DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

TP 3 - Un poco más de huevo...

Métodos Numéricos

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo, predecir con la mayor anticipación posible la posición futura de una pelota en el campo de fútbol, utilizando la posición de la misma en el pasado, para coordinar los movimientos de nuestro arquero. Para resolver este problema computacionalmente, se decidió considerar el tiempo de manera discreta, el campo de futbol como un plano de $\mathbb{R}^2$.
Keywords: *Cuadrados Mínimos Lineales, Arquero robot*

Grupo 2

Integrante	LU	Correo electrónico
Franco Bartalotta	347/11	`franco.bartalotta@hotmail.com`
Fernando Gasperi Jabalera	56/09	`fgasperijabalera@gmail.com`
Erik Machicado	067/12	`erik.machicado@hotmail.com`
Ana Sarriés	144/02	`abarloventos@gmail.com`

Reservado para la cátedra

Instancia	Docente	Nota
Primera entrega		
Segunda entrega		

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
http://www.exactas.uba.ar

Índice

1. Introducción

En el presente trabajo nos proponemos estudiar el problema de atajar un disparo de fútbol hacia la portería. Puntualmente tendremos control sobre el arquero y deberemos decidir en cada instante de tiempo en qué dirección debe moverse para lograr atajar el disparo. Impondremos un límite de desplazamiento al arquero por instante de tiempo. Es decir, cada vez que decidamos moverlo podremos hacerlo como máximo en una magnitud menor o igual al límite máximo de desplazamiento impuesto de antemano. La información con la que contaremos para decidir los movimientos del arquero son mediciones sobre la posición de la pelota para determinados instantes cuyo orden conoceremos. Las mediciones son realizadas a intervalos regulares de tiempo, de esta forma, nos queda discretizado el mismo en los intantes recibidos y sólo podemos saber el orden de los mismos pero ninguna información sobre la pelota entre dos instantes dados. Además, sabemos que las mediciones pueden tener ruido o errores propias de la misma medición. Los postes del arco están ubicados en coordenadas fijas, y la línea de gol es el segmento entre estos dos puntos. Se marca un gol cuando la pelota cruza este segmento. Visto desde arriba, la pelota es un círculo de radio determinado y el arquero se representa mediando un segmento paralelo a la línea de gol ubicado sobre la misma. Inicialmente el arquero se encuentra en un punto entre estos dos segmentos y en cada paso se le indica al arquero en qué sentido y en qué magnitud debe moverse, ya que la dirección sobre la que se mueve es siempre la misma, la línea de gol. Además contaremos con las posiciones de los jugadores rivales en el campo de juego. Para simplificar el alcance y el modelo propuesto asumiremos que la posición de los jugadores no varía con el tiempo aunque sí pueden intervenir en el juego y desviar la pelota con un remate al arco o un pase a otro jugador. En cada instante nuestro desafío reside en decidir cómo utilizar la información de los instantes anteriores y el actual para aproximar la posición por la que la pelota ingresará al arco y así mover al arquero a esa posición para atajarla. Para la predicción de la posición por donde entrará la pelota, nos basamos en el método de *cuadrados mínimos lineales*. Este método es particularmente adecuado para los casos en que se introducen errores de medición[3, *3.2*] como ocurre en las mediciones de la trayectoria del balón.

La trayectoria de la pelota la formalizaremos mediante una función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $p(t) = (x(t), y(t))$ donde t es el tiempo y $x(t)$ la coordenada x del balón en el instante t e $y(t)$ la coordenada y del balón en el mismo instante considerando que abstraemos al campo de juego como puntos en un eje de coordenadas en el cual los arcos se ubican paralelos al eje y. El método de cuadrados mínimos[2, *8.1*] lo utilizaremos para calcular los coeficientes de dos polinomios $P_x(t)$ y $P_y(t)$ que aproximen a las funciones $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, de forma tal que el error cuadrático sea mínimo:

$$E_c(P_{x/y}) = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x/y_k - P_{x/y}(t_k))^2}{n}$$

con n igual a la cantidad de mediciones y x/y_k el valor de la coordenada x o y de la medición realizada en el instante k.

2. Desarrollo

2.1. Descripción del método

Dado un instante t nosotros contamos con $(t + 1)$ mediciones de la posición de la pelota que se corresponden con los intantes 0, 1, ..., $t - 1$, t.

t	0	1	...	(t-1)	t
x(t)	x(0)	x(1)	...	x(t-1)	x(t)
y(t)	y(0)	y(1)	...	y(t-1)	y(t)

De esta forma la posición de la pelota queda descripta por una función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $p(t) = (x(t), y(t))$. Nuestro procedimiento para decidir el sentido y la magnitud del desplazamiento del arquero para un instante t consiste de los siguientes pasos:

1. aproximamos la función $x(t)$ con cuadrados mínimos obteniendo $P_x(t)$
2. calculamos una raíz de $Q_x(t) = P_x(t) - x_{posicionDelArco}$ para conocer en qué instante t_{raiz} atraviesa la línea de meta
3. aproximamos la función $y(t)$ con cuadrados mínimos obteniendo $P_y(t)$
4. evaluamos $P_y(t)$ en t_{raiz} para obtener $P_y(t_{raiz}) = y_{aproximacion}$
5. calculamos el desplazamiento óptimo del arquero asumiendo que el disparo ingresará por $y_{aproximacion}$

El planteo formal del método de cuadrados mínimos para la aproximación de la función $x(t)$ (para $y(t)$ es análogo) es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0^n & \cdots & 0^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t^n & \cdots & t^1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(t) \end{pmatrix}$$

donde la cantidad de filas se corresponde con la cantidad de instantes t que consideramos de la trayectoria y n es el grado del polinomio con el que estimamos a $x(t)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones normales correspondiente al sistema anterior, obtenemos los coeficientes de $P_x(t)$. Para resolverlo utilizamos eliminación gaussiana por ser un métodos de simple implementación. Siempre podemos aplicar eliminación gaussiana porque el grado del polinomio que utilizamos para aproximar por cuadrados mínimos, g, es como máximo menor o igual a la cantidad de mediciones que tenemos menos 2. Esto lo decidimos así para nunca utilizar un polinomio interpolador, ya que el mismo sería sensible hasta a los errores de medición.

$$g \leq \#mediciones - 2 \Longrightarrow \#columnas(A) \leq \#filas(A) - 2$$

por lo tanto la matriz A va a tener rango columna completo. La solución son los a_i con los que construimos el polinomio que aproxima a $x(t)$ de la siguiente forma:

$$P_x(t) = a_n * t^n + \cdots + a_1 * t + a_0$$

Así resulta que $P_x(t)$ es el polinomio de grado n que minimiza la suma del error cuadrático con respecto a las mediciones.

La línea de meta se encuentra en un valor fijo de x al que nos referiremos como $x_{posicionDelArco}$. El arquero siempre está situado sobre ese valor $x_{posicionDelArco}$ y se mueve a lo largo del eje y. Nuestra estimación debe ser el valor de y por el cual el balón atravesará la línea de meta. Si $p(t) = (x(t), y(t))$ describe la trayectoria del balón y asumimos que existe un t_{gol} para el cual:

$$p(t_{gol}) = (x(t_{gol}), y(t_{gol})) = (x_{posicionDelArco}, y(t_{gol}))$$

a nosotros nos interesa aproximar $y(t)$ para poder evaluarla en t_{gol} y así conocer en qué valor de y el balón atravesará la línea de meta. Para aproximar $y(t)$ utilizamos el método de cuadrados mínimos ya explicado para aproximar $x(t)$ y obtenemos un $P_y(t)$. Luego, vamos a calcular t_{gol} con nuestro $P_x(t) \approx x(t)$:

$$P_x(t) = x_{posicionDelArco} \Longleftrightarrow t = t_{gol} \tag{1}$$
$$P_x(t) - x_{posicionDelArco} = 0 \Longleftrightarrow t = t_{gol} \tag{2}$$

Tomando $Q_x(t) = P_x(t) - x_{posicionDelArco}$ sabemos que si tiene raíces reales mayores al último instante t de la trayectoria entonces t_{gol} es una de ellas. Para encontrarla utilizamos el método de bisección [1,]. El intervalo inicial $[a, b]$ siempre es el mismo con $a = 0$ y $b = 10000$. Sabemos que

$Q_x(0) > 0$ porque el disparo siempre se origina dentro del campo de juego. Necesitamos un valor b para el cual sepamos que $Q_x(b) < 0$. Esto es lo mismo que pedir un instante t para el cual la posición de la pelota se encuentre del otro lado de la línea de meta según nuestra aproximación por cuadrados mínimos. Tomamos un valor lo suficientemente grande como para asegurarnos que el disparo haya terminado antes del mismo. Es cierto que esto no nos asegura que $Q_x(b) < 0$ porque podría ser que $Q_x(t)$ tuviera más de una raíz real mayor a 0. Si nos encontraramos con este caso lo descartaríamos. Sin embargo, consideramos que las probabilidades son bajas ya que para que el disparo termine en gol debe ir acercándose a la línea de meta hasta finalmente cruzarla. Que se vaya acercando hasta finalmente cruzarla lo traducimos a que $Q_x(t)$ debe decrecer hasta finalmente cruzar el eje x. Que $Q_x(t)$ vuelva a crecer y así tener otra raíz real intuimos que no es probable dado que no hay mediciones que se lo propongan, las últimas deben hacerla decrecer hasta cruzar la línea de meta. Una vez que obtenemos t_{gol} evaluamos:

$$P_y(t_{gol}) = y_{aproximacion}$$

$y_{aproximacion}$ será la posición que el arquero intentará cubrir.

2.2. Elección de las aproximaciones

Un caso particular es cuando contamos con sólo una sólo medición de la posición del balón ya que no podemos aplicar cuadrados mínimos. En ese caso aproximamos por la recta constante. Es decir, que cuando nuestra única medición es $p(0) = (x, y)$ nuestra estimación es que la pelota atravesará la línea de meta en y. Esta decisión no tiene ningún soporte matemático ni experimental, simplemente nos resultó intuitiva.

Como las mediciones de la posición del balón pueden tener errores propios de los instrumentos utilizados o ruidos de fuentes circunstanciales evitamos aproximar con el polinomio interpolador ya que hacerlo generaría que el mismo, $P_{x/y}(t)$, sea sensible a estos errores. Es por esta razón que cuadrados mínimos, con un grado menor al interpolador, resulta en una aproximación más fiable de la función original aunque no atraviese todos los puntos obtenidos por las mediciones. Dados n puntos (x_i, y_i) sabemos que siempre existe un polinomio único que los interpola de grado menor o igual a $(n-1)$. Por lo tanto, como en el instante t contamos con una trayectoria de $t+1$ posiciones nuestro $P_{x/y}(t)$ siempre lo construimos con un grado menor a t.

Cuando intentamos calcular la raíz de $Q_x(t)$ que se corresponde con t_{gol} y no lo conseguimos simplemente descartamos ese $P_x(t)$ e intentamos con otro de grado diferente. Sin embargo, un polinomio tiene un número de raíces igual a su grado por lo tanto cuanto más alto el grado mayor la cantidad de raíces y esto redunda en una mayor dificultad para encontrar la raíz correspondiente a t_{gol}. Para intentar compensar este efecto sólo tomamos las últimas mediciones que efectivamente se acercan a la línea de meta. Si nuestras mediciones se corresponden con los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_t, y_t) entonces sólo consideraremos los últimos p_i puntos tales que:

$$x_i > x_{i-1}$$

es decir, los últimos p_i que efectivamente se están acercando a la meta.

2.3. Errores de medición

En general asumimos que los errores de medición son pequeños, sin embargo, puede ocurrir que debido a una circunstancia extraordinaria se registren algunos valores con un error muy grande. Estos outliers deben reconocerse y tratarse de un modo particular para que perturben en la menor medida posible nuestras aproximaciones. Nuestro tratamiento de los mismos será ignorarlos, es decir, continuar aproximando como si esa medición no hubiera sido realizada. En cada instante t aproximamos el y_gol para mover al arquero y además calculamos:

$$p_{t+1} = (x_{t+1}, y_{t+1})$$

En el instante $t+1$ comparamos la medición que recibimos con nuestra previa aproximación p_{t+1}. Calculamos el error relativo total de la siguiente forma:

$$e_{relativoX} = \frac{|xAproximacion_{t+1} - xMedicion_{t+1}|}{xMedicion_t}$$

$$e_{relativoTotal} = \frac{e_{relativoX} + e_{relativoY}}{2}$$

Si el error relativo total resulta ser mayor al 80 % entonces lo que hacemos es descartar esa medición y utilizar nuestra previa aproximación. Luego, en el instante $t+2$ utilizaremos como medición del instante $t+1$ una interpolación cuadrática entre los valores de la medición del instante t y la del instante $t+2$. Es necesario aclarar que la detección de outliers sólo se considera válida si evaluamos que el cambio no puede deberse a que un jugador rival alteró la trayectoria del balón. Consideramos que un jugador puede haber alterado la trayectoria del balón si el mismo pasa a una distancia menor a 7, la misma que se utiliza para considerar si el arquero atajó o no el disparo.

2.4. Jugadores rivales

La posición de los jugadores rivales juega un papel muy importante al momento de aproximar $p(t)$ ya que un jugador puede patear la pelota y cambiar por completo su dirección y su velocidad. En primer lugar, si el balón pasa a una distancia menor a un umbral determinado de antemano de la posición de un jugador a la próxima medición no le aplicamos la detección de errores de medición extraordinarios que explicamos en 2.3. Además una vez que el balón pasa por un jugador vamos a dejar de considerar las mediciones anteriores ya que si el jugador pateó el balón es efectivamente un disparo nuevo y por lo tanto las mediciones anteriores no aportan información alguna.

3. Experimentación

3.1. Discusión sobre el método y sus variables

La efectividad del método estará dada por la calidad de la aproximación del lugar por el cual el disparo llegará a la línea de meta. Nuestra aproximación de $x(t)$ nos da el instante en el cual el balón atravesará la línea de meta y luego nuestra aproximación de $y(t)$ nos dirá el lugar por dónde lo hará. Las variables principales que entran en juego al aproximar una función con cuadrados mínimos son las mediciones a considerar, es decir los puntos, y el grado del polinomio con el cual se aproximará la función. Creemos que un análisis físico sobre las diferentes fuerzas que puedan afectar a la dirección y aceleración del balón puede indicar más firmemente qué grados tiene más sentido utilizar para cuadrados mínimos. Sin embargo, el mismo cae fuera del alcance del presente trabajo por lo cual nos limitaremos a experimentar con el mayor rango de grados posible y quizás los resultados nos arrojen alguna pista. Con respecto a qué puntos de la trayectoria utilizar intuimos que no todos los puntos de la trayectoria proveen información de la misma calidad. Es por eso que destinaremos un experimento entero a evaluar qué tasa de efectividad obtenemos tomando diferentes subconjuntos de puntos de la trayectoria.

3.2. Bases generales

Criterios que aplicamos a todos los experimentos:

- Para determinar si cierta combinación de parámetros tuvo una mejor performance que otra, vamos a basarnos exclusivamente en la tasa de efectividad de atajadas del arquero. Solamente vamos a considerar si nuestra aproximación converge a la posición final en el experimento para evaluar el método.
- Para generar instancias basadas en una función polinómica de grado g tomamos un punto al azar del campo de juego y otro al azar entre los dos postes del arco. Luego tomamos

tantos puntos al azar sobre el campo de juego entre el primer punto y la línea de meta hasta alcanzar una cantidad de puntos igual a $\#p = g + 1$. Con esos puntos generamos el polinomio de Lagrange asociado y con el mismo generamos el resto de los puntos que queramos para nuestra trayectoria.

- El grado del polinomio utilizado en los experimentos no est

    1.

3.3. Experimentos

3.3.1. Evaluación del método

El objetivo de esta experimentación es evaluar si la aproximación de nuestro método realmente converge al valor final de la posición y por la cual el balón atraviesa la línea de meta. Lo haremos con lo que consideramos disparos básicos de una situación real de juego. Éstos comprenden disparos con trayectorias de tres tipos: rectas, parábolas y curvas generadas por polinomios de tercer grado. Separaremos en esos tres tipos y generaremos para cada uno de ellos 100 instancias aleatorias. Todas ellas compartirán una cantidad de mediciones igual a 30 y el gráfico que presentaremos se constituirá por los promedios de las instancias de cada tipo. En el gráfico discriminaremos los resultados por el tipo de curva con la que fueron generadas las instancias. Para obtener la información pertinente iremos calculando en cada instante la distancia entre el y_{gol} real y nuestra aproximación del mismo. De esta forma podremos ver si nuestra aproximación converge al valor final de la posición en la que el balón atraviesa la línea de meta. Además introduciremos un ruido de hasta 5 %, es decir, el valor de la medición generada puede variar hasta en un 5 % con respecto al valor original de la función en el punto. La forma en la que introducimos el ruido es la siguiente:

1. cada punto tiene una probabilidad del 50 % de llevar ruido o no
2. el porcentaje de ruido introducido es un valor del intervalo $[0, 5]$ elegido aleatoriamente con una distribución uniforme
3. el ruido será sumado o restado también con una probabilidad del 50 %

Dejaremos de lado a los jugadores y los errores extraordinarios en este experimento ya que nos interesa simplemente evaluar cómo se comporta el método con trayectorias simples.

3.3.2. Grado del polinomio

El objetivo de este experimento es analizar el comportamiento de la tasa de efectividad en función del grado del polinomio con el que aproximamos, mediante el método de cuadrados mínimos, las funciones $x(t)$ e $y(t)$. Nos interesa encontrar el grado que maximice la tasa de efectividad.

Nuestra hipótesis es que el gráfico será cóncavo. Creemos en un primer momento un aumento del grado implicará un aumento de la efectividad, sin embargo, luego se alcanzará un máximo y se empezará a decrecer. Este comportamiento suponemos que se deberá a que considerando instancias que representen curvas variadas con un grado demasiado bajo el error de la aproximación será alto, sobre todo en las curvas más irregulares, y con un grado demasiado alto la aproximación se volverá más sensible a los errores de medición y perderá capacidad de percibir la tendencia del disparo.

No conocemos la frecuencia con la que se presentan los diferentes tipos de curvas en los disparo, por lo tanto, la decisión más prudente consideramos que consiste en asumir una distribución uniforme. Por esta razón no discriminaremos la tasa de efectividad por tipo de curva con la cual fueron generadas las instancias. Vamos a generar un set de instancias lo más variado y equilibrado posible que se conformará de la siguiente forma:

20 provistas por la cátedra. Este conjunto incluye disparos generados por rectas, parábolas y curvas de tercer grado y disparos con ruido.

40 instancias generadas por nuestro generador de instancias. El ruido agregado a todas las instancias de este conjunto es mínimo, entre 0 % y 5 %, de la misma manera que se explicó para el experimento de la evaluación del método. Tenemos 10 instancias generadas con rectas, 10 con parábolas, 10 con curvas de tercer grado y 10 con curvas de cuarto grado.

40 instancias generadas por nuestro generador de instancias. El ruido agregado a todas las instancias de este conjunto varia uniformemente entre 0 % y 20 % y fue agregado como se explicó el experimento anterior. El grado de las curvas con el que fue generada cada una de las instancias varia también uniformemente entre 0 y 15.

es así que tenemos un conjunto final compuesto por 100 instancias distintas. Todas ellas tienen 25 mediciones. Correremos las instancias 3 veces considerando sólo las últimas 5, 10 y 15 mediciones para intentar identificar si este parámetro afecta sustancialmente a la tasa de efectividad conseguida con cada grado utilizado.

Para cada grado la tasa de efectividad final se calculó como el promedio de las tasas de efectividad sobre todas las instancias.

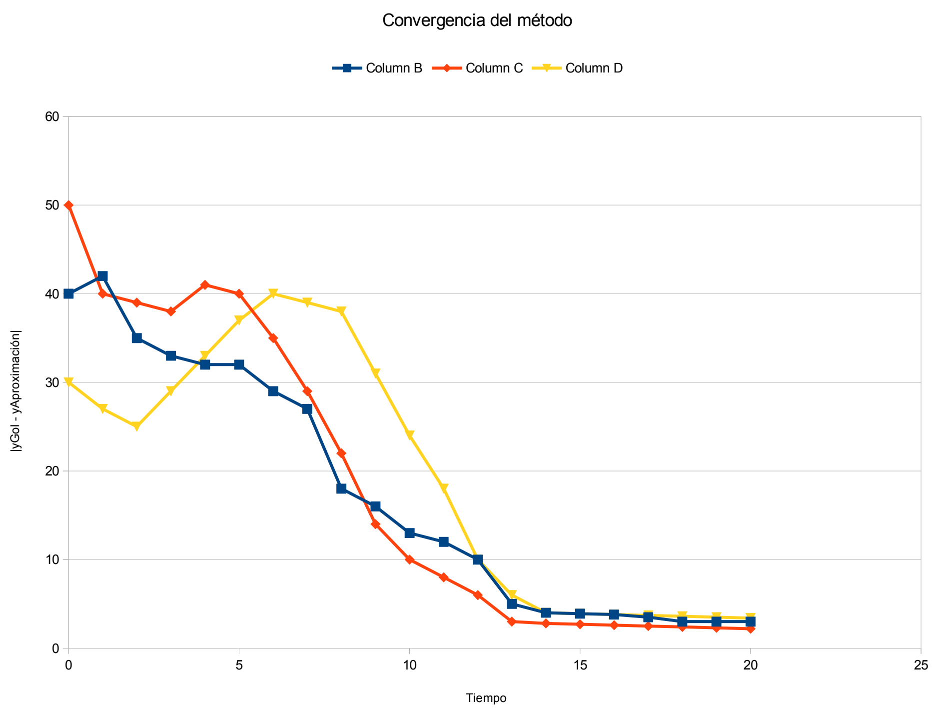
3.3.3. Puntos a considerar

En esta experimentación se desea estudiar cómo afecta a la tasa de efectividad la cantidad de mediciones que se consideran para hallar el polinomio de aproximación de cuadrados mínimos. Siempre consideramos las última mediciones ya que al ser las más recientes consideramos que contienen mayor información sobre el disparo y su tendencia actual. En principio, una cantidad baja de puntos podría no ser buena ya que no son suficientes para estimar curvas complicadas, pero tampoco sería bueno que la cantidad sea demasiado alta porque la estimación podría ser más propensa a errores, especialmente considerando la presencia de jugadores que pueden alterar el curso de la pelota de manera inesperada. Es por esto que una vez más suponemos que el gráfico resultará cóncavo.

Consideraremos el mismo conjunto de instancias que en el experimento anterior y correremos las instancias con grados 3, 5, 7 y 10 ya que son los que mejor tasa de efectividad obtuvieron.

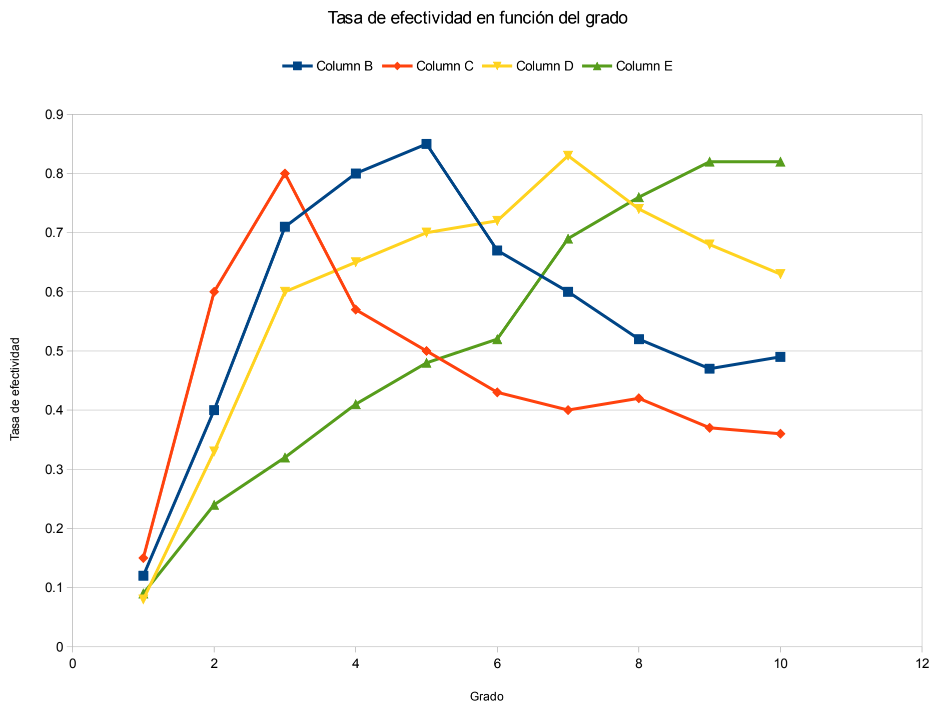
4. Resultados

4.1. Experimento de la convergencia del método



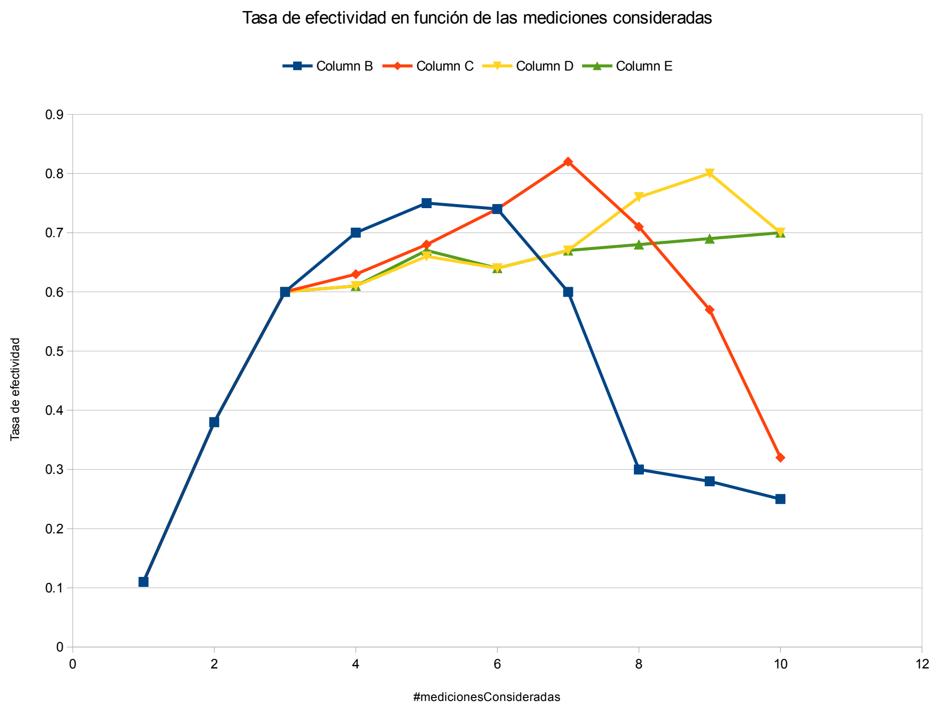
Azul: rectas. Amarillo: cuadráticas. Naranja: cúbicas.

4.2. Experimento de tasa de efectividad en función del grado



Azul: promedio. Naranja: 5 mediciones. Amarillo: 10 mediciones. Verde: 15 mediciones.

4.3. Experimento de tasa de efectividad en función de los puntos considerados



Azul: grado 3. Naranja: grado 5. Amarillo: grado 7. Verde: grado 10.

4.4. Discusión

4.4.1. Convergencia del método

Se puede ver claramente que el método converge para los 3 tipos de instancias utilizados. A partir de el instante 6 las 3 curvas son monótonas decrecientes, esto quiere decir que a partir de ese momento las aproximaciones realizadas se acercan ininterrumpidamente a y_gol. En los primero 5 instantes las curvas correspondientes a instancias de rectas y a curvas de tercer grado no presentan conductas raras, sin embargo, la de parábolas sí. Entre los instantes 2 y 6 crece linealmente. No estamos seguros a qué se debe, nuestra única conjetura es que el error pudo haber sido casualmente creciente en ese intervalo. Debería conducirse un nuevo experimento con instancias de ese tipo para verificar si ese comportamiento repite.

Creemos que los resultados son buenos pero no óptimos. Verificamos que el método es razonable y funciona bien para disparos simples, no obstante, creemos que es necesario en futuros análisis una experimentación más extensiva que incluya disparos con jugadores que intervengan, con más ruido y generados por curvas de un grado mayor, más impredecibles. Ya que no podemos asegurar una convergencia razonable para ésos otros tipos de instancias. Además, si bien no calculamos en el gráfico la velocidad de convergencia intuimos que es lineal y se puede mejorar. Un primer paso en esta dirección es utilizar los parámetros optimizados en los experimentos subsiguientes.

4.4.2. Grado del polinomio

Como se estimaba, los mejores grados para aproximar las trayectorias de las pelotas corresponden a los polinomios de grado 4, 5 y 6. Los polinomios grado 1 y 2 tiene una muy mala aproximación. Mientras que los polinomios de grado mayor o igual a 6 empiezan a mostrar una decaída en la tasa de efectividad. Por lo tanto el polinomio final de nuestro aproximación va a el de grado 5.

4.4.3. Puntos a considerar

En los resultados se puede apreciar que el valor óptimo se alcanza cuando la cantidad de mediciones es 3, sin embargo, se obtuvieron buenos resultados para todos los valores de 4 a 10. Al parecer la cantidad de mediciones no afecta tanto a la tasa de efectividad como si lo hace la variación del grado del polinomio. Nuestra aproximación final va a tomar 8 puntos si no hay jugadores y 3 sí los hay.

5. Conclusiones

Luego de haber experimentado y analizado el comportamiento de nuestro método conseguimos una confianza bastante sólida sobre el método de cuadrados mínimos. Sin embargo, creemos que es un problema que tiene muchas aristas y que da aún mucho por investigar. Creemos que algo que beneficiaría mucho a lal optimización del método es un análisis físico de lo que sucede en los disparos, las fuerzas que intervienen y cómo afectan al balón. Además, nos parece interesante explorar si es mejor aproximar de manera diferente $x(t)$ e $y(t)$. Como nos proveen información diferente, de una extraemos t_{gol} y de la otra y_{gol} quizás sea más prudente sobreestimar por un lado a uno y sobreestimar por otro al otro. También nos parece interesante estudiar si mejora la tasa de efectividad hacer varias aproximaciones y comparar unas con otras. Quizás diferentes combinaciones de grados y puntos a considerar no nos den mejor o peor información sobre el disparo si no que nos dan diferente información y si la entendemos y aprendemos a combinarla podemos hacer una aproximación de mayor calidad aún. El problema sigue abierto con muchos caminos por explorar, sin embargo, esperamos haber echado algo de luz para los investigadores venideros.

Referencias

[1] *BOOST C++ Libraries.* `http://www.boost.org`.

[2] Burden, R. L., and Faires, J. D. *Numerical Analysis.* Brooks Cole, 2000.

[3] Heath, M. *Scientific Computing.* McGraw-Hill, 1997.