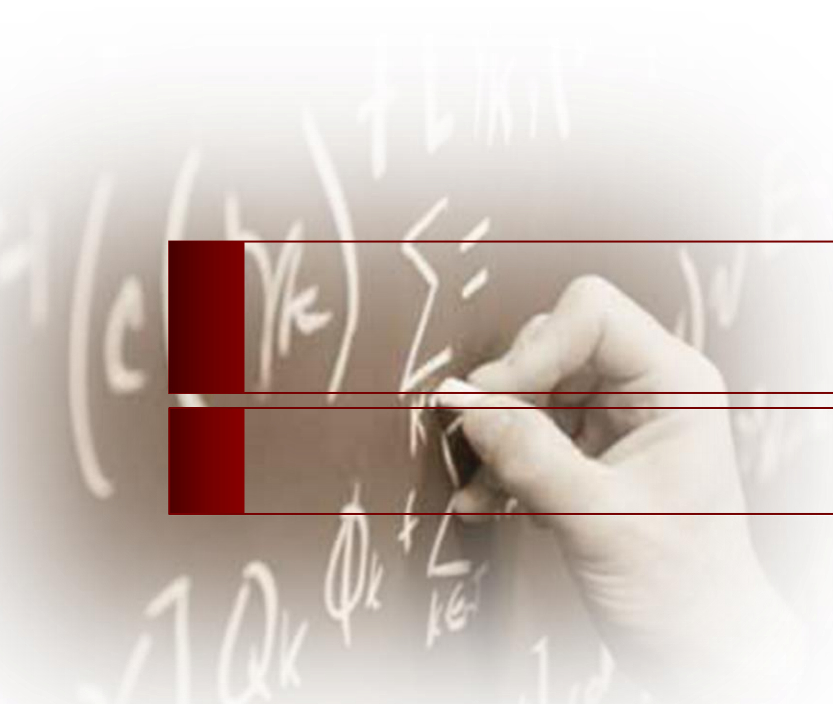
PUC Minas
Poços de Caldas

Unidade 2 - Funções



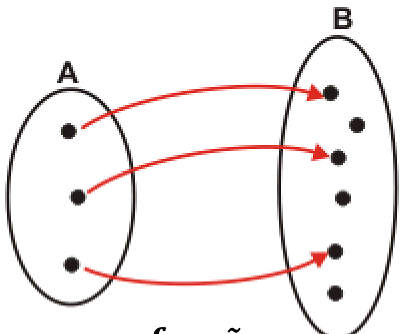
Cálculo I

Prof. Dr. Márcio Leandro Gonçalves
marcio@pucpcaldas.br

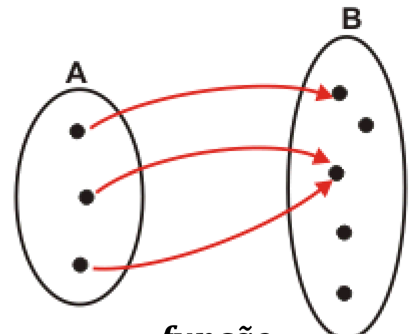
Conteúdo

Funções - definição

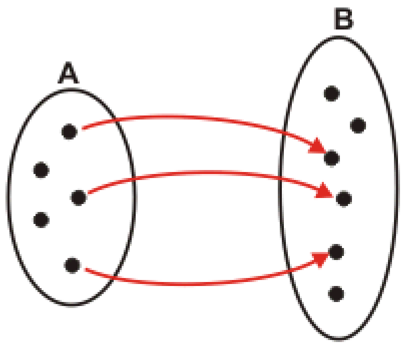
Uma *regra* ou *lei* que associa a cada elemento de um conjunto um único elemento de outro conjunto é chama de função.



função

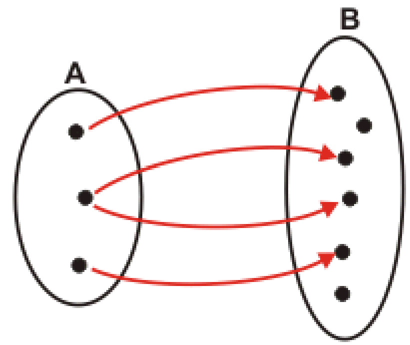


função



não é função

(não associa todo elemento de A)



não é função

(associa um elemento de A a dois elementos de B)

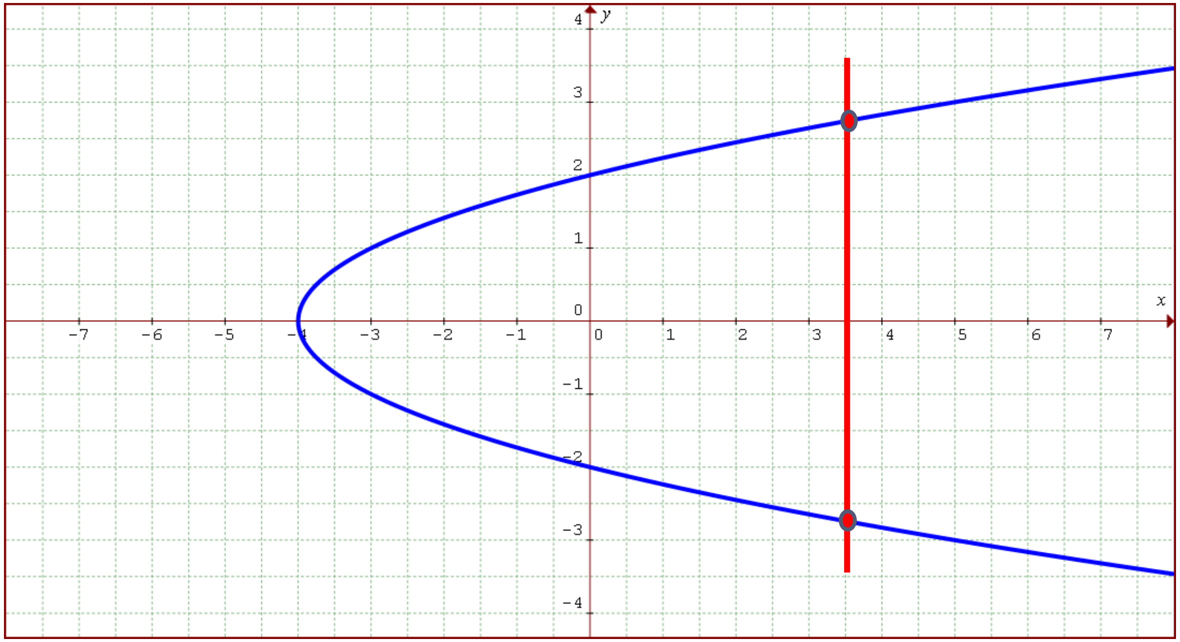
Funções - definição

TESTE DA RETA VERTICAL

Ao traçar uma reta vertical por pontos do eixo x (domínio), esta deve interceptar o gráfico num único ponto. Pois conforme a **definição de função, para cada x (no domínio)deve existir em correspondência um único y (no contradomínio)**.

Se esta reta vertical cortar o gráfico em mais de um ponto, então este gráfico não representa uma função.

Funções - definição

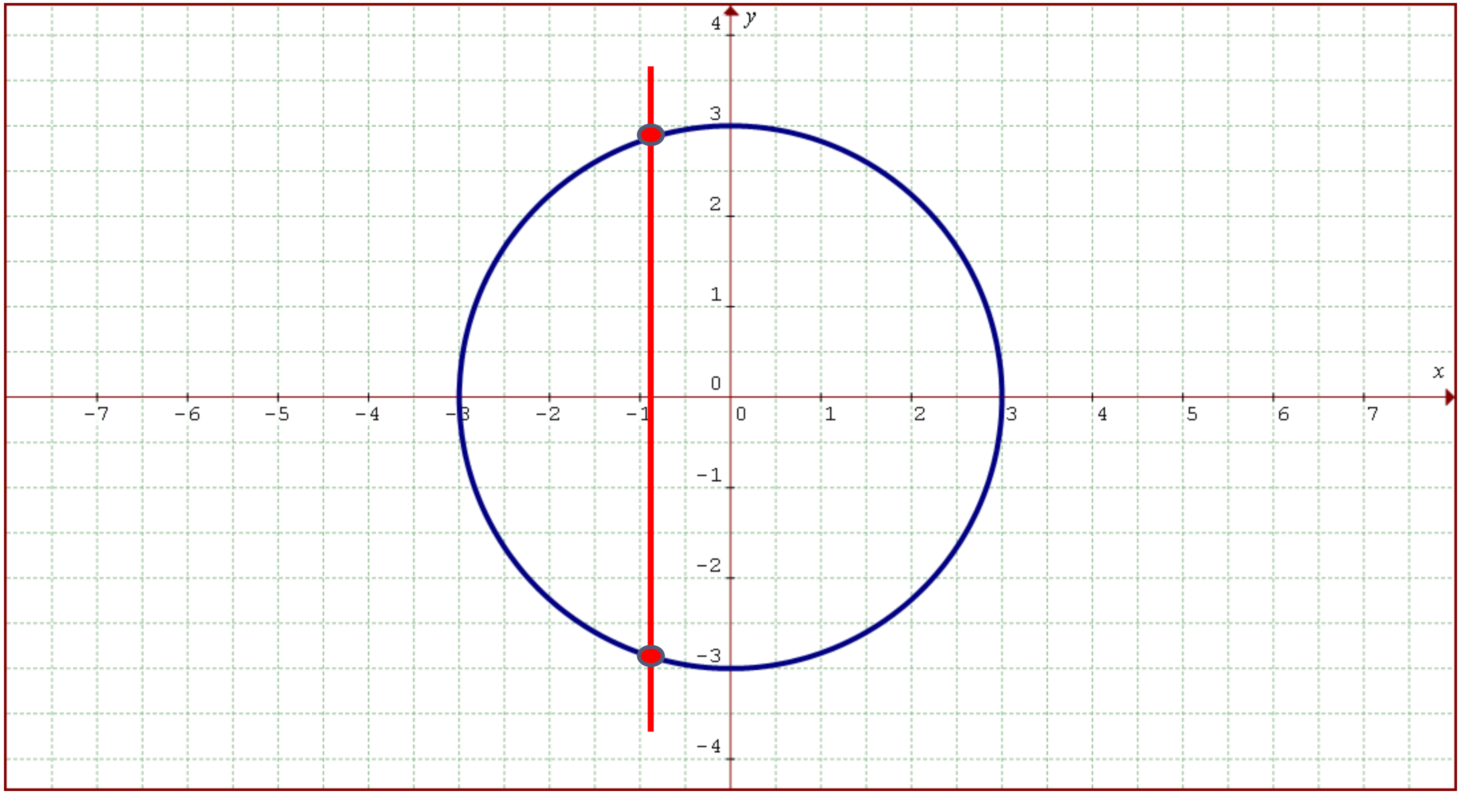


não é função

(associa um elemento de x a dois elementos de y)

(a reta vertical corta o gráfico da função em dois pontos de y)

Funções - definição



não é função

(associa um elemento de x a dois elementos de y)

(a reta vertical corta o gráfico da função em dois pontos de y)

Funções - representação

É possível representar uma função das seguintes maneiras:

Numericamente
(**tabela de pontos**)

Ano	População (milhões)
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080

Algebricamente
(**fórmula**)

$$P(t) \approx f(t) = (0{,}008079266).(1{,}013731)^{t}$$

Visualmente
(**gráfico**)

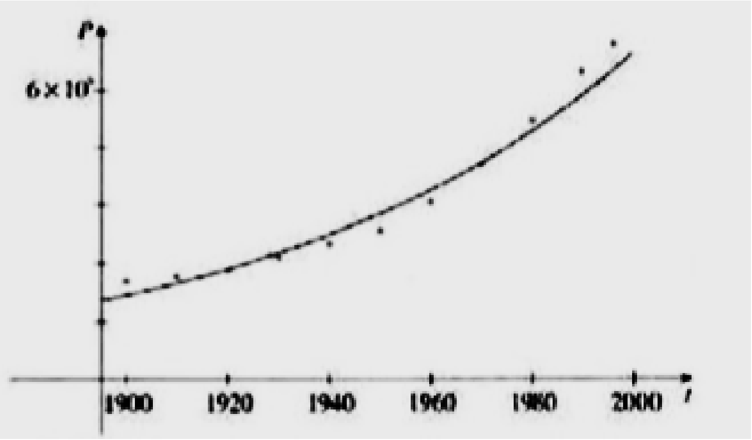
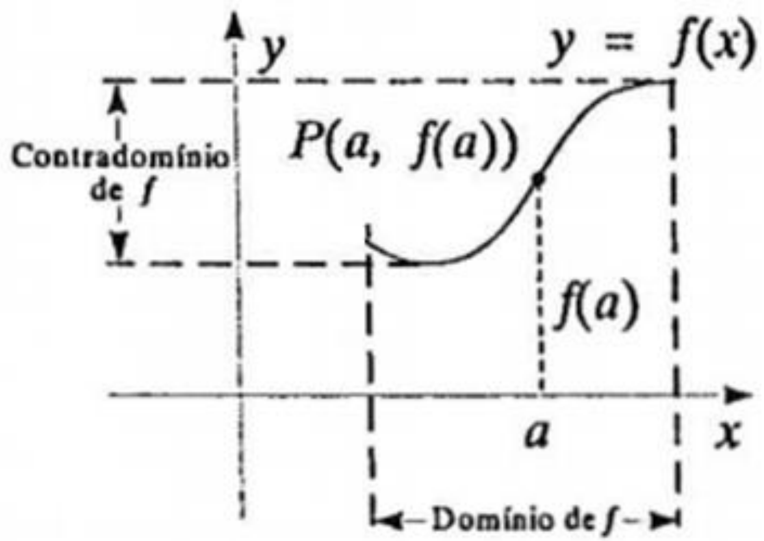


Gráfico de uma função

O método mais comum de visualizar uma função consiste em fazer seu gráfico.

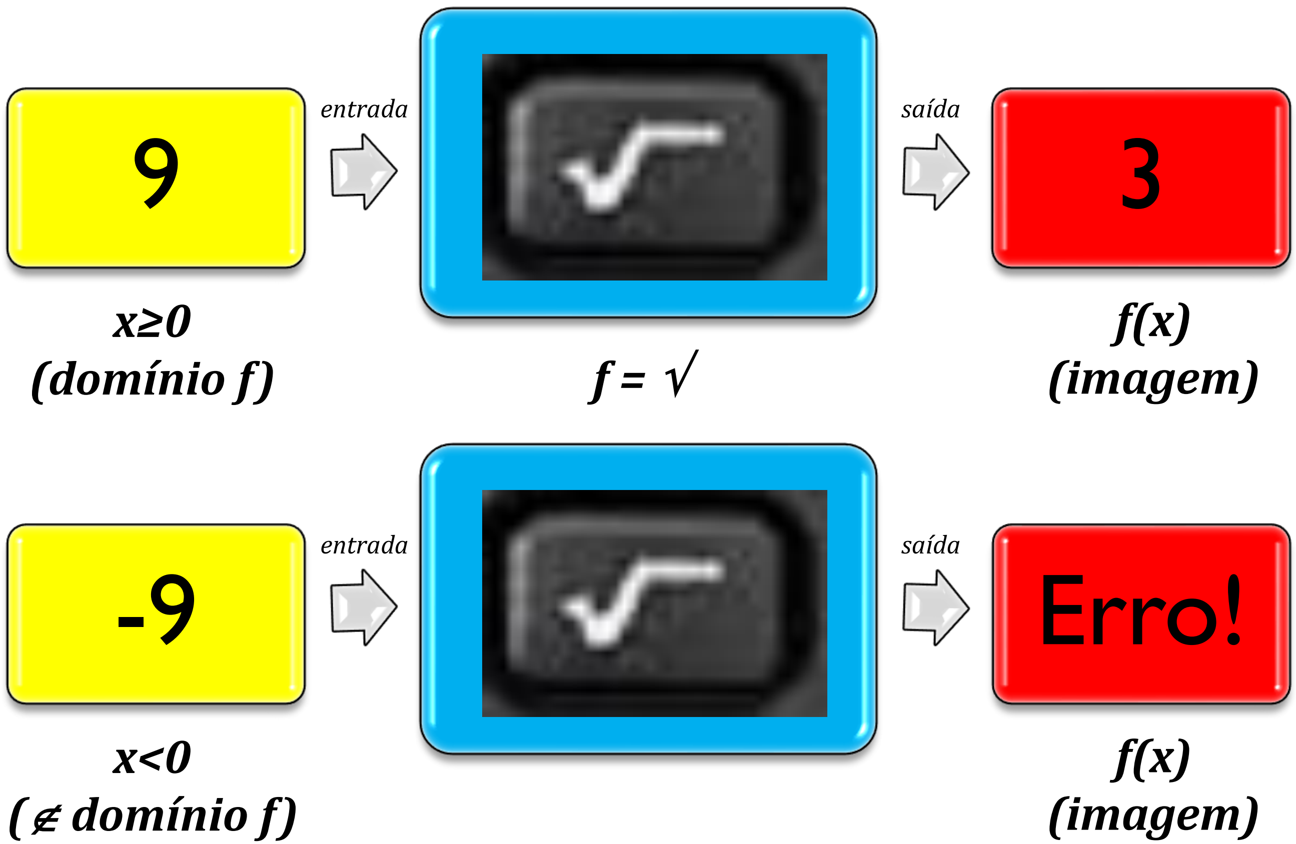
Dada uma função $f: A \rightarrow B$. O **gráfico de** f será o conjunto dos pares ordenados:

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$



Funções – Domínio e Imagem

As teclas pré-programadas de uma calculadora são exemplos de funções como máquinas;



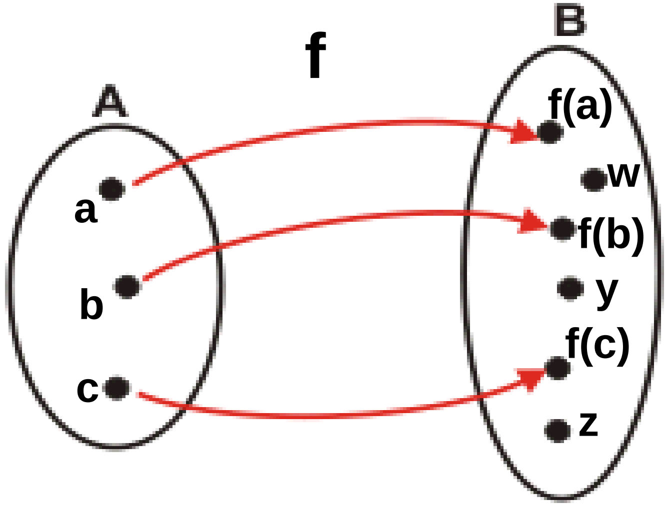
Domínio e Imagem de uma função

Dada uma função $f\colon A \to B$. O conjunto A é chamado de **domínio da função f** e é denotado por $D(f)$.

B é chamado de **contradomínio da função** f.

A **imagem de** f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ quando x varia por todo o $D(f)$:

$$Im(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$$



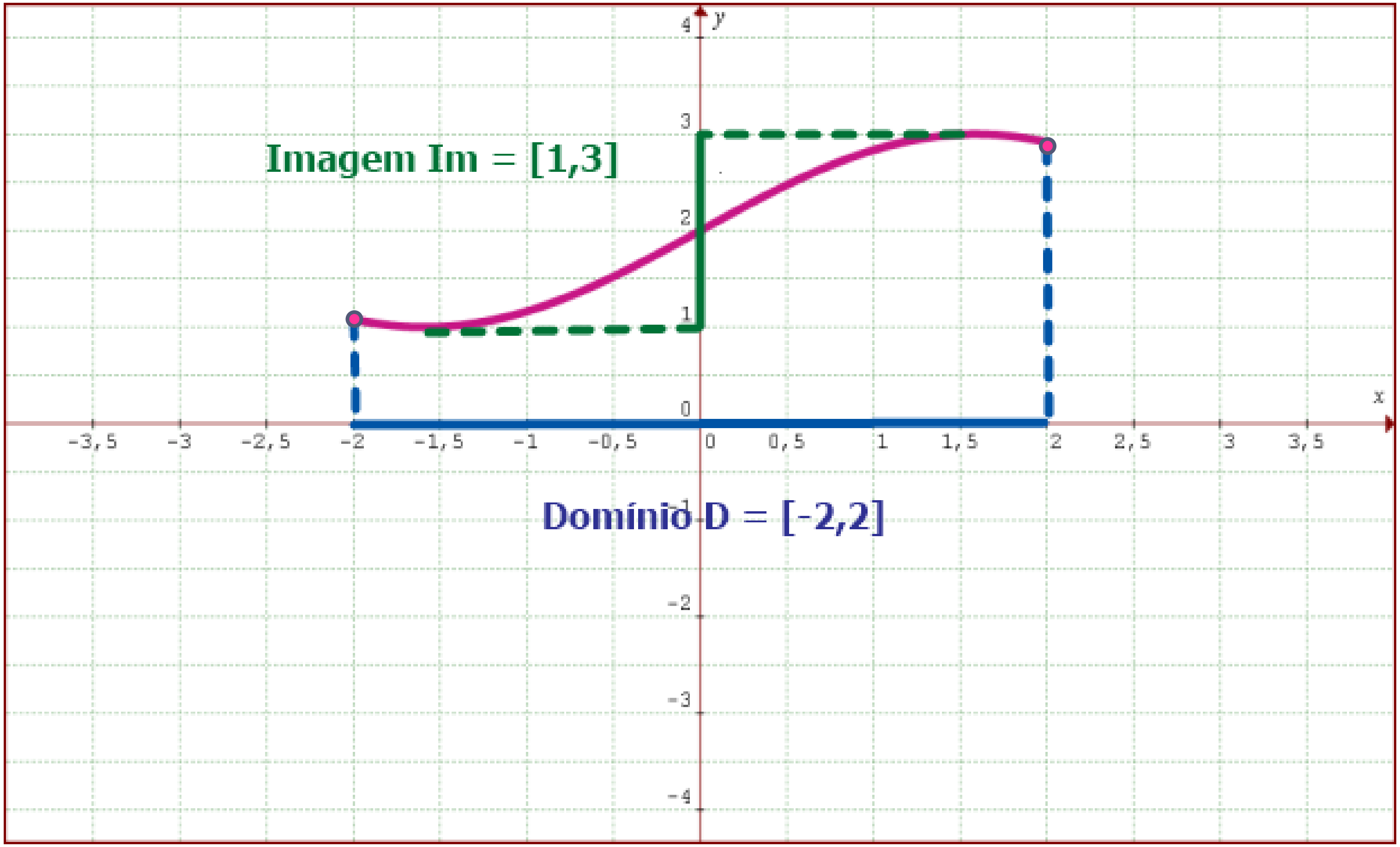
$D(f) = A = \{a, b, c\}$ *(domínio de f)*

$B = \{f(a), w, f(b), y, f(c), z\}$ *(contradomínio de f)*

$Im(f) = \{f(a), f(b), f(c)\}$ *(imagem de f)*

Observe que $Im(f) \subset B$ *(a imagem é subconjunto do contradomínio)*

Domínio e Imagem de uma função

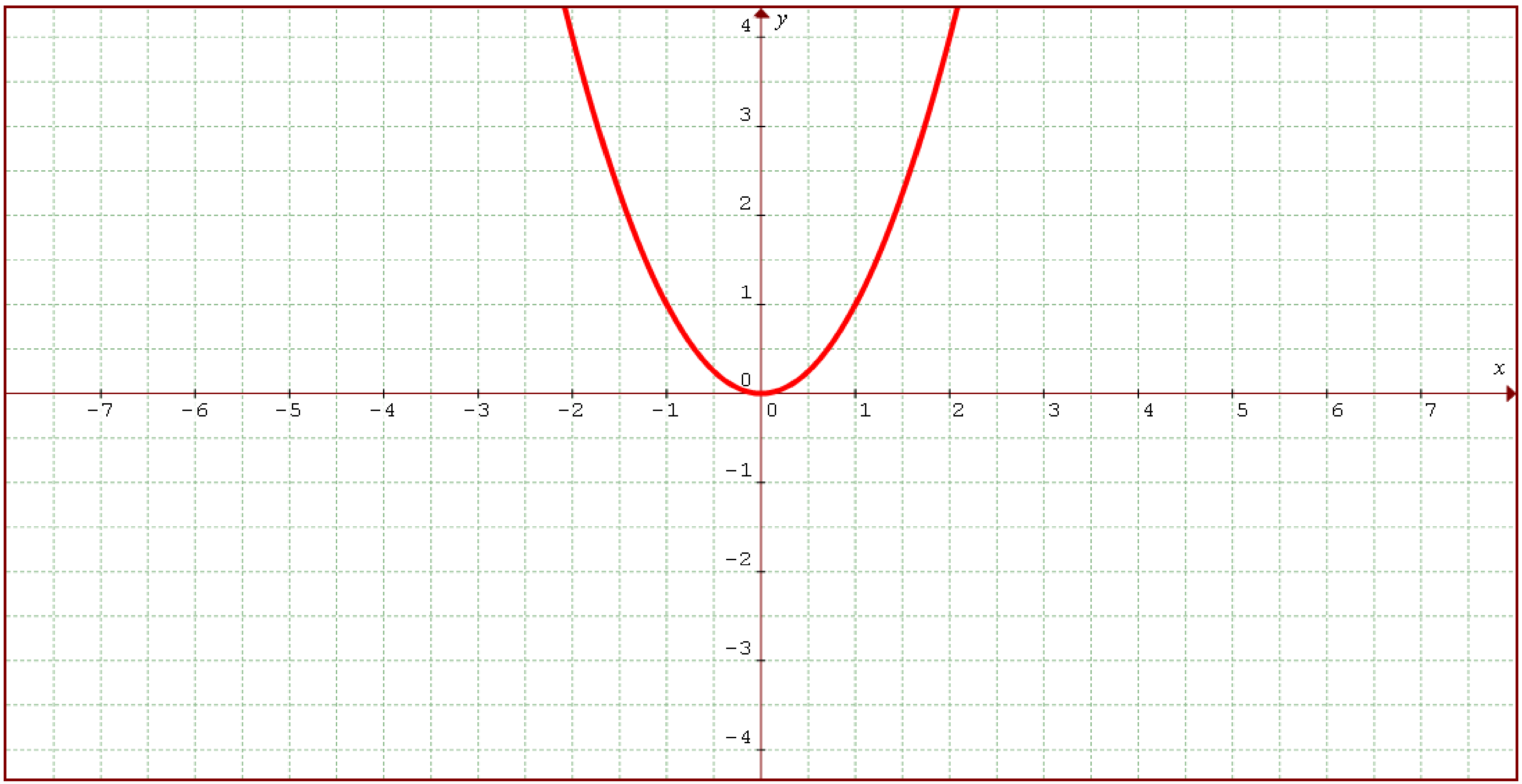


Domínio e Imagem de uma função

Função	Domínio (x)	Imagem (y)
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

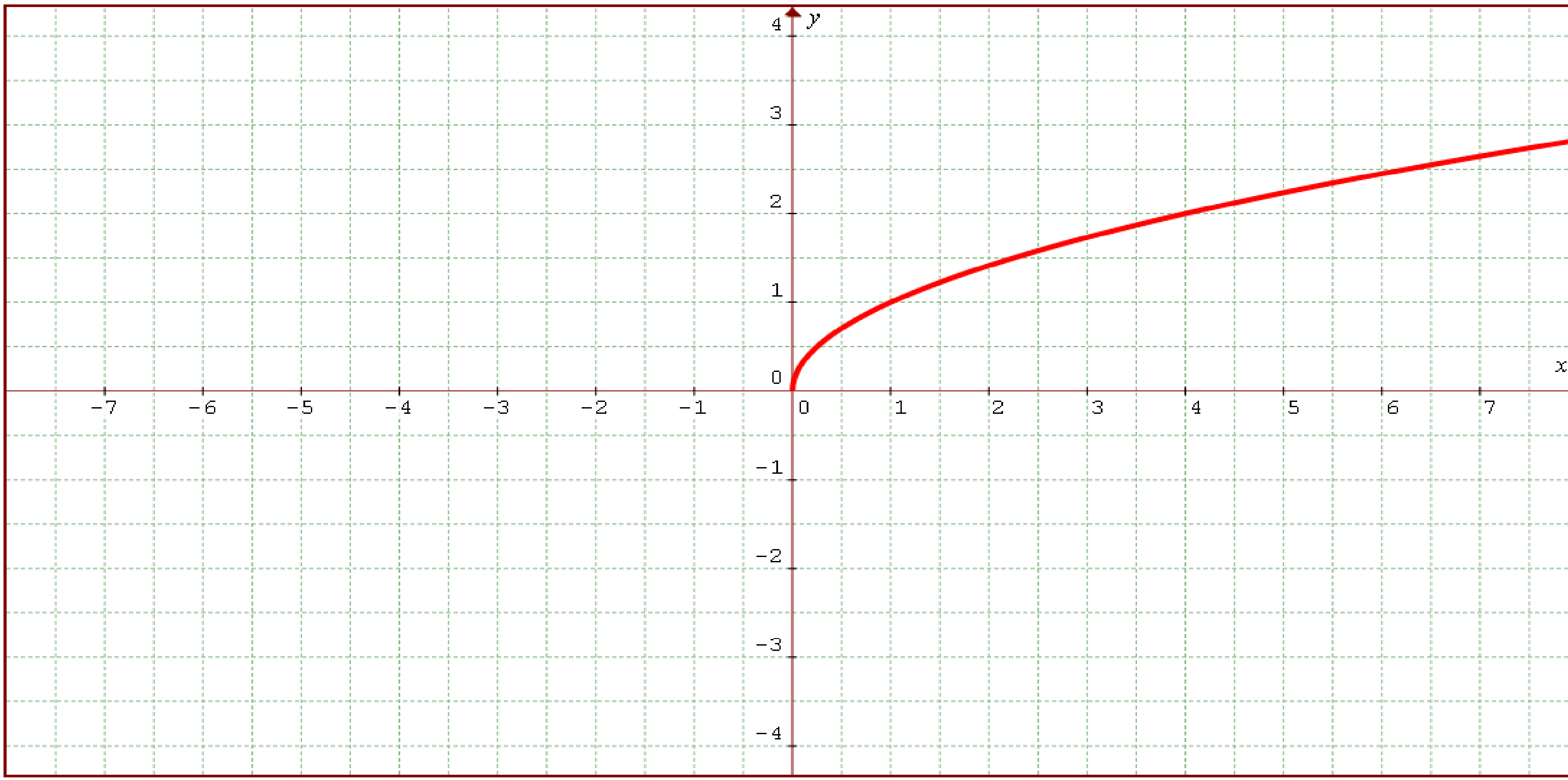
Domínio e Imagem de uma função

Função	Domínio (x)	Imagem (y)
$f(x) = x^2$	$D = \Re$	$Im = \Re^+$



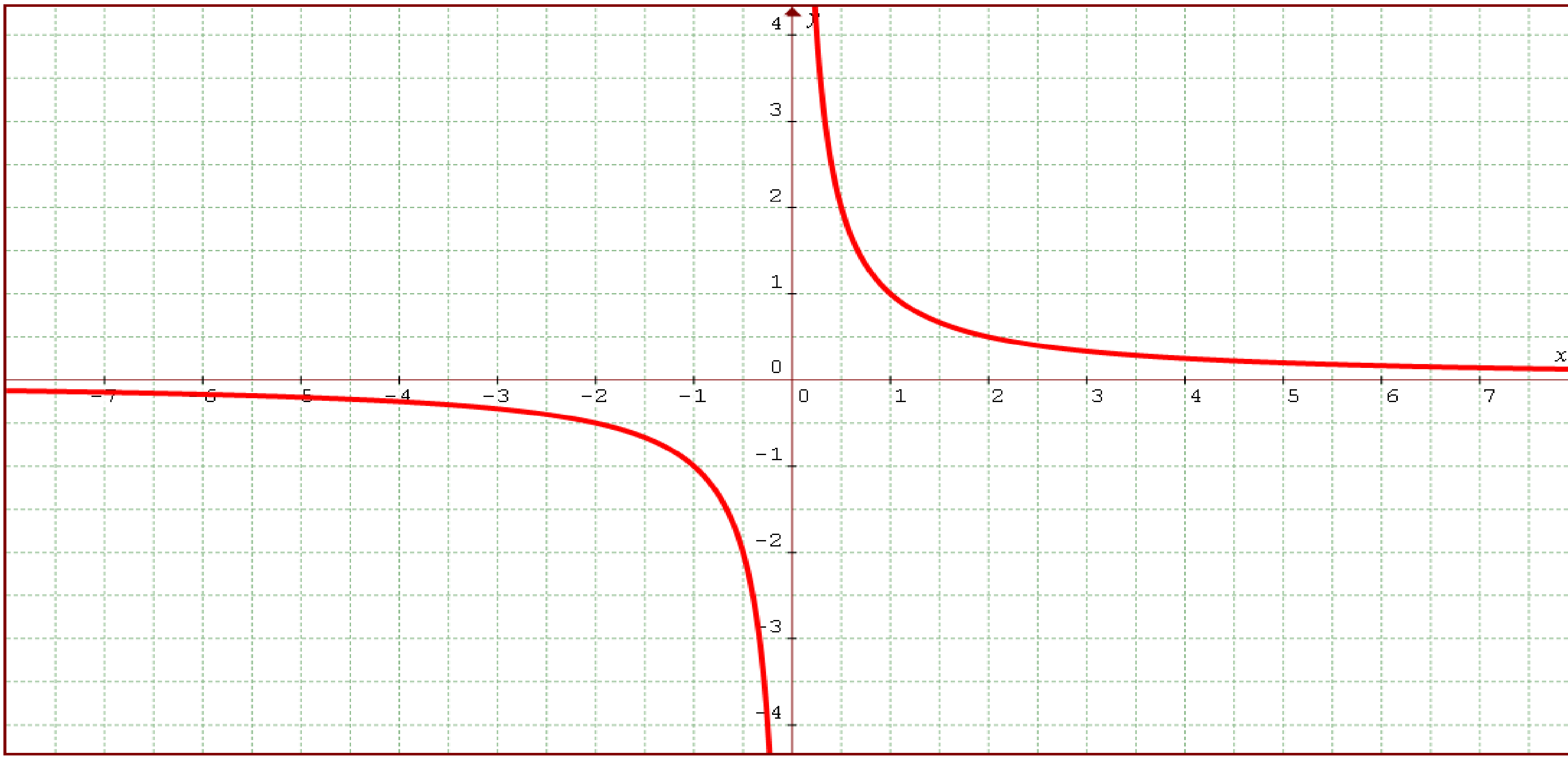
Domínio e Imagem de uma função

Função	Domínio (x)	Imagem(y)
$f(x) = \sqrt{x}$	$D = \Re^{+}$	$Im = \Re^{+}$



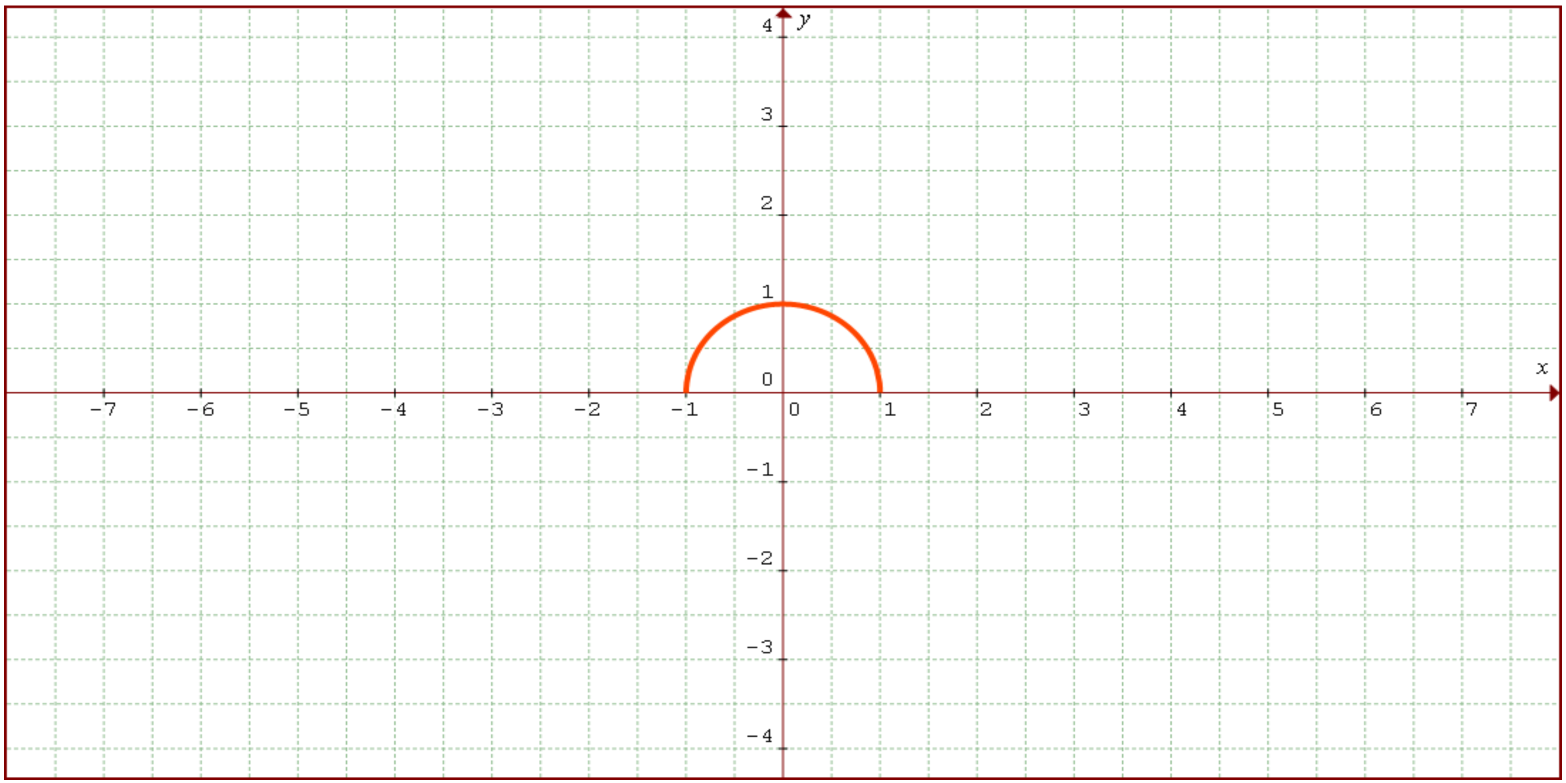
Domínio e Imagem de uma função

Função	Domínio (x)	Imagem(y)
$f(x) = 1/x$	$D = \Re^*$	$Im = \Re^*$



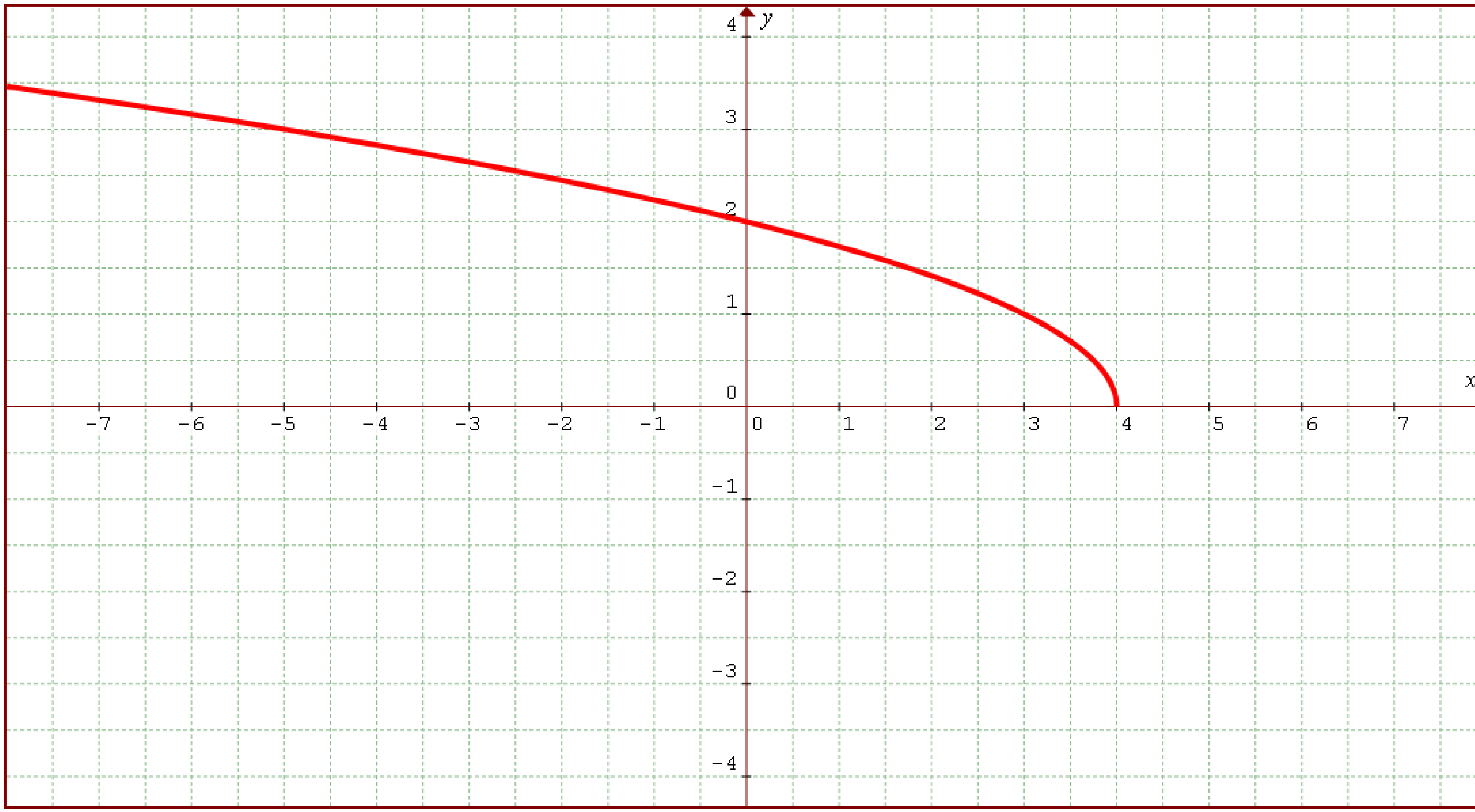
Domínio e Imagem de uma função

Função	Domínio (x)	Imagem (y)
$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$	$D = [-1,1]$	$Im = [0,1]$



Domínio e Imagem de uma função

Função	Domínio (x)	Imagem (y)
$f(x) = \sqrt{4 - x}$	$D = (-\infty, 4]$	$Im = \Re^{+}$



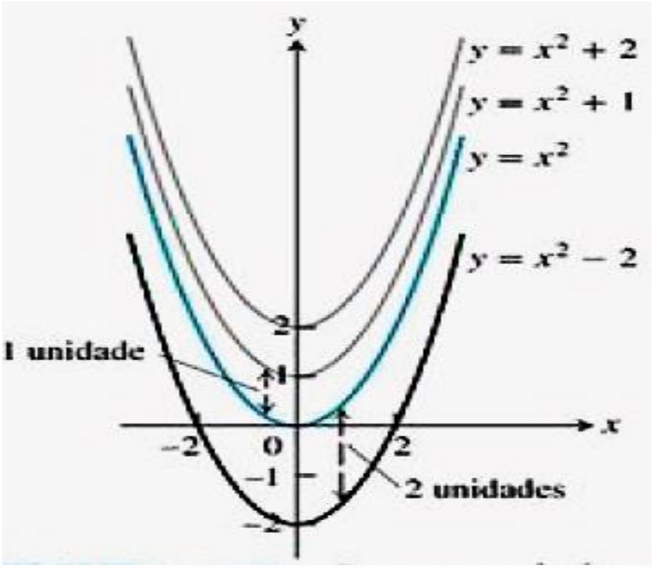
Translação de funções

Translação Vertical

$$y = f(x) + k$$

Translada o gráfico k unidades para cima se $k > 0$
Translada o gráfico $|k|$ unidades para baixo se $k < 0$

Exemplo:



Translação de funções

Translação Horizontal

$$y = f(x+h)$$

Translada o gráfico *h* unidades para esquerda se $h > 0$
Translada o gráfico $|h|$ unidades para direita se $h < 0$

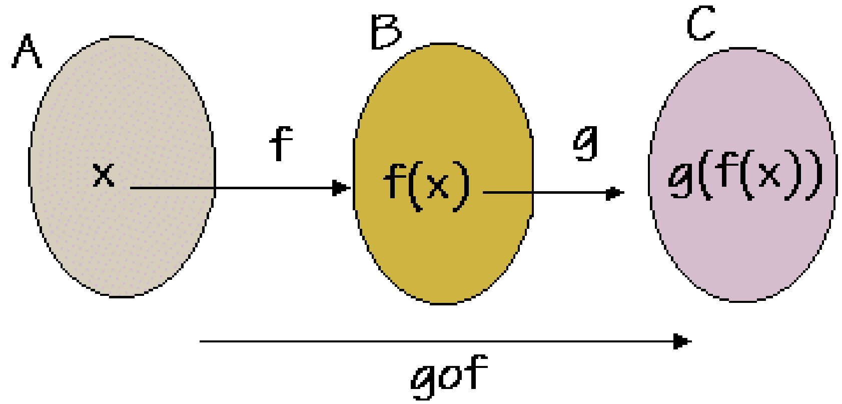
Exemplo:

Função Composta

Suponha que alguns valores de uma função *f* estejam no domínio de uma função *g*. Pode-se então combinar *f* e *g* para formar uma nova função de *x* e cujos valores são os números *g(f(x))*.

Dizemos que a função *g(f(x))* (lê-se “g de f de x”) é a composta de *g* e *f*.

Notação: $g \circ f$



A composta $g \circ f$ *só está definida quando o contradomínio da f é igual ao domínio da g. Em geral,* $g \circ f \neq f \circ g$ *e pode acontecer que somente uma das funções* $g \circ f$ *ou* $f \circ g$ *esteja definida.*

Função Composta

Exemplo 1: *(vendo um função como uma composição)*

A função $y = \sqrt{1 - x^2}$ *é a composição da função* $g(x) = 1 - x^2$ *com a função* $f(x) = \sqrt{x}$. *Ela pode ser pensada calculando-se primeiro* $1 - x^2$ *e depois tomando a raiz quadrada do resultado. Note que* $1 - x^2$ *não pode ser negativa. O domínio da composição é* $[-1,1]$.

Exemplo 2: *(encontrando uma fórmula para uma função composta)*

Dado $g(x) = x^2$ *e* $f(x) = x - 7$. *Qual o valor de* $f(g(2))$?

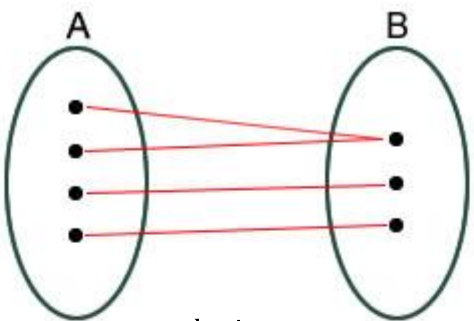
Para encontrar $f(g(x))$, *substitui-se* x *na fórmula* $f(x) = x - 7$ *pela expressão dada para* $g(x)$:

$f(x) = x - 7 \Rightarrow f(g(x)) = g(x) - 7 = x^2 - 7 \Rightarrow \mathbf{f(g(2)) = (2)^2 - 7 = -3}$

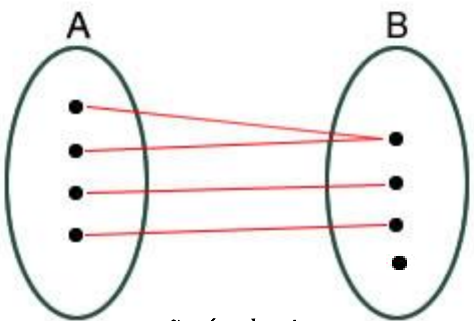
Função Sobrejetora

$$f: A \to B, f \text{ é sobrejetora} \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A \mid f(x) = y$$

Nota-se que *f: A → B é sobrejetora se, e somente se,* $\boldsymbol{Im(f) = B}$.

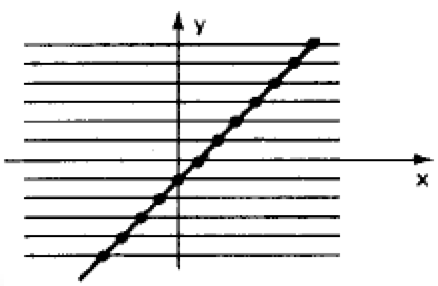


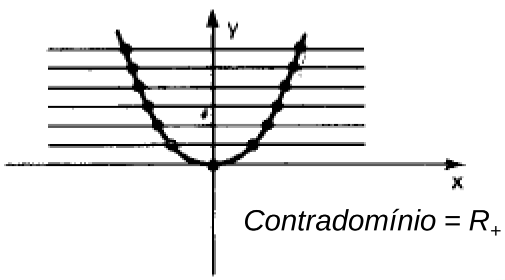
sobrejetora



não é sobrejetora

Se traçarmos **retas horizontais** e cada uma delas cortar o gráfico da função em um ou mais pontos, então ela é sobrejetora.

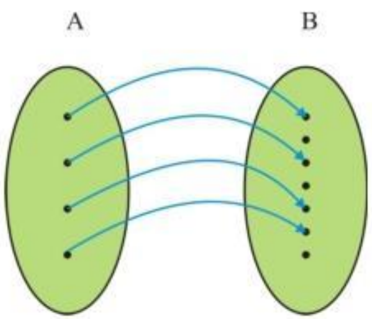




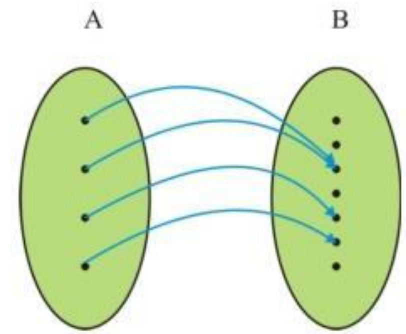
Função Injetora

$$f: A \to B, f \text{ é injetora} \Leftrightarrow (\forall x1, x2 \in A)(f(x1) = f(x2) \Rightarrow x1 = x2)$$

É toda a função onde cada *x* encontra um *y* e os elementos distintos têm imagens distintas.

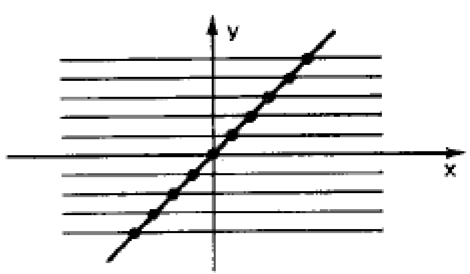


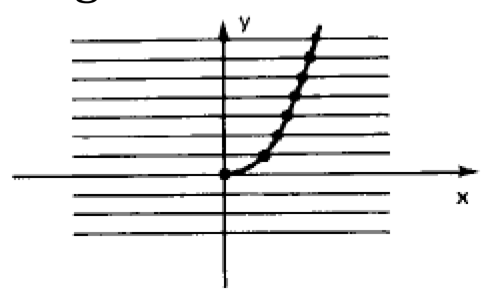
injetora



não é injetora

Se traçarmos **retas horizontais** e cada uma delas cortar o gráfico da função em um só ponto ou não cortar o gráfico, então ela é injetora.

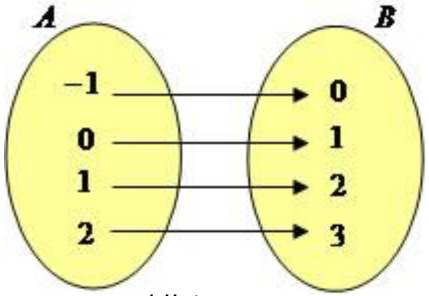




Função Bijetora

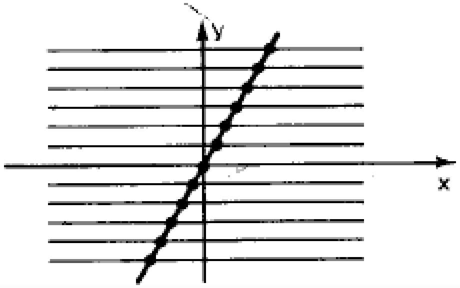
$$f: A \rightarrow B,\ f \text{ é bijetora} \Leftrightarrow \forall y \in B,\ \exists!\ x \in A \mid f(x) = y$$

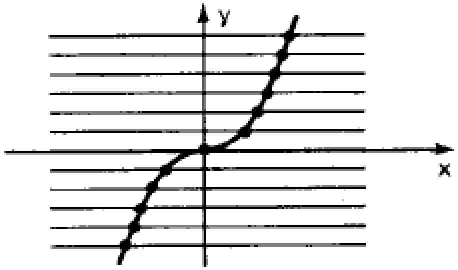
Nota-se que *f é bijetora se, e somente se é sobrejetora e injetora*



bijetora

Se traçarmos **retas horizontais** e cada uma delas cortar o gráfico da função em um só ponto, então ela é bijetora.



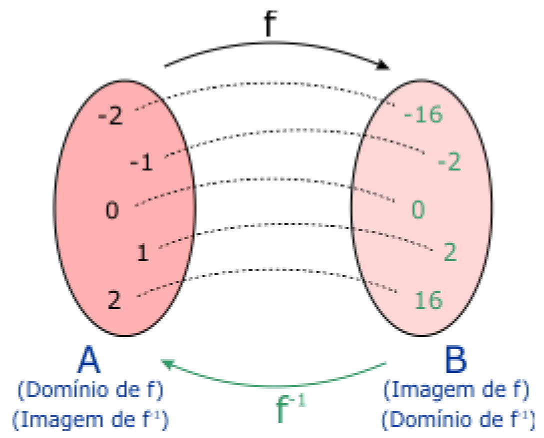


Função Inversa

Se f é uma função bijetora de A em B, a relação inversa de f é uma função de B em A que denominamos ***função inversa*** de f e indicamos por $\boldsymbol{f^{-1}}$.

$$\boldsymbol{\textit{Seja } f: A \rightarrow B,\ f^{-1} \textit{ é uma função de B em A} \Leftrightarrow f \textit{ é bijetora}}$$

A inversa de f^{-1} é a própria função f: $\boxed{(f^{-1})^{-1} = f}$



Função

x	y
-2	-16
-1	-2
0	0
1	2
2	16

Inversa

y	x
-16	-2
-2	-1
0	0
2	1
16	2

Função Inversa

Regra prática

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos assim:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos a mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;
2º)transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Exemplo: Qual é a função inversa da função bijetora em $\mathfrak{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$?

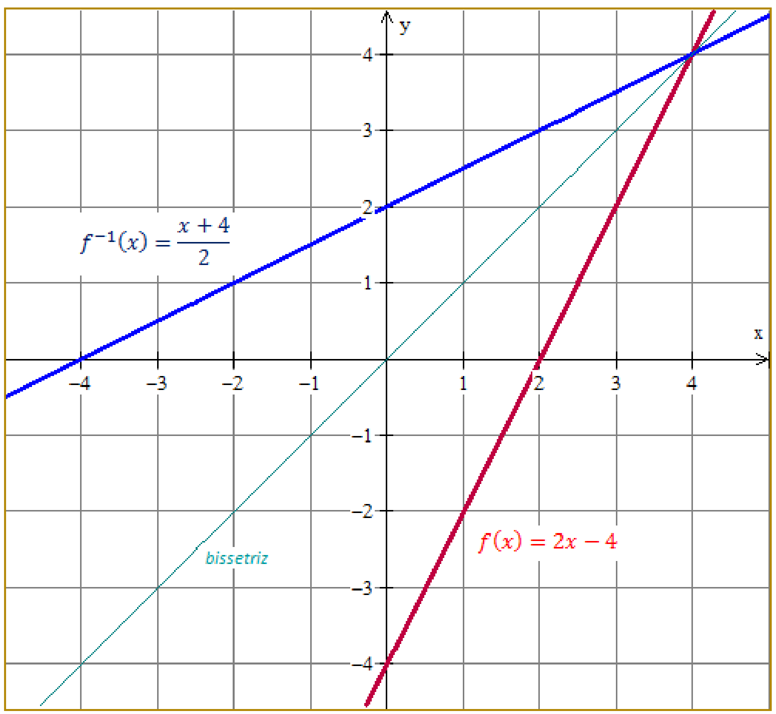
1º) $f(x) = 3x + 2 \Rightarrow x = 3y + 2$

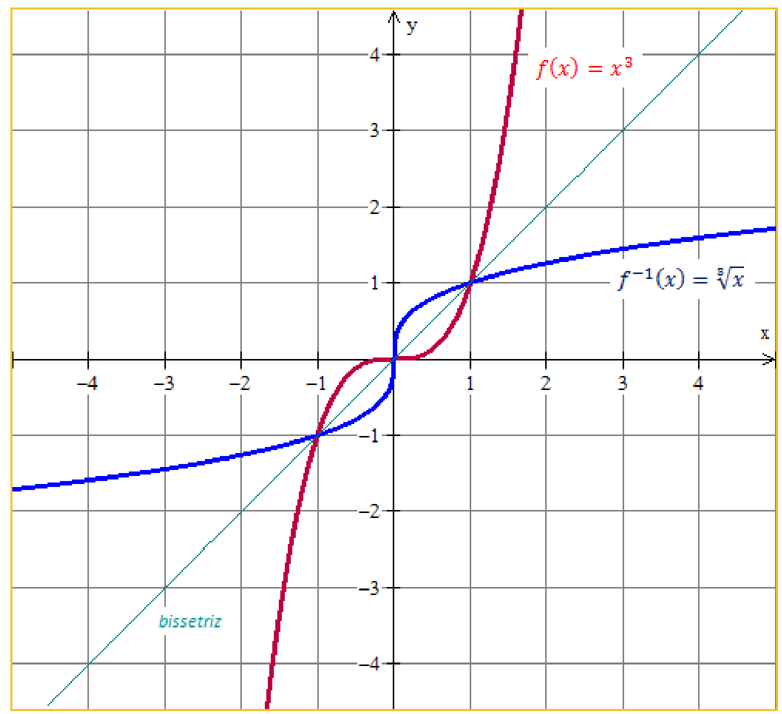
2º) $x = 3y + 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{x-2}{3} \Rightarrow \boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}}$.

Função Inversa

Gráficos de f e f^{-1}

Os gráficos de *f* e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes 1 e 3 do plano cartesiano.





Função Inversa

A composta de funções inversas entre si:

$$f^{-1} o\, f = x \quad e \quad f\, o\, f^{-1} = y$$

A composta de funções inversas entre si resulta a função identidade.

A inversa da composta:

$$(g\, o\, f)^{-1} = f^{-1}\, o\, g^{-1}$$

A inversa da composta é igual a composta das inversas.

Unicidade da inversa:

A função inversa, quando existe, é única.

Funções Polinomiais

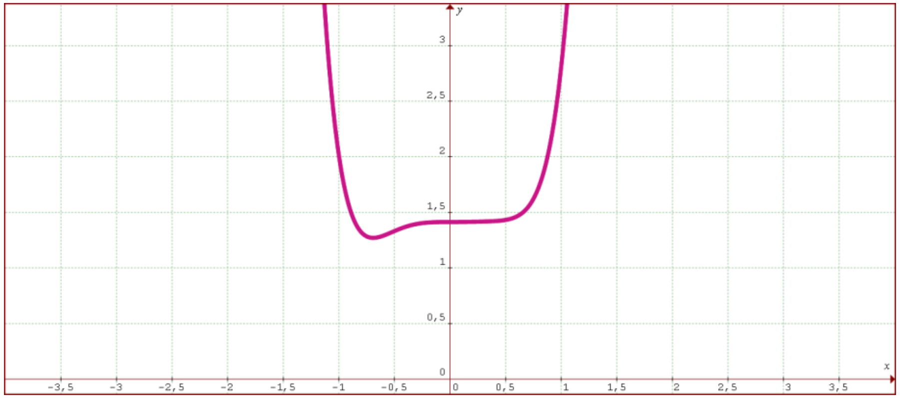
Uma função f é uma função **polinomia**l se *f(x)* é um polinômio, isto é, se:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

onde os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ são números reais e os expoentes são inteiros não-negativos.

Se $a_n \neq 0$ então f é de **grau** n.

Exemplo: $P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$ é um polinômio de grau 6.

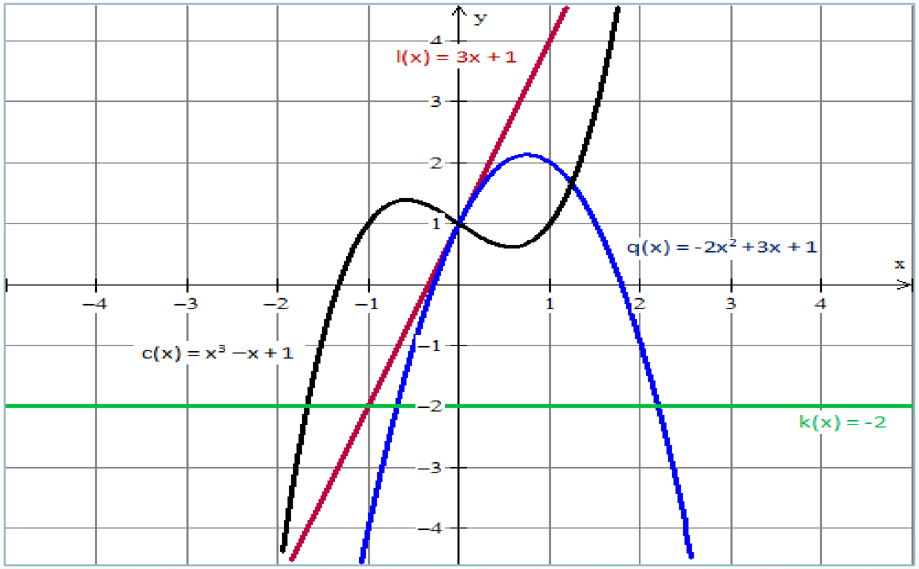


Funções Polinomiais

Casos especiais:

grau 0:	$f(x) = a$	**função constante**
grau 1:	$f(x) = ax + b$	**função linear**
grau 2:	$f(x) = ax^2 + bx + c$	**função quadrática**
grau 3:	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	**função cúbica**

Exemplos:



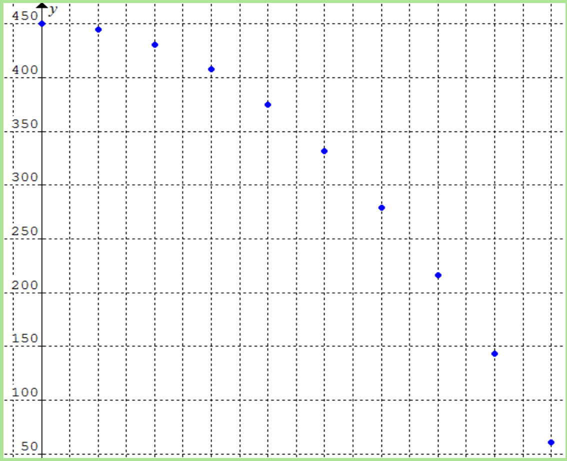
Funções Polinomiais

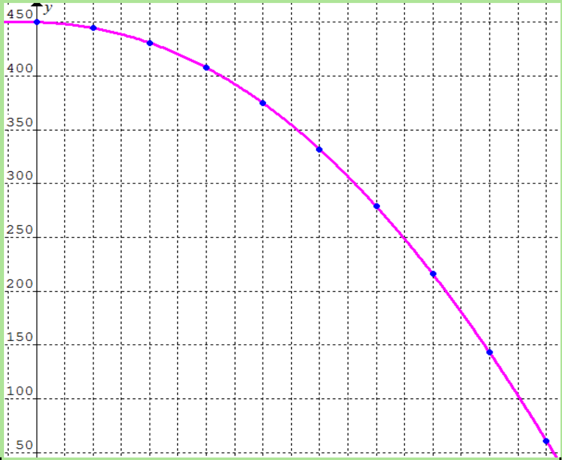
Os polinômios são utilizados comumente para modelar diversas quantidades que ocorrem em ciências sociais e naturais.

Queda de uma bola

Uma bola é solta a partir do posto de observação de uma torre, 450 m acima do chão, e sua altura é registrada em intervalos de 1 segundo:

Tempo (s)	Altura (m)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61





Modelo quadrático

$-4{,}9t^2 + 0{,}96t + 449{,}36 = 0$

Funções Polinomiais

Custo de produção

Em geral, é apropriado representar a função custo de produção de *x* unidades de um produto por um polinômio:

$$C(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

$a_0 \rightarrow$ *custos gerais indiretos (aluguel, aquecimento, manutenção)*

$a_1 \rightarrow$ *matérias-primas*

$a_2 \rightarrow$ *mão de obra (poderia depender de potências mais altas de x, em decorrência dos custos de horas extras e ineficiências em operações de larga escala.*

$\vdots$

$a_n \rightarrow$ *outros custos*

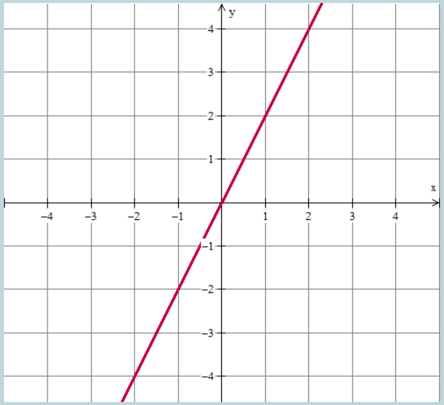
Funções Lineares

Função Linear

Um aplicação de $\Re$ em $\Re$ recebe o nome de função linear quando a cada elemento de $x \in \Re$:

$$f(x) = ax \quad (a \neq 0)$$

Im(f) = $\Re$ e o gráfico de f é uma reta que passa pela origem:



Funções Lineares

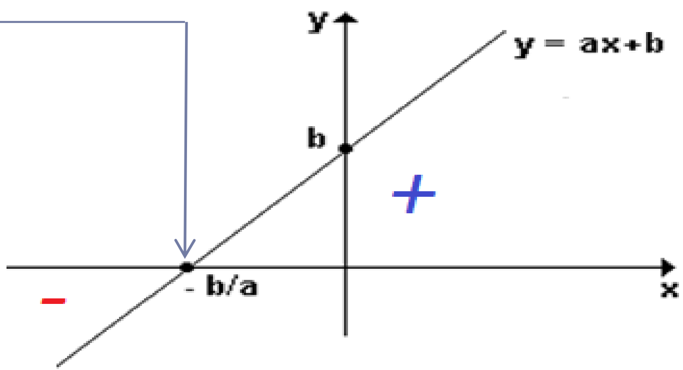
Função Afim

Um aplicação de $\Re$ em $\Re$ recebe o nome de função afim quando a cada elemento de $x \in \Re$:

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

O gráfico de f é uma reta. Note que para $b = 0$ a função afim se transforma na função linear $y = ax$. Pode-se dizer, então, que a função linear é uma particular função afim.

O número -b/a é o zero da função afim



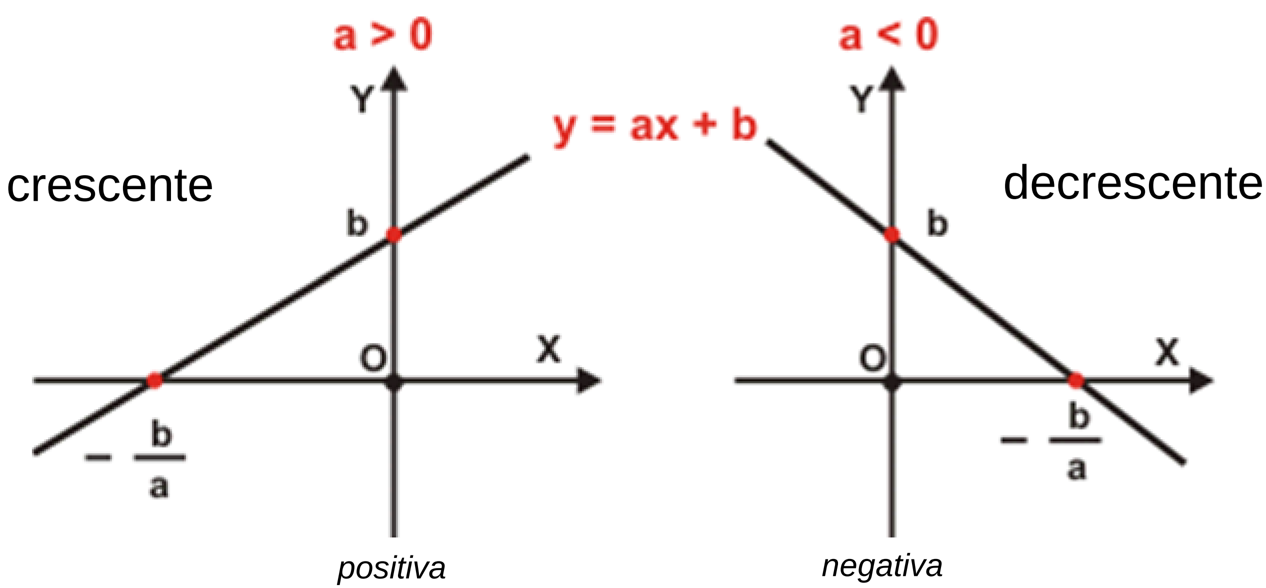
Funções Lineares

O número a é o coeficiente angular ou declividade da reta:

$$a > 0 \Rightarrow \textit{declividade positiva}$$

$$a < 0 \Rightarrow \textit{declividade negativa}$$

$$a = 0 \Rightarrow \textit{paralela ao eixo x (função constante)}$$



Funções Quadráticas

Função Quadrática

Um aplicação de $\Re$ em $\Re$ recebe o nome de função quadrática ou do 2º. grau quando a cada elemento de $x \in \Re$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

O gráfico de f é uma parábola.

Zeros de um função quadrática

Os zeros ou raízes de uma função quadrática são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$ e, portanto, as soluções da equação do segundo grau:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ou seja, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

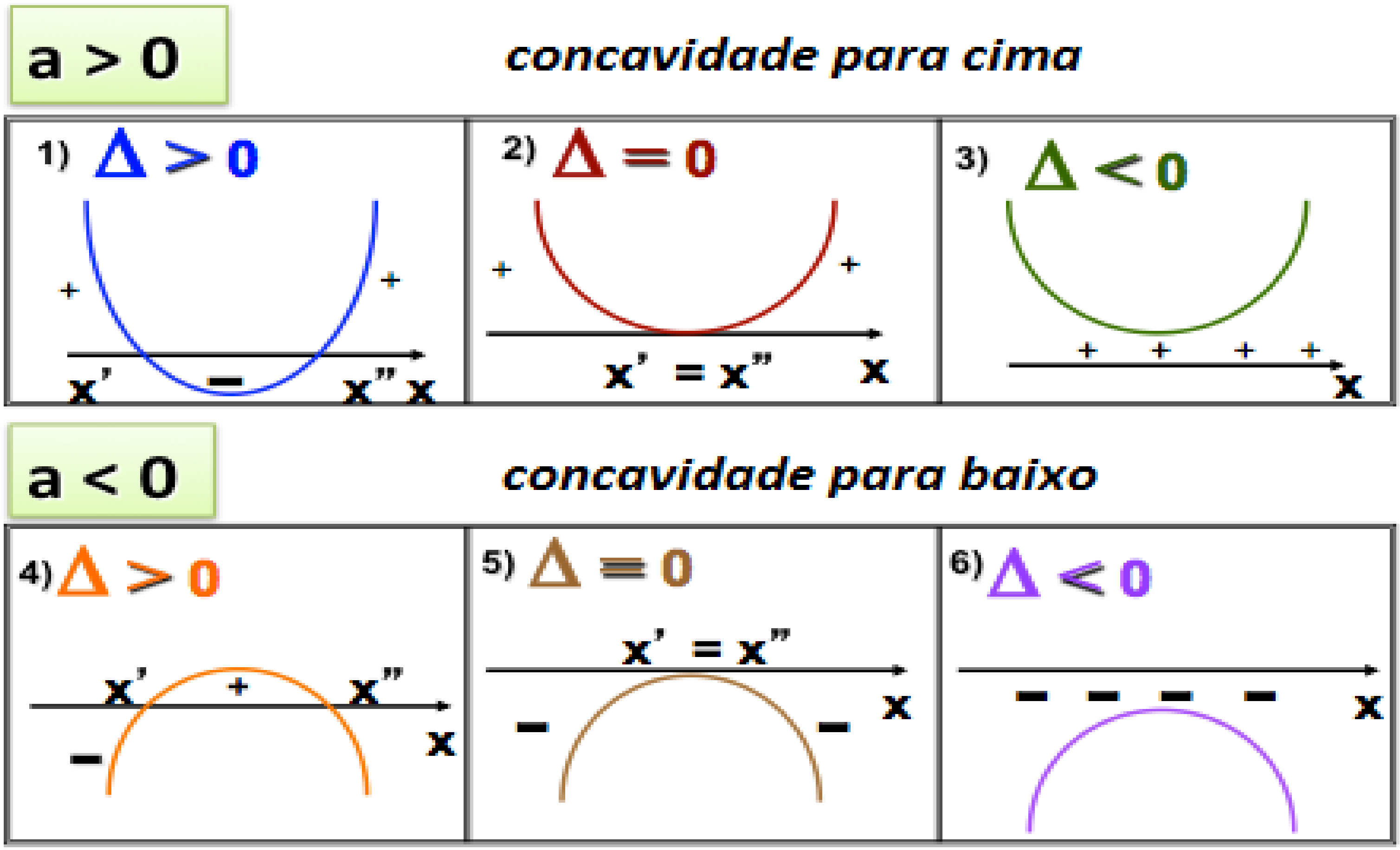
Funções Quadráticas

Número de raízes

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ou \quad x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{(duas raízes diferentes)} \\ \Delta = 0 \Rightarrow x=\dfrac{-b}{2a} & \text{(duas raízes iguais)} \\ \Delta < 0 \Rightarrow não\ existem\ raízes\ reais \end{cases}$$

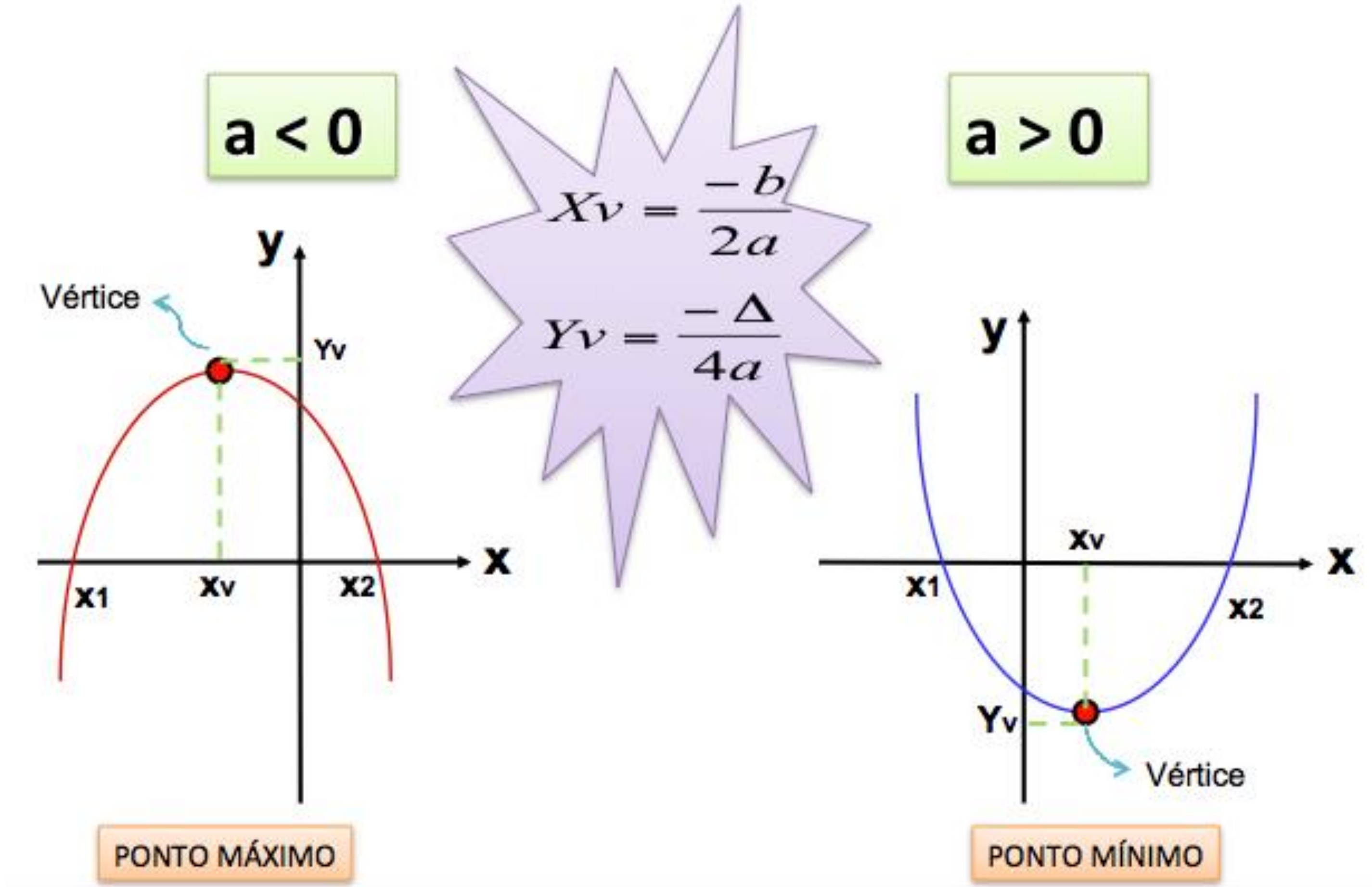
Funções Quadráticas

Tipos de gráficos



Funções Quadráticas

Vértice e pontos de máximo e mínimo



Funções Potências

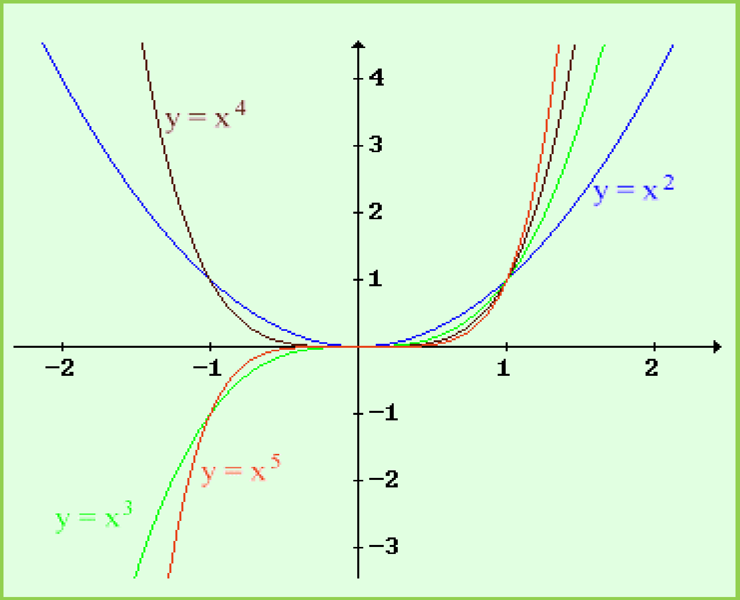
Função Potência

Uma função da forma $\boldsymbol{f(x) = x^a}$, onde *a* é uma constante, é chamada função potência.

(i) a = n, onde n é um inteiro positivo

São polinômios de um só termo.

$y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, ...



Funções Potências

(ii) a = 1/n, onde n é um inteiro positivo

A função $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ é uma função raiz.

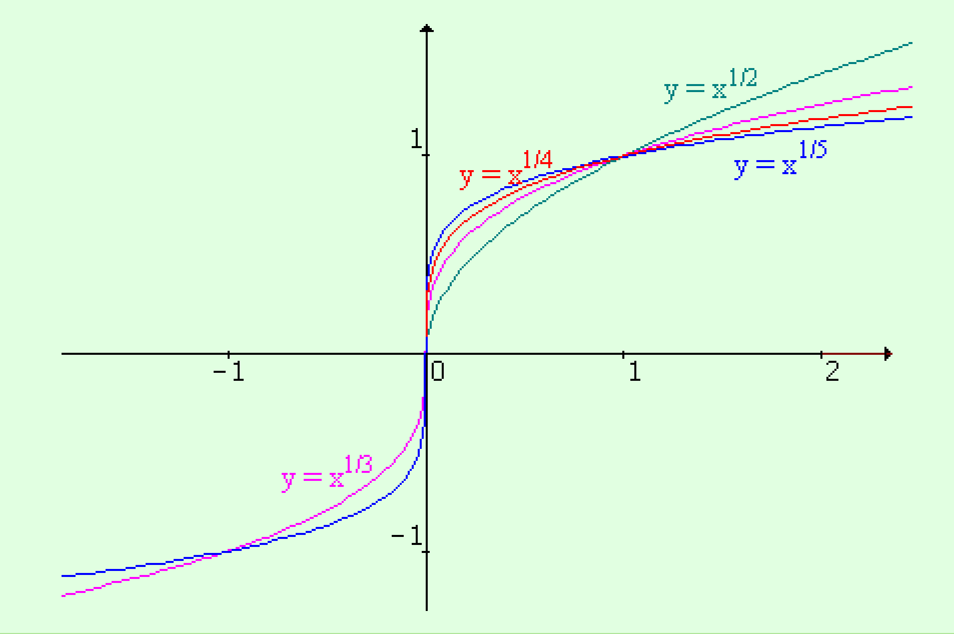
$f(x) = x^{1/2} = \sqrt[2]{x}$

$f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$

$f(x) = x^{1/5} = \sqrt[5]{x}$

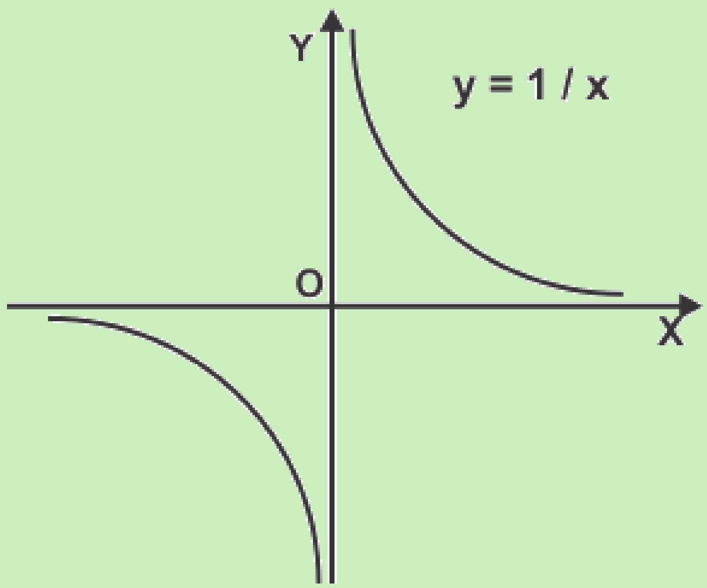
…



Funções Potências

(iii) a = -1, onde n é um inteiro positivo

A função $f(x) = x^{-1} = 1/x$ é a função recíproca.



Funções Racionais

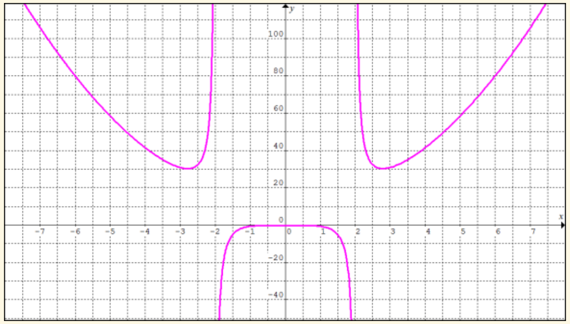
Função Racional

Uma função racional *f* é a razão de dois polinômios: $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})}$

em que *P* e *Q* são polinômios. O domínio consiste em todos os valores de *x* tais que $Q(x) \neq 0$.

Um simples exemplo de função racional é a função f(x) = 1/x, cujo domínio é $\Re^*$.

A função $f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$ é uma função racional com domínio $\{x | x \neq \pm 2\}$.



Funções Transcendentais

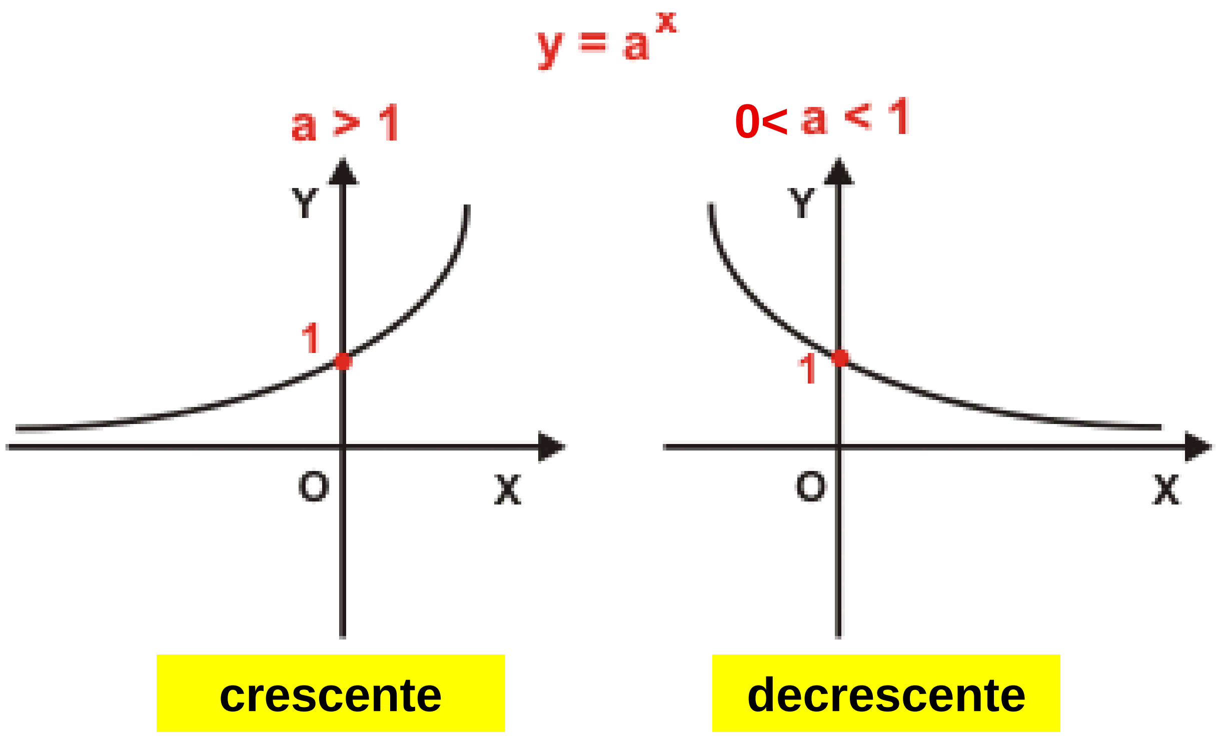
Funções Transcendentais são as funções **<u>não algébricas</u>**.

O conjunto das funções transcendentais incluem as funções:

- ***Exponenciais***
- ***Logarítmicas***
- ***Trigonométricas***
- ***Trigonométricas inversas***

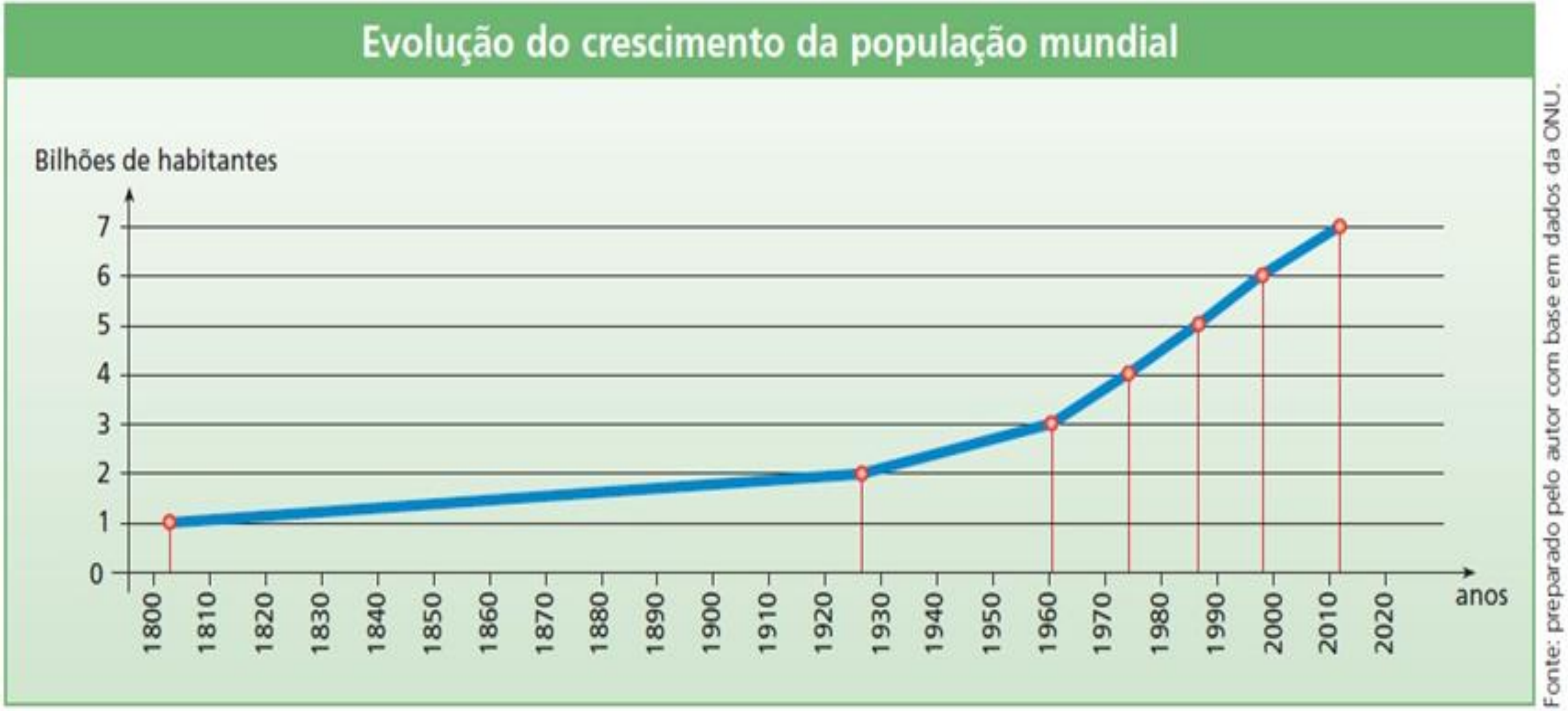
Funções Exponenciais

Em geral, uma ***função exponencial*** é uma função da forma: $f(x) = a^x$.

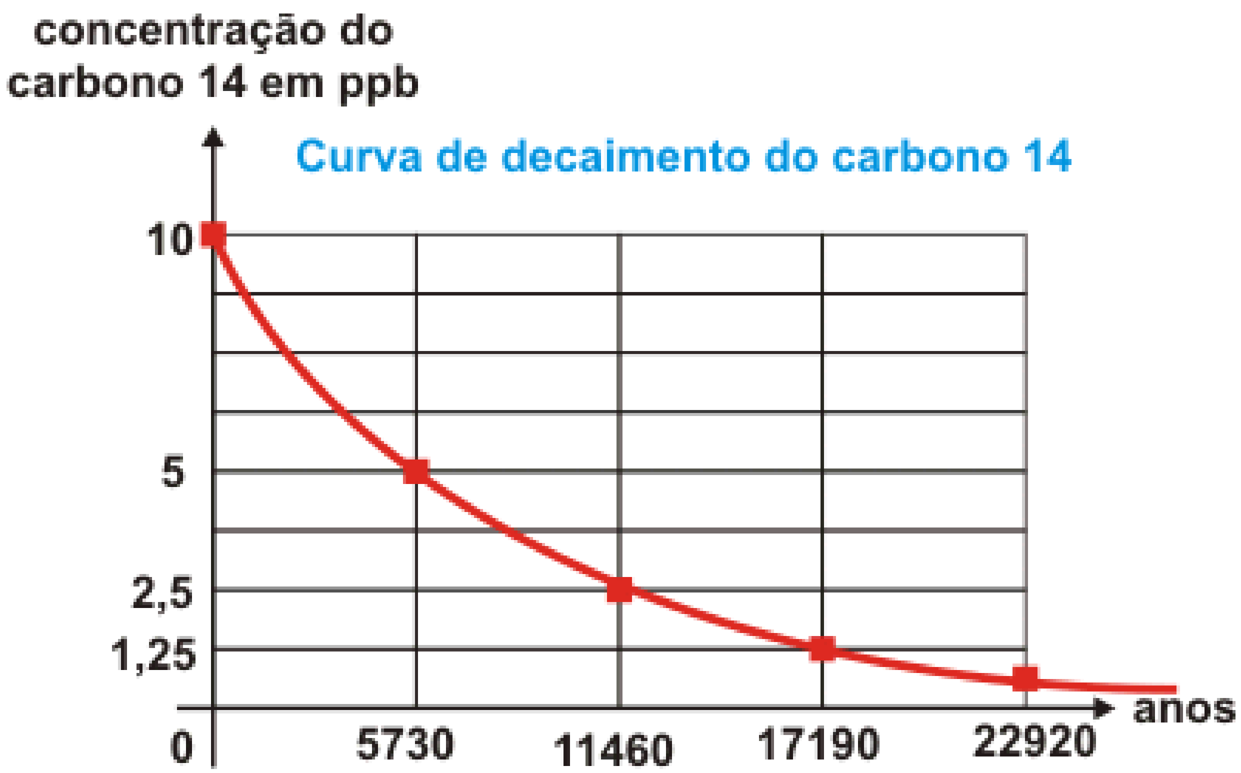


Funções Exponenciais

As funções exponenciais são úteis na modelagem de muitos fenômenos naturais, como crescimento populacional (se $a > 1$) e decaimento radioativo (se $a < 1$).



Funções Exponenciais



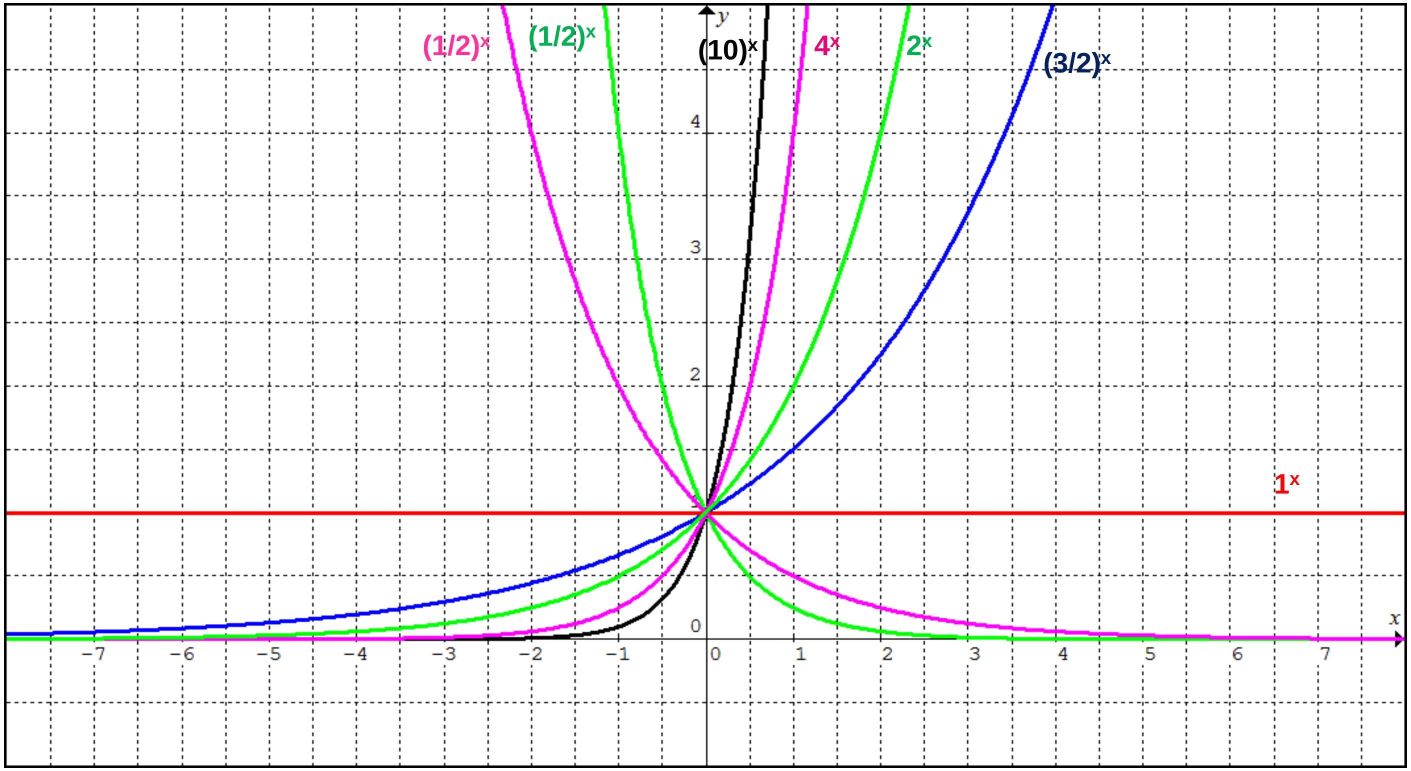
Carbono 14 está presente em tecidos vivos (de animais, plantas, e do homem). É um isótopo radioativo instável, que decai a um ritmo lento a partir da morte de um organismo vivo. Utilizado para estimar a idade de fósseis.

Funções Exponenciais

Funções Exponenciais

Funções Exponenciais

Todos os gráficos dos membros da família de funções $y = a^x$ passam pelo mesmo ponto ***(0,1)***, pois $a^0 = 1$, para $a \neq 0$. A função exponencial cresce mais rapidamente à medida que a fica maior (para x > 0).

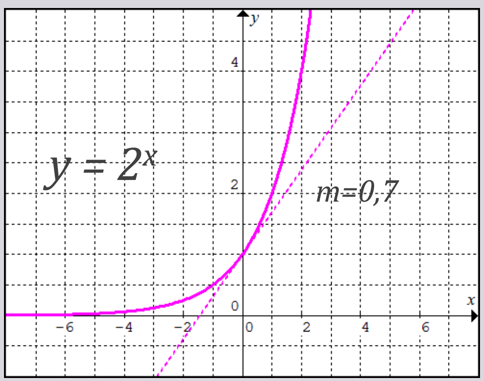


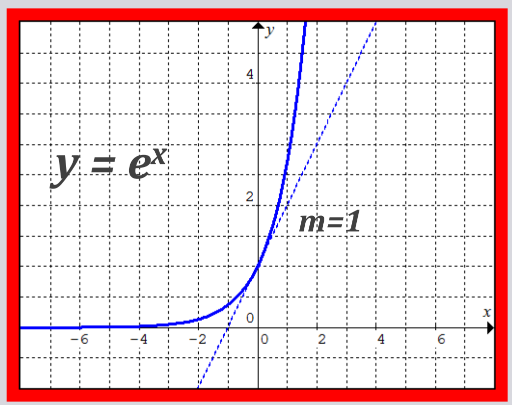
Funções Exponenciais

Função exponencial Natural - O número de euler (e)

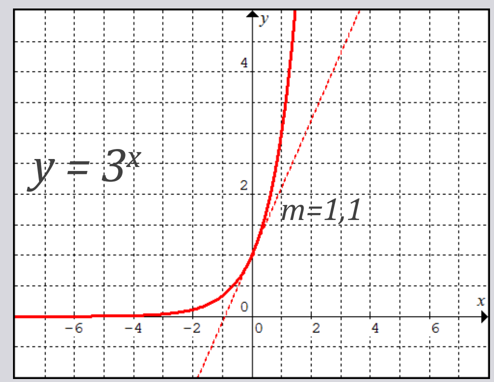
As fórmulas de cálculo ficam muito simplificadas quando escolhemos como base aquela para a qual resulta uma reta tangente a $y = a^x$ em $(0,1)$ com uma inclinação de exatamente 1.

$$\boldsymbol{e = 2{,}718281828459045235360287471352 7^{*}}$$





A inclinação da tangente em (x,y) é sempre igual a y



* Foi descoberto em 1727 pelo matemático suíço Leonhard Euler

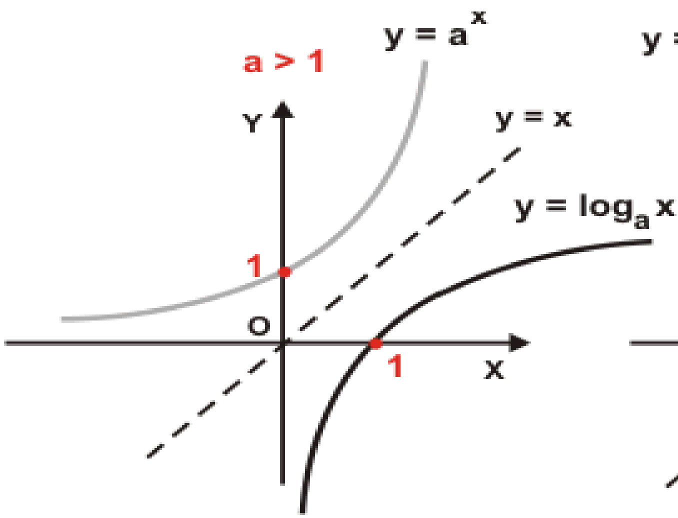
Funções Logarítmicas

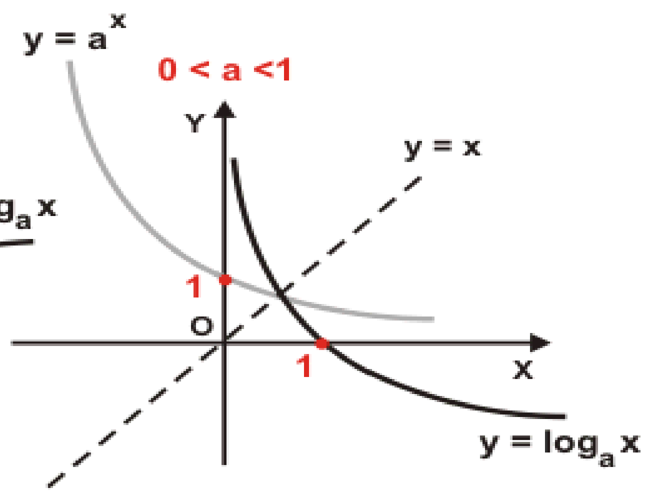
Se ***a > 0* e *a ≠ 1*,** a função exponencial ***f(x) = a^x*** é crescente ou decrescente, e portanto, bijetora pelo teste das retas horizontais.

A **função inversa de *f*** é chamada de ***função logarítmica com base a*** denotada por $\boldsymbol{log_a}$. Tem **domínio (0,∞)** e a imagem $\Re$.

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

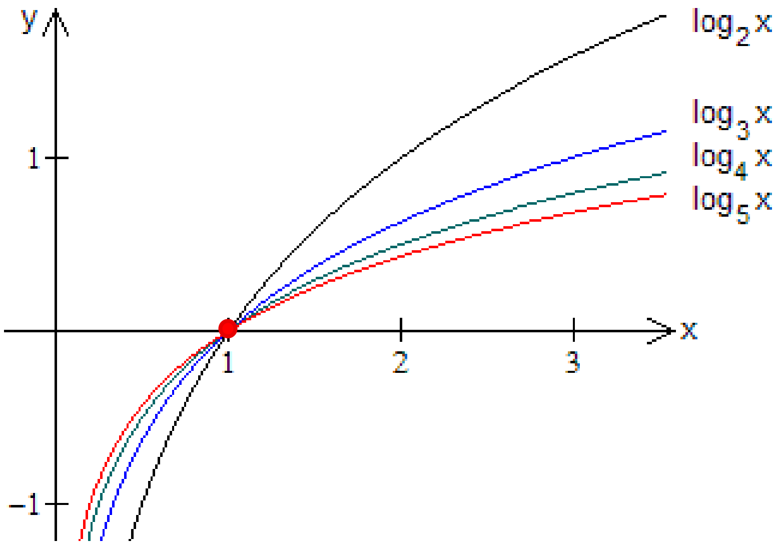




Funções Logarítmicas

O fato de que $y = a^x$ é uma função que cresce muito rapidamente para $x > 0$ está refletido no fato de que $y = \log_a x$ é uma função de crescimento muito lento para $x > 1$.

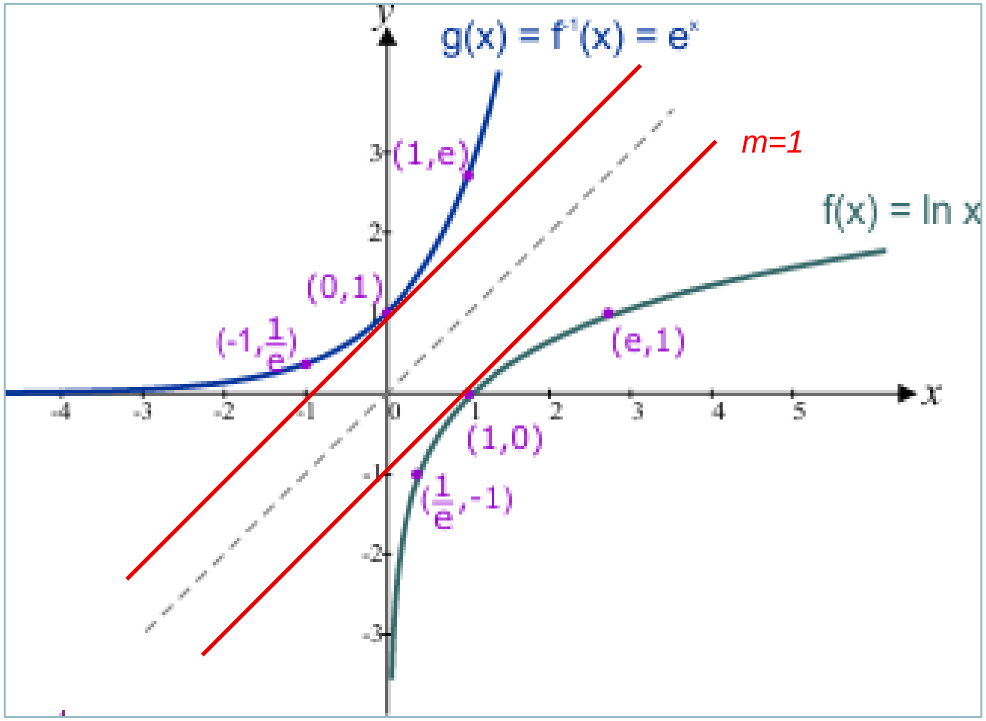
Uma vez que $\boldsymbol{\log_a a = 1}$, os gráficos de todas as funções logarítmicas passam pelo ponto ***(1,0)***.



Funções Logarítmicas

Logaritmo Natural (ln)

O logaritmo na base ***e*** é chamado de logaritmo natural ($\boldsymbol{log_e\, x = lnx}$).

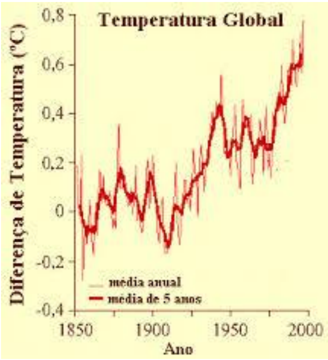


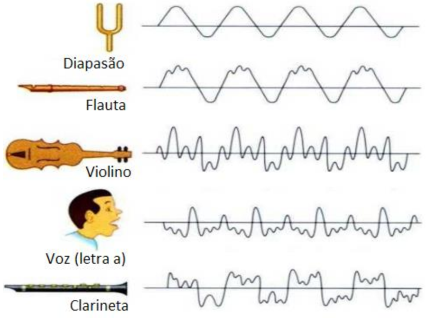
A reta tangente ao ponto *(1,0)* no gráfico de *ln(x)* possui declividade igual a 1.

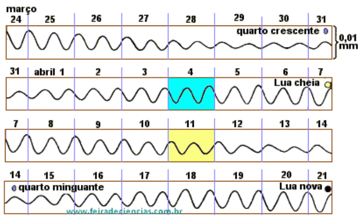
Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas são importantes devido à periodicidade (repetição). Podem representar vários fenômenos naturais periódicos, como:

- variações diárias na temperatura da atmosfera terrestre;
- comportamento ondulatório das notas musicais;
- pressão sanguínea no coração;
- nível de água em uma bacia marítima;



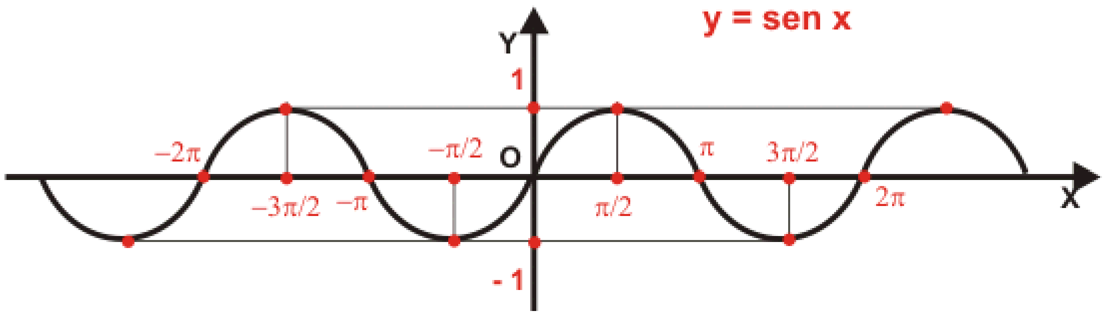




Equipamento para a comprovação das marés. Acima o esquema do dispositivo; em baixo, registro de 4 semanas das variações do nível da água no extremo Sul desse dispositivo. Compare as defasagens nos dias 4 e 11, por exemplo. Compare as amplitudes nos dias de Lua nova ou cheia com aquelas nos dias de quarto crescente ou minguante.

Funções Trigonométricas

$f(x) = sen(x)$

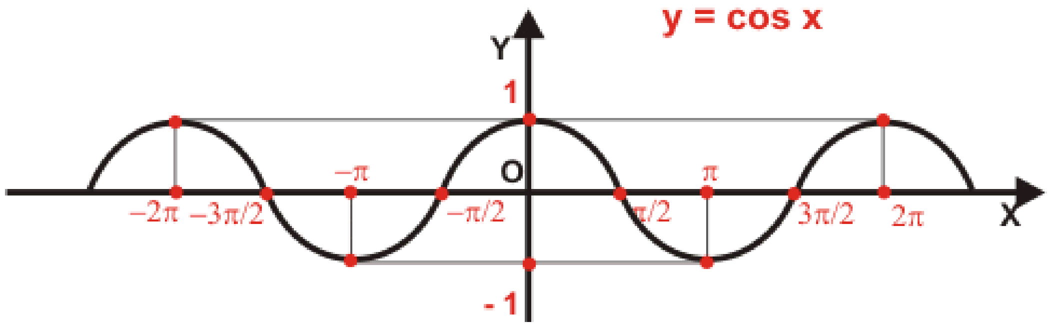


Propriedades:

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [-1\,;\,1]$
- f é função impar, pois $f(-x) = sen(-x) = -\,sen\,x = -f(x)$
- f é limitada $-1 \leq f(x) \leq 1$
- f é periódica, de periodo $p = 2\pi$

Funções Trigonométricas

$f(x) = \cos(x)$

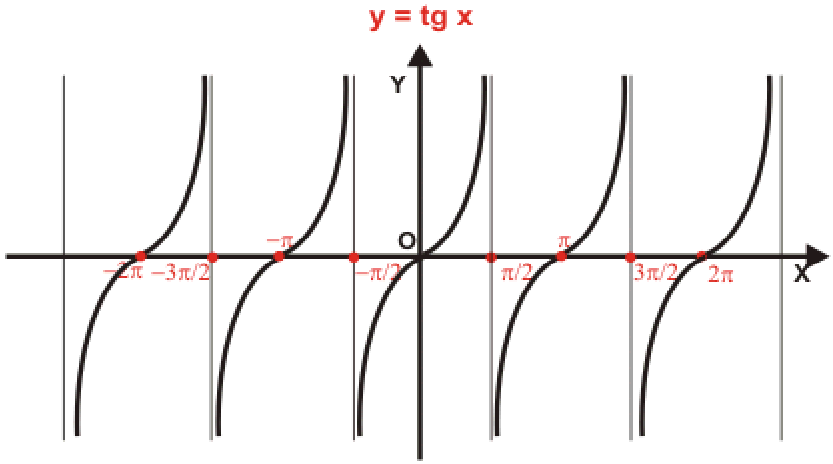


Propriedades:

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [-1\,;\,1]$
- f é função par, pois $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$
- f é limitada $-1 \leq f(x) \leq 1$
- f é periódica, de período $p = 2\pi$

Funções Trigonométricas

$f(x) = tg(x)$



Propriedades:

- $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $Im(f) = \mathbb{R}$
- f é função impar, pois $f(-x) = tg(-x) = -\,tg\,x = -\,f(x)$
- f não é limitada
- f é periódica, de periodo $p = \pi$

Funções Trigonométricas

Relações entre funções trigonométricas

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\mathrm{cotg}\,x = \frac{1}{\mathrm{tg}x} = \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}$$

$$\mathrm{cossec}\,x = \frac{1}{\mathrm{sen}x}$$

$$\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{sen}^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2\, x$$

Funções Trigonométricas

Fórmulas de adição e subtração

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \text{sen}\, b$$

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}\, a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \text{sen}\, b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \,.\, \cos b + \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, b$$

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \,.\, \text{tg}\, b}$$

$$\text{tg}(a-b) = \frac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 + \text{tg}\, a \,.\, \text{tg}\, b}$$

Funções Trigonométricas

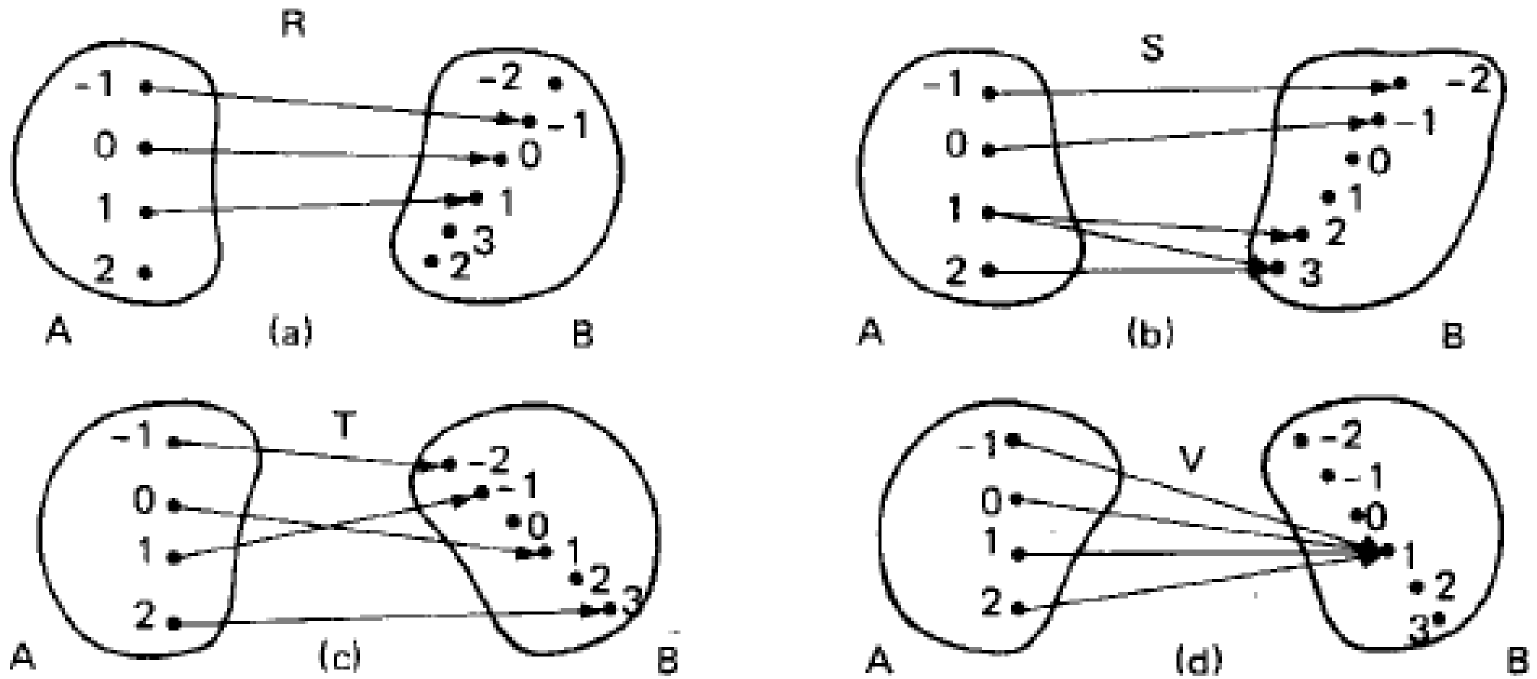
Inversas das funções trigonométricas

Em matemática, as funções trigonométricas inversas são chamadas de **função de arco**, pois retornam o arco correspondente a certa função trigonométrica.

Nome	Notação 1	Notação 2	Definição	Domínio como função real	Imagem (em radianos)
arco seno	$y = \text{arcsen}(x)$	$y = \text{sen}^{-1}(x)$	$x = \text{sen}(y)$	$[-1,+1]$	$-\pi/2 \le y \le \pi/2$
arco cosseno	$y = \arccos(x)$	$y = \cos^{-1}(x)$	$x = \cos(y)$	$[-1,+1]$	$0 \le y \le \pi$
arco tangente	$y = \text{arctg}(x)$	$y = \text{tg}^{-1}(x)$	$x = \text{tg}(y)$	$\mathbf{R}$	$-\pi/2 < y < \pi/2$
arco cotangente	$y = \text{arccot}(x)$	$y = \cot^{-1}(x)$	$x = \text{cotg}(y)$	$\mathbf{R}$	$0 < y < \pi$
arco secante	$y = \text{arcsec}(x)$	$y = \sec^{-1}(x)$	$x = \sec(y)$	$]-\infty,-1]$ ou $[1,+\infty[$	$0 \le y < \pi/2$ ou $\pi/2 < y \le \pi$
arco cossecante	$y = \text{arccosec}(x)$	$y = \text{cosec}^{-1}(x)$	$x = \text{cosec}(y)$	$]-\infty,-1]$ ou $[1,\infty[$	$-\pi/2 \le y < 0$ ou $0 < y \le \pi/2$

Exercícios

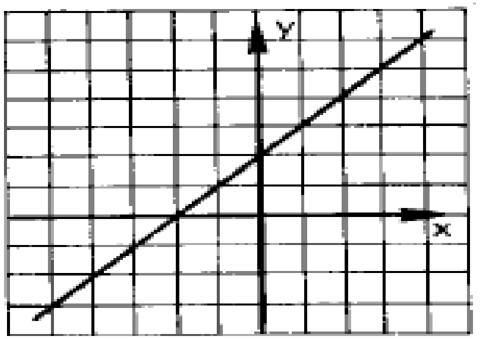
1-) Quais das relações abaixo definem uma função de A = {-1, 0, 1, 2} em B = {-2, -1, 0, 1, 2, 3}? Justifique.



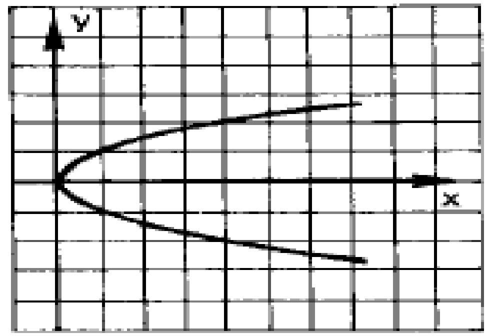
Exercícios

2-) Quais das relações de $\Re$ em $\Re$, cujos gráficos aparecem abaixo, são funções? Justifique.

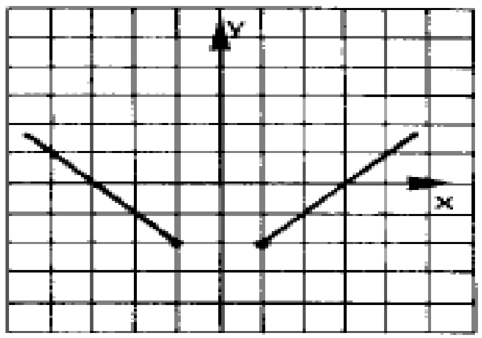
a)



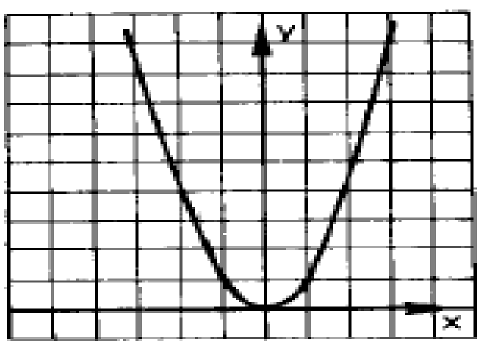
b)



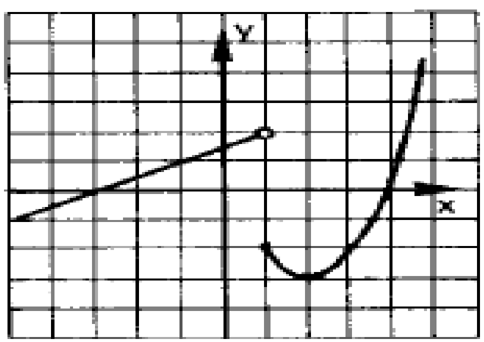
c)



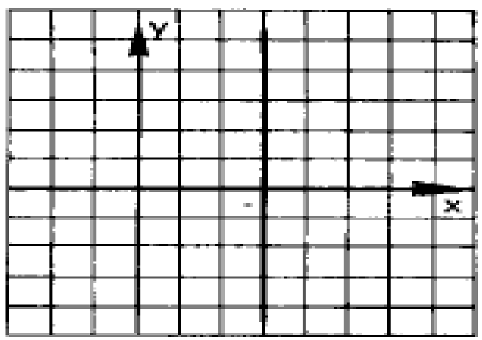
d)



e)



f)



Exercícios

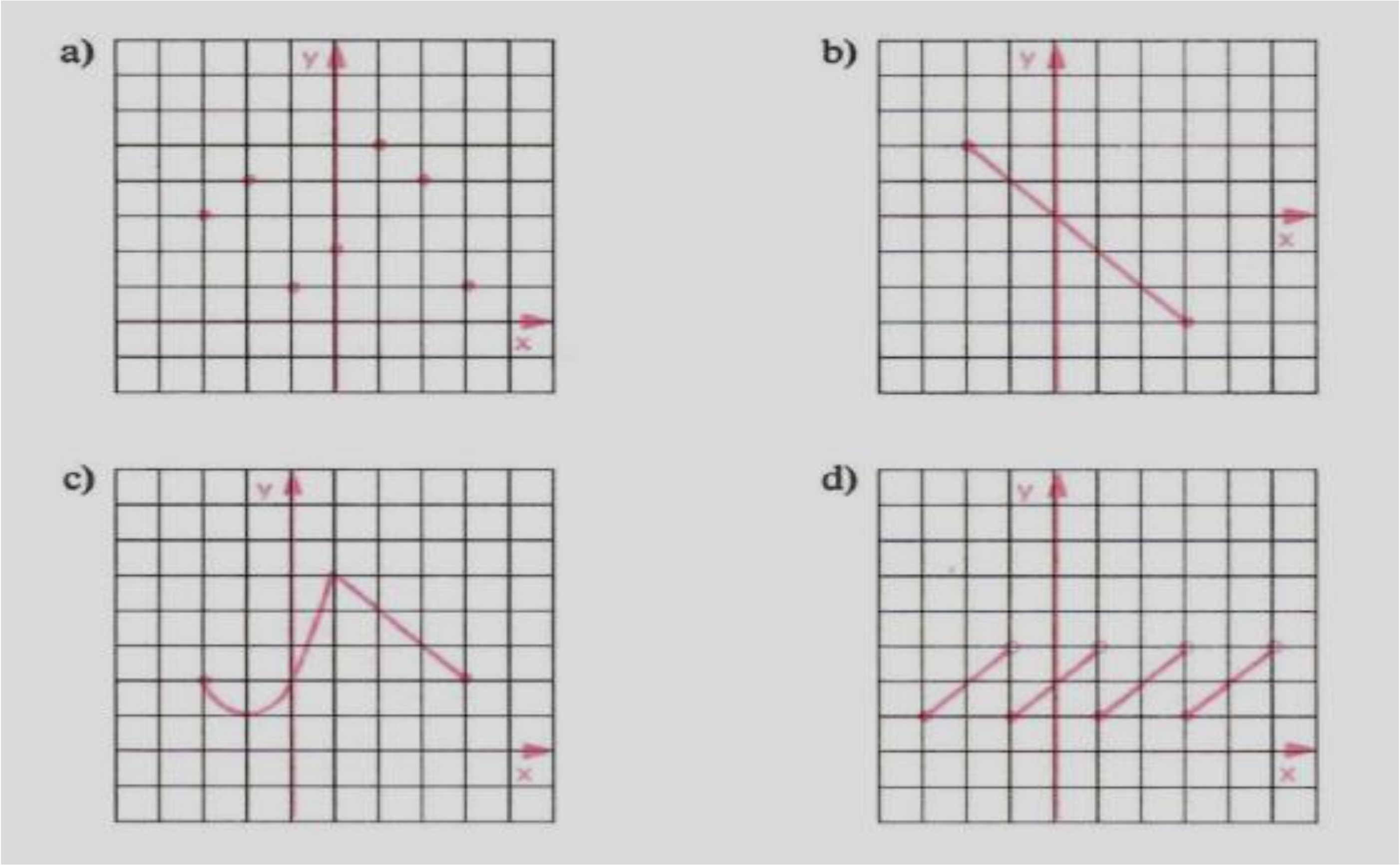
3-) Dada a função f(x) = -x^2 + 2x, calcule:

$$a-)\ \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$b\text{-})\ \frac{f(x+h)\text{-}f(x)}{h}$$

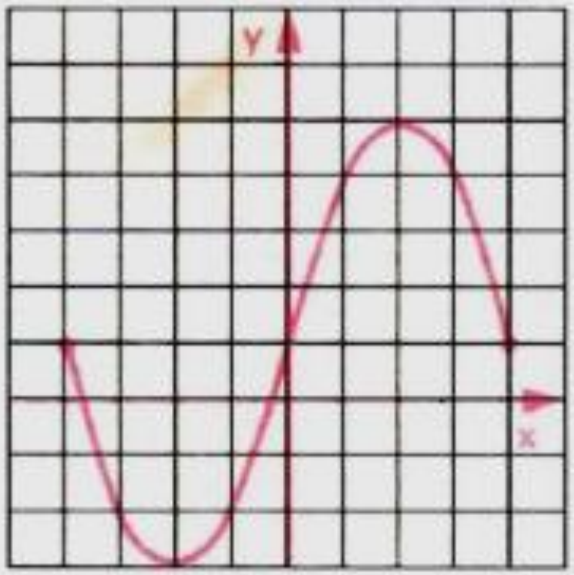
Exercícios

4-) Nos gráficos cartesianos das funções abaixo, determine o domínio e a imagem:

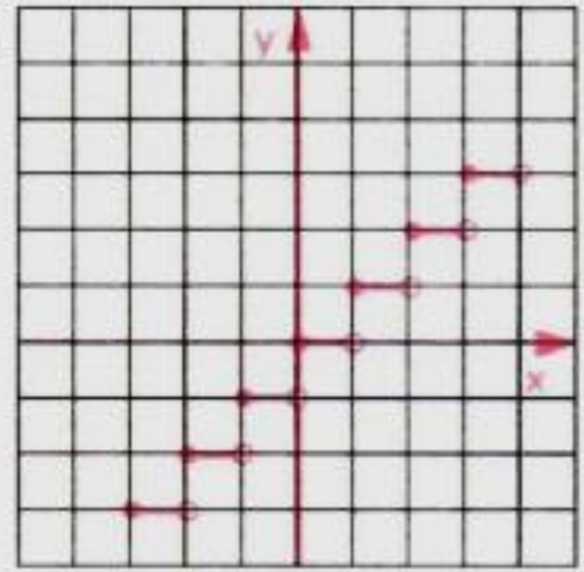


Exercícios

e)



f)



Exercícios

(use o graphmatica ou algum outro software)

5-) *(função constante)* Determine o domínio, imagem e o gráfico de f(x) = -3.

6-) *(função por partes)* Determine o domínio, imagem e o gráfico de f(x) = |x|.

7-) Construa os gráficos das funções abaixo e determine os seus domínios e imagens:

$a-)\, f(x) = x^2$ $\quad$ $b\text{-)}\, p(x) = x^3$ $\quad$ $c\text{-)}\, s(x) = \dfrac{1}{x}$

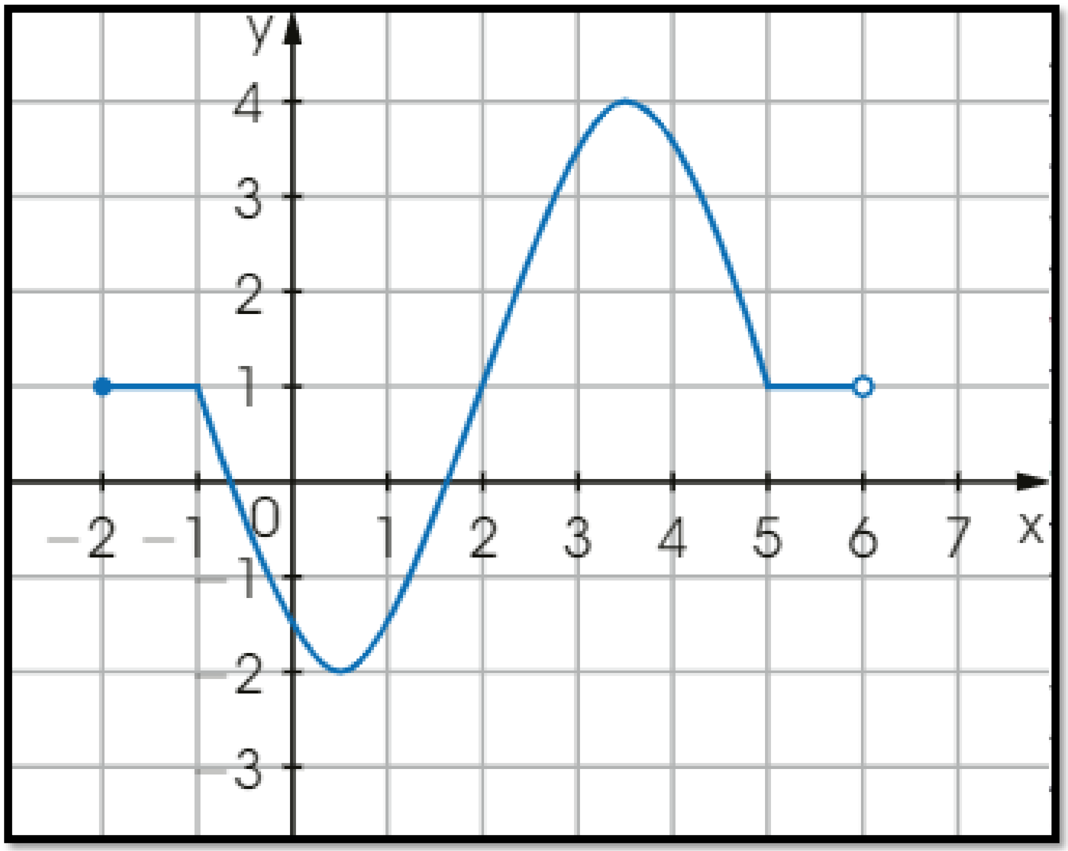
$d\text{-)}\, g(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $e\text{-)}\, q(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad$ $f\text{-)}\, t(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$g-)\, h(x) = \sqrt{x^3}$ $\quad$ $h\text{-)}\, r(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Exercícios

(use o graphmatica ou algum outro software)

8-) Obtenha o domínio e imagem da função representada no gráfico abaixo:



Exercícios

9-) Determine o domínio da função de variável real abaixo:

$$f(x) = \frac{(x-1)}{(x-2)(x-5)} + \sqrt{x-3}$$

10-) Determine o domínio da função de variável real abaixo:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x-1}}$$

Exercícios

11-) Faça o gráfico da função $f(x) = |x - 2| - 1$. Determine também o domínio e imagem de *f*.

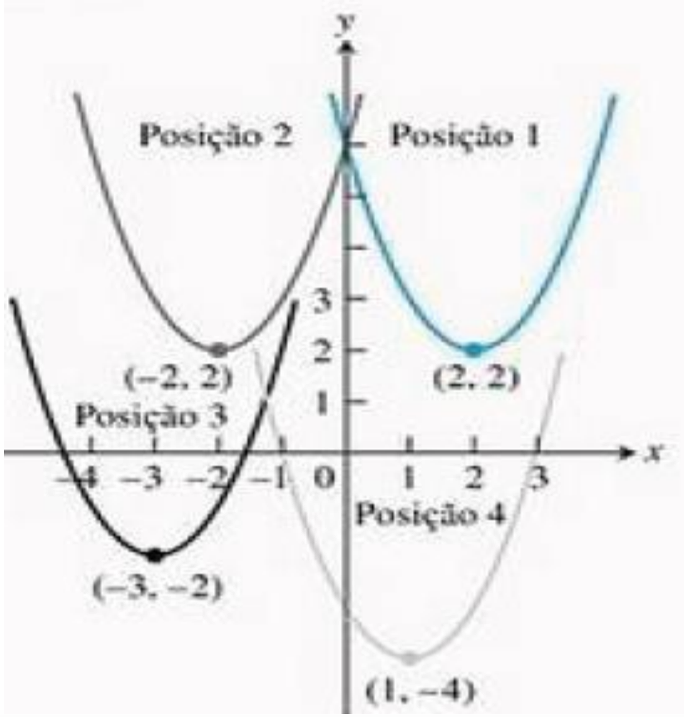
12-) Associe as equações listada de (a) a (d) com as posições dos gráficos na figura seguinte.

(a) $y = (x - 1)^2 - 4$

(b) $y = (x - 2)^2 + 2$

(c) $y = (x + 2)^2 + 2$

(d) $y = (x + 3)^2 - 2$



Exercícios

13-) Dê uma equação para cada gráfico deslocado. Esboce o gráfico original e o gráfico deslocado, identificando cada gráfico com sua equação.

$a-)\, x^2 + y^2 = 49, \;\; abaixo\, 3, esquerda\, 2$

$b-)\, y = x^3, \;\; esquerda\, 1, abaixo\, 1$

$c\text{-})\; y = x^{\frac{2}{3}}, \;\; direita\, 1, abaixo\, 1$

$d-)\, y = -\sqrt{x,}\; direita\, 3$

$e\text{-})\; y \; = \; \dfrac{1}{2}(x+1)+5, \; abaixo\, 5, direita\, 1$

$f\text{-})\, y^2 = x \;\; , esquerda\, 1$

Exercícios

14-) Se $f(x) = x + 5$ e $g(x) = x^2 - 3$, resolva:

a-) $f(g(0))$ b-) $g(f(0))$ c-) $f(g(x))$ d-) $g(f(x))$

e-) $f(f(-5))$ f-) $g(g(2))$ g-) $f(f(x))$ h-) $g(g(x))$

15-) Se $u(x) = 4x - 5$, $v(x) = x^2$ e $f(x) = 1/x$, encontre as fórmulas para:

a-) $u(v(f(x)))$ b-) $u(f(v(x)))$ c-) $v(u(f(x)))$

d-) $v(f(u(x)))$ e-) $f(u(v(x)))$ f-) $f(v(u(x)))$

16-) *Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x + 1$, determine a fórmula e o domínio das funções compostas abaixo:*

a-) $(f \circ g)(x)$ b-) $(g \circ f)(x)$ c-) $(f \circ f)(x)$ d-) $(g \circ g)(x)$

Exercícios

17-) Obtenha a inversa das funções bijetoras abaixo, de $\Re$ em $\Re$:

$a-)\ f(x) = 2x + 3$

$b-)\ g(x) = \dfrac{4x-1}{3}$

$c-)\ h(x) = x^3 + 2$

$d-)\ p(x) = (x-1)^3 + 2$

$e-)\ q(x) = \sqrt[3]{x+2}$

$f-)\ r(x) = \sqrt[3]{x-1}$

$g-)\ s(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

18-) Dadas as funções f e g em $\Re$, definidas por f(x) = 3x-2 e g(x) = 2x+5, determine a função inversa de g o f.

19-) Dadas as funções f e g em $\Re$, definidas por f(x) = x^3 e g(x) = 2x+3, determine a função inversa de g o f.

Exercícios

20-) Seja a função f:$\Re \rightarrow R_{+}^{*}$ definida por f(x) = 3 + 2^{x-1}.

(a) Encontre a inversa de f.

(b) Se f(h(x)) = 3 + 2x, calcule h(1/4).

Exercícios

21-) Construa o gráfico e responda qual é a inclinação e o zero das funções lineares abaixo:

a-) $f(x) = -2x + 1$

b-) $f(x) = 5x + 2$

c-) $f(x) = 3x$

d-) $f(x) = -6x$

e-) $f(x) = -3$

Exercícios

22-) *(função por partes)* Encontre uma fórmula para a função f cujo gráfico é dado abaixo. Determine também o domínio e a imagem da função.

Exercícios

23-) A tabela abaixo mostra o PIB e a emissão de poluição (CO_2) de 10 países. Escolha quaisquer dois pontos da tabela e determine a equação da reta que passa por esses dois pontos. Depois construa o gráfico da reta (usando o graphmatica ou outro software) e plote os 10 pontos no mesmo gráfico.

PIB (em trilhões de dólares), x	Emissões de CO_2 (em milhões de toneladas métricas), y
1,7	552,6
1,2	462,3
2,5	475,4
2,8	374,3
3,6	748,5
2,2	400,9
0,8	253,0
1,5	318,6
2,4	496,8
5,9	1.180,6

Exercícios

24-) Apresente uma análise sobre o valor m da função

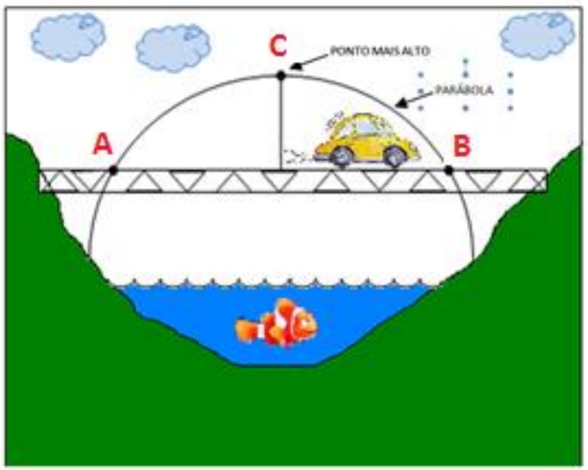
$$\mathbf{f(x) = (m-1)x + 2}$$

quanto ao comportamento/variação de f (crescente, decrescente ou constante).

25-) Calcule o valor de k de modo que a função $f(x) = 4x^2 - 4x - k$ não tenha raízes, isto é, o gráfico da parábola não possui ponto em comum com o eixo x.

Exercícios

26-) A construção de uma ponte como a do desenho abaixo pode ser realizada através dos cálculos obtidos de uma função quadrática definida por $f(x)=ax^2+bx+c$. Considere que a função quadrática utilizada para construir a ponte seja $\mathbf{f(x) = -0.5x^2 + 2x + 1}$. Determine as coordenadas dos pontos A, B e C ilustrados na figura.



Exercícios

27-) Determine o valor de m na função $f(x) = -3x^2 + 2(m-1)x + (m+1)$ para que o valor máximo seja 2.

28-) Suponha que uma fábrica tenha estimado que o custo de produção de x unidades de um produto seja:

$C(x) = 0{,}15 + 0{,}5x + 0{,}05x^2 + 0{,}001x^3$

a-) Que tipo de modelo (função) é esse(a) estimado(a) pela companhia?

b-) Construa o gráfico.

c-) Qual o custo de produção de 100 unidades?

d-) Qual o custo que a fábrica possui caso não produza nada?

e-) Aproximadamente quantos unidades de produtos é possível fabricar com R$ 250,00?

Exercícios

29-) Leia e assista o vídeo da matéria jornalística que segue abaixo antes de fazer o exercício 2:

https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/03/31/crescimento-exponencial-e-curva-epidemica-entenda-os-principais-conceitos-matematicos-que-explicam-a-pandemia-de-coronavirus.ghtml

30-) Considere o cenário atual que estamos vivendo sobre a pandemia do Coronavírus, conforme contextualiza a matéria indicada no exercício 1. Suponha que estamos entrando no primeiro dia do período de pico da infecção da doença, e que o número de infectados com o coronavírus é de 8.000 casos e passa então a duplicar a cada dia.

(a) Determine o modelo (fórmula) matemática para o número de infectados em função do tempo no período de pico;

(b) Calculo o número de infectados no 5º. dia de pico;

(c) Quanto tempo levará para atingir 2.000.000 infectados no período de pico?

Exercícios

31-) Considere o número de usuários de uma provedora de internet durante o horário comercial. Suponhamos que tomando amostras do número de usuários em certos intervalos de tempo fique determinado que esse número decuplica (aumenta 10 vezes) a cada hora. Se o número de usuários no instante de tempo t for p(t), onde t é medido em horas, $0 \leq t \leq 8$, e o número de usuários já existentes antes de iniciar o horário comercial é sempre por volta de 500:

(a) Determine o modelo (fórmula) do número de usuários em função do tempo. Faça o gráfico da função encontrada.

(b) Qual o número de usuários depois de 4 horas?

(c) Quanto tempo leva para que o número de usuários seja igual a 1.000.000?

Exercícios

32-) Encontre as inversas das funções abaixo:

(a) $f: R \to (-2,\infty)$, $f(x) = 3^{x+5} - 2$

(b) $f: R \to (2,\infty)$, $f(x) = 10^{x-3} + 2$

(c) $f: (1,\infty) \to R$, $f(x) = \log_5(x - 1) - 3$

(d) $f: (-2, \infty) \to R$, $f(x) = \ln(x+2) - 5$

33-) Seja a função $f: \Re \to R_+^*$ definida por $f(x) = 3 + 2^{x-1}$.

(a) Encontre a inversa de f.

(b) Se $f(h(x)) = 3 + 2x$, calcule $h(1/4)$.

Exercícios

34-) As marés são fenômenos periódicos que podem ser descritos, simplesmente, pela função seno. Suponhamos que, para determinado porto, a variação da altura "h" da lâmina d'água (em metros) em função das horas "t" do dia seja dada pela função trigonométrica:

$$\boldsymbol{h(t) = 10 + sen\left(\frac{t.\pi}{12}\right)}$$

a-) Faça o gráfico de h(t).

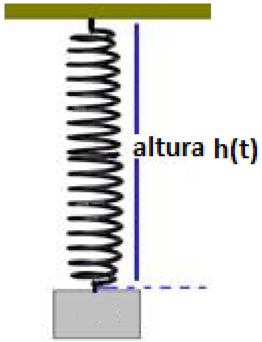
b-) Calcule a altura da lâmina d'água às 5 horas.

c-) Calcule a altura da lâmina d'água a zero hora.

d-) Depois de quantas horas a lâmina d'água estará a uma altura de 11 metros?

Exercícios

35-) Um objeto está preso à extremidade de uma mola, conforme mostra o desenho abaixo, e executa um movimento periódico em razão do seu peso e da reação que a mola produz. A altura h (em centímetros) do objeto em função do tempo é dada por:



$$h(t) = 1{,}5 + \text{sen}(2t + 1)$$

onde $t \geq 0$ é o tempo (em segundos).

a-) Faça o gráfico de h(t).

b-) Responda: o objeto estará mais alto no tempo t = 3 segundos ou no tempo t = 5 segundos? Justifique a sua reposta. (não esqueça de passar a calculadora para radianos)

c-) Determine um tempo t em que o objeto estará a uma altura de 2,5 cm

Respostas dos exercícios

1-) *Somente c e d definem funções de A em B.*

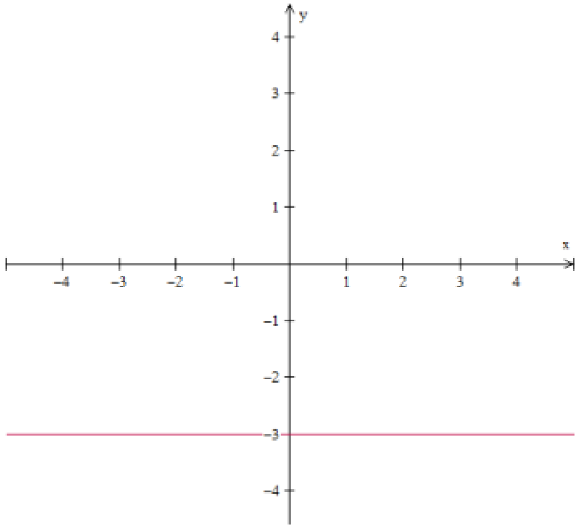
2-) *Somente a, d, e e são funções.*

3-) *a-)* $-(x-1)$ *b-)* $-2x-h+2$

Respostas dos exercícios

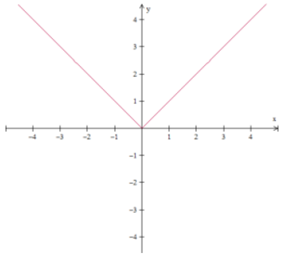
4-) *a-) D(f) = {-3,-2,-1,0,1,2,3}, Im(f) = {1,2,3,4,5}; b-) D(f) = [-2,3], Im(f) = [-3,2]; c-) D(f) = [-2,4], Im(f) = [1,5]; d-) D(f) = [-3,5), Im(f) = [1,3); e-) D(f) = [-4,4], Im(f) = [-3,5]; f-) D(f) = [-3,4), Im(f) = {-3,-2, -1, 0, 1, 2, 3}*

5-) *D(f) = (-∞,∞), Im(f) = {-3}*

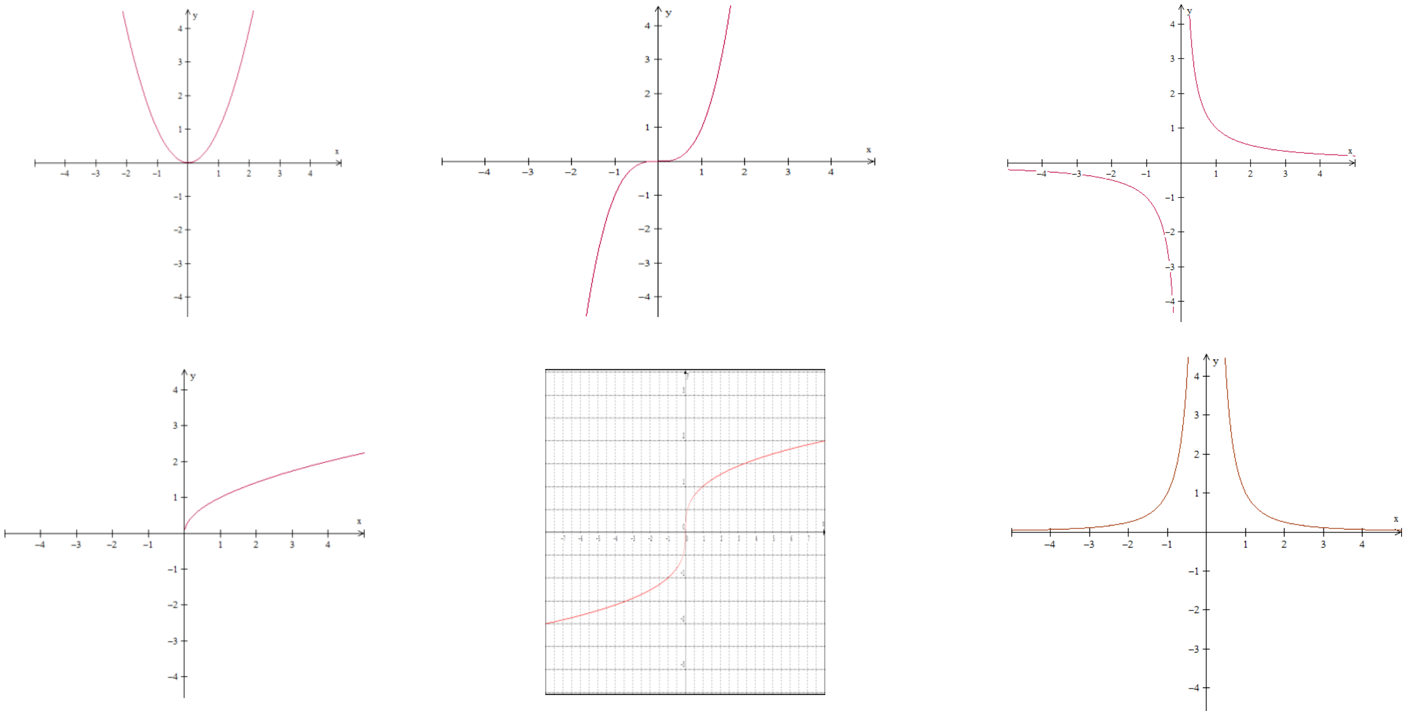


Respostas dos exercícios

6-) $D(f) = (-\infty,\infty)$, $Im(f) = [0, \infty)$



7-)



Respostas dos exercícios

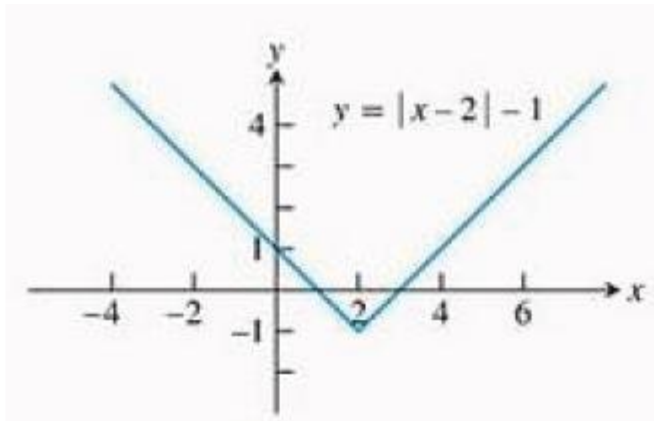
8-) *a-)* $D(f) = [-2,6)$, $Im(f) = [-2,4]$

9-) $D(f) = [3, \infty) - \{5\}$

10-) $(1/2, \infty)$

Respostas dos exercícios

11-) *D(f) = (-∞,∞) e Im(f) = [-1, ∞) . O gráfico de f é o gráfico do valor absoluto deslocado duas unidades para a direita e uma unidade verticalmente.*

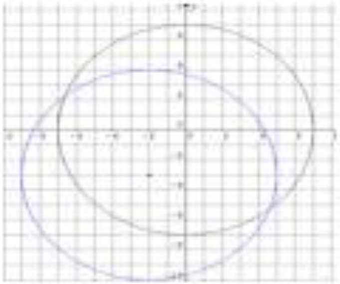


12-) (a) = posição 4, (b) posição 1, (c) = posição 2, (d) posição 3.

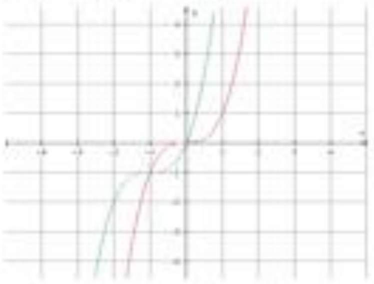
Respostas dos exercícios

13-)

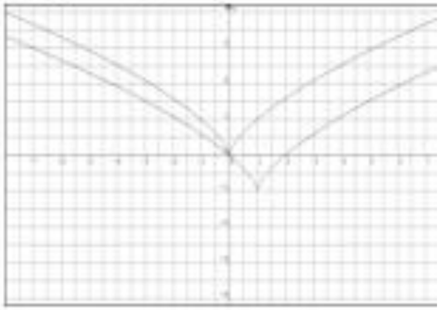
a-) $(x+2)^2+(y+3)^2 = 49$



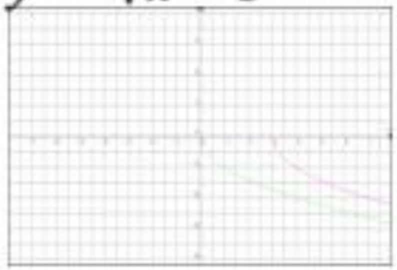
b-) $y = (x+1)^3 - 1$



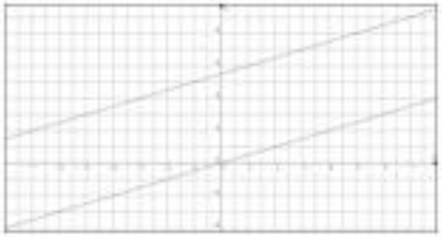
c-) $y = (x-1)^{2/3} - 1$



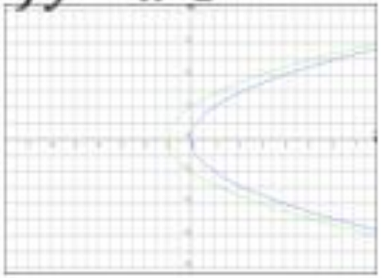
c-) $y = -\sqrt{x-3}$



d-) $y = (1/2)x$



e-) $y^2 = x+1$



Respostas dos exercícios

14-) a-) 2 b-) 22 c-) $x^2 + 2$ d-) $x^2 + 10x + 22$

e-) 5 f-) -2 g-) $x + 10$ h-) $x^4 - 6x^2 + 6$

15-) $a-)\ \frac{4}{x^2} - 5$ $b-)\ \frac{4}{x^2} - 5$ $c-)\ \left(\frac{4}{x} - 5\right)^2$

$d-)\ \left(\frac{1}{4x-5}\right)^2$ $e-)\ \frac{1}{4x^2-5}$ $f-)\ \frac{1}{(4x-5)^2}$

16-)

Composta	Domínio
(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$	$[0, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x+1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

Respostas dos exercícios

17-) $a-)\dfrac{x-3}{2};b-)\dfrac{3x+1}{4};c-)\sqrt[3]{x-2};d-)1+\sqrt[3]{x-2};e-)x^3-2;\ f-)\cancel{(x+1)^3};g-)\sqrt[3]{1-x^3}$

x^3+1

18-) $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = (x-1)/6.$

19-) $(gof)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-3}{2}}$

20-) *a-)* $f^{-1}(x) = \log_2(x-3)+1$

b-) $h(1/4) = 0$

$$f(h(x)) = 3+2x$$
$$f^{-1}(f(h(x))) = f^{-1}(3+2x)$$
$$h(x) = \log_2(3+2x-3)+1$$
$$h(x) = \log_2(2x)+1$$
$$h(x) = \log_2 2 + \log_2 x + 1$$
$$h(x) = \log_2 x + 2 \Rightarrow h(1/4) = \log_2(1/4)+2 = \log_2 2^{-2} + 2 = -2+2 = 0.$$

Respostas dos exercícios

21-) *a-) a = -2 (decrescente) e ½*

b-) a = 5 (crescente) e 2/5

c-) a = 3 (crescente) e 0

d-) a = -6 (decrescente) e 0

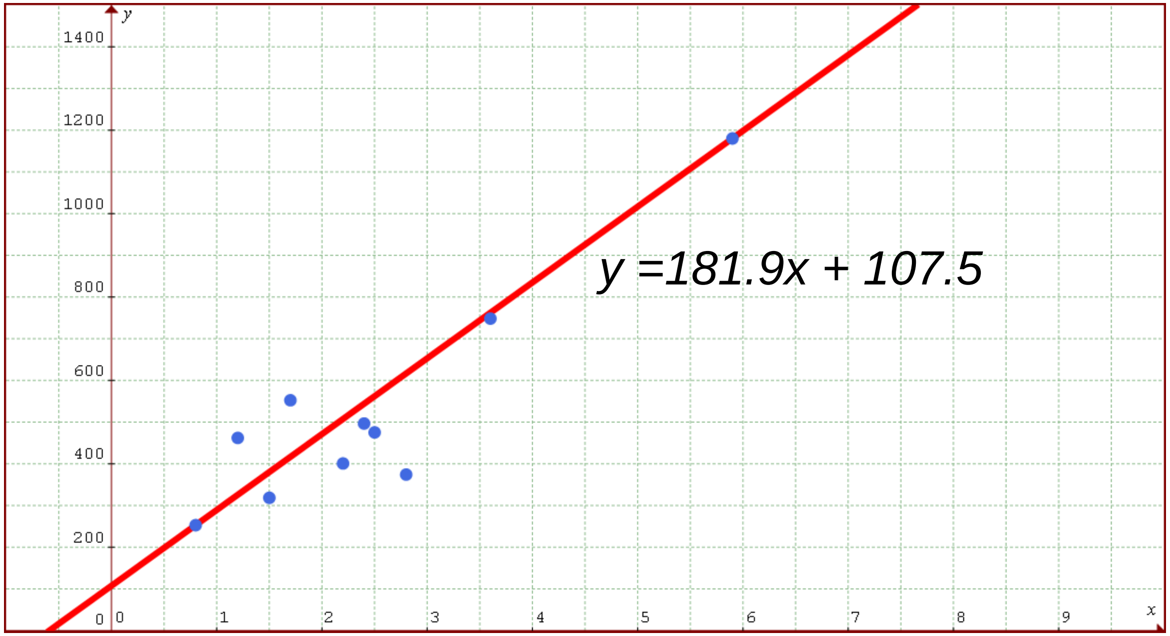
e-) a = 0 e o zero da função não existe

22-) *D(f) = [0,∞), Im(f) = [0, 1]*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Respostas dos exercícios

23-) *Uma resposta possível:*



24-) *crescente para m > 1; decrescente para m < 1 e constante (y = 2) para m = 1.*

Respostas dos exercícios

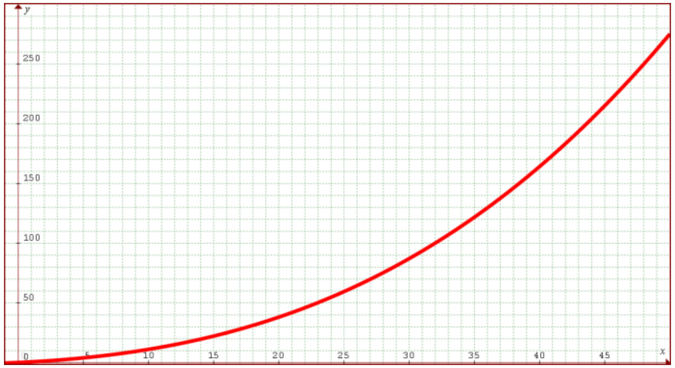
25-) $k < -1$

26-) $A = (-0.4495,0)$; $B = (4.4495,0)$; $C = (2,3)$

27-) $m = -2$ ou $m = 1$

28-) a-) função polinomial de grau 3 (função cúbica)

b-)



c-) 1550,15

d-) 0,15

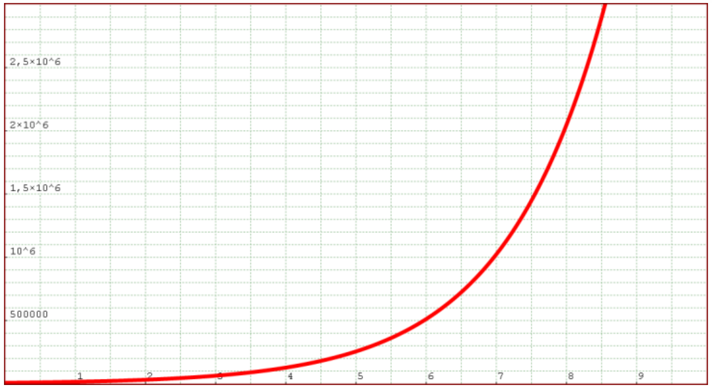
e-) Aproximadamente 48 unidades (tente pelo gráfico)

Respostas dos exercícios

30-) a-) $N(t) = 2^t.8000$

b-) $N(5) = 256.000$

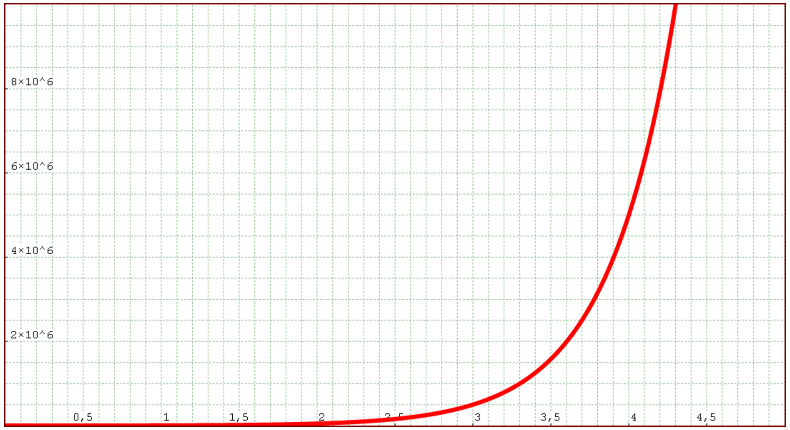
c-) $t = 7,96 \approx 8$ dias



31-) a-) $p(t) = 10^t.500$

b-) $p(4) = 5.000.000$

c-) $t \approx 3,3$ horas



Respostas dos exercícios

32-) *a-)* $f^{-1}: (-2,\infty) \to R$, $f^{-1}(x) = \log_3(x + 2) - 5$

b-) $f^{-1}: (2,\infty) \to R$, $f^{-1}(x) = \log(x - 2) + 3$

c-) $f^{-1}: R \to (1,\infty)$, $f^{-1}(x) = 5^{x+3} + 1$

d-) $f^{-1}: R \to (-2,\infty)$, $f^{-1}(x) = e^{x+5} - 2$

33-) *a-)* $f^{-1}(x) = \log_2(x-3)+1$

b-) $h(1/4) = 0$

$$f(h(x)) = 3+2x$$

$$f^{-1}(f(h(x))) = f^{-1}(3+2x)$$

$$h(x) = \log_2(3+2x-3)+1$$

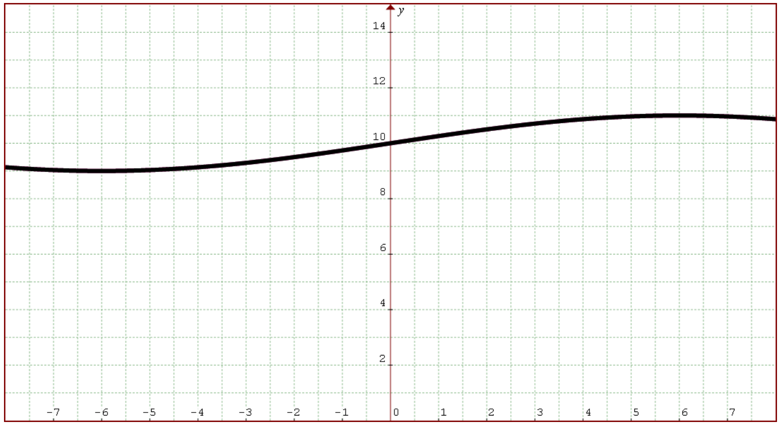
$$h(x) = \log_2(2x)+1$$

$$h(x) = \log_2 2+\log_2 x+1$$

$$h(x) = \log_2 x+2 \Rightarrow h(1/4) = \log_2(1/4)+2 = \log_2 2^{-2}+2 = -2+2 = 0.$$

Respostas dos exercícios

34-) *a-)*



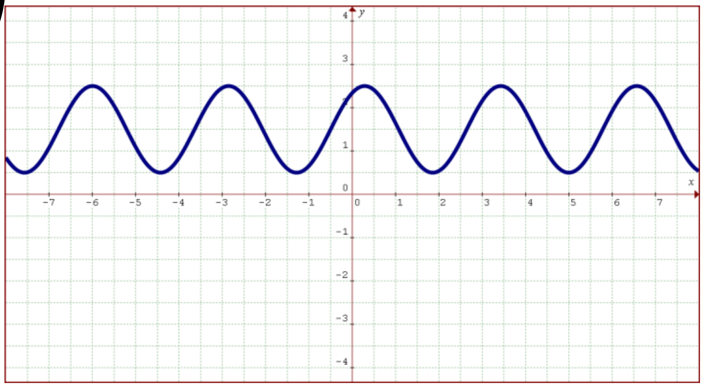
b-) h(5) = 10,96 m

c-) h(0) = 10 m

d-) t = 6 horas

Respostas dos exercícios

35-) *a-)*



b-) h(3) = 2,15 cm e h(5) = 0,5 cm

c-) h(0) = 10 m

d-) t = 0,28 s