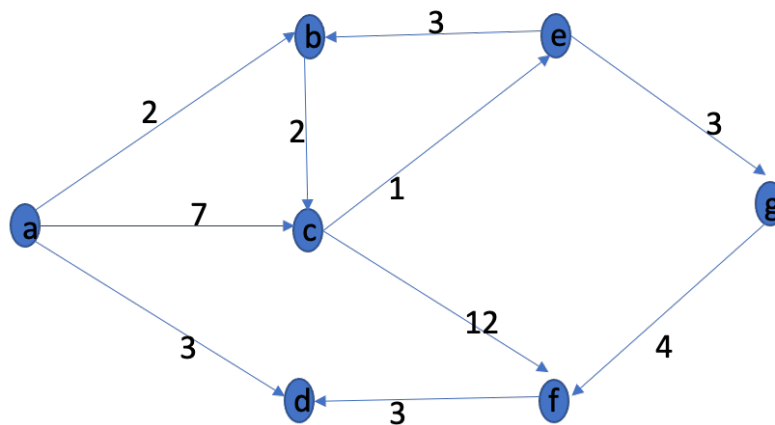


1. Algoritmi greedy

- a) Si spieghi in che cosa consiste un'istanza (input) del problema dell'interval scheduling e in cosa consiste una soluzione (output) del problema. **Se dalla risposta a questo punto si evincerà che lo studente non sa in cosa consiste il problema dell'interval scheduling, i punti successivi dell'esercizio non saranno valutati.**
- b) Si fornisca un'istanza del problema dell'interval scheduling con $n=7$ per cui il valore della soluzione ottima è 4. **Si specifichino i valori numerici che descrivono l'input e si fornisca la soluzione ottima per l'istanza da voi fornita. Non è sufficiente fornire un disegno.**
- c) Si consideri il problema della minimizzazione dei ritardi. Si dimostri che scambiare due job adiacenti invertiti i e j riduce il numero totale di inversioni di uno e non fa aumentare il ritardo massimo.

2. Grafi

- Si scriva lo pseudocodice dell'algoritmo ricorsivo DFS aggiungendo anche le linee di codice per la costruzione dell'albero DFS. Si analizzi il tempo di esecuzione dell'algoritmo proposto.
- Si mostri l'esecuzione dell'algoritmo di Dijkstra sul seguente grafo a partire dal nodo sorgente **a**. Per ogni passo si mostri il contenuto della coda a priorità, incluse le chiavi degli elementi, e l'albero dei percorsi minimi costruito fino a quel passo.



- Si consideri l'algoritmo topologico modificato in modo che se il grafo è un DAG restituisce l'ordinamento topologico del grafo, e se il grafo non è un DAG restituisce un ciclo direzionato del grafo. Si mostri l'esecuzione di questo algoritmo sul grafo al punto precedente. Per ogni chiamata ricorsiva effettuata, occorre mostrare il grafo su cui essa è invocata. Se il grafo è un DAG alla fine occorre fornire l'ordinamento topologico mentre se il grafo non è una DAG occorre fornire un ciclo del grafo e spiegare come questo ciclo viene individuato dall'algoritmo **(per il particolare grafo considerato non in generale)**.

3. Programmazione dinamica

a)

- 1) Si spieghi in che cosa consiste un'istanza (input) del problema dello zaino e in cosa consiste una soluzione (output) del problema. **Se dalla risposta a questo punto si evincerà che lo studente non sa in cosa consiste il problema dello zaino, i punti successivi dell'esercizio non saranno valutati.**
- 2) Si spieghi cosa rappresenta la funzione $OPT(i,w)$ e cosa rappresentano i suoi parametri i e w .
- 3) Fornire una formula per il calcolo di OPT in termini di valori delle soluzioni ottime per sottoproblemi di taglia più piccola.
- 4) Spiegare in modo chiaro come si arriva alla formula da voi fornita.

b) Si fornisca la tabella costruita dall'algoritmo di programmazione dinamica per il problema Subset Sums quando l'istanza input è $w_1=5, w_2=3, w_3=1, w_4=3, w_5=1, W=6$. Una volta costruita la tabella M , si contrassegnino con un cerchio le entrate $M[i,w]$ corrispondenti alle coppie di indici (i,w) su cui viene invocato ricorsivamente l'algoritmo che ricostruisce la soluzione ottima e **si fornisca la soluzione ottima.**

c)

- I. Si forniscano i valori $p(j)$ per l'istanza del problema dell'**Interval Scheduling Pesato** riportata in basso.
- II. Una volta calcolati i valori $p(j)$, calcolate $OPT(2)$ usando la formula di ricorrenza per il calcolo del valore della soluzione ottima e dire quali job sono nella soluzione ottima che ha valore $OPT(2)$.

$s_1=3$	$f_1=9$	$w_1=4$
$s_2=7$	$f_2=13$	$w_2=3$
$s_3=2$	$f_3=6$	$w_3=6$
$s_4=7$	$f_4=8$	$w_4=1$
$s_5=6$	$f_5=7$	$w_5=4$

Attenzione: gli indici j di $p(j)$ e di $OPT(j)$ non corrispondono necessariamente agli indici j dei valori input s_j, f_j e w_j . **Nella soluzione dovete usare gli indici dei $p(j)$ corretti. A questo scopo riordinate gli input s_j, f_j e w_j rinominandoli utilizzando un apicetto. Ad esempio se il job j si trova in posizione i nel nuovo ordinamento allora s_j, f_j e w_j diventeranno s'_i, f'_i e w'_i .**

4. Analisi degli algoritmi e notazione asintotica

- a) Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.
1. $(4n)^4 = O(n^4)$
 2. $n^{\log n} = \Omega((\log n)^n)$
 3. $n (\log n)^{1/3} + n^{1/3} = \Omega(\log n^n)$
 4. $n^3 + 10 = \Omega(n^3 + 10n)$
 5. $4^{\log n} = \Theta(n)$, dove il \log e' in base 2
- b) Si dimostri che se $1 < f(n) = O(h(n))$ allora $(f(n))^a = O(h(n)^a)$, dove a è una costante positiva. Occorre utilizzare solo la definizione di O e nessuna altra proprietà.
- c) Si analizzi il tempo di esecuzione nel caso pessimo del seguente segmento di codice fornendo una stima asintotica **quanto migliore e' possibile** per esso. **Si giustifichi in modo chiaro la risposta.**
- ```
i=0
j=0
while(i<n and j<m)
 if (A[i] <= B[j])
 i=i+1
 else
 j=j+1
```

#### 5. Divide et Impera

- Si descriva il comportamento dell'algoritmo QuickSelect specificando anche l'input e l'output dell'algoritmo e di eventuali procedure ausiliarie. **Non bisogna fornire lo pseudocodice ne' fare una traduzione in italiano delle singole istruzioni dello pseudocodice.**
- Si fornisca la relazione di ricorrenza che esprime un limite superiore al tempo di esecuzione dell'algoritmo QuickSelect **nel caso pessimo. Si giustifichi in modo chiaro la risposta.**
- A partire dalla relazione di ricorrenza da voi fornita al punto b), si fornisca una funzione  $h(n)$  tale  $T(n) = O(h(n))$ . Giustificare la risposta usando il metodo iterativo.