DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

TP 3 - Un poco más de huevo...

Métodos Numéricos

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo, predecir con la mayor anticipación posible la posición futura de una pelota en el campo de fútbol, utilizando la posición de la misma en el pasado, para coordinar los movimientos de nuestro arquero. Para resolver este problema computacionalmente, se decidió considerar el tiempo de manera discreta, el campo de futbol como un plano de $\mathbb{R}^2$.

Keywords: *Cuadrados Mínimos, Arquero robot.*

Grupo 2

Integrante	LU	Correo electrónico
Franco Bartalotta	347/11	franco.bartalotta@hotmail.com
Fernando Gasperi Jabalera	56/09	fgasperijabalera@gmail.com
Erik Machicado	067/12	erik.machicado@hotmail.com
Ana Sarriés	144/02	abarloventos@gmail.com

Reservado para la cátedra

Instancia	Docente	Nota
Primera entrega		
Segunda entrega		

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
http://www.exactas.uba.ar

Índice

1. Introducción

En el presente trabajo nos proponemos estudiar el problema de atajar un disparo de fútbol hacia la portería. Puntualmente tendremos control sobre el arquero y deberemos decidir en cada instante de tiempo en qué dirección debe moverse para lograr atajar el disparo. Impondremos un límite de desplazamiento al arquero por instante de tiempo. Es decir, cada vez que decidamos moverlo podremos hacerlo como máximo en una magnitud menor o igual al límite máximo de desplazamiento impuesto de antemano. La información con la que contaremos para decidir los movimientos del arquero son mediciones sobre la posición de la pelota para determinados instantes cuyo orden conoceremos. Las mediciones son realizadas a intervalos regulares de tiempo, de esta forma, nos queda discretizado el mismo en los intantes recibidos y sólo podemos saber el orden de los mismos pero ninguna información sobre la pelota entre dos instantes dados. Además, sabemos que las mediciones pueden tener ruido o errores propias de la misma medición. Los postes del arco están ubicados en coordenadas fijas, y la línea de gol es el segmento entre estos dos puntos. Se marca un gol cuando la pelota cruza este segmento. Visto desde arriba, la pelota es un círculo de radio determinado y el arquero se representa mediando un segmento paralelo a la línea de gol ubicado sobre la misma. Inicialmente el arquero se encuentra en un punto entre estos dos segmentos y en cada paso se le indica al arquero en qué sentido y en qué magnitud debe moverse, ya que la dirección sobre la que se mueve es siempre la misma, la línea de gol. Además contaremos con las posiciones de los jugadores rivales en el campo de juego. Para simplificar el alcance y el modelo propuesto asumiremos que la posición de los jugadores no varía con el tiempo aunque sí pueden intervenir en el juego y desviar la pelota con un remate al arco o un pase a otro jugador. En cada instante nuestro desafío reside en decidir cómo utilizar la información de los instantes anteriores y el actual para aproximar la posición por la que la pelota ingresará al arco y así mover al arquero a esa posición para atajarla. Para la predicción de la posición por donde entrará la pelota, nos basamos en el método de *cuadrados mínimos lineales*. Este método es particularmente adecuado para los casos en que se introducen errores de medición[3, *3.2*] como ocurre en las mediciones de la trayectoria del balón.

La trayectoria de la pelota la formalizaremos mediante una función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, p(t) = (x(t), y(t))$ donde t es el tiempo y $x(t)$ la coordenada x del balón en el instante t e $y(t)$ la coordenada y del balón en el mismo instante considerando que abstraemos al campo de juego como puntos en un eje de coordenadas en el cual los arcos se ubican paralelos al eje y. El método de cuadrados mínimos[2] lo utilizaremos para calcular los coeficientes de dos polinomios $P_x(t)$ y $P_y(t)$ que aproximen a las funciones $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, de forma tal que el error cuadrático sea mínimo:

$$E_c(P_{x/y}) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x/y_k - P_{x/y}(t_k))^2}{n}$$

con n igual a la cantidad de mediciones y x/y_k el valor de la coordenada x o y de la medición realizada en el instante k.

2. Desarrollo

2.1. Descripción del método

Dado un instante t nosotros contamos con $(t + 1)$ mediciones de la posición de la pelota que se corresponden con los intantes 0, 1, ..., $t - 1$, t.

t	0	1	...	(t-1)	t
x(t)	x(0)	x(1)	...	x(t-1)	x(t)
y(t)	y(0)	y(1)	...	y(t-1)	y(t)

De esta forma la posición de la pelota queda descripta por una función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $p(t) = (x(t), y(t))$. Nuestro procedimiento para decidir el sentido y la magnitud del desplazamiento del arquero para un instante t consiste de los siguientes pasos:

1. aproximamos la función $x(t)$ con cuadrados mínimos y obtenemos $P_x(t)$
2. calculamos una raíz de $x'(t) = x(t) - x_{posicionDelArco}$ para conocer en qué instante t_{raiz} atraviesa la línea de meta
3. aproximamos la función $y(t)$ con cuadrados mínimos y obtenemos $P_y(t)$
4. evaluamos $P_y(t)$ en t_{raiz} para obtener $P_y(t_{raiz}) = y_{aproximacion}$
5. calculamos el desplazamiento óptimo del arquero asumiendo que el disparo ingresará por $y_{aproximacion}$

La aproximación de la función $x(t)$ (para $y(t)$ es análogo) mediante el método de cuadrados mínimos la hacemos resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0^n & \cdots & 0^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t^n & \cdots & t^1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(t) \end{pmatrix}$$

donde la cantidad de filas se corresponde con la cantidad de instantes t que consideramos de la trayectoria y n es el grado del polinomio con el que estimamos a $x(t)$. Para resolver el sistema utilizamos eliminación gaussiana por ser un métodos de simple implementación. Una vez resuelto el sistema utilizamos los a_i para construir el polinomio que aproxima a $x(t)$ de la siguiente forma:

$$P_x(t) = a_n * t^n + \cdots + a_1 * t + a_0$$

Sabemos que $P_x(t)$ es el polinomio de grado n que minimiza la suma del error cuadrático con respecto a las mediciones.

La línea de meta se encuentra en un valor fijo de x al que nos referiremos como $x_{posicionDelArco}$. El arquero siempre está situado sobre ese valor $x_{posicionDelArco}$ y se mueve a lo largo del eje y. Nuestra estimación debe ser el valor de y por el cual el balón atravesará la línea de meta. Si $p(t) = (x(t), y(t))$ describe la trayectoria del balón y asumimos que existe un t_{gol} para el cual:

$$p(t_{gol}) = (x(t_{gol}), y(t_{gol})) = (x_{posicionDelArco}, y(t_{gol}))$$

a nosotros nos interesa aproximar $y(t)$ para poder evaluarla en t_{gol} y así conocer en qué valor de y el balón atravesará la línea de meta. Para aproximar $y(t)$ utilizamos el método de cuadrados mínimos ya explicado para aproximar $x(t)$ y obtenemos un $P_y(t)$. Luego, vamos a calcular t_{gol} con nuestro $P_x(t) \approx x(t)$:

$$P_x(t) = x_{posicionDelArco} \iff t = t_{gol} \tag{1}$$
$$P_x(t) - x_{posicionDelArco} = 0 \iff t = t_{gol} \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

Tomando $P'_x(t) = P_x(t) - x_{posicionDelArco}$ sabemos que si tiene raíces reales mayores al último instante t de la trayectoria entonces t_{gol} es una de ellas. Para encontrarla utilizamos el método de bisección [1,]. Una vez que obtenemos t_{gol} evaluamos:

$$P_y(t_{gol}) = y_{aproximacion}$$

$y_{aproximacion}$ será la posición que el arquero intentará cubrir.

2.2. Elección de las aproximaciones

Un caso particular es cuando contamos con sólo una sólo medición de la posición del balón ya que no podemos aplicar cuadrados mínimos. En ese caso aproximamos por la recta constante. Es decir, que cuando nuestra única medición es $p(0) = (x, y)$ nuestra estimación es que la pelota atravesará la línea de meta en y. Esta decisión no tiene ningún soporte matemático ni experimental, simplemente nos resultó intuitiva.

Como las mediciones de la posición del balón pueden tener errores propios de los instrumentos utilizados o ruidos de fuentes circunstanciales evitamos aproximar con el polinomio interpolador ya que hacerlo generaría que el mismo, $P_{x/y}(t)$, sea sensible a estos errores. Es por esta razón que cuadrados mínimos, con un grado menor al interpolador, resulta en una aproximación más fiable de la función original aunque no atraviese todos los puntos obtenidos por las mediciones. Dados n puntos (x_i, y_i) sabemos que siempre existe un polinomio único que los interpola de grado menor o igual a $(n-1)$. Por lo tanto, como en el instante t contamos con una trayectoria de $t+1$ posiciones nuestro $P_{x/y}(t)$ siempre lo construimos con un grado menor a t.

Cuando intentamos calcular la raíz de $P'_x(t)$ que se corresponde con t_{gol} y no lo conseguimos simplemente descartamos ese $P_x(t)$ e intentamos con otro de grado diferente. Sin embargo, un polinomio tiene un número de raíces igual a su grado por lo tanto cuanto más alto el grado mayor la cantidad de raíces y esto redunda en una mayor dificultad para encontrar la raíz correspondiente a t_{gol}. Para intentar compensar este efecto sólo tomamos las últimas mediciones que efectivamente se acercan a la línea de meta. Si nuestras mediciones se corresponden con los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_t, y_t) entonces sólo consideraremos los puntos p_i tales que:

$$(\forall j \in \mathbb{N}) j > i \Rightarrow x_j < x_{j-1}$$

2.3. Errores de medición

En general asumimos que los errores de medición son pequeños, sin embargo, puede ocurrir que debido a una circunstancia extraordinaria se registren algunos valores con un error muy grande. Estos outliers deben reconocerse y tratarse de un modo particular para que perturben en la menor medida posible nuestras aproximaciones. En la sección de experimentación se probará un método para reconocerlos y nuestro tratamiento de los mismos será ignorarlos, es decir, continuar aproximando como si esa medición no hubiera sido realizada. Si esa medición fue la correspondiente a el instante t, cuando obtengamos la medición del instante $t + 1$ lo que haremos será extrapolar cuadráticamente la medición del instante t para no sumarle velocidad innecesaria a nuestras aproximaciones.

2.4. Jugadores rivales

La posición de los jugadores rivales juega un papel muy importante al momento de aproximar $p(t)$ ya que un jugador puede patear la pelota y cambiar por completo su dirección y su velocidad. En primer lugar, si el balón pasa a una distancia menor a un umbral determinado de antemano de la posición de un jugador a la próxima medición no le aplicamos la detección de errores de medición extraordinarios que explicamos en la subsección dedicada a "Errores de medición". Además una vez que el balón pasa por un jugador vamos a dejar de considerar las mediciones anteriores ya que si el jugador pateó el balón es efectivamente un disparo nuevo y por lo tanto las mediciones anteriores no aportan información alguna.

Referencias

[1] *BOOST C++ Libraries*. `http://www.boost.org`.

[2] Burden, R. L., and Faires, J. D. *Numerical Analysis*. Brooks Cole, 2000.

[3] Heath, M. *Scientific Computing*. McGraw-Hill, 1997.