Ecoulements turbulents, instabilités, pertes de charge

grandes vitesses,
système de grande taille
Faible viscosité

↳ limite singulière de Navier-Stokes

(Grand nombre de solution)

Toutes les échelles d'écoulement existent

Notion de tourbillon.

* Couche limite à rajouter

$\delta = \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}$

Echelle de longueur caractéristique des effets visqueux.

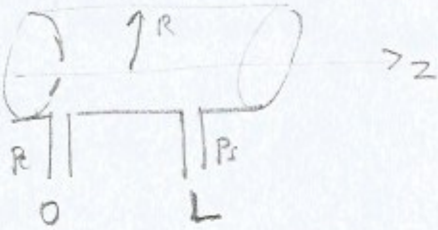
↳ participe aux effets de bords

↳ au delà, effets visqueux non ressentis

Nous avons à présent, tous les outils pour étudier la dynamique d'un écoulement visqueux.

III Ecoulement de Poiseuille cylindrique

1°/ Dynamique.



ECOULEMENT STATIONNAIRE :

FLUIDE INCOMPRESSIBLE, VISQUEUX, NEWTONIEN

ECOULEMENT INDUIT PAR UNE DIFFÉRENCE DE PRESSION

↳ CYLINDRE PARFAITEMENT HORIZONTAL

$\vec{V} = v(r)\,\vec{e_z}$

↳ $v(R)=0$ et $v(-R)=0$

COORDONNÉES CYLINDRIQUES.

Dans ce système, les termes de convection s'éliminent par symétrie.
↳ prouver.

Navier-Stokes $\quad \vec{0} = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v}$

$\left.\begin{array}{l} -\text{sur } r \\ -\text{sur } \theta \end{array}\right\} \Rightarrow p = p(z)$

Sur z : $\quad 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{\eta}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v(r)}{\partial r}\right)\right]$

Or z et r par définition indépendantes !

□ $\dfrac{dp(z)}{dz} = A \quad \Rightarrow p(z) = Az + B$

$p(0) = pe \Rightarrow B = pe \quad$ et $\quad p(L) = ps \quad \Rightarrow A = \dfrac{ps - pe}{L}$

$p(z) = \dfrac{ps - pe}{L} + pe$

□ $\dfrac{\eta}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v(r)}{\partial r}\right)\right] = A \quad \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v(r)}{r}\right) = \dfrac{Ar}{\eta} \quad \Rightarrow \dfrac{\partial v(r)}{\partial r} = \dfrac{Ar}{2\eta} + \dfrac{C}{r}$

$v(r) = \dfrac{Ar^2}{4\eta} + C\ln r + D$

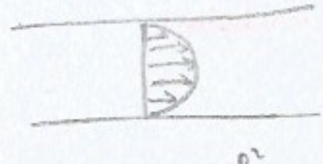
$v(R) = 0 \Rightarrow \dfrac{AR^2}{4\eta} + C\ln R + D = 0$

$v(-R) = 0 \quad \dfrac{AR^2}{4\eta} + C\underbrace{\ln(-R)}_{\text{NON DÉFINI MATHS}} + D = 0$

$\Rightarrow C = 0$ et $E = \dfrac{-AR^2}{4\eta}$

$\Rightarrow \quad v(r) = \dfrac{ps - pe}{4\eta L}\underbrace{(r^2 - R^2)}_{\leq 0}$

⇒ pour $Pe > Ps$, le fluide s'écoule selon $\vec{e_z}$, on a un profil de vitesse parabolique



$V_{max} = \dfrac{pe - ps \cdot R^2}{4\eta L}$

2°/ Loi de Poiseuille

On s'intéresse au débit volumique, Q_v, à travers une section droite du cylindre

$\hookrightarrow dS = 2\pi r dr$

On a $$Q_v = \int_0^R \vec{v}\cdot\vec{dS} = \int_0^R 2\pi r\, v(r)\, dr = \int_0^R \frac{\pi (P_s - P_e)}{2\eta L}(r^3 - R^2 r)$$

$$= \frac{\pi (P_s - P_e)}{2\eta L}\left[\int_0^R r^3 dr - \int_0^R R^2 r\, dr\right]$$

$$= \frac{\pi (P_e - P_s)}{2\eta L}\frac{R^4}{4} = \frac{\pi (P_e - P_s)\, d^4}{128\eta L}$$

diamètre du cylindre

Q_v relié à $P_e - P_s$

et à η !

Analogie avec la loi d'Ohm

Débit de charge $\propto$ Différence de potentiel

$$Q = \frac{\pi d^4}{128\eta L}(P_e - P_s)$$

$$I = GU$$

$\Rightarrow \frac{128\eta L}{\pi d^4} \Rightarrow$ Résistance hydraulique !

Ainsi $$\eta = \frac{\pi d^4 (P_e - P_s)}{128 L Q_v}$$

3°/ Vase de Mariotte

Grâce à l'hydrostatique : $P_e - P_s = \rho g h$

Mesure de la masse de fluide s'écoulant dans un récipient pendant Δt.

$\Rightarrow$ pour plusieurs h. $\Rightarrow$ DÉBIT MASSIQUE $\rightarrow$ DÉBIT VOLUMIQUE

On trace :

$\Rightarrow$ Q_v en fonction de h $\Rightarrow$ pente $\boxed{P}$ $\Rightarrow \eta_{exp} = \frac{\pi d^4 \rho g}{128 L \boxed{P}}$

$\Rightarrow$ Discussion des instabilités qui provoquent un écart à la loi de Poiseuille

$\hookrightarrow$ moindres carrés pour déterminer h critique $\Rightarrow$ Discussions incertitudes

$\hookrightarrow$ Tension superficielle de l'eau avec $\underline{b}$

Conclusion :

$\Rightarrow$ Au delà du fluide parfait

$\Rightarrow$ mais toujours approximations : NEWTONIEN, INCOMPRESSIBLE

$\hookrightarrow$ seconde viscosité etc