



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

TP 3 - Un poco más de huevo...

MÉTODOS NUMÉRICOS

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo, predecir con la mayor anticipación posible la posición futura de una pelota en el campo de fútbol, utilizando la posición de la misma en el pasado, para coordinar los movimientos de nuestro arquero. Para resolver este problema computacionalmente, se decidió considerar el tiempo de manera discreta, el campo de fútbol como un plano de \mathbb{R}^2 .

Keywords: *Cuadrados Mínimos Lineales, Arquero robot*

Grupo 2

Integrante	LU	Correo electrónico
Franco Bartalotta	347/11	franco.bartalotta@hotmail.com
Fernando Gasperi Jabalera	56/09	fgasperijabalera@gmail.com
Erik Machicado	067/12	erik.machicado@hotmail.com
Ana Sarriés	144/02	abarloventos@gmail.com

Reservado para la cátedra

Instancia	Docente	Nota
Primera entrega		
Segunda entrega		



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

<http://www.exactas.uba.ar>

Índice

1. Introducción	3
2. Desarrollo	3
2.1. Descripción del método	3
2.2. Elección de las aproximaciones	5
2.3. Errores de medición	5
2.4. Jugadores rivales	6
3. Experimentación	6
3.1. Discusión sobre el método y sus variables	6
3.2. Bases generales	6
3.3. Experimentos	7
3.3.1. Evaluación del método	7
3.3.2. Grado del polinomio	7
3.3.3. Puntos a considerar	7
4. Resultados	8
4.1. Experimento de la convergencia del método	8
4.2. Experimento de tasa de efectividad en función del grado	9
4.3. Experimento de tasa de efectividad en función de los puntos considerados	9
4.4. Discusión	10
4.4.1. Convergencia del método	10
4.4.2. Grado del polinomio	10
4.4.3. Puntos a considerar	10
5. Conclusiones	10

1. Introducción

En el presente trabajo nos proponemos estudiar el problema de atajar un disparo de fútbol hacia la portería. Puntualmente tendremos control sobre el arquero y deberemos decidir en cada instante de tiempo en qué dirección debe moverse para lograr atajar el disparo. Impondremos un límite de desplazamiento al arquero por instante de tiempo. Es decir, cada vez que decidamos moverlo podremos hacerlo como máximo en una magnitud menor o igual al límite máximo de desplazamiento impuesto de antemano. La información con la que contaremos para decidir los movimientos del arquero son mediciones sobre la posición de la pelota para determinados instantes cuyo orden conoceremos. Las mediciones son realizadas a intervalos regulares de tiempo, de esta forma, nos queda discretizado el mismo en los instantes recibidos y sólo podemos saber el orden de los mismos pero ninguna información sobre la pelota entre dos instantes dados. Además, sabemos que las mediciones pueden tener ruido o errores propias de la misma medición. Los postes del arco están ubicados en coordenadas fijas, y la línea de gol es el segmento entre estos dos puntos. Se marca un gol cuando la pelota cruza este segmento. Visto desde arriba, la pelota es un círculo de radio determinado y el arquero se representa mediando un segmento paralelo a la línea de gol ubicado sobre la misma. Inicialmente el arquero se encuentra en un punto entre estos dos segmentos y en cada paso se le indica al arquero en qué sentido y en qué magnitud debe moverse, ya que la dirección sobre la que se mueve es siempre la misma, la línea de gol. Además contaremos con las posiciones de los jugadores rivales en el campo de juego. Para simplificar el alcance y el modelo propuesto asumiremos que la posición de los jugadores no varía con el tiempo aunque sí pueden intervenir en el juego y desviar la pelota con un remate al arco o un pase a otro jugador. En cada instante nuestro desafío reside en decidir cómo utilizar la información de los instantes anteriores y el actual para aproximar la posición por la que la pelota ingresará al arco y así mover al arquero a esa posición para atajarla. Para la predicción de la posición por donde entrará la pelota, nos basamos en el método de *cuadrados mínimos lineales*. Este método es particularmente adecuado para los casos en que se introducen errores de medición[?, 3.2] como ocurre en las mediciones de la trayectoria del balón.

La trayectoria de la pelota la formalizaremos mediante una función $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $p(t) = (x(t), y(t))$ donde t es el tiempo y $x(t)$ la coordenada x del balón en el instante t e $y(t)$ la coordenada y del balón en el mismo instante considerando que abstraemos al campo de juego como puntos en un eje de coordenadas en el cual los arcos se ubican paralelos al eje y . El método de cuadrados mínimos[?, 8.1] lo utilizaremos para calcular los coeficientes de dos polinomios $P_x(t)$ y $P_y(t)$ que aproximen a las funciones $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, de forma tal que el error cuadrático sea mínimo:

$$E_c(P_{x/y}) = \frac{\sum_{k=1}^n (x/y_k - P_{x/y}(t_k))^2}{n}$$

con n igual a la cantidad de mediciones y x/y_k el valor de la coordenada x o y de la medición realizada en el instante k .

2. Desarrollo

2.1. Descripción del método

Dado un instante t nosotros contamos con $(t + 1)$ mediciones de la posición de la pelota que se corresponden con los instantes $0, 1, \dots, t - 1, t$.

t	0	1	...	(t-1)	t
x(t)	x(0)	x(1)	...	x(t-1)	x(t)
y(t)	y(0)	y(1)	...	y(t-1)	y(t)

De esta forma la posición de la pelota queda descripta por una función $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $p(t) = (x(t), y(t))$. Nuestro procedimiento para decidir el sentido y la magnitud del desplazamiento del arquero para un instante t consiste de los siguientes pasos:

1. aproximamos la función $x(t)$ con cuadrados mínimos obteniendo $P_x(t)$
2. calculamos una raíz de $Q_x(t) = P_x(t) - x_{\text{posicionDelArco}}$ para conocer en qué instante t_{raiz} atraviesa la línea de meta
3. aproximamos la función $y(t)$ con cuadrados mínimos obteniendo $P_y(t)$
4. evaluamos $P_y(t)$ en t_{raiz} para obtener $P_y(t_{\text{raiz}}) = y_{\text{aproximacion}}$
5. calculamos el desplazamiento óptimo del arquero asumiendo que el disparo ingresará por $y_{\text{aproximacion}}$

El planteo formal del método de cuadrados mínimos para la aproximación de la función $x(t)$ (para $y(t)$ es análogo) es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0^n & \dots & 0^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t^n & \dots & t^1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(t) \end{pmatrix}$$

donde la cantidad de filas se corresponde con la cantidad de instantes t que consideramos de la trayectoria y n es el grado del polinomio con el que estimamos a $x(t)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones normales correspondiente al sistema anterior, obtenemos los coeficientes de $P_x(t)$. Para resolverlo utilizamos eliminación gaussiana por ser un métodos de simple implementación. Siempre podemos aplicar eliminación gaussiana porque el grado del polinomio que utilizamos para aproximar por cuadrados mínimos, g , es como máximo menor o igual a la cantidad de mediciones que tenemos menos 2. Esto lo decidimos así para nunca utilizar un polinomio interpolador, ya que el mismo sería sensible hasta a los errores de medición.

$$g \leq \#mediciones - 2 \implies \#columnas(A) \leq \#filas(A) - 2$$

por lo tanto la matriz A va a tener rango columna completo. La solución son los a_i con los que construimos el polinomio que aproxima a $x(t)$ de la siguiente forma:

$$P_x(t) = a_n * t^n + \dots + a_1 * t + a_0$$

Así resulta que $P_x(t)$ es el polinomio de grado n que minimiza la suma del error cuadrático con respecto a las mediciones.

La línea de meta se encuentra en un valor fijo de x al que nos referiremos como $x_{\text{posicionDelArco}}$. El arquero siempre está situado sobre ese valor $x_{\text{posicionDelArco}}$ y se mueve a lo largo del eje y . Nuestra estimación debe ser el valor de y por el cual el balón atravesará la línea de meta. Si $p(t) = (x(t), y(t))$ describe la trayectoria del balón y asumimos que existe un t_{gol} para el cual:

$$p(t_{\text{gol}}) = (x(t_{\text{gol}}), y(t_{\text{gol}})) = (x_{\text{posicionDelArco}}, y(t_{\text{gol}}))$$

a nosotros nos interesa aproximar $y(t)$ para poder evaluarla en t_{gol} y así conocer en qué valor de y el balón atravesará la línea de meta. Para aproximar $y(t)$ utilizamos el método de cuadrados mínimos ya explicado para aproximar $x(t)$ y obtenemos un $P_y(t)$. Luego, vamos a calcular t_{gol} con nuestro $P_x(t) \approx x(t)$:

$$P_x(t) = x_{\text{posicionDelArco}} \iff t = t_{\text{gol}} \quad (1)$$

$$P_x(t) - x_{\text{posicionDelArco}} = 0 \iff t = t_{\text{gol}} \quad (2)$$

Tomando $Q_x(t) = P_x(t) - x_{\text{posicionDelArco}}$ sabemos que si tiene raíces reales mayores al último instante t de la trayectoria entonces t_{gol} es una de ellas. Para encontrarla utilizamos el método de bisección [?,]. El intervalo inicial $[a, b]$ siempre es el mismo con $a = 0$ y $b = 10000$. Sabemos que

$Q_x(0) > 0$ porque el disparo siempre se origina dentro del campo de juego. Necesitamos un valor b para el cual sepamos que $Q_x(b) < 0$. Esto es lo mismo que pedir un instante t para el cual la posición de la pelota se encuentre del otro lado de la línea de meta según nuestra aproximación por cuadrados mínimos. Tomamos un valor lo suficientemente grande como para asegurarnos que el disparo haya terminado antes del mismo. Es cierto que esto no nos asegura que $Q_x(b) < 0$ porque podría ser que $Q_x(t)$ tuviera más de una raíz real mayor a 0. Si nos encontráramos con este caso lo descartaríamos. Sin embargo, consideramos que las probabilidades son bajas ya que para que el disparo termine en gol debe ir acercándose a la línea de meta hasta finalmente cruzarla. Que se vaya acercando hasta finalmente cruzarla lo traducimos a que $Q_x(t)$ debe decrecer hasta finalmente cruzar el eje x . Que $Q_x(t)$ vuelva a crecer y así tener otra raíz real intuimos que no es probable dado que no hay mediciones que se lo propongan, las últimas deben hacerla decrecer hasta cruzar la línea de meta. Una vez que obtenemos t_{gol} evaluamos:

$$P_y(t_{gol}) = y_{aproximacion}$$

$y_{aproximacion}$ será la posición que el arquero intentará cubrir.

2.2. Elección de las aproximaciones

Un caso particular es cuando contamos con sólo una sólo medición de la posición del balón ya que no podemos aplicar cuadrados mínimos. En ese caso aproximamos por la recta constante. Es decir, que cuando nuestra única medición es $p(0) = (x, y)$ nuestra estimación es que la pelota atravesará la línea de meta en y . Esta decisión no tiene ningún soporte matemático ni experimental, simplemente nos resultó intuitiva.

Como las mediciones de la posición del balón pueden tener errores propios de los instrumentos utilizados o ruidos de fuentes circunstanciales evitamos aproximar con el polinomio interpolador ya que hacerlo generaría que el mismo, $P_{x/y}(t)$, sea sensible a estos errores. Es por esta razón que cuadrados mínimos, con un grado menor al interpolador, resulta en una aproximación más fiable de la función original aunque no atravesase todos los puntos obtenidos por las mediciones. Dados n puntos (x_i, y_i) sabemos que siempre existe un polinomio único que los interpola de grado menor o igual a $(n - 1)$. Por lo tanto, como en el instante t contamos con una trayectoria de $t + 1$ posiciones nuestro $P_{x/y}(t)$ siempre lo construimos con un grado menor a t .

Cuando intentamos calcular la raíz de $Q_x(t)$ que se corresponde con t_{gol} y no lo conseguimos simplemente descartamos ese $P_x(t)$ e intentamos con otro de grado diferente. Sin embargo, un polinomio tiene un número de raíces igual a su grado por lo tanto cuanto más alto el grado mayor la cantidad de raíces y esto redundaría en una mayor dificultad para encontrar la raíz correspondiente a t_{gol} . Para intentar compensar este efecto sólo tomamos las últimas mediciones que efectivamente se acercan a la línea de meta. Si nuestras mediciones se corresponden con los puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., (x_t, y_t) entonces sólo consideraremos los últimos p_i puntos tales que:

$$x_i > x_{i-1}$$

es decir, los últimos p_i que efectivamente se están acercando a la meta.

2.3. Errores de medición

En general asumimos que los errores de medición son pequeños, sin embargo, puede ocurrir que debido a una circunstancia extraordinaria se registren algunos valores con un error muy grande. Estos outliers deben reconocerse y tratarse de un modo particular para que perturben en la menor medida posible nuestras aproximaciones. En la sección de experimentación se probará un método para reconocerlos y nuestro tratamiento de los mismos será ignorarlos, es decir, continuar aproximando como si esa medición no hubiera sido realizada. En cada instante t aproximamos el y_{gol} para mover al arquero y además calculamos:

$$p_{t+1} = (x_{t+1}, y_{t+1})$$

En el instante $t + 1$ comparamos la medición que recibimos con nuestra previa aproximación p_{t+1} . Calculamos el error relativo total de la siguiente forma:

$$e_{relativoX} = \frac{|x_{Aproximacion_{t+1}} - x_{Medicion_{t+1}}|}{x_{Medicion_t}}$$

$$e_{relativoTotal} = \frac{e_{relativoX} + e_{relativoY}}{2}$$

Si el error relativo total resulta ser mayor al 80 % entonces lo que hacemos es descartar esa medición y utilizar nuestra previa aproximación. Luego, en el instante $t + 2$ utilizaremos como medición del instante $t + 1$ una interpolación cuadrática entre los valores de la medición del instante t y la del instante $t + 2$. Es necesario aclarar que la detección de outliers sólo se considera válida si evaluamos que el cambio no puede deberse a que un jugador rival alteró la trayectoria del balón. Consideramos que un jugador puede haber alterado la trayectoria del balón si el mismo pasa a una distancia menor a 7, la misma que se utiliza para considerar si el arquero atajó o no el disparo.

2.4. Jugadores rivales

La posición de los jugadores rivales juega un papel muy importante al momento de aproximar $p(t)$ ya que un jugador puede patear la pelota y cambiar por completo su dirección y su velocidad. En primer lugar, si el balón pasa a una distancia menor a un umbral determinado de antemano de la posición de un jugador a la próxima medición no le aplicamos la detección de errores de medición extraordinarios que explicamos en 2.3. Además una vez que el balón pasa por un jugador vamos a dejar de considerar las mediciones anteriores ya que si el jugador pató el balón es efectivamente un disparo nuevo y por lo tanto las mediciones anteriores no aportan información alguna.

3. Experimentación

3.1. Discusión sobre el método y sus variables

La efectividad del método estará dada por la calidad de la aproximación del lugar por el cual el disparo llegará a la línea de meta. Nuestra aproximación de $x(t)$ nos da el instante en el cual el balón atravesará la línea de meta y luego nuestra aproximación de $y(t)$ nos dirá el lugar por dónde lo hará. Las variables principales que entran en juego al aproximar una función con cuadrados mínimos son las mediciones a considerar, es decir los puntos, y el grado del polinomio con el cual se aproximará la función. Creemos que un análisis físico sobre las diferentes fuerzas que puedan afectar a la dirección y aceleración del balón puede indicar más firmemente qué grados tiene más sentido utilizar para cuadrados mínimos. Sin embargo, el mismo cae fuera del alcance del presente trabajo por lo cual nos limitaremos a experimentar con el mayor rango de grados posible y quizás los resultados nos arrojen alguna pista. Con respecto a qué puntos de la trayectoria utilizar intuimos que no todos los puntos de la trayectoria proveen información de la misma calidad. Es por eso que destinaremos un experimento entero a evaluar qué tasa de efectividad obtenemos tomando diferentes subconjuntos de puntos de la trayectoria.

3.2. Bases generales

Criterios que aplicamos a todos los experimentos:

1. Para determinar si cierta combinación de parámetros tuvo una mejor performance que otra, vamos a basarnos exclusivamente en la tasa de efectividad de atajadas del arquero. Solamente vamos a considerar si nuestra aproximación converge a la posición final en el experimento para evaluar el método.
2. Para generar instancias basadas en una función polinómica de grado g tomamos un punto al azar del campo de juego y otro al azar entre los dos postes del arco. Luego tomamos

tantos puntos al azar sobre el campo de juego entre el primer punto y la línea de meta hasta alcanzar una cantidad de puntos igual a $\#p = g + 1$. Con esos puntos generamos el polinomio de Lagrange asociado y con el mismo generamos el resto de los puntos que queramos para nuestra trayectoria.

3.3. Experimentos

3.3.1. Evaluación del método

El objetivo de esta experimentación es evaluar si la aproximación de nuestro método realmente converge al valor final de la posición y por la cual el balón atraviesa la línea de meta. Lo haremos con lo que consideramos disparos básicos de una situación real de juego. Éstos comprenden disparos con trayectorias de tres tipos: rectas, parábolas y curvas generadas por polinomios de tercer grado. Separaremos en esos tres tipos y generaremos para cada uno de ellos 100 instancias aleatorias. Todas ellas compartirán una cantidad de mediciones igual a 30 y el gráfico que presentaremos se constituirá por los promedios de las instancias de cada tipo. Para obtener la información pertinente iremos calculando en cada instante la distancia entre el y_{gol} real y nuestra aproximación del mismo. De esta forma podremos ver si nuestra aproximación converge al valor final de la posición en la que el balón atraviesa la línea de meta. Además introduciremos un ruido de hasta 5 %, es decir, el valor de la medición generada puede variar hasta en un 5 % con respecto al valor original de la función en el punto. La forma en la que introducimos el ruido es la siguiente:

1. cada punto tiene una probabilidad del 50 % de llevar ruido o no
2. el porcentaje de ruido introducido es un valor del intervalo $[0, 5]$ elegido aleatoriamente con una distribución uniforme
3. el ruido será sumado o restado también con una probabilidad del 50 %

Dejaremos de lado a los jugadores y los errores extraordinarios en este experimento ya que nos interesa simplemente evaluar cómo se comporta el método con trayectorias simples.

3.3.2. Grado del polinomio

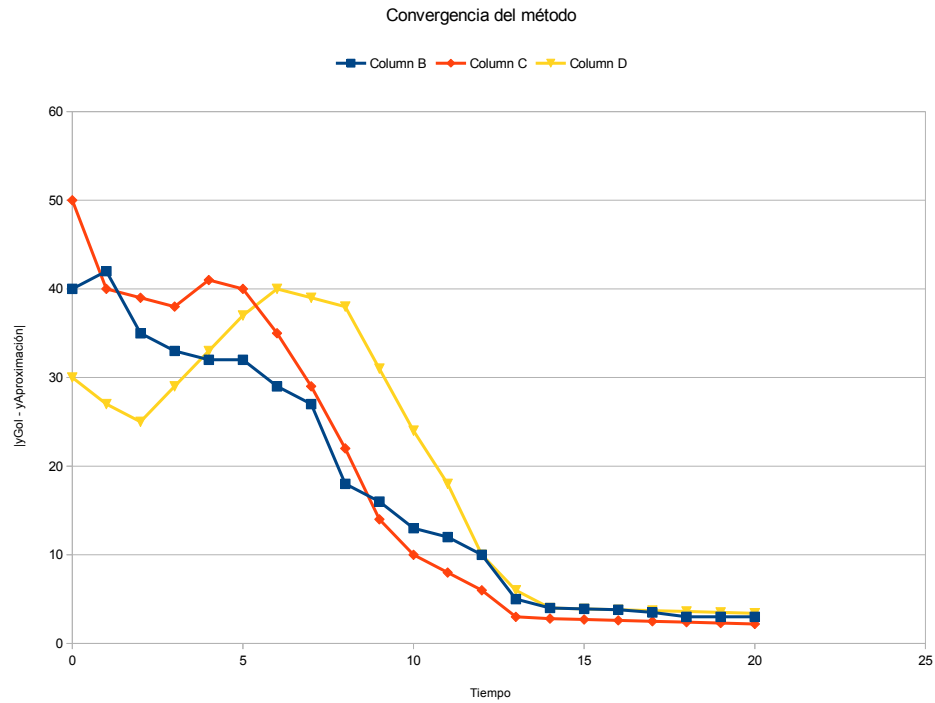
El objetivo de este experimento es analizar si la tasa de efectividad mejora aproximando las funciones $x(t)$ e $y(t)$ con un grado en particular de polinomio de cuadrados mínimos. Probaremos desde el primer grado hasta el décimo grado. La idea principal detrás de esta experimentación es calcular cual es el grado óptimo para que la tasa de efectividad sea lo mejor posible. Se presume que un grado muy bajo no va a ser eficiente ya que no puede interpolar muchos puntos y va a ser malo para aproximar curvas algo complicadas, y tampoco lo va a ser un grado alto, ya que suelen ser curvas muy oscilantes que pueden introducir error. Para cada grado se testearon todas las instancias fijando la cantidad de puntos a considerar (siempre los últimos) y se tomo el promedio de dichos resultados. Se toman instancias de todo tipo, tanto de la cátedra como propias.

3.3.3. Puntos a considerar

Para esta experimentación se desea ver cómo afecta la cantidad de puntos que se consideran para hallar el polinomio de aproximación de cuadrados mínimos. Siempre se van a considerar los últimos puntos medidos. En principio, una cantidad baja de puntos podría no ser buena ya que no son suficientes para estimar curvas complicadas, tampoco sería bueno que la cantidad sea demasiado alta porque la estimación podría ser más propensa a errores, especialmente considerando la presencia de jugadores que pueden alterar el curso de la pelota de manera inesperada y que no corresponda con alguna curva "natural". Como en la experimentación anterior, se usan todo tipo de instancias.

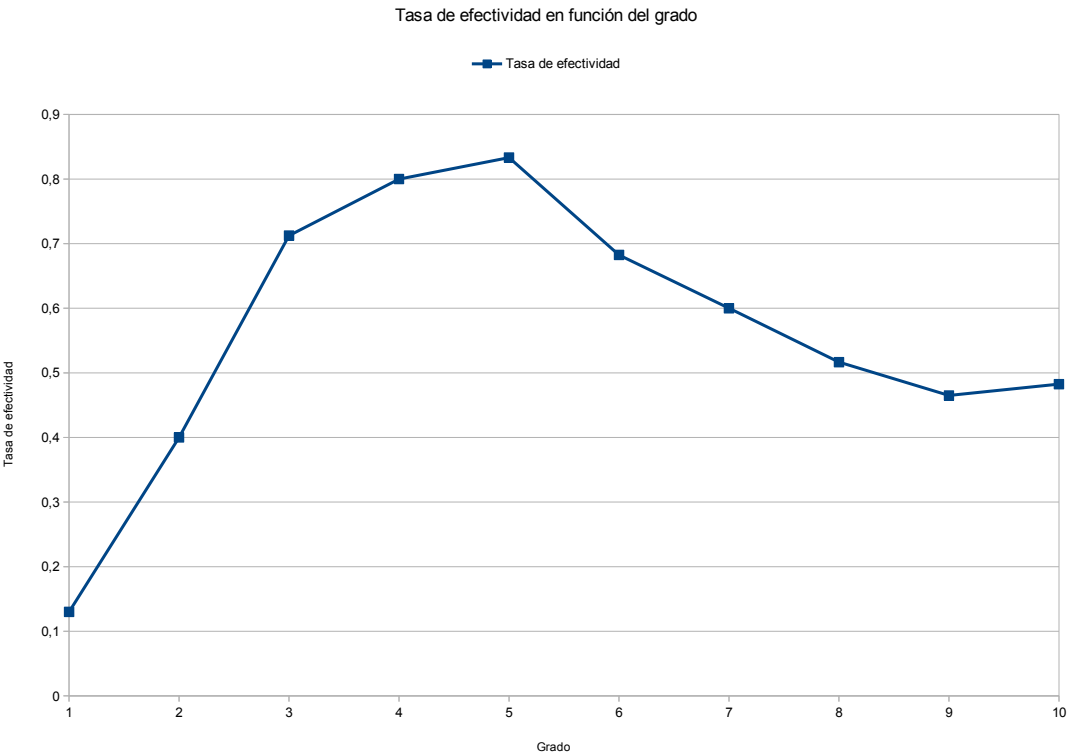
4. Resultados

4.1. Experimento de la convergencia del método

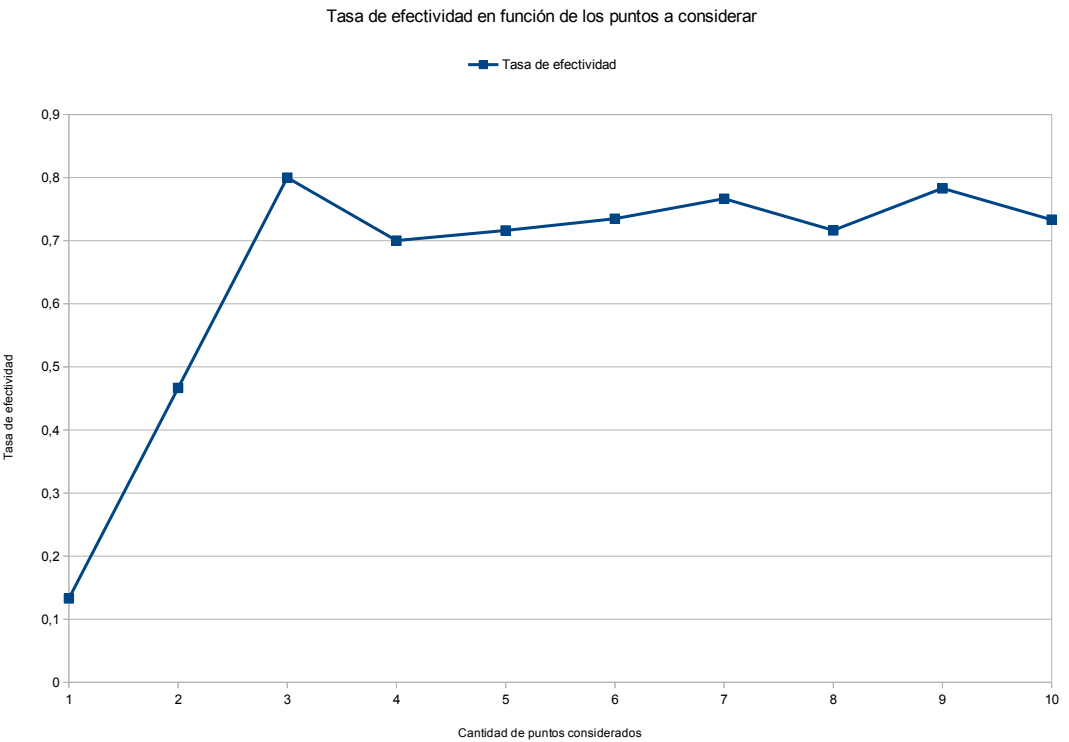


Azul: rectas. Amarillo: cuadráticas. Naranja: cúbicas.

4.2. Experimento de tasa de efectividad en función del grado



4.3. Experimento de tasa de efectividad en función de los puntos considerados



4.4. Discusión

4.4.1. Convergencia del método

Los resultados del experimento arrojaron una convergencia que a simple vista parece cuadrática. Esto nos indica que el método tiene consistencia ya que a medida que tiene más información, la pelota está más cerca y tiene más puntos para considerar, la aproximación es cada vez mejor. No sabemos por qué no es constantemente decreciente la función resultante, quizás se deba al ruido. Deberían hacerse más experimentos aún para confirmarlo.

4.4.2. Grado del polinomio

Como se estimaba, los mejores grados para aproximar las trayectorias de las pelotas corresponden a los polinomios de grado 4, 5 y 6. Los polinomios grado 1 y 2 tiene una muy mala aproximación. Mientras que los polinomios de grado mayor o igual a 6 empiezan a mostrar una decaída en la tasa de efectividad. Por lo tanto el polinomio final de nuestra aproximación va a el de grado 5.

4.4.3. Puntos a considerar

En los resultados se puede apreciar que el valor óptimo se alcanza cuando la cantidad de mediciones es 3, sin embargo, se obtuvieron buenos resultados para todos los valores de 4 a 10. Al parecer la cantidad de mediciones no afecta tanto a la tasa de efectividad como si lo hace la variación del grado del polinomio. Nuestra aproximación final va a tomar 8 puntos si no hay jugadores y 3 sí los hay.

5. Conclusiones

Luego de haber experimentado y analizado el comportamiento de nuestro método conseguimos una confianza bastante sólida sobre el método de cuadrados mínimos. Sin embargo, creemos que es un problema que tiene muchas aristas y que da aún mucho por investigar. Creemos que algo que beneficiaría mucho a la optimización del método es un análisis físico de lo que sucede en los disparos, las fuerzas que intervienen y cómo afectan al balón. Además, nos parece interesante explorar si es mejor aproximar de manera diferente $x(t)$ e $y(t)$. Como nos proveen información diferente, de una extraemos t_{gol} y de la otra y_{gol} quizás sea más prudente sobreestimar por un lado a uno y sobreestimar por otro al otro. También nos parece interesante estudiar si mejora la tasa de efectividad hacer varias aproximaciones y comparar unas con otras. Quizás diferentes combinaciones de grados y puntos a considerar no nos den mejor o peor información sobre el disparo si no que nos dan diferente información y si la entendemos y aprendemos a combinarla podemos hacer una aproximación de mayor calidad aún. El problema sigue abierto con muchos caminos por explorar, sin embargo, esperamos haber echado algo de luz para los investigadores venideros.