

NF

- particulaire
- ondulatoire

Notion de particule d'onde

De Broglie

En 1924, Einstein propose pour expliquer l'effet photoélectrique que la lumière (onde électromagnétique) de pulsations ω et de vecteur d'onde \vec{k} se présente sous la forme de quanta élémentaires (équations de rayons) d'énergie $E = \hbar\omega$ et de impulsion $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. (photon)

	propriété ondulatoires	propriétés corpusculaires	10^{-8}
lumière	ω, \vec{k} équation de Maxwell diffuse + intégrée	$\vec{p} = \hbar\vec{k}$ $E = h\nu$	
particule matériel de masse m ex: e^-	$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$	$\vec{p} = m\vec{v}$	

De Broglie et Einstein postulent donc que la lumière et les particules matérielles possède à la fois des propriétés ondulatoires et corpusculaires. Cela va à l'encontre de notre intuition classique: en effet un objet matériel est classiquement limité dans l'espace il a une position et une trajectoire qui peuvent être obtenue aux lois de Newton. Dans cette représentation classique on s'imagine mal comment un tel objet puisse se propager comme une onde, se diffuser et produire des interférences. Cela n'a aucun sens classiquement.

L'objectif de cette leçon est de (1^{re} partie) comprendre que notre représentation classique aboutit à des contradictions, puis de proposer un outil et un autre formalisme qui permette de concilier les aspects corpusculaires et ondulatoires de la nature → aboutissant à la théorie de la particule d'onde.

Précédus

Questions ferme main

• Pourquoi $E = mc^2$

I - Diffraction des ondes de matières et des grains de lumière

1989.

Vidéo
sous-tit
Pa
au
le f
film
Le c
Pou
me

- La théorie dans lequel de Broglie travailait n'a pas pu mettre en évidence expérimentalement les hypothèses de Broglie selon lesquelles une particule possède des états ondulatoires.

- 1927 : Davisson et Germer 3 ans + tard.
 ↳ 1937 Nobel
 ↳ USA

Sur un cristal de nickel un faisceau d'électrons monochromatique (même \vec{p}) obtenu par effet à partir d'un filament métallique chauffé on recueille les électrons sur une plaque fluorescente. On observe des taches distinctes correspondant à des franges diffusées bien définies :

Les taches de diffraction sont les m^{es} si $\lambda_{DD} = \lambda_x$

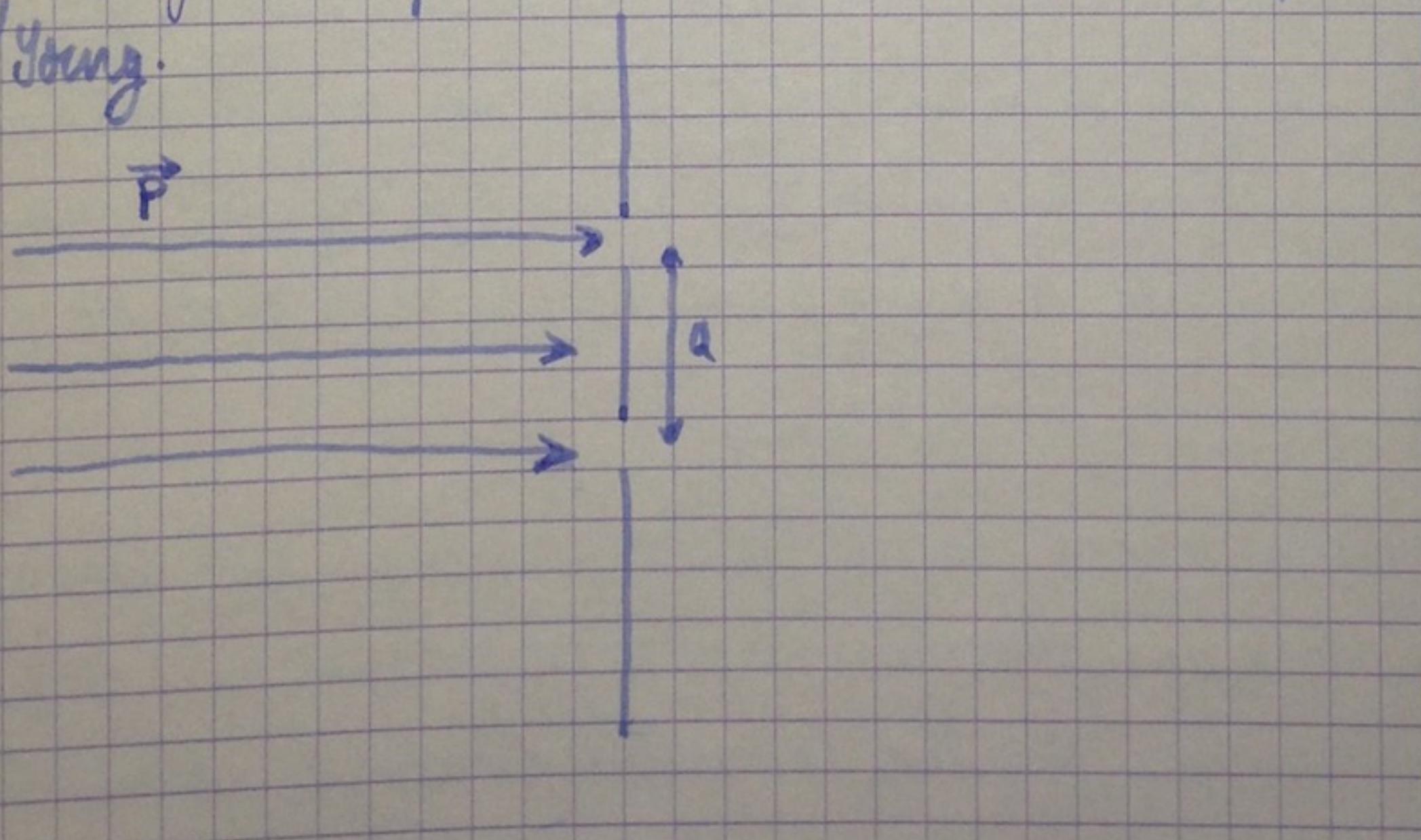
$$\lambda \propto \frac{1}{m} \quad \uparrow \lambda$$

$$\sqrt{\frac{2E}{m}} \quad \downarrow \quad 100 \text{ eV} \quad \lambda = 10 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

[0,1 → 3 nm]

→ plus spectaculaire → un virus → interférence

- L'expérience que je vais présenter est due à Davisson et Germer. Il s'agit d'envoyer des corpuscules (je dis, moins) sur un interféromètre que nous allons assimiler aux similitudes à des franges d'Young.



Sur l'écran, on va capter le point d'impact des particules. En calculant le flux de particules incidentes, on va capter de vis à point à tout poste chaque électron.

1992

Thème

• Pourquoi E uniforme dans le transit

1989.

- Vidéo: Tononuma et son équipe ont réalisé le montage suivant.
- source d'électrons : énergie : 50 keV (vitesse $\frac{c}{4}$)
 - les électrons sont détectés par un film photographique à 1 cm de distance. On visualise les points d'impact.
 - le flux est de $10 \text{ e}^-/\text{s}$
 - filament 1 pm d'épaisseur.
 - Le champ E créé par $2V$ entre plaques et électrons est dévié. Les électrons et le système est équivalent à un biprisme de Fresnel en optique.

1992

Thémis

atomes

Neon

$a = 6 \text{ pm}$

76 mm

h

113 mm

0,2 mm

écran de détection

$$P = n_a \cdot \sigma = \frac{M}{N_A} \times \sqrt{2gR} = 6,4 \cdot 10^{-26} \text{ kg cm s}^{-1}$$

$$\lambda_{DD} = \frac{\lambda}{P} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}}{6,4 \cdot 10^{-26}} = 1,0 \cdot 10^{-8}$$

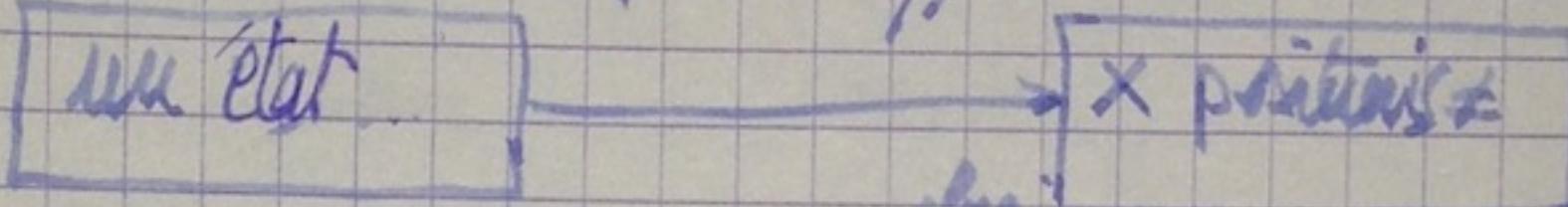
$$I = \frac{\lambda_{DD} P}{\alpha} = \frac{10^{-8} \times 113 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-6}} = 0,19 \text{ mm}$$

L'expérience peut aussi être réalisée avec une source lumineuse dont on aurait considérablement réduit l'intensité. On observerait sur l'écran de détection des points d'impact des photons.

Animation

2) Mise en cause du formalisme classique

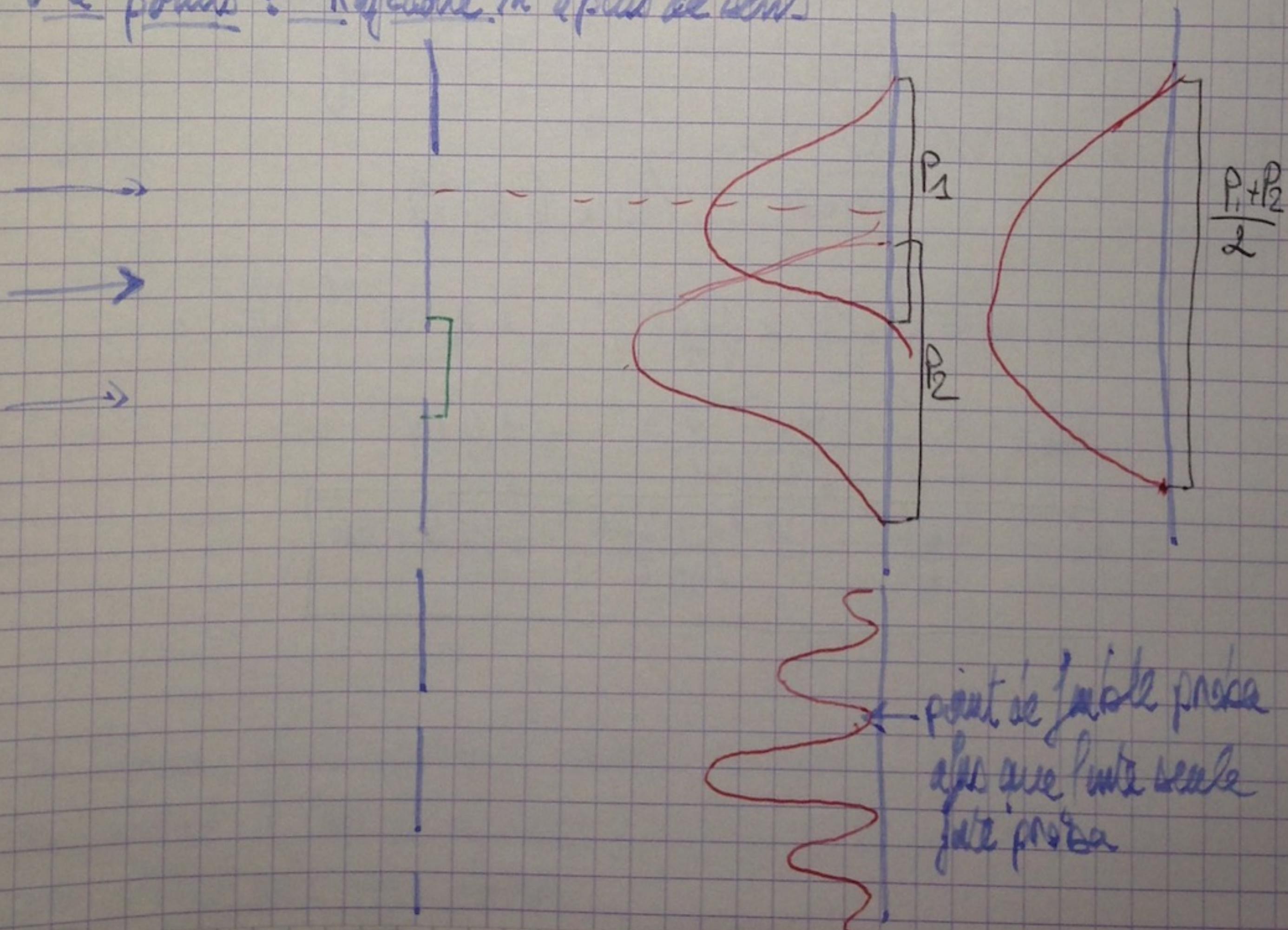
- 1^{er} point : Probabilité : en admettant que les photons soit préparés dans les mêmes conditions initiales (vite impulsion, v₀ posé initial) J'obtiens des points différents sur l'écran.



candidat un un état est caractérisé par des grandeurs physiques (position, impulsion)

qui mais peut-être pas à une condition initiale on ne connaît pas tout bien.

- 2^{er} point : Trajectoire n'a plus de sens



- On ne peut plus dire que partie à un état que ce n'est pas pas comme la fréquence

En optique : on s'en sortait car on ne connaît pas les intensités mais les amplitudes du champ \vec{E} .

$$\langle \|\vec{E}(R,t)\|^2 \rangle = \langle |\vec{E}_1|^2 \rangle + \langle |\vec{E}_2|^2 \rangle + 2 \underbrace{\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2(R,t) \rangle}_{\text{terme d'interférence}}$$

$\vec{E}(R,t) = \vec{E}_1(R,t) + \vec{E}_2(R,t)$ théorème de superposition

Nous allons voir dans le paragraphe suivant que la formalisme quantique nous amène par le principe de superposition et la notion d'onde à la fois des amplitudes (non pas de champ \vec{E}) mais de densité de probabilité d'ondes :

II - Formalisme quantique : théorie d'onde

II Fonction d'onde et Principes fondamentaux

Nous avons vu que les formalismes de la mécanique classique (ie onde et de corpuscule) ne permettent pas d'expliquer les expériences d'interférences. Le concept qui permet à la fois d'expliquer le caractère ondulatoire et corpusculaire est la fonction d'onde. La définition est donnée dans un des principes fondamentaux de la méca quantique.

1- Principe - (définition) de la fonction d'onde et Principe de superposition.
La légitimité d'un principe réside dans la réalité physique de ses conséquences.

- La description complète d'un système se fait au moyen de une fonction d'onde complexe $\Psi(\vec{r}, t)$ système isolé

- Règle de Born : La probabilité qu'un appareil de mesure trouve la particule à l'instant t dans le volume dV entourant \vec{r} est

$$d^3P = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV$$

ψ_1 : l'unité de la fonction d'onde : $m^{-3/2}$

$$\int \Psi(\vec{r}, t)^2 dV = 1$$

\Rightarrow appareil de mesure

\Rightarrow amplitude de densité de proba.

\Rightarrow norme

En quoi ce concept permet d'expliquer les interférences?

- Dans la partie précédente, nous avons vu que $P(x) \neq P_1(x) + P_2(x)$
- Cela est similaire avec l'étalement $E \neq E_1 + E_2$
- On travaillait avec le champ \vec{E} qui vérifie le principe de superposition

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_1(M, t) + \vec{E}_2(M, t)$$

$$\hookrightarrow \text{équipot de } \langle 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 / M, t \rangle \rangle$$

L'origine d'interférence.

- S'est passé en mécanique quantique :

Si un état peut être décrit par une 1^{re} onde $\Psi_1(\vec{r}, t)$

et $\Psi_2(\vec{r}, t)$. Alors un état combinatoire linéaire

$$\Psi(\vec{r}, t) = \alpha \Psi_1(\vec{r}, t) + \beta \Psi_2(\vec{r}, t)$$
 est aussi un état

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t)$$

La somme de probabilité
relatif à l'ondelette
peut être vue

en faisant varier t

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1 \psi_2^* + \psi_2 \psi_1^*$$

forme d'interférence.

2) On démontre que la somme de probabilités de l'onde et de l'ondelette est constante dans le temps.

Il suffit de montrer que $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ est une fonction constante du temps.

Nous venons de voir à propos de définir un système mécanique quantique. Une loi dynamique (l'Eq de Heisenberg qui le cpt l'autre) temporelle des systèmes quantiques mène chose pour ce sysd quantique.

2) Équation de Schrödinger (1933. Heisenberg)

La fonction d'onde vérifie l'équation : ↳ système isolé

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t) \Psi(\vec{r},t)$$

$V(\vec{r},t)$ est le potentiel dans lequel est placée la particule.

Appliquons : cas libre pas de force $\rightarrow V(\vec{r},t) = 0$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r},t)$$

Linéarité : \rightarrow superposition dans la base de Fourier

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}(n) \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

Solution sous la forme $\Psi(\vec{r},t) = \Psi_0 \exp(-i\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$

Un instantant \rightarrow état de dispersion

$$\boxed{\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}}$$

$$\hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} : p = \hbar k$$

$$\hbar \omega = \frac{p^2}{2m} = E_{\text{kin}}$$

on retrouve le postulat de de Broglie: \rightarrow onde de de Broglie.

\vec{H} uniforme dans la sphère

3) Représentation impulsion

En introduisant la TF de $\Psi(\vec{k}, t)$,

$$\tilde{\Psi}(\vec{P}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \Psi(\vec{k}, t) \exp(-i\frac{\vec{P}\cdot\vec{k}}{\hbar}) d\vec{k}$$

$dP = |\tilde{\Psi}(\vec{p}, t)|^2 d\vec{p}$: probabilité de mesurer dans un intervalle $d\vec{p}$ entourant \vec{p} (\vec{p} à $d\vec{p}$ près)

$$\bullet \int |\tilde{\Psi}(\vec{p}, t)|^2 dP = 1 \quad (\text{isométrie TF})$$

Pascal-Planckien

$$\bullet i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}(\vec{p}, t)}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} \tilde{\Psi}(\vec{p}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow -i\frac{\partial}{\partial p}$$

en intégrant : $\tilde{\Psi}(\vec{p}, t) = \tilde{\Psi}(\vec{p}, 0) \exp\left(-\frac{p^2}{2m\hbar^2} t\right) \Rightarrow$ rules de dispersion

$$= \tilde{\Psi}(\vec{p}, 0) U(p, -wt)$$

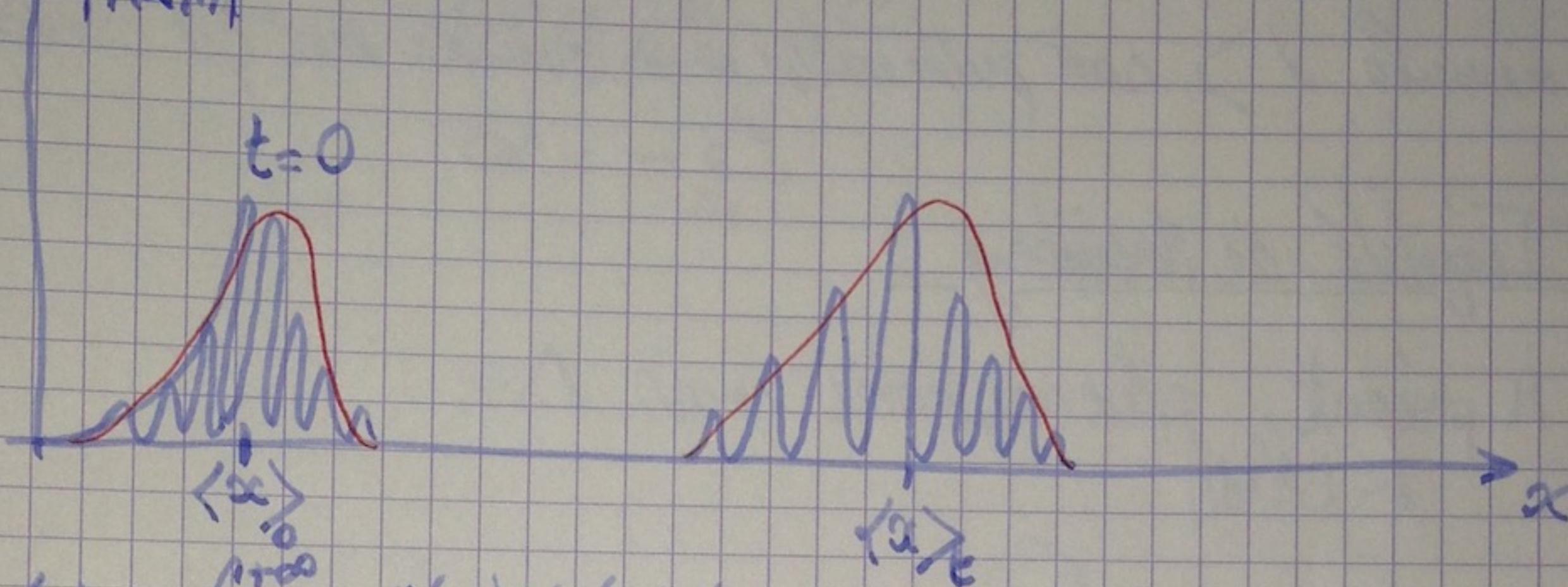
$$|\tilde{\Psi}(\vec{p}, t)|^2 = |\tilde{\Psi}(\vec{p}, 0)|^2$$

Cpt physique : intervalle de l'impulsion \Leftrightarrow intervalle de l'amplitude de DDP.

nuage. Ψ uniforme dans le Trans-

B) Paquet d'ondes libre

- L'onde de de Broglie est un cas limite d'une onde stationnaire étendue. $\Psi_{\text{stationnaire}}$.
- $w = \frac{\hbar k^2}{2m} \rightarrow \Psi_k = \frac{\hbar k}{2m} \rightarrow$ dispersion.
- On considère un paquet d'onde qui à $t=0$
 $\uparrow |\Psi(x,0)|^2$



$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t) \Psi(x,t) dx$$
$$= i \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}^*(k,t) \frac{\partial \tilde{\Psi}(k,t)}{\partial k} dk$$

On inscrit l'équation de Schrödinger en représentant k après avoir divisé

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}(k,t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tilde{\Psi}(k,t)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}^*}{\partial t} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tilde{\Psi}^*$$

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} \frac{\partial \tilde{\Psi}^*}{\partial k} dk + i \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}^*(k,t) \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(k,t)}{\partial k^2} dk$$
$$= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hbar k}{(-i\hbar) 2m} \tilde{\Psi}^* \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial k} dk + i \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}^*(k,t) \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tilde{\Psi}(k,t) dk$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}^*(k,t) \frac{i\hbar k}{2m\hbar} \tilde{\Psi}(k,t) dk$$

$$= \frac{k}{im} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}^*(k,t) \tilde{\Psi}(k,t) dk$$

$$\Psi_k = \frac{d\langle x \rangle}{dk} = \frac{k}{im} = \frac{K_P}{m} \rightarrow$$
 on retrouve la loi classique du mouvement

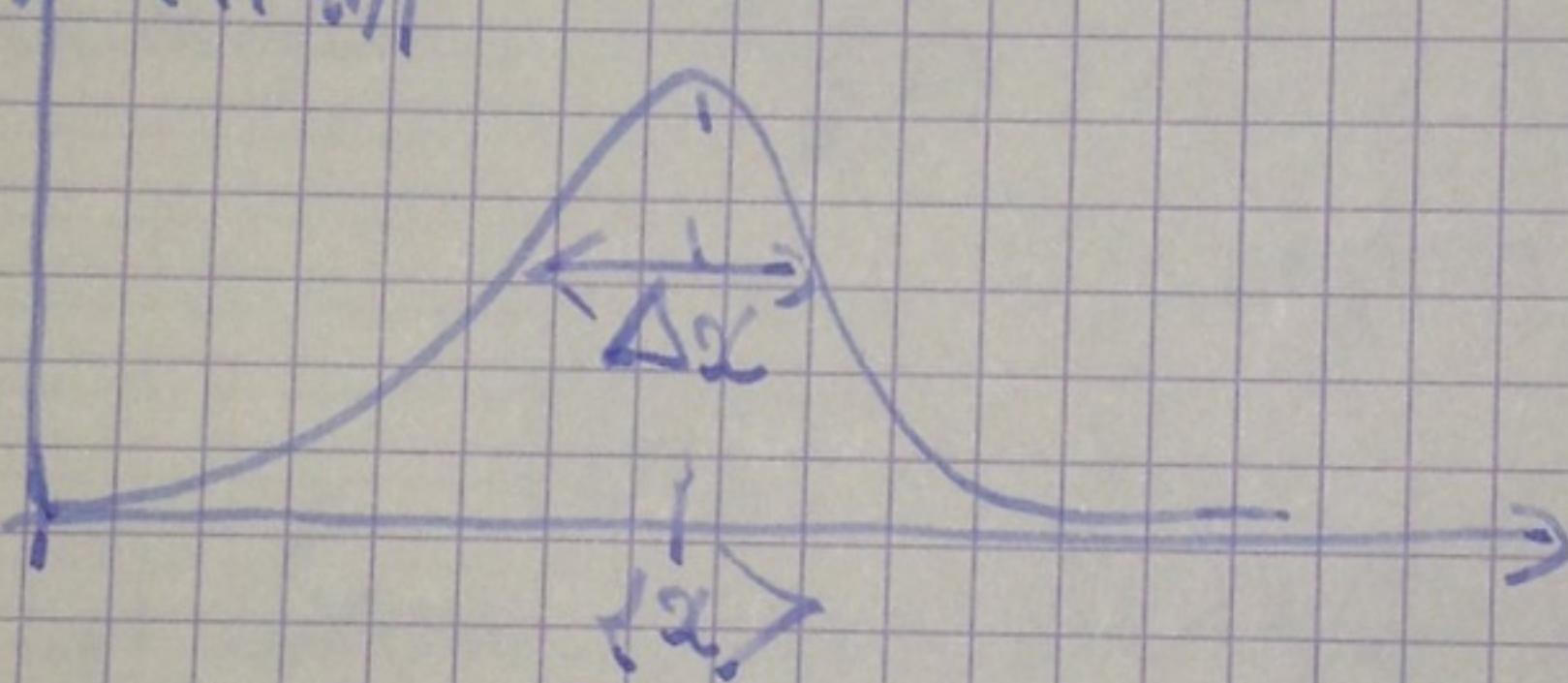
En utilisant des arguments similaires il est possible de montrer que

$$\boxed{\frac{d\langle p \rangle}{dt} = 0}$$

En quantique les grandeurs physiques "sont" impulsions n'ont plus de sens pour la plupart des systèmes (particule d'onde). En revanche $\langle \cdot \rangle$ sont pertinents \rightarrow coincide avec opt classique

3) Inégalité de Heisenberg

A présent, plus moyenne mais Δx



$$\Delta x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 |\psi(x)|^2 dx$$

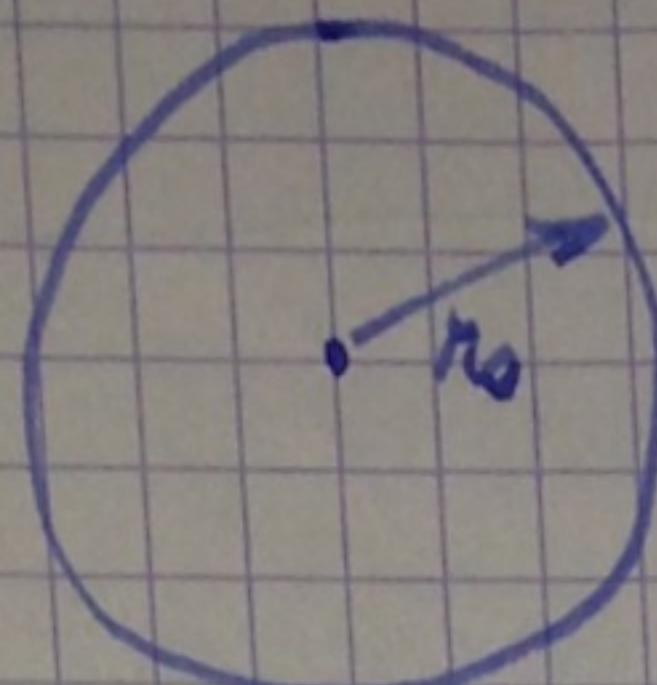
$$\Delta p^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (p - \langle p \rangle)^2 |\psi(p)|^2 dp$$

PT/TF: \rightarrow discal \rightarrow exp
 \rightarrow porteurs sinc ($\pi \Delta x h$)

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

du travail

8. assignement :



électron à une trajectoire circulaire
(modèle de Bohr)

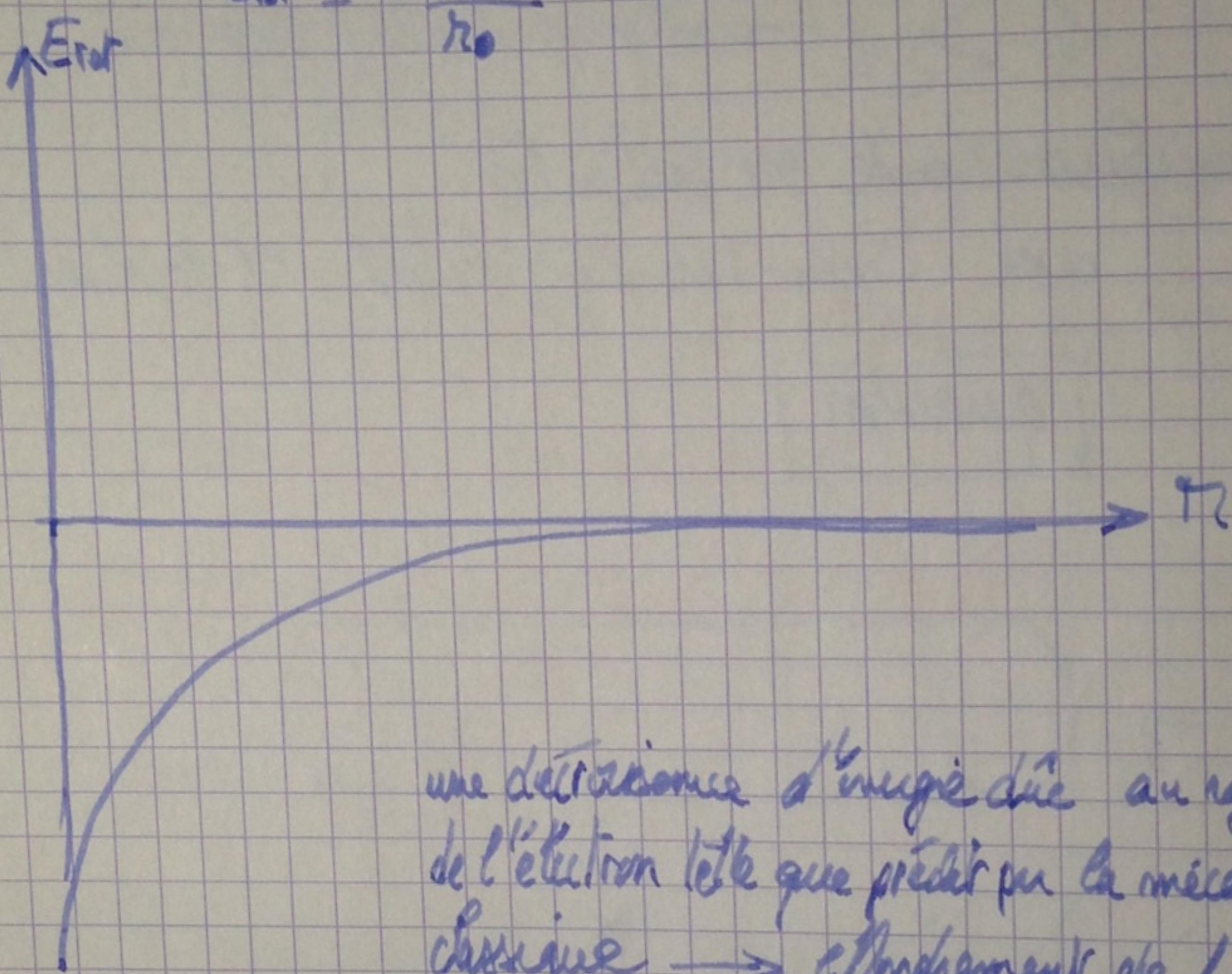
$$c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{r_0}$$

$$PFD \frac{mv^2}{r_0} = \frac{e^2}{r_0^2}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r_0} - \frac{c^2}{r_0}$$

$$E_{tot} = -\frac{e^2}{r_0}$$



une déstabilisation d'un état dû au recouvrement de l'électron tel que prédit par la mécanique classique \rightarrow effondrement de l'électron sur l'atome.

grâce à l'intégralité de Heisenberg \rightarrow stabilité, pas à l'effondrement

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} \langle \cancel{mcv^2} \rangle = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle = \frac{\Delta p^2}{2m}$$

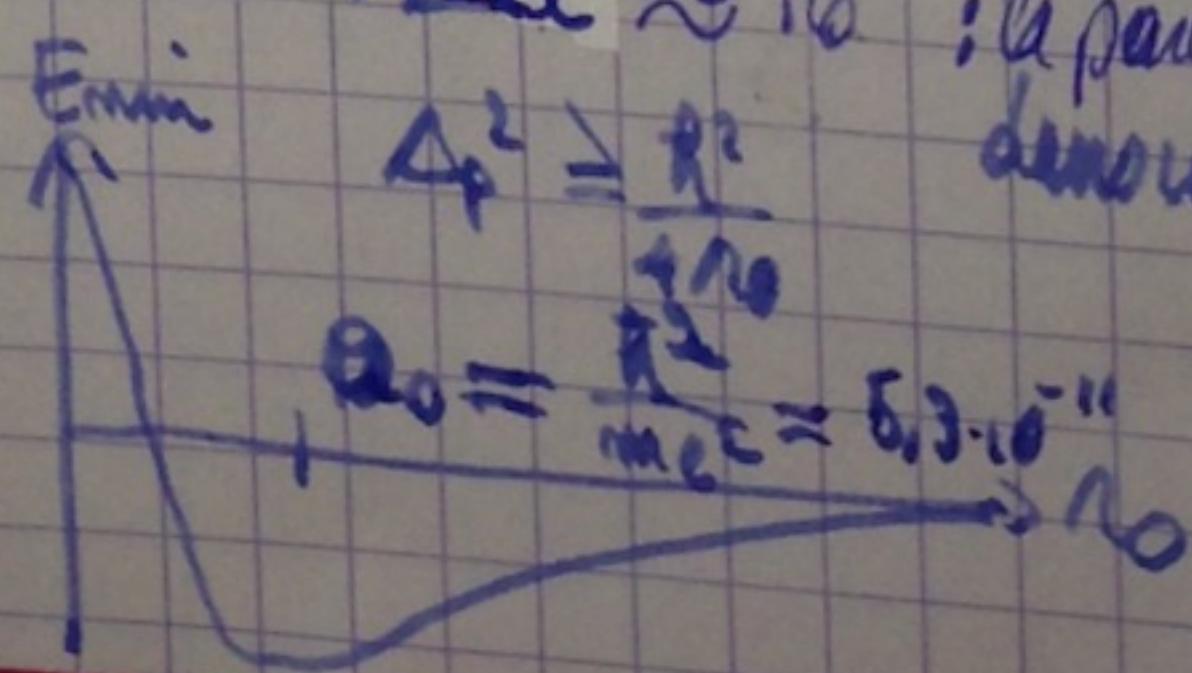
$\langle p \rangle = 0$ (en moyenne)
pas nul.

$$\langle E_p \rangle = \left\langle -\frac{e^2}{r_0} \right\rangle \approx -\frac{e^2}{r_0}$$

$$\langle E_{tot} \rangle = \frac{\Delta p^2}{2m} - \frac{e^2}{r_0}$$

$$E \Rightarrow \frac{R^2}{2mr_0^2} - \frac{e^2}{r_0}$$

$$E_{min} = \frac{R^2}{2mr_0^2} - \frac{e^2}{r_0}$$



$\Delta x \approx r_0$: la particule est confinée dans un volume r_0^3

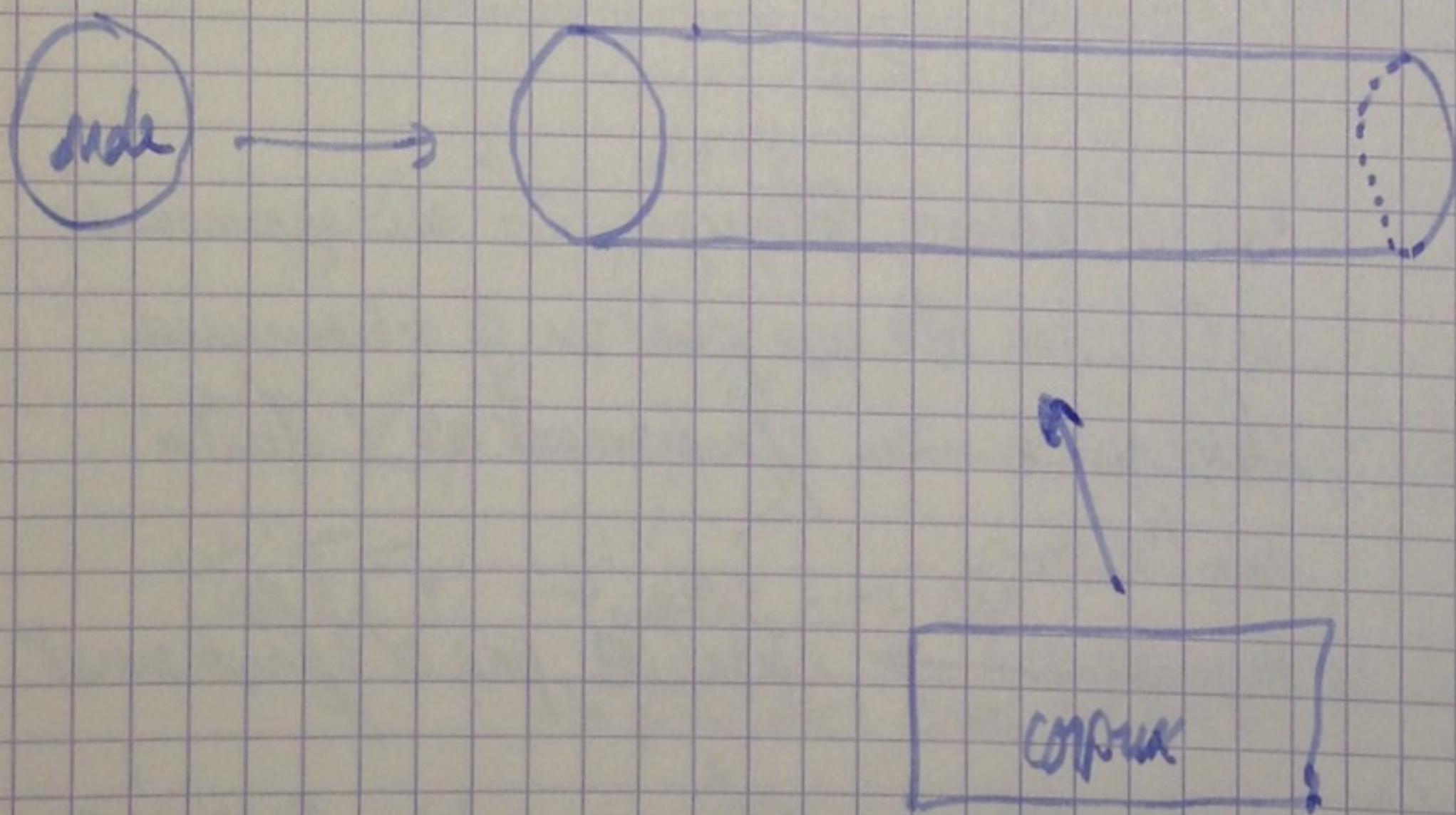
$$\Delta p^2 \geq \frac{R^2}{r_0^3}$$

$$R_0 = \frac{R^2}{mr^2} \approx 5.3 \cdot 10^{-11}$$

Conclusion :

- on est parti de la chance (onde-particle)
- finalisme classique plus adaptée
- fonction d'onde → formalisme probabiliste
- Sert plus à rien de définir particules par trajectory
- $\langle \rangle$: vitesse moyenne
- $\langle \rangle >$: \rightarrow retrouve résultat classique
- \rightarrow continuité : onde ou particule
nom Jean-René Lévy-Bérard et F. Bachelin

Quantum



On devrait peut-être régulièrement parler de quantum.

Application :

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{P}{N} \cancel{\text{fond}} = P \times L \quad \text{premier} \\
 &= \frac{P \delta}{C} \times L \quad \text{Région des pertes} \\
 N: \Omega^{-1} &= \frac{N \hbar \omega_0}{E \hbar} \\
 &\approx N \hbar \omega_0 \quad \frac{\omega}{\hbar} = C \\
 &\quad \text{constante} \\
 \textcircled{N \hbar} &>> 1 \\
 \text{onde classique} & \quad \omega_0 \sim 1 \\
 & \quad \hookrightarrow \text{quantique}
 \end{aligned}$$

• Pour connaître la forme d'onde

↳ get nombre de mesure

Reconstruction de la forme d'onde

• $N \propto$ dépend de k

complet : densité totale : pas d'informations supplémentaires

Schrödinger est déterministe

Schrodinger \leftrightarrow Routh \leftrightarrow 2^e principe de Newton

$$\Psi(\vec{r}, t) = \alpha (\Psi_1 + \Psi_2)$$

que nous ferons macro

• Pourquoi il est uniforme dans la longueur

o Plasma], action des projecteurs d'ions

↳ donne un caractère non déterministe.

→ question $S_x S_y \Rightarrow \dots$

$$\begin{pmatrix} \psi_{+}(z, t) \\ \psi_{-}(z, t) \end{pmatrix} \text{ : } \text{spineur}$$

$$|\Psi\rangle = |\psi_{+}(z, t)\rangle |+\rangle + |\psi_{-}(z, t)\rangle |-\rangle$$

→ Cohérence de la source

↳ dimension cette dispersion de vitesse

↳ 1997: Félix, Chirat Panagey réfrigérant laser

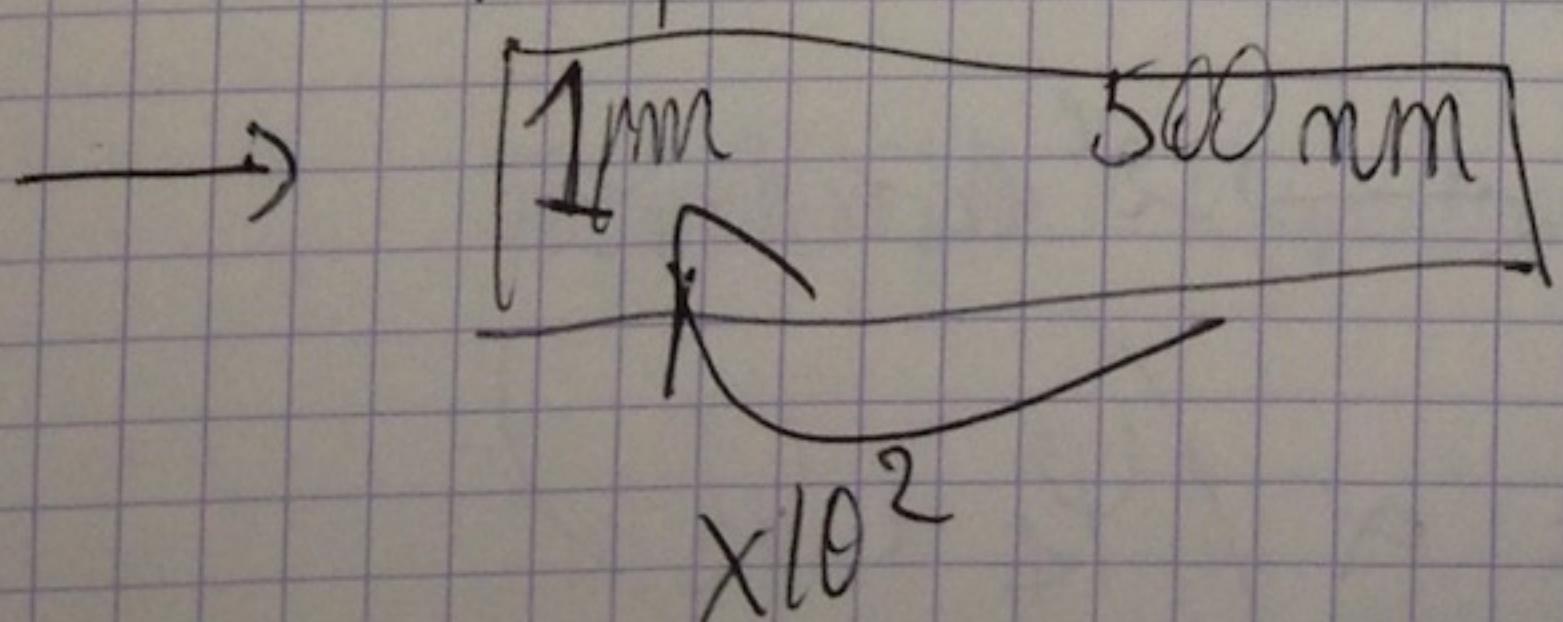
→ Détection atome / atom

Néon hyper excité qui frappe détecteur

↳ initial → détecteur

→ Hélium métastable super excité mais stable pour émission expérimentale

→ optique quantique



Rapport flux ion
atome de néon

- Comment
- Par quel mode de déplacement -
- l'électrode ?