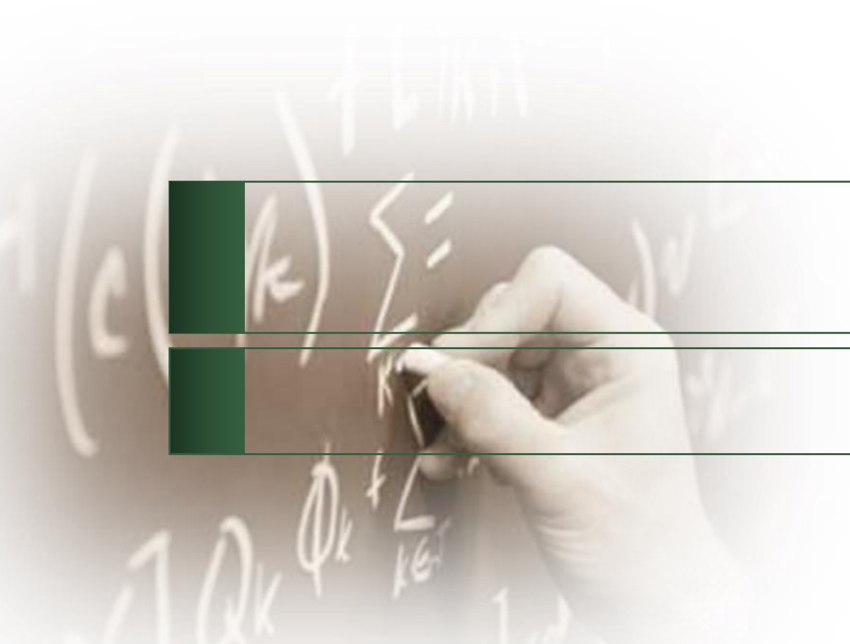
PUC Minas
Poços de Caldas

Técnicas Algébricas



Cálculo I

Prof. Dr. Márcio Leandro Gonçalves
marcio@pucpcaldas.br

Conteúdo

- Fatoração de polinômios
- Produtos Notáveis
- Divisão de polinômios
- Frações algébricas
- Racionalização
- *Exercícios*
- *Respostas dos exercícios*

Fatoração de polinômios

- **Fatorar** um polinômio significa escrevê-lo como uma multiplicação de dois ou mais polinômios.

Fator comum em evidência

- $ax + bx = x(a + b)$

Exemplos:

a-) $4x + 20 = 4(x + 5)$

b-) $3xy + 9xz + 6x = 3x(y + 3z + 2)$

c-) $-4yx + 2xyz = 2y(-2x + xz)$

Fatoração de polinômios

Fatoração por agrupamento

- Podemos separar a expressão em dois grupos e colocar em evidência o fator comum de cada grupo:

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y).(a + b)$$

__Exemplos__:

a-) $x^2 - ax + xy - ay = x(x - a) + y(x - a) = (x - a)(x + y)$

b-) $8ax + bx + 8ay + by = x\,(8a + b) + y\,(8a + b) = (8a + b)(x + y)$

Fatoração de polinômios

Fatoração utilizando as raízes do polinômio

- Dado um polinômio de grau n, determina-se as raízes do mesmo para fatorá-lo.

Regra prática para um polinômio P(x) de grau 2:

Se "r1" e "r2" são as raízes do polinômio P(x) que queremos fatorar, basta então escrevê-lo como:

$$P(x) = a.(x - r1)(x - r2)$$

onde a é coeficiente do termo x^2.

Fatoração de polinômios

Exemplos:

a-) *Para fatorar* $3x^2 + 24x + 36$ *encontra-se as raízes, que são e -6 e -2, portanto:*

$$3x^2 + 24x + 36 = 3(x + 6)(x + 2)$$

b-) *Para fatorar* $2x^2 - 6x - 20$ *encontra-se as raízes, que são 5 e -2 e, portanto:*

$$2x^2 - 6x - 20 = 2(x - 5)(x + 2)$$

Produtos Notáveis

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Divisão de polinômios

$$\begin{array}{c|c} P(x) & D(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

$$\boxed{P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)}$$

P (x) → dividendo

D (x) → divisor

Q (x) → quociente

R (x) → resto

Divisão de polinômios

Exemplo 1:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} & -\,6x^2 & -\,x & +\,12 & x-2 \\ \cline{5-5}
-\cancel{x^3} & +\,2x^2 & & & x^2-4x-9 \\ \cline{1-4}
& -\,\cancel{4x^2} & -\,x & +\,12 & \\
& +\,\cancel{4x^2} & -\,8x & & \\ \cline{2-4}
& & -\,\cancel{9x} & +\,12 & \\
& & +\,\cancel{9x} & -\,18 & \\ \cline{3-4}
& & & -\,6 &
\end{array}
$$

$$x^3 - 6x^2 - x + 12 = (x - 2) \,.\, (x^2 - 4x - 9) + (-6)$$

Divisão de polinômios

<u>*Exemplo 2:*</u>

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -3x & +2 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+x-2 \\ \cline{1-2}
 & x^2 & -3x & & \\
 & -x^2 & +x & & \\ \cline{2-3}
 & & -2x & +2 & \\
 & & 2x & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

Frações algébricas

<u>*Exemplos*</u>:

a-) $$\frac{2y}{(x-5)} + \frac{x}{(y-7)} = \frac{2y(y-7)+x(x-5)}{\underbrace{(x-5)(y-7)}_{\text{mmc}}} = \frac{2y^2-14y+x^2-5x}{(x-5)(y-7)}$$

b-) $$\frac{5}{x^2} - \frac{7y}{2y^3} = \frac{10y^3-7x^2y}{\underbrace{2x^2y^3}_{\text{mmc}}}$$

Frações algébricas

c-) $$\frac{\frac{3+x}{y}}{\frac{2x}{5}} = \frac{3+x}{y} \cdot \frac{5}{2x} = \frac{5(3+x)}{2xy} = \frac{15+5x}{2xy}$$

(multiplicar pelo inverso)

d-) $$\frac{\frac{2xy}{y-1}}{3y} = \frac{2xy}{y-1} \cdot \frac{1}{3y} = \frac{2xy}{3y(y-1)} = \frac{2xy}{3y^2-3y} = \frac{2x}{3y-3}$$

(multiplicar pelo inverso)

Racionalização

<u>*Exemplos*</u>:

a-) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b-) $\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{35}}{3\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{35}}{15}$

Quando o denominador é composto por uma adição ou uma subtração envolvendo alguma raiz quadrada, o processo é diferente. Nesses casos é mais prático utilizar as propriedades do produto da soma pela diferença dos mesmos termos. Multiplica-se pelo "conjugado" do termo.

c-) $\frac{7}{\sqrt{5}-3} = \frac{7}{\sqrt{5}-3} \cdot \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+3} = \frac{7(\sqrt{5}+3)}{(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)} = \frac{7\sqrt{5}+21}{(\sqrt{5})^2-3^2} = \frac{7\sqrt{5}+21}{5-9} = \frac{7\sqrt{5}+21}{-4} = -\frac{7\sqrt{5}+21}{4}$

d-) $\frac{x}{2+\sqrt{y}} = \frac{x}{2+\sqrt{y}} \cdot \frac{2-\sqrt{y}}{2-\sqrt{y}} = \frac{x(2-\sqrt{y})}{(2+\sqrt{y})(2-\sqrt{y})} = \frac{2x-x\sqrt{y}}{2^2-(\sqrt{y})^2} = \frac{2x-x\sqrt{y}}{4-y}$

Exercícios

Simplifique as expressões abaixo utilizando técnicas algébricas (*produtos notáveis, fatoração, divisão de polinômios, racionalização, etc*)

$a-)\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ b-) $\dfrac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$ c-) $\dfrac{(4+h)^2-16}{h}$

d-) $\dfrac{x+2}{x^3+8}$ $e-)\ \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$ $f-)\ \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

g -) $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$ $h-)\ \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$ i-) $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}$

Exercícios

j–) $\frac{5-\sqrt{x}}{25-x}$

k–) $\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$

l–) $\frac{(x+3)^3-27}{x}$

m–) $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+12}-\sqrt{12}}$

n–) $\frac{3}{x}\left(\frac{1}{5+x}-\frac{1}{5-x}\right)$

o–) $\frac{x^3+1}{x^2-1}$

p–) $\frac{4x^2-1}{2x-1}$

Respostas dos exercícios

a-) $x+3$

b-) $\frac{t-3}{2t+1}$

c-) $8+h$

d-) $\frac{1}{x^2-2x+4}$

e-) $3+\sqrt{t}$

f-) $\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}$

g-) $\frac{1}{4x}$

h-) $(x+9)(\sqrt{x}+3)$

i-) $\frac{x-5}{x+2}$

Respostas dos exercícios

j-) $\frac{1}{5+\sqrt{x}}$

k-) $\frac{x+2}{x+1}$

l-) $x^2 + 9x + 27$

m-) $\sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{12}$

n-) $-\frac{6}{(5+x)(5-x)}$

o-) $\frac{x^2-x+1}{x-1}$

p-) $2x+1$