

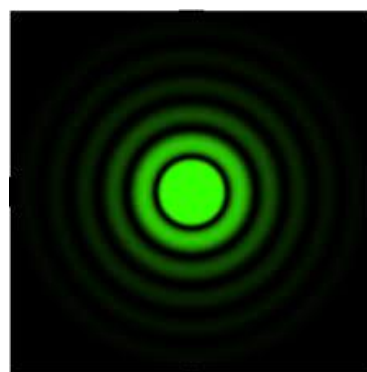
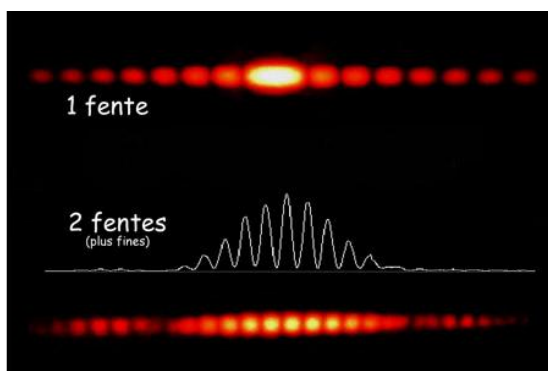
Diffraction par des structures périodiques

Pré-requis :

- Electromagnétisme
- Interférence à plusieurs ondes
- Diffraction par une ou plusieurs fentes
- Cohérence spatiale et temporelle
- Notions de mécanique quantique

Intro :

- Définition diffraction : lorsque la lumière passe à proximité d'un obstacle, cela crée des sources secondaires cohérentes entre elles dont les ondes interfèrent pour former des figures de diffraction
- Ce phénomène est notamment visible lors du passage de la lumière par des obstacles aux dimensions très petites (fentes, fils, ...) car les franges de la figure de diffraction sont d'autant plus grandes que l'objet est petit (inversion des échelles) (rapport λ/D)
- Mais les objets n'étant jamais de taille infinie, la diffraction intervient partout et à chaque instant, y compris dans les montages d'optique géométrique (bord des lentilles), bien qu'on puisse bien souvent la négliger lorsque les conditions de Gauss sont respectées
- On a vu lors des leçons précédentes la diffraction des OEM par une ouverture circulaire ou une ou plusieurs fentes (fentes de Young), qui donne lieu à ces figures de diffraction (diapo) :



- Aujourd'hui nous allons étudier la diffraction par des structures périodiques, souvent appelées réseaux, par exemple un ensemble de fentes disposées de manière régulière

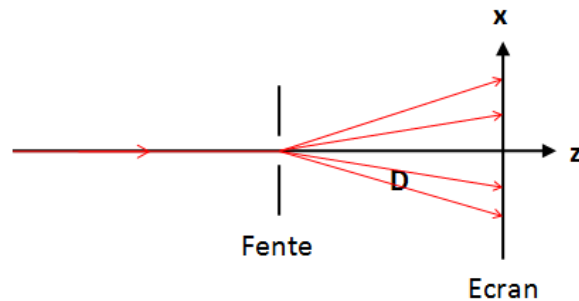
1. Diffraction d'une onde électromagnétique par un réseau de fentes

a. Calcul de l'intensité diffractée

- Pour trouver l'amplitude complexe de l'onde diffractée par un obstacle en fonction de la direction => transformée de Fourier de la transmittance de l'obstacle :

$$\underline{\psi}(\underline{u}) = \int \underline{t}(\underline{r}) e^{-2i\pi \underline{u} \cdot \underline{r}} d\underline{r}$$

- Pour une fente (schéma diapo) :

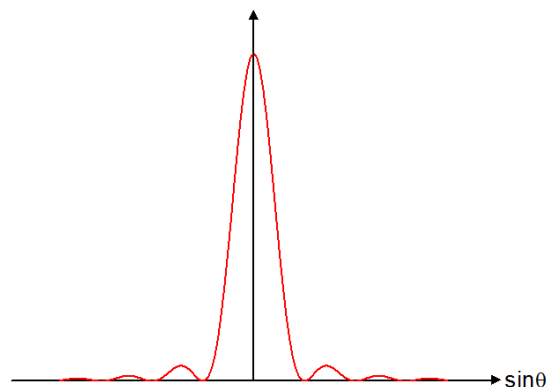


- Transmittance de 1 dans l'ouverture et 0 ailleurs, le calcul donnait :

$$\underline{\psi}(u) = \int_{-l/2}^{l/2} e^{-2i\pi ux} dx = l \frac{\sin(\pi ul)}{\pi ul} = l \text{sinc}(\pi ul) \quad \text{avec} \quad u = \frac{\sin \theta - \sin \theta_0}{\lambda}$$

$$\Rightarrow I(u) = l^2 \text{sinc}^2(\pi ul)$$

- Sinus cardinal carré :

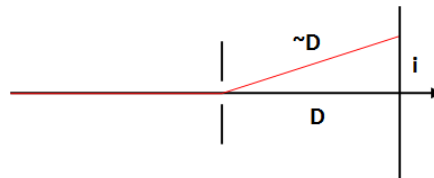


- => Lien avec les franges de la figure (diapo)
- => Interfrange (distance entre 2 franges) : $i = \lambda D / l$
- Pour les questions :
 - les maxima de $\text{sinc}^2(x)$ sont donnés par $x=0$ et $x \approx \pi/2 + m\pi$ avec m entier positif différent de 0 et par leurs symétriques par rapport à $x=0$

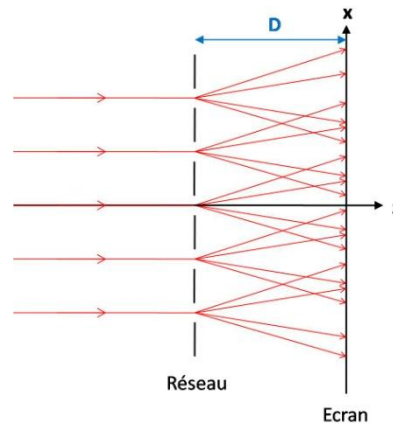
$$\pi ul \simeq \frac{\pi}{2} + m\pi \Rightarrow u = \frac{1}{2l} + \frac{m}{l} = \frac{\sin \theta - \sin \theta_0}{\lambda}$$

- En incidence normale ($\theta_0=0$):

$$\sin \theta \simeq \frac{3\lambda}{2l}, \frac{5\lambda}{2l}, \frac{7\lambda}{2l}, \dots \quad i \simeq D \sin \theta \simeq \frac{\lambda D}{l}$$



- En présence de plusieurs fentes (schéma diapo):



- on somme simplement leurs contributions respectives :

$$\underline{\psi}(u) = \sum_{j=-n}^{j=n} \int \underline{t}_j(x - x_j) e^{-2i\pi u x} dx$$

pour $N=2n+1$ fentes centrées en $x_j = ja$ (fente centrale en $x=0$). Pour un réseau de fentes périodique, les fentes ont toutes la même largeur et sont espacées d'une période a

- On pose $X = x - x_j$

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(u) &= \sum_{j=-n}^{j=n} \int \underline{t}_j(X) e^{-2i\pi u(X+x_j)} dX \\ &= \sum_{j=-n}^{j=n} e^{-2i\pi u x_j} \int \underline{t}_j(X) e^{-2i\pi u X} dX \\ &= \sum_{j=-n}^{j=n} e^{-2i\pi u x_j} \int_{-l/2}^{l/2} e^{-2i\pi u X} dX \\ &= \sum_{j=-n}^{j=n} e^{-2i\pi u x_j} \frac{-1}{2i\pi u} [e^{-2i\pi u X}]_{-l/2}^{l/2} \\ &= \frac{1}{\pi u} \sum_{j=-n}^{j=n} e^{-2i\pi u x_j} \frac{e^{2i\pi u l/2} - e^{-2i\pi u l/2}}{2i} \\ &= \frac{1}{\pi u} \sum_{j=-n}^{j=n} e^{-2i\pi u x_j} \sin(\pi u l) \\ &= l \frac{\sin(\pi u l)}{\pi u l} \sum_{j=-n}^{j=n} e^{-2i\pi u x_j} \end{aligned}$$

- On reconnaît l'expression de la fonction d'onde pour une fente, multipliée par une somme que l'on sait expliciter :

$$U = \sum_{j=-n}^{j=n} e^{-ij\phi} \text{ avec } \phi = 2\pi ua$$

$$= \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \text{ avec } N = 2n + 1$$

- Démo pour la formule de la somme (pour les questions):

$$U = \sum_{j=-n}^{j=n} e^{-ij\phi} \quad Ue^{-i\phi} = \sum_{j=-n}^{j=n} e^{-i(j+1)\phi} = \sum_{j=-n+1}^{j=n+1} e^{-ij\phi}$$

$$U - Ue^{-i\phi} = e^{in\phi} - e^{-i(n+1)\phi}$$

$$\Rightarrow U = \frac{e^{in\phi} - e^{-i(n+1)\phi}}{1 - e^{-i\phi}}$$

$$= \frac{e^{-i\phi/2}}{e^{-i\phi/2}} \frac{e^{i(n+1/2)\phi} - e^{-i(n+1/2)\phi}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}}$$

$$= \frac{e^{iN\phi/2} - e^{-iN\phi/2}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}} \times \frac{2i}{2i}$$

$$= \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}$$

- Finalement :

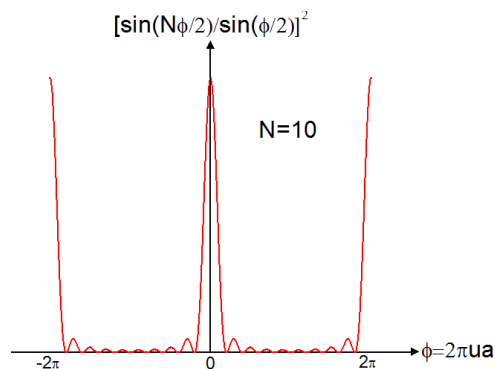
$$\underline{\psi}(u) = l \frac{\sin(\pi ul)}{\pi ul} \frac{\sin(N\pi ua)}{\sin(\pi ua)}$$

- D'où l'intensité diffractée dans une direction :

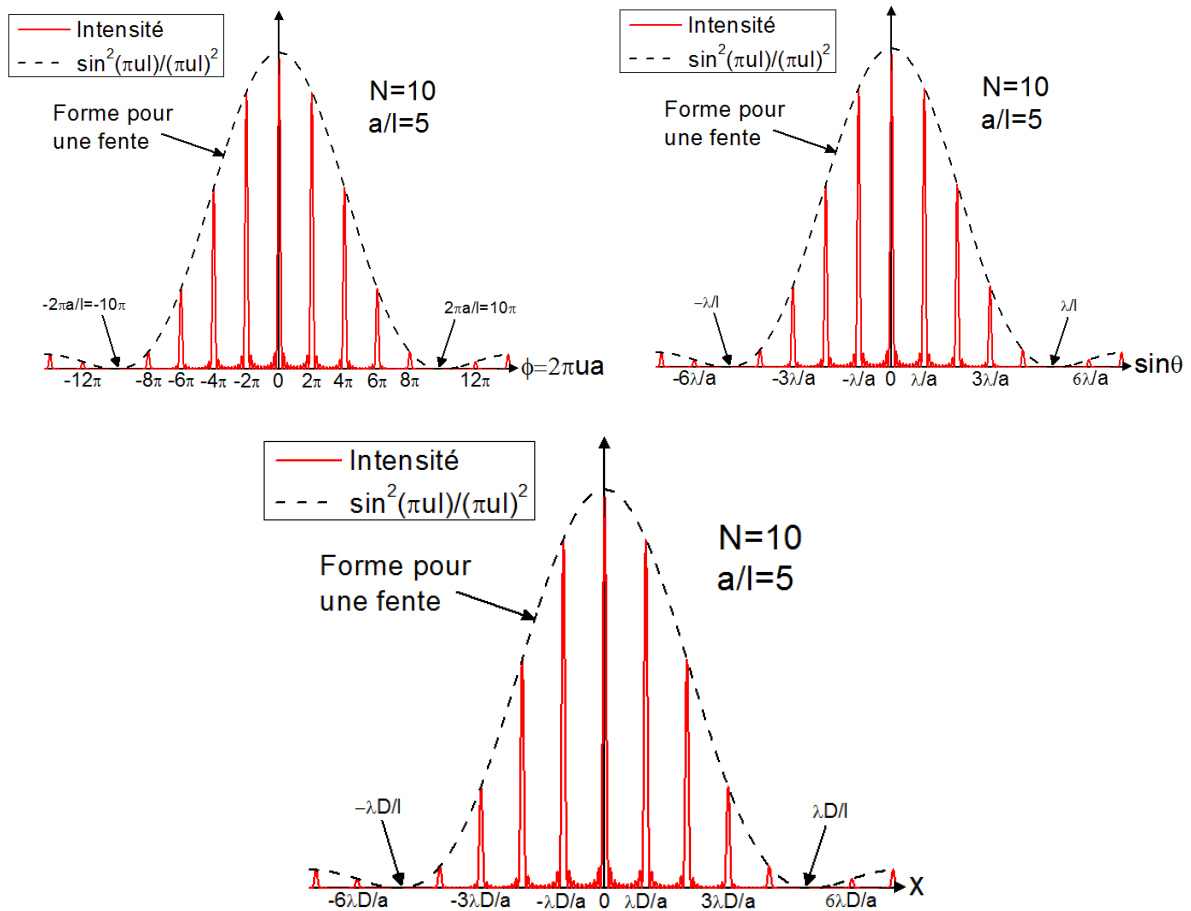
$$I(u) = \underline{\psi}\underline{\psi}^* = l^2 \frac{\sin^2(\pi ul)}{(\pi ul)^2} \frac{\sin^2(N\pi ua)}{\sin^2(\pi ua)}$$

- Interprétation :

- On a l'intensité de l'onde diffractée par une fente, modulée par un rapport de sinus carrés
- On pose : $\phi = 2\pi ua$
- Forme du rapport de sinus carrés :



- D'où l'intensité en fonction de ϕ , $\sin\theta$ et x :



- Différentes longueurs caractéristiques (l , a , L) => écarts entre pics
- On voit sur le deuxième graphique que les pics observables sont situés dans les directions

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{a} \text{ avec } m \in \mathbb{Z}$$

- Loi qu'on peut généraliser pour toute direction d'incidence :

FORMULE DES RESEAUX

$$\sin \theta - \sin \theta_0 = \frac{m\lambda}{a}$$

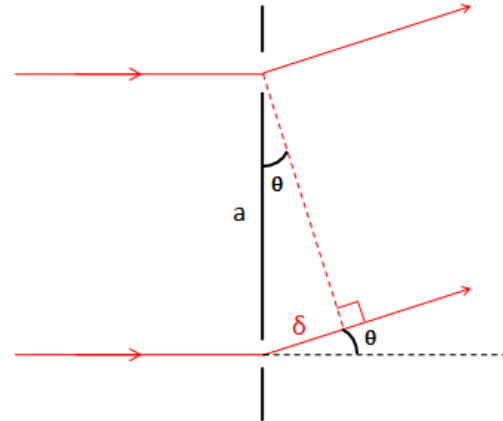
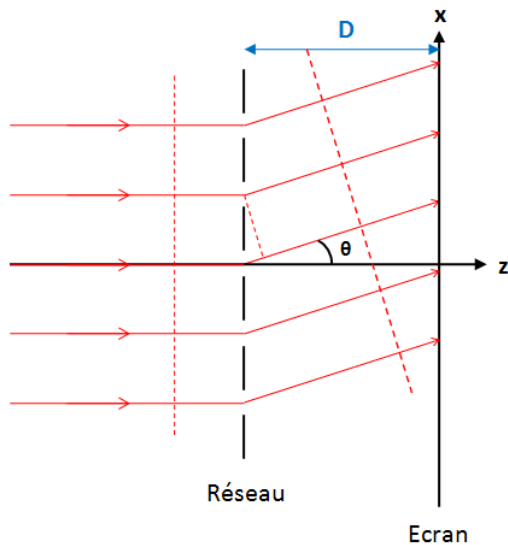
- L'interfrange vaut alors :

$$i \simeq \frac{\lambda D}{a}$$

b. Approche géométrique

- On cherche les directions pour lesquelles les ondes interfèrent de manière constructive (= maxima d'intensité)

- Pour cela, il faut que les ondes sortant dans la même direction soient en phase. La différence de marche entre 2 rayons voisins doit donc être un multiple de la longueur d'onde :



$$\delta = m\lambda \text{ avec } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \sin \theta = m\lambda \Rightarrow \sin \theta = \frac{m\lambda}{a}$$

- On retrouve la formule des réseaux démontrée précédemment

c. Vérification expérimentale

- Manip diffraction laser rouge par un réseau :
 - Mesure de l'interfrange : $i = ???$
 - Calcul du pas du réseau : $a = \lambda D / i = ???$
 - Incertitudes :

$$\lambda = 654 \pm 1 \text{ nm}$$

$$\Delta i = 1/N \text{ mm pour } N \text{ interfranges mesurées}$$

$$\Delta D = 1 \text{ cm}$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta i}{i}\right)^2}$$

(longueur d'onde du laser mesurée au spectromètre)

- i sous estimé par le modèle a cause de l'approximation $\sin = i/D \Rightarrow$ erreurs lorsqu'on applique la formule $a = \lambda D / i$
- Comparaison avec données constructeur et conclusion quant à la formule des réseaux

d. Application : spectromètre

- On a vu qu'en mettant un réseau de fentes sur le trajet d'une lumière cohérente (ex : laser), celle-ci est diffractée et une figure d'interférence se forme. D'après la formule des réseaux, les positions des maxima d'intensité dépendent de la longueur d'onde du rayonnement. On peut donc séparer les couleurs avec un réseau, comme avec un prisme (attention : couleurs

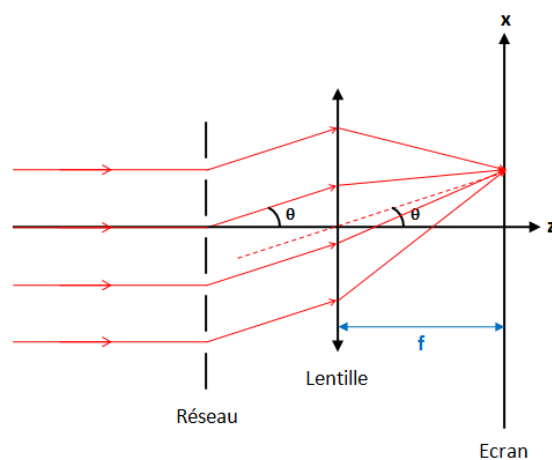
inversées). Ensuite, en mesurant (avec une CCD par exemple), l'intensité lumineuse autour d'une frange, on en déduit les longueurs d'onde composant la lumière

- Prisme : l'indice optique diminue quand la longueur d'onde augmente (loi de Cauchy) car milieu dispersif => petites longueurs d'ondes + déviées que grandes
- Réseau : $\sin\theta$ proportionnel à λ => grandes longueurs d'ondes + déviées que petite
- Dispersion angulaire :

$$D_a = \frac{d\theta_m}{d\lambda}$$

$$\frac{d \sin \theta_m}{d\lambda} = \frac{d\theta_m}{d\lambda} \cos \theta_m \Rightarrow \frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{1}{\cos \theta_m} \frac{d \sin \theta_m}{d\lambda} \text{ avec } \sin \theta_m = \frac{m\lambda}{a}$$

$$\Rightarrow D_a = \frac{m}{a \cos \theta_m}$$



- Dispersion linéique :

$$D_l = \frac{dx}{d\lambda} = f \frac{d \sin \theta}{d\lambda} \simeq f \frac{d\theta}{d\lambda} = f D_a$$

- Pouvoir de résolution :

- Largeurs des pics à mi hauteurs (L = largeur du réseau éclairée) :

$$\Delta u_{1/2} \simeq \frac{1}{Na} = \frac{1}{L} \quad \Delta (\sin \theta)_{1/2} = \frac{\lambda}{L} \quad \Delta X_{1/2} = \frac{\lambda f}{L}$$

- Pour pouvoir distinguer 2 longueurs d'ondes voisines, il faut que les pics soient séparés par au moins $\Delta X_{1/2}$:

$$\Delta \lambda \times D_l \geq \Delta X_{1/2} \Rightarrow (\Delta \lambda)_{min} = \frac{\Delta X_{1/2}}{D_l} = \frac{\lambda f}{L} \frac{1}{f D_a} = \frac{\lambda a \cos \theta_m}{L m} \simeq \frac{\lambda}{mN}$$

pour $\cos \theta_m \approx 1$

- D'où :

$$PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

- => Incertitude sur la longueur d'onde inversement proportionnel au nombre de fentes !
- Généralement on prend m petit pour avoir de l'intensité lumineuse et N grand pour la résolution
- Pouvoir de résolution d'un prisme :

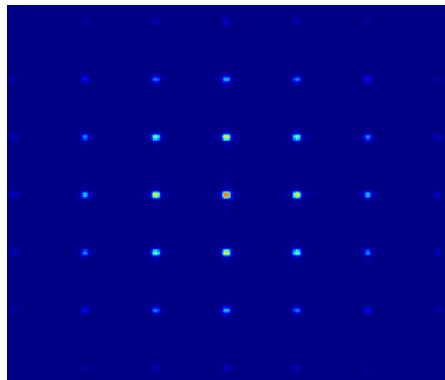
$$PR = b \frac{dn}{d\lambda} \text{ avec } b \text{ la base du prisme et } n \text{ l'indice optique}$$

- Raisons pour lesquelles réseau mieux que prisme pour spectro :
 - pas d'absorption avec le réseau
 - Loi empirique pour $n=f(\lambda)$ dans le prisme (loi de Cauchy par exemple)
 - Réseau moins lourd et encombrant que prisme

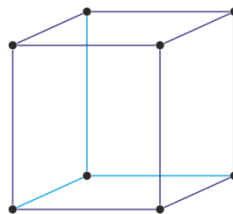
On a vu la diffraction par un réseau de fentes périodique dans une direction. On peut également construire des réseaux périodiques dans plusieurs direction.

2. Diffraction par des réseaux à plusieurs dimensions

- Exemple 2D : Diffraction par réseau de fentes 2D => figure de diffraction :

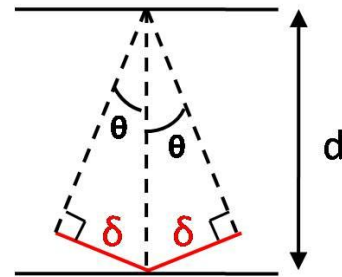
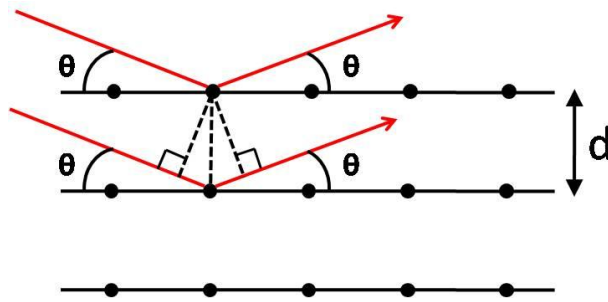


- Réseaux 3D => exemple : cristaux
- Position atomes selon réseau périodique (exemple réseau cubique car le plus simple) => objets diffractants



a. Formule de Bragg

- Théorie : diffraction en réflexion (schémas diapo) :



$$\delta = d \sin \theta$$

Interférences constructives pour :

$$2\delta = m\lambda \text{ avec } m \in \mathbb{Z}$$

FORMULE DE BRAGG :

$$2d \sin \theta = m\lambda$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{m\lambda}{2d}$$

- Pour que le phénomène soit visible il faut donc que $\lambda < 2d$
- d de l'ordre de $100 \text{ pm} = 0,1 \text{ nm} \Rightarrow \lambda$ de l'ordre de $0,1 \text{ nm} \Rightarrow$ Rayons X pour sonder la matière à l'échelle des mailles cristallines

Plutôt que des rayons X, on peut aussi diffracter des électrons, car la diffraction s'applique aux ondes en général et pas seulement aux ondes électromagnétiques

b. Diffraction des électrons

- Dualité onde-corpuscule \Rightarrow à une particule est associée une onde avec une longueur d'onde de De Broglie :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \text{ dans un cadre non relativiste}$$

- Diffraction de l'électron par un réseau de la même façon qu'une onde lumineuse

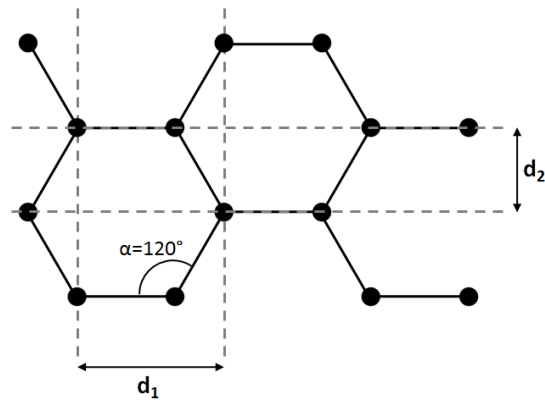
c. Mesure des paramètres de maille du graphite

- Principe de la manip : canons à électrons envoyés sur cristal de graphite (schéma diapo)
 - On règle la tension pour imposer la vitesse :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

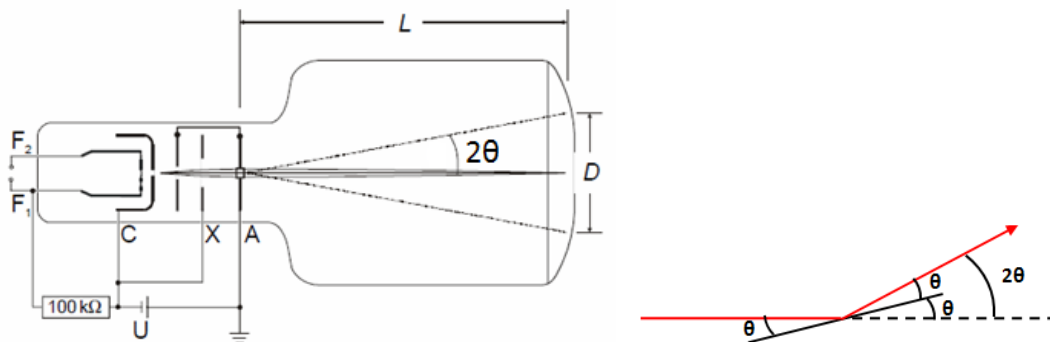
- Distances sondées (diapo) :



- Echantillon = graphite polycristallin => pleins de grains orientés dans différentes directions => toujours des grains orientés de manière à ce que la formule de Bragg soit satisfaite, avec d_1 ou d_2 ou la distance interplan + les électrons sont diffractés sur un cône d'axe z => figure de diffraction = cercle
- On mesure le diamètre de 2 cercles : un pour d_1 et un pour d_2
- La distance interplan est plus grande que d_1 et d_2 => le cercle pour la distance interplan est plus petit => on ne le voit pas (il est caché dans le brouillard vert au milieu)
- On trace D en fonction de l'inverse de racine de U pour les 2 cercles, on obtient une droite dont le coefficient directeur vaut :

$$k = \frac{2Lh}{d\sqrt{2me}} \Rightarrow d_i = \frac{2Lh}{k_i\sqrt{2me}}$$

- Démo (pour les questions ou si on est en avance) :



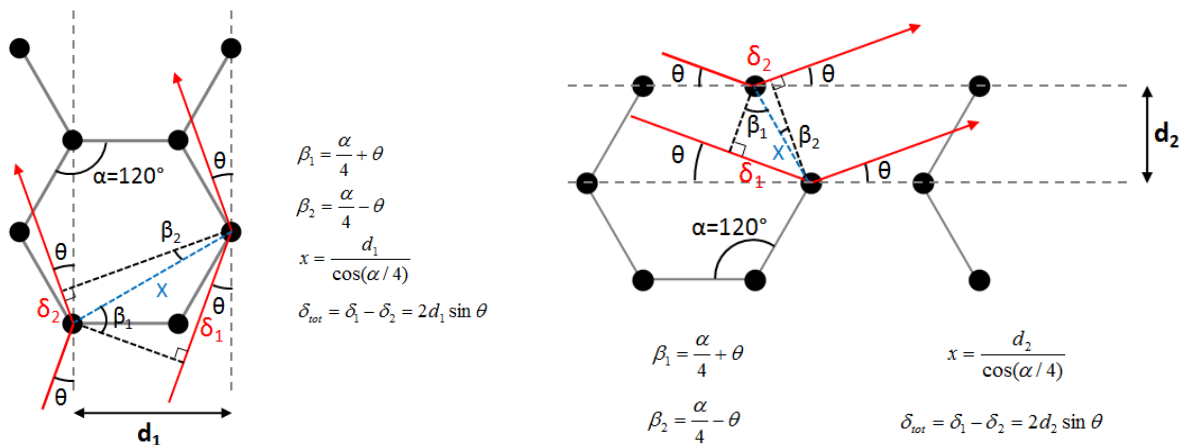
$$\tan 2\theta = \frac{D}{2L} \simeq \sin 2\theta \simeq 2 \sin \theta \text{ pour } \theta \text{ petit}$$

Formule de Bragg : $2d \sin \theta = m\lambda$

$$\Rightarrow \frac{D}{2L} = \frac{\lambda}{d} \text{ pour l'ordre } m=1$$

$$\Rightarrow D = \frac{2\lambda L}{d} = \frac{2Lh}{d\sqrt{2meU}}$$

Justification de l'application de la formule de Bragg :



- Faire une mesure en direct pour 5 kV (mieux visible)
 - Astuce : placer un bout de scotch sur l'écran et faire des marques au crayon pour repérer les bords interne et externe de chaque cercle, puis mesurer les diamètres moyens sur le bout de scotch
 - Longueur du tube mesurée : $L = 13,7 \pm 0,2$ cm
 - Modélisation des 2 droites $D = k / (\text{racine de } U) \Rightarrow$ 2 valeurs de k qui permettent de remonter à d_1 et d_2
 - Incertitudes (si le temps le permet) :
 - $\Delta D = 1 \text{ ou } 2 \text{ mm} ?? \Rightarrow$ à rentrer dans Regressi
 - Incertitude sur tension : $\Delta U = ??? \Rightarrow$ à rentrer dans Regressi
 - \Rightarrow Incertitude sur k avec la modélisation linéaire (Regressi)
 - $L = 13,7 \pm 0,2$ cm
 - Incertitude totale sur les paramètres de maille :

$$\frac{\Delta d_i}{d_i} = \sqrt{\left(\frac{\Delta k_i}{k_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2}$$

- Comparer avec données

Conclusion :

- Diffraction structure périodique permet d'avoir des infos précises à partir des figures de diffraction
- Permet également de décomposer une lumière selon la longueur d'onde
- Ne concerne pas que les ondes électromagnétiques mais également les ondes de probabilités représentant les particules (électrons) ou encore les ondes mécaniques (sons \Rightarrow échographie)