LP 14: Ondes Acoustiques

Mathias Péault

Sources: Cours de G.Fruit, Jacobsen/ Moller Juhl, Royer/Dieulesaint, Chef Nico

Pré-requis:

1. Ondes progressives, ondes stationnaires
2. Équation de d'Alembert et solutions
3. Mécanique des fluides
4. Thermodynamique

Pour les docteurs, manip : Tube de Kundt

1 Introduction

L'acoustique est la science du son. C'est une science vieille dont les bases remontent à l'Antiquité. En effet, les théâtres antiques témoignent que les Grecs maîtrisaient déjà en leur temps les propriétés sonores des matériaux. On sait d'ailleurs que Pythagore étudiait l'acoustique musicale, dès le VIe siècle avant JC, que Aristote avait anticipé, dès le IVe siècle avant JC, que le son se générait de la mise en mouvement de l'air. Car en effet, les ondes sonores sont produites par des vibrations mécaniques compressionnelles de faible amplitude d'un milieu matériel (donc pas le vide) dans lequel elles se propagent sous forme d'ondes longitudinales (pas transversales donc, même si dans solides ça peut). Pour les humains, les sons audibles ont une fréquence contenue dans l'intervalle 20Hz-20kHz (en deçà: infrasons, au-delà: ultrasons).
Il s'agit d'une discipline particulièrement transversale dont la portée ne se limite pas à la simple physique fondamentale. Évidemment, elle intervient en musique, dans l'enregistrement de son et leur restitution, en architecture bien sûr pour le design de théâtres ou d'opéras ou même des stades de foot, mais aussi en médecine via les échographies, en biologie via la bioacoustique par exemple pour étudier le chant des animaux par exemple (à savoir la production, réception et l'interprétation des différents sons), en astrophysique, aussi, pour expliquer les asymétries dans les formations de supernovae de type II et je passe boooon nombre d'autres exemples (truc technologique comme l'isolation du bruit des moteurs aussi fin bref).

L'objectif est de présenter l'approximation acoustique de la mécanique des fluides afin d'apporter un formalisme physique décrivant la propagation des ondes sonores dans l'air et dans les milieux plus sympas comme peut-être l'eau gazeuse ou genre dans les sirops de menthe.

2 I: Propagation des ondes dans un fluide

On décide de traiter uniquement la propagation des ondes sonores dans les fluides (à l'aide de la méca flu donc) et non pas dans les solides car le cas des solides entre dans un autre cadre descriptif, menant à la physique des cristaux, qui est bien plus dur à traiter.

Seulement la mécanique des fluides est une discipline intrinsèquement non-linéaire : en effet, dans la très grande majorité des cas, on ne sait pas donner de solution à ses problèmes. En revanche, si on est capable de linéariser les équations de la mécanique des fluides, alors on dispose de nombreux outils théoriques et pratiques pour les résoudre. Dans le cadre de l'acoustique, on va donc devoir réaliser des approximations et des hypothèses simplificatrices, justifiées, dans ce but.

2.1 Approximation acoustique

Les ondes sonores sont des perturbations oscillatoires compressionnelles qui se propagent de manière longitudinales dans les fluides (à la vitesse c_s, sans dispersion) et qui provoquent donc un mouvement, en avant ou en arrière dans la direction de propagation, des particules contenues dans le fluide. Ces mouvements sont accompagnés de changements de pression,

de densité et de température dans le milieu. Le son, ce que l'on entend donc, correspond à la différence entre la pression totale instantanée et la pression statique.
On considère donc un fluide compressible (!) au repos (vitesse $\vec{v} = \vec{0}$) caractérisé par une densité ρ_0 (milieu homogène), une pression P_0 perturbé par une onde sonore. On suppose que ces perturbations sont très faibles devant les grandeurs caractéristiques du système.

Ainsi, le fluide perturbé est décrit par les champs suivants:

$$P(\vec{r},t) = P_0 + p_1(\vec{r},t) \tag{2.1}$$

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{r},t) \tag{2.2}$$

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{0} + \vec{v}_1(\vec{r},t) \tag{2.3}$$

avec

$$\frac{|p_1(\vec{r},t)|}{|P_0|} << 1 \tag{2.4}$$

$$\frac{|\rho_1(\vec{r},t)|}{|\rho_0|} << 1 \tag{2.5}$$

$$\frac{\|\vec{v}_1(\vec{r},t)\|}{c_s} << 1 \tag{2.6}$$

les infiniment petits du premier ordre, où l'on retrouve la surpression/pression acoustique p_1, la surdensité ρ_1 et la vitesse $\vec{v}_1$, créées au passage de l'onde sonore. Cette approximation est complètement légitime car les changements subis par le fluide sont extrêmement petits. Pour des conditions normales (Pamb, T=20°C). Dans l'air, pour un son de 120 dB, donc haut niveau de pression acoustique (seuil de la douleur), on obtient $\frac{|p_1(\vec{r},t)|}{|P_0|} \sim 2\ 10^{-4}$, $\frac{|\rho_1(\vec{r},t)|}{|\rho_0|} \sim 1.4\ 10^{-4}$, ΔT=0.02°C et $\|\vec{v}_1(\vec{r},t)\|$=50mm.s^{-1} (contre c_s=342m.s^{-1} à 1000 Hz cela équivaut à un déplacement $\sim 8\mu m$. Pour le plus faible son possible perçu par l'être humain, déplacement plus faible que le diamètre de l'atome d'hydrogène). [On peut donc négliger le terme convectif.]

On considère un fluide parfait (donc on néglige les effets de viscosité et de conduction thermique. Cela revient à dire que lors d'une perturbation acoustique, le fluide subit une transformation réversible (phénomène suffisamment lent), et que la chaleur créée n'a pas le temps de se propager. Le mouvement du fluide est donc adiabatique et décrit par les équations d'Euler et pas Navier-Stokes. Adiabatique+réversible= évolution ISENTROPIQUE). On peut d'ailleurs le montrer en montrant que la longueur caractéristique de diffusion thermique est négligeable devant la longueur d'onde de l'onde sonore: Soit L cette longueur (on retrouve un coefficient de diffusion thermique D qu'on peut mettre en pré-requis ou rien dire pour éviter les ennuis et t c'est le temps). On a:

$$L = \sqrt{Dt} \tag{2.7}$$

et il faut L « λ, c'est à dire:

$$Dt << \lambda^2 \tag{2.8}$$

$$\frac{D}{f} << \frac{c^2}{f^2} \tag{2.9}$$

$$f << \frac{c^2}{D} \tag{2.10}$$

avec pour l'air $\frac{c^2}{D} \sim 6 \text{ x } 10^9$Hz, soit une fréquence bien plus grande que les fréquences audibles par les humains.

Il est possible d'obtenir une description mathématique de la propagation d'une onde sonore dans un fluide à l'aide des équations de la mécanique des fluides. En premier lieu on retrouve l'équation de conservation de la masse/continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0 \tag{2.11}$$

qui devient après linéarisation et en éliminant les termes d'ordre 2:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \tag{2.12}$$

puis l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans un référentiel galiléen (on veut pas se rajouter en plus les forces d'inerties), où l'on néglige les forces volumiques (la force de gravité par exemple qui reste faible vis-à-vis des effets de pression):

$$\rho g \sim 10^{-6} N, \quad \|\vec{\nabla} P\| \sim \frac{p_1}{\lambda} \sim \frac{10}{0.5} \sim 20N \tag{2.13}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P \tag{2.14}$$

qui devient:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_1 \tag{2.15}$$

Ces deux équations ne sont pas suffisantes, il faut donc une troisième équation pour lier la densité à la pression et ainsi boucler le système. On introduit donc le coefficient de compressibilité isentropique qui relie les variations de P et de ρ pour une transformation isentropique:

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dP} \text{ (à entropie constante)} \tag{2.16}$$

ce qui mène à:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \rho_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} \tag{2.17}$$

et donc:

$$\rho_1 = \rho_0 \chi_S p_1 \tag{2.18}$$

En calculant la divergence de l'équation 2.15, on obtient:

$$\rho_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1)}{\partial t} + \Delta p_1 = 0 \tag{2.19}$$

qui associée à l'équation 2.12 donne finalement:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \Delta p_1 = 0 \tag{2.20}$$

avec la relation thermodynamique 2.18, on retrouve alors une équation de type d'Alembert pour la propagation de la pression acoustique à la vitesse c$_s$:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 \chi_S} \Delta p_1 = 0 \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - c_s^2 \, \Delta p_1 = 0 \tag{2.22}$$

La propagation sera donc d'autant plus rapide que le milieu est peu compressible et peu dense (attention tout de même sinon l'approximation des milieux continus ne sera plus valable et donc plus de propagation. Bon après faut pas que ce soir trop dense sinon le gaz ne peut plus être considéré comme parfait et c'est relou. Pour estimer la vitesse du son dans un gaz on part de la relation de Laplace pour un GP:

$$P\rho^{-\gamma} = cte \tag{2.23}$$

On différencie et on identifie avec χ_s (avec linéarisation):

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0 \tag{2.24}$$

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{\gamma P_0} \tag{2.25}$$

Ainsi:

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \tag{2.26}$$

avec M la masse molaire (de l'air par exemple).

En général, c$_s^{solide}$ > c$_s^{liquide}$ > c$_s^{gaz}$.
Ordre de grandeur par exemple: c$_s^{air}$= 343m.s^{-1} à 20°C, c$_s^{eau}$= 1480m.s^{-1} et c$_s^{granite}$= 6200m.s^{-1}.

On retrouve un équation similaire pour l'excès de densité ρ_1 toujours grâce à l'équation thermodynamique. On peut remarquer avec l'utilisation du fait que le rotationnel d'un gradient donne le vecteur nul, que le rotationnel de l'équation 2.15 nous renvoie que l'écoulement est irrotationnel (car $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}_1 = \vec{0}$). On retrouve bien l'idée que la propagation se fait de manière longitudinale (élastique).

En calculant le gradient de l'équation 2.12, on trouve (car écoulement irrotationnel et donc $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}_1) = \vec{0}$):

$$\frac{\partial(\vec{\nabla}\rho_1)}{\partial t} + \rho_0\, \vec{\Delta} \cdot \vec{v}_1 = 0 \tag{2.27}$$

qui combiné à l'équation d'Euler et à la relation thermodynamique donne:

$$\frac{\partial(\vec{\nabla}\rho_0 \chi_S p_1)}{\partial t} + \rho_0\, \vec{\Delta} \cdot \vec{v}_1 = 0 \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} - c_s^2\, \vec{\Delta} \cdot \vec{v}_1 = 0 \tag{2.29}$$

2.3 Impédance acoustique

On injecte dans les équations de d'Alembert dérivées précédemment une solution sous la forme d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) unidimensionnelle (pour simplifier et éviter de se taper des ondes sphériques) qui s'écrit sous la forme suivante (prenons une onde se propageant suivant la direction x):

$$p_1(x,t) = p_{amp} \cos(\omega t - kx) \tag{2.30}$$

avec donc p_{amp} l'amplitude de l'onde, ω la pulsation associée à cette onde sonore, et $\vec{k}$ le vecteur d'onde qui indique la direction de propagation. On obtient alors:

$$-p_{amp}\omega^2 \cos(\omega t - kx) + p_{amp} c_s^2 k^2 \cos(\omega t - kx) = 0 \tag{2.31}$$

ainsi on retrouve bien qu'il n'y pas de dispersion puisque ω=kc_s. Or on peut exprimer la pression (en injectant la solution dans l'équation d'Euler, on retrouve aussi que c'est longitudinal comme ça):

$$p_1 = \rho_0 c_s v_1 \tag{2.32}$$

On peut alors définir l'impédance acoustique comme étant une grandeur représentant le rapport entre la grandeur qui provoque la perturbation et la réponse du milieu à cette perturbation et on obtient ainsi (pour une propagation dans les x positifs toujours hein, on rajoute le débit dans des conduites aussi):

$$Z = \frac{p_1}{v_1} = \rho_0 c_s = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}} \tag{2.33}$$

Cette impédance ne dépend que des propriétés du milieu ! Elle est d'autant plus grande que le milieu est dense est peu compressible. On a alors $Z^{solide} > Z^{liquide}$ » Z^{gaz}. On peut faire l'analogie avec l'électrocinétique en remarquant que la tension est l'analogue de la pression (grandeur perturbatrice) et que le courant est la réponde du mileu.

3 II: Aspects énergétiques

C'est bien joli tout ça mais si on est des vrais physiciens on peut savoir comment ça se passe avec l'énergie.

3.1 Puissance échangée à travers une surface

On considère une surface élémentaire d$\vec{S}$ qui sépare le fluide en une partie 1 perturbée et une partie 2 où il est au repos. La force de pression exercée par la première partie sur la seconde vaut:

$$d\vec{F} = p_1 d\vec{S} \tag{3.1}$$

et la puissance associée est :

$$dP = d\vec{F}\cdot\vec{v}_1 = p_1\vec{v}_1\cdot\vec{S} \tag{3.2}$$

On définit le vecteur de Poynting acoustique, vecteur densité de puissance sonore, par $\vec{\Pi}$=$p_1\vec{v}_1$; il est homogène à une puissance par unité de surface (W.m^{-2}). Il s'agit de l'analogue du vecteur de Poynting en électromagnétisme ou du vecteur courant de matière pour l'équation de conservation de la masse; c'est le vecteur densité de courant d'énergie acoustique associé à l'onde sonore. Si on veut puissance totale c'est intégrale de ce vecteur sur toute la surface séparatrice:

$$P = \oiint_\Sigma \vec{\Pi}\cdot\vec{dS} \tag{3.3}$$

Avec Green-Ostrogradski, on a alors (on perd de de l'énergie):

$$P = \oiint_\Sigma \vec{\Pi}\cdot\vec{dS} = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi})dV = -\frac{d}{dt}\left(\iiint_V e dV\right) \tag{3.4}$$

Ainsi, on peut écrire l'équation locale de conservation de l'énergie (le fait d'avoir négligé les phénomènes d'amortissement explique l'absence de second membre. Pour ce modèle, l'énergie acoustique d'un système isolé doit se conserver):

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi} = 0 \tag{3.5}$$

avec e, la densité d'énergie volumique du fluide. Pour déterminer e, on repart des équations de continuité (réécrite suivant la pression grâce à la relation thermo) et d'Euler:

$$\chi_s\frac{\partial p_1}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{v}_1 = 0 \tag{3.6}$$

$$\rho_0\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla}p_1 \tag{3.7}$$

On multiplie 3.6 par p_1, on multiplie scalairement 3.7 par $\vec{v}_1$ et on somme. On obtient:

$$\chi_s p_1\frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}\cdot\vec{v}_1 + p_1\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_1 + \vec{v}_1\cdot\vec{\nabla}p_1 = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\chi_s p_1^2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_0 v_1^2\right)+\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}=0 \tag{3.9}$$

avec en marron, le terme e_c de densité volumique d'énergie cinétique de l'onde sonore, en orange, le terme e_p de densité volumique d'énergie potentielle de l'onde sonore. Ce terme représente l'énergie stockée localement par le fluide qui se dilate et se comprime (analogue à l'énergie potentielle élastique d'un ressort dont la longueur varie par rapport à sa valeur au repos) et donc e = e_c+e_p. Pour une OPPH (confère partie sur l'impédance acoustique, plus précisément équations 2.32 et 2.33), on retrouve l'équipartition de la densité d'énergie volumique (analogie électromagnétisme):

$$\frac{1}{2}\chi_s p_1^2=\frac{1}{2}\chi_s Z^2 v_1^2=\frac{1}{2}\rho_0 v_1^2=\frac{e}{2} \tag{3.10}$$

3.2 Intensité acoustique

L'intensité acoustique I est la moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting acoustique et s'exprime en $W.m^{-2}$ (le un-demi vient de la moyenne d'un cos carré) :

$$I=<\|\vec{\Pi}\|>=\frac{1}{2}p_{amp}v_{amp}=\frac{1}{2}Zv_{amp}^2=\frac{1}{2}\frac{p_{amp}^2}{Z} \tag{3.11}$$

L'oreille étant un détecteur logarithmique, on définit le niveau sonore, qui désigne l'intensité sonore en décibel comme:

$$I_{dB}=10\log\frac{I}{I_o} \tag{3.12}$$

avec $I_0 = 10^{-12}$ $W.m^{-2}$, le seuil d'audibilité. Avec une intensité de 1 $W.m^{-2}$ correspondant au seuil de pénibilité, et 10^-6 $W.m^{-2}$ à une voix humaine à peu près.

Quelques ordres de grandeur: Pièce calme (20dB), conversation (60dB) et avion 120(dB). Le minimum d'audition de l'oreille humaine est d'environ 0 à 10 dB. Le seuil de douleur est atteint vers 120 dB.

4 III: Interface entre 2 milieux

4.1 Réflexion/transmission en amplitude

On considère deux milieux fluides séparés par une interface plane. On s'intéresse au comportement de ce système en présence d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) incidente se propageant perpendiculairement au dioptre qui sépare les milieux. Le milieu 1/2 possède une densité au repos $\rho_{01/02}$, le son s'y propage à la vitesse $c_{1/2}$, est d'impédance acoustique $Z_{1/2}$ et s'écoule dans une conduite de section S (même pour les deux). L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise d'expression générale:

$$p_i(x,t)=p_{amp}\cos(\omega t-k_1x) \tag{4.1}$$

$$Sv_i(x,t)=\frac{p_i(x,t)}{Z_1} \tag{4.2}$$

$$p_r(x,t) = r\ p_{amp} \cos(\omega t + k_1 x) \tag{4.3}$$

$$Sv_r(x,t) = \frac{p_r(x,t)}{-Z_1} \tag{4.4}$$

$$p_t(x,t) = t\ p_{amp} \cos(\omega t - k_2 x) \tag{4.5}$$

$$Sv_t(x,t) = \frac{p_t(x,t)}{Z_2} \tag{4.6}$$

Pour déterminer les caractéristiques des ondes réfléchie et transmise, il faut préciser les conditions aux limites vérifiées par la vitesse et la surpression à l'interface. On a conservation de la pression à l'interface et conservation du débit, donc conservation de la vitesse puisque S identique de part et d'autre de l'interface (tout ceci grâce à l'approximation acoustique et plus exactement par le fait que l'on peut considérer le déplacement, conséquent au passage de l'onde acoustique, comme négligeable). Ainsi on peut écrire:

$$p_i(x,t) + p_r(x,t) = p_t(x,t) \tag{4.7}$$

$$v_i(x,t) + v_r(x,t) = v_t(x,t) \tag{4.8}$$

Ainsi à l'aide de l'expression de l'impédance acoustique:

$$Z_1\ (v_i(x,t) - v_r(x,t)) = Z_2\ v_t(x,t) \tag{4.9}$$

$$v_i(x,t) + v_r(x,t) = v_t(x,t) \tag{4.10}$$

On peut alors exprimer r et t de la façon suivante:

$$r = \frac{p_r}{p_i} = \frac{-Z_1\ v_r}{Z_1\ v_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \tag{4.11}$$

$$t = \frac{p_t}{p_i} = \frac{Z_2\ v_t}{Z_1\ v_i} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{4.12}$$

On constate que le coefficient de transmission est un réel positif, les grandeurs incidentes et transmises sont en phase.

4.2 Réflexion/transmission en énergie

Le coefficient de réflexion (de transmission) en énergie représente le rapport entre la puissance moyenne réfléchie (transmise) et la puissance moyenne incidente. Il faut donc considérer la moyenne des vecteurs densité de courant d'énergie (l'intensité quoi) :

$$I_i = \frac{1}{2} \frac{p_{amp}^2}{Z_1} \tag{4.13}$$

$$I_r = \frac{1}{2} \frac{r^2\ p_{amp}^2}{|-Z_1|} \tag{4.14}$$

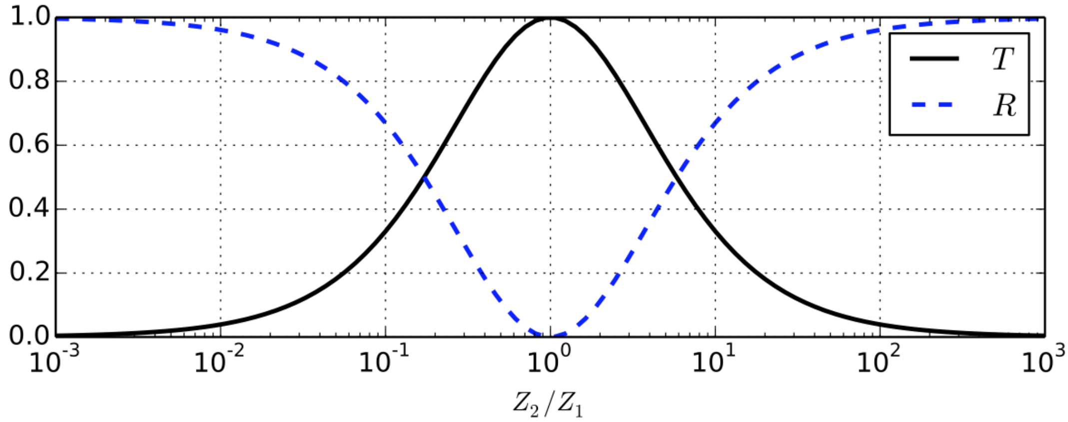

Figure 4.1: Évolution des coefficients en fonction du rapport d'impédance

$$I_t = \frac{1}{2}\frac{t^2\, p_{amp}^2}{Z_2} \tag{4.15}$$

On exprime avec R et T, les coefficients de réflexion et transmission en énergie comme suit:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = r^2 = \left[\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right]^2 \tag{4.16}$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = t^2\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{4Z_2Z_1}{[Z_1 + Z_2]^2} \tag{4.17}$$

On vérifie alors la relation R + T = 1 qui assure la conservation de l'énergie à l'interface. Aussi on voit que pour des milieux d?impédances acoustiques semblables, la transmission sera efficace. On parle alors d'adaptation d'impédance (analogie avec électricité, A.O. suiveur et tout ça). Dans le cas contraire l'onde sera essentiellement réfléchie (exemple de l'interface air-eau: "on n'entend pas chanter les baleines"). Pour l'air, Zair ≈440kg.m^{-2}.s^{-1}, et pour l'eau, Zeau =1,4.10^{-6} kg.m^{-2}.s^{-1}. Pour l'interface air-eau T = 1,3.10^{-3}, on n'entend donc pas les bruits aériens quand on plonge la tête sous l'eau.

5 La manip du Tube de Kundt

Brève description: Un tube de Kundt est rempli d'air à Tambiante (faut trouver le moyen de le chauffer/refroidir avec ce qu'on a au labo, on n'a pas eu d'idée nous). De part les conditions limites (tu bouches les deux côtés), des ondes stationnaires/quasi-stationnaires vont apparaître. À l'aide du dispositif Haut-parleur/Microphone, on peut repérer les noeuds de vibrations sur un oscilloscope et ainsi remonter à la longueur d'onde des OS. Comme on connait la fréquence d'excitation on remonte à c$_s$.

Lorsque l'on envoie une onde progressive sur un obstacle en incidence normale, celui-ci la renvoie dans l'autre sens. Cette onde réfléchie interfère avec l'onde incidente pour former une onde qui sera dite stationnaire si l'obstacle est parfaitement réfléchissant.

Démo: Considérons le cas où l'obstacle, fixé en 0, réfléchit complètement l'onde incidente (i pour incident et r pour réfléchi) issues d'un haut-parleur fixé en x=L et intéressons au déplacement ϵ(x,t) d'une particule d'air situé en x à l'instant t (le déplacement des particules fluides obéit à la même équation d'onde):

$$\epsilon(x,t) = A_r cos(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \phi_r) + A_i cos(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} + \phi_i) \tag{5.1}$$

L'obstacle étant fixe, le déplacement du fluide est nul à la surface de celui-ci. Par conséquent, en x=0, on a:

$$0 = \epsilon(0,t) = A_r cos(\omega t + \phi_r) + A_i cos(\omega t + \phi_i) \tag{5.2}$$

ce qui implique A_r=A_i et ϕ_r=$\phi_i + \pi$. L'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde incidente de sorte que l'onde résultante s'écrit:

$$\epsilon(x,t) = -2A_i sin(\omega t + \phi_i) sin(\frac{2\pi x}{\lambda}) \tag{5.3}$$

Si le signal acoustique est une onde sinusoïdale d'amplitude a, on a une seconde condition aux limites :

$$\epsilon(L,t) = asin(\omega t) = -2A_i sin(\omega t + \phi_i) sin(\frac{2\pi L}{\lambda}) \tag{5.4}$$

ce qui implique ϕ_i=0 et -2$A_i$sin($\frac{2\pi L}{\lambda}$)=a d'où l'on déduit:

$$\epsilon(x,t) = a\frac{sin(\frac{2\pi x}{\lambda})}{sin(\frac{2\pi L}{\lambda})} sin(\omega t) \tag{5.5}$$

Les variables d'espace et de temps de l'onde résultante étant découplées, il n'y a plus propagation. On comprend alors qu'il existe des points de l'espace, appelés noeuds où l'amplitude est constamment nulle. Ces noeuds sont tels que:

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = k\pi \tag{5.6}$$

Ainsi deux noeuds sont séparés par:

$$\Delta x_n = \frac{\lambda}{2} \tag{5.7}$$

Les points de l'espace où l'onde passe par une amplitude maximale sont les ventres de l'onde stationnaire. Ils vérifient:

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \tag{5.8}$$

de sorte à être séparés de

$$\Delta x_v = \frac{\lambda}{2} \tag{5.9}$$

L'amplitude des ventres dépend du terme:

$$\sin(\frac{2\pi L}{\lambda}) \tag{5.10}$$

Lorsque ce terme est nul, l'onde est théoriquement infinie sur les ventres. Bien sûr, pour des raisons évidentes (dissipation d'énergie) l'amplitude n'est pas infinie mais grande. On est alors en présence d'une résonance d'onde stationnaire qui se présente lorsque la cavité a pour longueur un multiple de $\frac{\lambda}{2}$ ce qui se produit pour certaines fréquences de résonance (pas obligé de se placer à la résonance mais il faudra le signaler):

$$L = k\frac{\lambda}{2} \tag{5.11}$$

$$\nu_k = k\frac{c_s}{2L} \tag{5.12}$$

6 Conclusion

Idée que la mécanique des fluides, avec les approximations qui vont bien, permet de modéliser assez efficacement et fidèlement la propagation des ondes acoustiques. Sans oublier le petit outil de thermo qui fait la diff. Faire des analogies des notions avec d'autres domaines (Impédance, Poynting). Insister sur l'importance de l'impédance acoustique en présentant les applications comme la technologie des échographies (en poussant jusqu'à l'effet Doppler si vous êtes chauds).