

Leçon n°2 : Contact entre deux solides. Frottement de glissement. Exemples. (PC ou 1^{er} CU)

Introduction

1. Contact entre deux solides

1.1. Liaisons de contact

1.2. Contact ponctuel

2. Frottement de glissement

2.1. Lois phénoménologiques de G. Amontons et C.A. Coulomb

2.2. Détermination de μ et μ_s

3. Applications

3.1. Archet de violon

3.2. Expérience de Timochenko

3.3. Autres exemples

Conclusion

Introduction

Dans cette leçon nous utiliserons les théorèmes fondamentaux de la mécanique ; le théorème de la résultante cinétique (TRC) et le théorème du moment cinétique (TMC).

Dans de nombreux systèmes physiques, il arrive que des solides soient en contact. Les forces qui s'exercent sur chaque solide dépendent d'un grand nombre de paramètres liés à la surface de contact et il est impossible d'en donner un modèle simple comme on le fait pour les forces de gravitation et électromagnétiques agissant à distance.

Nous allons donc utiliser des lois empiriques qui vont nous permettre de montrer l'importance du frottement et son utilité dans différents problèmes.

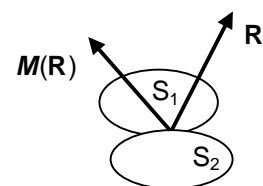
1. Contact entre deux solides

1.1. Liaisons de contact

Deux solides peuvent être en contact de façon ponctuel (bille sur un plan), linéaire (cylindre sur un plan) ou surfacique (plan sur plan). Dans chaque cas la nature des forces de contact est complexe et ne peut être déterminée précisément qu'en prenant en compte l'interaction microscopique des atomes ou molécules à la surface de contact.

On peut néanmoins modéliser grossièrement ces forces à l'aide de lois empiriques. Mais l'expression du torseur $[\mathbf{R}, \mathbf{M}(\mathbf{R})]$ des forces de contact en un point de la surface de contact, reste inconnu. C'est pourquoi la simple donnée des six équations scalaires obtenues en écrivant le TRC et le TMC ne suffit pas en général pour résoudre complètement un problème de mécanique. C'est le type de la liaison ; pivot glissant, pivot, sphérique ou simplement, unilatérale ou bilatérale, qui permet de réduire le nombre de degrés de liberté du problème (six au départ), de façon à ce que le nombre de paramètres soit identique aux nombres d'équations.

Par exemple, pour une liaison pivot il y a un degré de liberté qui est l'angle de rotation θ , six inconnues correspondant aux composantes scalaires de \mathbf{R} et $\mathbf{M}_O(\mathbf{R})$ calculés en un point O de l'axe de rotation Oz. Si l'on suppose la liaison parfaite, $M_{Oz}(\mathbf{R})$ est nul et il reste six inconnues pour six équations. (voir leçon n°4)



1.2. Contact ponctuel

1.2.1. Vitesse de glissement

Dans un référentiel galiléen R , on considère deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel au point géométrique I .

Le point I_1 est le point coïncidant à I et appartient au solide S_1 .

Le point I_2 est le point coïncidant à I et appartient au solide S_2 .

En appliquant la relation de composition des vitesses au point I_1 par rapport à R et au référentiel relatif S_2 , La vitesse d'entraînement étant celle du point coïncidant I_2 , il vient :

$$\mathbf{v}_{I_1/R} = \mathbf{v}_{I_1/S_2} + \mathbf{v}_{I_2/R}.$$

La vitesse de glissement de S_1 sur S_2 est :

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_{I_1/S_2} = \mathbf{v}_{I_1/R} - \mathbf{v}_{I_2/R}.$$

Cette vitesse est contenue dans le plan tangent en I aux deux solides. En effet, la vitesse du point I par rapport à R s'exprime de deux façons différentes suivant que le référentiel relatif est S_1 ou S_2 :

$$\mathbf{v}_{I/R} = \mathbf{v}_{I/S_2} + \mathbf{v}_{I_2/R} = \mathbf{v}_{I/S_1} + \mathbf{v}_{I_1/R},$$

et puisque \mathbf{v}_{I/S_1} et \mathbf{v}_{I/S_2} appartiennent au plan tangent, la vitesse de glissement $\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_{I/S_2} - \mathbf{v}_{I/S_1}$ est également contenue dans ce plan.

1.2.2. Mouvement de roulement et de pivotement

On suppose S_2 fixe dans le référentiel galiléen R et on considère un point M du solide S_1 . La vitesse de ce point par rapport à S_2 est :

$$\mathbf{v}_{M/S_2} = \mathbf{v}_{I_1/S_2} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_1\mathbf{M}.$$

$\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur vitesse instantanée de rotation de S_1 par rapport à S_2 ou R . Suivant la figure il se décompose en deux vecteurs, l'un normal au plan tangent et l'autre dans ce plan, tel que $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_N + \boldsymbol{\omega}_T$. La vitesse du point M s'écrit donc :

$$\mathbf{v}_{M/S_2} = \mathbf{v}_{I_1/S_2} + \boldsymbol{\omega}_N \wedge \mathbf{I}_1\mathbf{M} + \boldsymbol{\omega}_T \wedge \mathbf{I}_1\mathbf{M}.$$

Le premier terme de cette expression décrit le glissement dans le plan tangent.

Le deuxième terme décrit le mouvement de pivotement autour d'un axe perpendiculaire au plan tangent.

Le troisième décrit le mouvement de roulement autour d'un axe contenu dans le plan tangent.

1.2.3. Travail des actions de contact

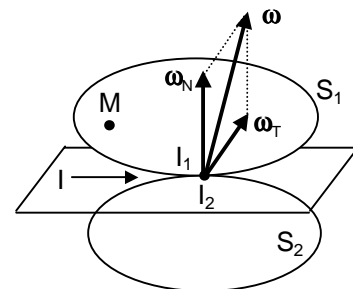
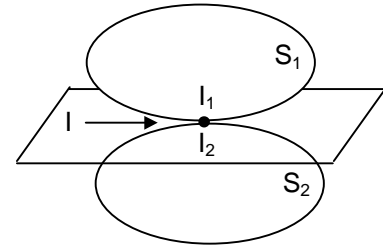
Le solide S_2 exerce sur S_1 une action de contact que l'on suppose réduite à une force \mathbf{R} appliquée en I_1 . L'expression générale du travail de cette force est

$$\delta W = \mathbf{v}_{I_1/S_2} \cdot \mathbf{R} dt + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_{I_1}(\mathbf{R}) dt.$$

Mais puisque le contact a lieu au point I_1 ; $\mathbf{M}_{I_1}(\mathbf{R}) = \mathbf{0}$ et

$$\delta W = \mathbf{v}_{I_1/S_2} \cdot \mathbf{R} dt.$$

Ce travail est nul dans deux cas :



- 1° : S'il n'y a pas de frottement de glissement, la réaction de S_2 sur S_1 est normale au plan tangent ;
 $\mathbf{v}_{I_1} \cdot \mathbf{R} = 0$.
- 2° : Le solide S_1 roule sans glisser sur S_2 ; $\mathbf{v}_{I_1/S_2} = \mathbf{0}$.

On dit alors que la liaison est parfaite.

Dans le cas contraire, $\delta W = \mathbf{v}_{I_1/S_2} \cdot \mathbf{R} dt < 0$ s'il y a des frottements de glissement car la composante tangentielle de \mathbf{R} est opposée à \mathbf{v}_{I_1/S_2} . Le cas $\delta W > 0$ existe aussi lorsqu'il y a entraînement par frottement. Par exemple quand les roues d'une voiture patinent et avancent en même temps. Mais attention, les actions de contact ne sont pas pour autant moteur du mouvement.

2. Frottement de glissement

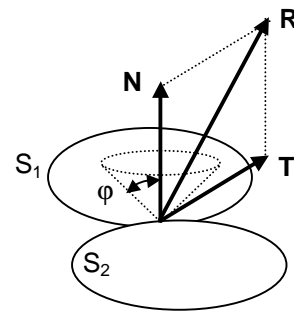
2.1. Lois phénoménologiques de G. Amontons et C.A. Coulomb

Considérons à nouveau deux solides S_1 et S_2 en contact, pas nécessairement ponctuel. S_2 exerce sur S_1 une force $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{T}$ où \mathbf{N} et \mathbf{T} sont ses composantes normale et tangentielle.

- 1^{ère} loi : Le solide S_1 ne glisse pas sur S_2 tant que :

$$|\mathbf{T}| \leq \mu_S |\mathbf{N}|,$$

où μ_S est le coefficient de frottement statique qui ne dépend que de l'état et de la nature des surfaces en contact. Ses valeurs numériques sont de l'ordre de 0,2 pour un contact bois sur bois et 0,7 pour un contact fer sur bois. Géométriquement, \mathbf{R} se situe à l'intérieur d'un cône de révolution de demi-angle au sommet : $\varphi = \arctg \mu_S$.



- 2^{ème} loi : Lorsque le solide S_1 glisse sur S_2 :

$$|\mathbf{T}| = \mu |\mathbf{N}|,$$

où μ est le coefficient de frottement dynamique tel que $\mu < \mu_S$ et \mathbf{T} est opposé à \mathbf{v}_{I_1/S_2} . Les valeurs numériques de μ sont du même ordre de grandeur que celles de μ_S .

Rq : Pour les frottements de roulement et pivotement, on doit tenir compte du moment du couple qu'il faut exercer sur le solide S_1 pour le faire rouler (\mathbf{M}_T) ou pivoter (\mathbf{M}_N). Le même type de lois s'appliquent :

Il n'y a pas de pivotement ou de roulement tant que $M_N \leq \mu_{PS} N$ ou $M_T \leq \mu_{RS} N$.

Quand il y a pivotement ou roulement $M_N = \mu_P N$ ou $M_T = \mu_R N$.

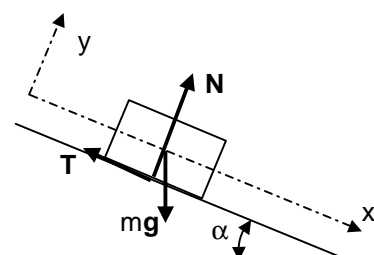
2.2. Détermination de μ et μ_S

Considérons un solide de masse m immobile sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Le TRC s'écrit :

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} = \mathbf{0}.$$

En projetant cette relation sur les axes Ox et Oy il vient :

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - T &= 0 \\ mg \cos \alpha - N &= 0 \end{aligned}$$



et puisque le solide est immobile $T/N = \tan \alpha \leq \mu_S$. C'est le phénomène d'arc-boutement. Quelle que soit la masse du solide, il ne glisse pas tant que $\alpha \leq \alpha_S$ avec $\tan \alpha_S = \mu_S$. Ceci explique aussi que l'on ne peut pas enfoncer une visse en appuyant simplement dessus (même avec un marteau !) car l'inclinaison des filets n'est pas suffisante pour autoriser le glissement.

Considérons maintenant le solide mobile sur le plan incliné. Le TRC s'écrit cette fois :

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} = m\mathbf{a},$$

et la projection de cette relation sur les axes Ox et Oy :

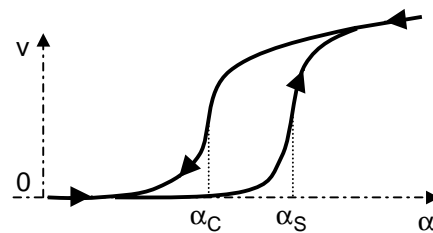
$$\begin{aligned} m g \sin \alpha - T &= m \ddot{x} \\ m g \cos \alpha - N &= 0 \end{aligned}$$

Le solide glisse et donc $T/N = \mu$. En remplaçant T dans la première équation il vient :

$$\ddot{x} = g \cos \alpha (\tan \alpha - \mu).$$

Pour un angle α très grand le solide a un mouvement accéléré, puis pour $\alpha = \alpha_C$ tel que $\tan \alpha_C = \mu$ le solide glisse à vitesse constante et enfin pour $\alpha < \alpha_C$ le solide ralentit.

On peut alors tracer un cycle d'hystérésis en partant de $\alpha < \alpha_C$ et en augmentant l'inclinaison, puis de $\alpha > \alpha_S$ en diminuant l'inclinaison.



Expérience

Reprenons l'exemple précédent en utilisant un livre posé sur une table. On veut déterminer les coefficients μ et μ_S .

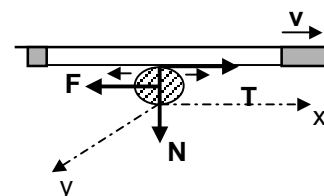
Le livre étant immobile sur la table horizontale, on incline celle-ci jusqu'à ce que le livre se mette à glisser. On note alors la position de la table (contre un mur par exemple) et on en déduit α_S puis $\mu_S = \tan \alpha_S$.

Le livre glissant sur la table, on réduit doucement l'inclinaison et on note la position de la table dès que le livre commence à ralentir. On déduit α_C et $\mu = \tan \alpha_C$.

3. Applications

3.1. Archet de violon

Considérons un archet de violon de masse m , glissant à vitesse constante v sur une corde représentée en coupe transversale sur la figure. La corde tendue à ses extrémités est soumise à une force de rappel $\mathbf{F} = -kx\mathbf{e}_x$ (k est proportionnelle à la tension T_0 de la corde), à la réaction de l'archet qui se décompose en une force normale $\mathbf{N} = m\mathbf{g}$ et tangentielle \mathbf{T} . Le coefficient de frottement statique est μ_S et le coefficient de frottement



dynamique μ quasiment nul grâce à l'emploi de colophane sur l'archet.

- A l'instant initial $t = 0$ la corde se trouve en position $x = 0$. L'archet se met en mouvement à la vitesse v et entraîne la corde avec lui. A l'instant t la position de la corde est :

$$x = vt.$$

Le mouvement est linéaire. Cette situation de non-glissement persiste tant que $T/N \leq \mu_S$ jusqu'à l'instant t_1 où :

$$\frac{T}{N} = \frac{kx}{mg} = \frac{kv t_1}{mg} = \mu_S \Rightarrow t_1 = \frac{mg\mu_S}{kv}$$

- Pour $t > t_1$, $T = \mu N \approx 0$. Le mouvement de la corde est régi par l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial^2 y} - \left(\frac{\zeta}{T_0} \right) \frac{\partial^2 x}{\partial^2 t} = 0,$$

où ζ est la masse linéique de la corde et T_0 sa tension. La vitesse de propagation des ondes le long de cette corde est $c = \sqrt{T_0/\zeta}$. On pose $\omega = c(2\pi/\lambda)$. La corde étant attachée à ses deux extrémités, les ondes sont stationnaires (la longueur de la corde est égale à $\lambda/2$) et l'on remarque que plus la corde est tendue ou courte, plus la fréquence d'émission du son est élevée. L'allongement x de la corde en une position y fixée (position de l'archet) s'écrit :

$$x = A \sin[\omega(t - t_1) + \varphi].$$

Les constantes d'intégration A et φ sont déterminées par les relations de continuité de x et \dot{x} à l'instant t_1 :

$$\begin{aligned} vt_1 &= A \sin \varphi & \Rightarrow & \quad \text{tg} \varphi = \omega t_1 \\ v &= A \omega \cos \varphi & \Rightarrow & \quad A = v \sqrt{t_1^2 + 1/\omega^2}. \end{aligned}$$

Le mouvement est sinusoïdal jusqu'à l'instant t_2 où la vitesse de la corde est à nouveau égale à celle de l'archet.

L'instant t_2 se calcule en résolvant l'équation $\dot{x} = v$ pour $t \neq t_1$, soit :

$$\cos[\omega(t_2 - t_1) + \varphi] = \cos \varphi.$$

On déduit :

$$\omega(t_2 - t_1) + \varphi = 2\pi - \varphi$$

et

$$t_2 = t_1 + 2 \frac{\pi - \varphi}{\omega} = \frac{A \sin \varphi}{v} + 2 \frac{\pi - \varphi}{\omega}.$$

A cet instant, l'allongement du ressort est :

$$x = A \sin[\omega(t_2 - t_1)] = -A \sin \varphi.$$

- Pour $t > t_2$ la corde suit l'archet à la vitesse v . L'allongement s'écrit :

$$x = v(t - t_2) - A \sin \varphi.$$

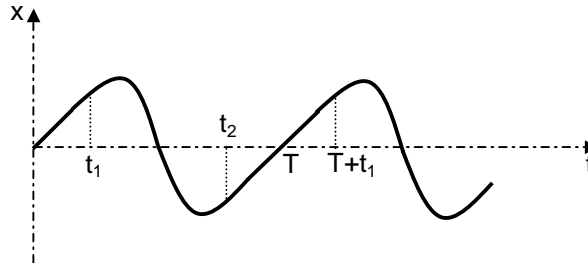
Le mouvement est linéaire tant qu'il y a non-glissement de la corde sur l'archet.

Le phénomène est donc périodique de période T . Pour $t = T$, $x = 0$, soit :

$$0 = v(T - t_2) - A \sin \varphi .$$

Finalement :

$$T = 2 \frac{\pi - \varphi}{\omega} + 2 \frac{A \sin \varphi}{v} .$$



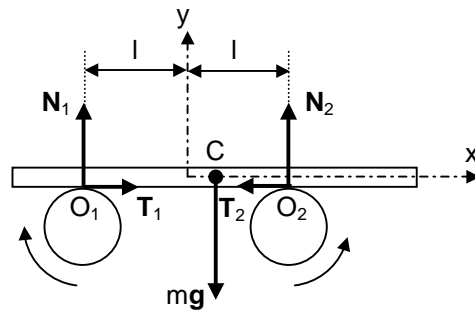
Dans ce problème, nous avons résolu deux équations différentielles ; une pour le non-glissement et une pour le glissement. Les solutions n'étant pas du même type dans les deux cas, le mouvement n'est ni linéaire, ni sinusoïdal mais malgré tout périodique. La solution peut donc se mettre sous la forme d'une série de fourier. C'est pourquoi dans le son du violon il existe des harmoniques à des fréquences multiple de $f = 1/T$.

3.2. Expérience de Timochenko

Une plaque de masse m , d'épaisseur négligeable, est posée sur deux rouleaux tournant en sens inverse à vitesse suffisante pour que la plaque glisse constamment avec un coefficient de frottement dynamique μ . A l'instant initial le centre de masse C de la plaque est décalé vers la droite comme sur la figure à l'abscisse x .

Le TRC appliquée à la plaque s'écrit :

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{T}_2 .$$



En projetant cette relation sur les axes Ox et Oy on obtient :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= T_1 - T_2 \\ 0 &= -mg + N_1 + N_2 \end{aligned}$$

Puisque la plaque se déplace horizontalement, le TMC s'écrit :

$$\frac{d\sigma_C}{dt} = \mathbf{CO}_1 \wedge (\mathbf{T}_1 + \mathbf{N}_1) + \mathbf{CO}_2 \wedge (\mathbf{T}_2 + \mathbf{N}_2) ,$$

ce qui donne une seule relation scalaire :

$$l(N_2 - N_1) = x(N_2 + N_1)$$

qui s'écrit aussi compte tenu des relations précédentes :

$$N_2 - N_1 = \frac{mgx}{l} .$$

La condition de glissement nous donne deux relations supplémentaires : $T_1 = \mu N_1$ et $T_2 = \mu N_2$ d'où :

$$m\ddot{x} = T_1 - T_2 = \mu(N_1 - N_2) = -\frac{\mu mg}{l}x,$$

et

$$\ddot{x} + \frac{\mu g}{l}x = 0.$$

La plaque effectue des oscillations de période

$$T = 2\pi\sqrt{l/\mu g}.$$

Contrairement au problème de l'archet de violon il n'y a ici qu'une seule équation différentielle pour décrire le mouvement complet et une solution parfaitement sinusoïdale. Ceci vient du fait que l'on n'a pas pris en compte les frottements statiques.

Expérience

On peut si le matériel est disponible, réaliser cette expérience et en déduire la valeur du coefficient de frottement dynamique en mesurant la période des oscillations de la plaque.

3.3. Autres exemples

Il existe bien sûr de nombreux autres exemples permettant d'illustrer cette leçon. On peut citer :

- La roue motrice sur un plan incliné : démarrage en côte puis vitesse constante.
Freinage d'une voiture sans dérapage.
- Oscillations amorties par frottement solide.
- Cylindre roulant sur l'arête rectiligne d'une table.
- Boule de billard roulant et glissant sur une table.

Conclusion

Nous avons vu dans cette leçon que les lois phénoménologiques du frottement ne sont pas les mêmes s'il y a glissement ou non-glissement. Il faut remettre le problème en équation chaque fois que l'on passe d'une situation à l'autre. La solution est donc à priori plus complexe que celle d'un problème sans frottement à une équation différentielle.

D'autre part les actions de contact ne sont pas connues au départ. Ce sont les lois empiriques du frottement qui permettent de relier les composantes de ces forces et de réduire le nombre de paramètres.

Bibliographie

J.P. Pérez, *Mécanique*, Masson, 1997.

M. Bertin, J.P. Faroux, J. Renault, *Mécanique 1 et 2*, Dunod, 1994.