

Alcuni esercizi sul lemma di Yoneda. Fissiamo una categoria \mathcal{C} una volta per tutte.

Esercizio 1: Siano F e G prefasci su \mathcal{C} . Definite la nozione di freccia $F \rightarrow G$. Si può prendere ispirazione dalla definizione di funzione lineare tra spazi vettoriali, oppure di funzione G -equivariante tra G -insiemi. Concludete che esiste una categoria $\text{Psh}(\mathcal{C})$ i cui oggetti sono i prefasci su \mathcal{C} e le cui frecce sono quelle che avete definito.

Esercizio 2: il lemma di Yoneda. Sia A un oggetto di \mathcal{C} , sia F un qualsiasi prefascio su \mathcal{C} e sia $h_A = \mathcal{C}(-, A)$ il prefascio rappresentabile associato ad A . Denotiamo con $\text{Psh}(\mathcal{C})(h_A, F)$ l'insieme delle frecce $h_A \rightarrow F$ (vedi esercizio 1). Allora, esiste una biezione naturale

$$\text{Psh}(\mathcal{C})(h_A, F) \xrightarrow{\sim} F(A). \quad (1)$$

Esercizio 3: l'immersione di Yoneda. Date categorie \mathcal{C} e \mathcal{D} , un funtore $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ è per definizione il dato di una funzione tra le famiglie di oggetti $C \mapsto F(C) \in \mathcal{D}$ e, per ogni coppia di oggetti (C, D) , una funzione tra gli insiemi di frecce

$$F_{C,D}: \mathcal{C}(C, D) \rightarrow \mathcal{D}(F(C), F(D)) \quad (2)$$

che preservi composizioni e identità, cioè $F(gf) = F(g)F(f)$ e $F(1_C) = 1_{F(C)}$. Denotiamo con $\text{Psh}(\mathcal{C})$ la categoria dei prefasci su \mathcal{C} (Esercizio 1). Allora, esiste un funtore

$$h: \mathcal{C} \rightarrow \text{Psh}(\mathcal{C}) \quad (3)$$

definito sugli oggetti come $C \mapsto h_C = \mathcal{C}(-, C)$. Come lo definite sulle frecce? Dimostrate poi che tale funtore induce una *biezione*

$$h_{C,D}: \mathcal{C}(C, D) \rightarrow \text{Psh}(\mathcal{C})(h_C, h_D) \quad (4)$$

Si dice che il funtore h è *pienamente fedele*. Può essere interpretato come una sorta di inclusione di categorie, e ciò spiega in quali termini h_C contiene precisamente l'informazione contenuta in C nella categoria \mathcal{C} .