常微分方程与动力系统

入门笔记

沈翰　　吴语逸风　　Artyom Lebedev

2025 年 9 月 29 日

前言

这本书是我作为一名数学学者撰写的第一本学习笔记。它既是一份记录，也是一次尝试；既是对自己思考过程与成长的见证，也是我希望能与更多读者分享的学习札记。

本书面向所有拥有数学分析与线性代数基础的读者。当然，如果您只掌握了微积分与线性代数的初步知识，也同样能够阅读本书。我努力将叙述保持在一个适合广泛读者的层次上，使它既能够帮助初学者入门，也能为有一定背景的读者提供思考的火花。

我写这套笔记的目的很简单：一方面是为了梳理、沉淀并记录自己的学习过程，另一方面也是希望能够帮助到更多的人。无论您是数学系的学生，还是从事工程实践的研究者，亦或是对物理学感兴趣的探索者；甚至，如果您本职在文学、人文或其他领域，只要有心接触数学，哪怕从小学、初中阶段甚至零基础开始，只要补充一点微积分与线性代数，您都可以在这里找到一些可供思考的内容。

在我的哲学观念中，数学是一种关于世界的语言与描述方式。尽管当代数学常常被结构主义的语言所主导，但作为一名柏拉图主义者，我依然坚信在世界深处存在某种冥冥的秩序与法则。或许，这只是一种哲学假设，是我自设的公理体系；但在这样的哲学立场之下，我们会得到一个极为令人振奋的推论：数学是一种主动触摸世界真理的方式。

我们每个人就像是蒙着眼睛的盲人，正在小心翼翼地触摸一头大象。有人触摸到了它的鼻子，有人摸到了它的腿，而我们所获得的只是局部、片段、投影——然而这并不妨碍我们尝试拼凑出整体的轮廓。数学研究亦是如此，它并非仅仅是解题技巧的堆砌，而是不断探索“世界法则”的过程。

举一个小小的例子：金融学中的“价格”究竟是什么？它是封闭系统中均值场博弈稳定下来的结果，还是风险中性测度下计算出的数值？不同的观点对应着不同的数学建模方式。而每一种建模方式，本质上都是对“价格是什么”这一本体论问题的回答。数学的魅力，正在于它能够为我们提供多种解释世界的模型，而我们在这些模型间的游走与选择，正是对“大象”的不断摸索。

当然，如果要在严格意义上建立一套完整的数学体系，我们需要预设公理体系：例如 ZFC 集合论，或者选择一个格罗腾迪克宇宙；我们也可以采用另一种语

言，如同伦类型论，或者当代大师 Lurie 的高阶范畴论语言。尽管这些内容构成了现代数学的基础设施，但在本书中并非必要。毕竟，它是一份面向入门的读物，目的在于介绍什么是常微分方程，什么是动力系统，我们有哪些研究它们的手段，它们的解是什么样子。

那么，为什么我选择常微分方程作为这一系列笔记的第一本呢？这多少是我的柏拉图主义情怀在作祟。追溯到牛顿时期，数学与物理的关系便深深扎根于“运动”的研究。牛顿不仅发明了微积分，更通过常微分方程将力学的世界写成方程：苹果下落、行星运行、潮汐起伏，这些自然现象背后，都有常微分方程作为描述的语言。从那时开始，常微分方程便成为数学、物理与工程的共同基石。到了 19 世纪，庞加莱将它引入定性研究，开创了现代动力系统理论，使我们能够从“解的轨迹”而不仅是“解的公式”去理解世界。可以说，常微分方程是通向现代数学、科学与工程的一扇大门，它既具体又深刻，既传统又充满现代性。

最后，我想谈谈习题的安排。本书的每一小节后面都会附上五道题目：其中四道是基础练习，目的在于帮助您确认是否理解并掌握了本节的内容；而第五道题则是开放性的思考题。它或许没有标准答案，甚至可能没有答案，但它邀请您去探索、去提问、去思考。这正如我们无法真正知道大象究竟长什么样，但我们依然可以通过触摸与聆听去理解它的片段与投影。这种探索的精神，正是现代数学研究的核心所在。

希望这本书能在某种程度上帮助到您。无论您是初学者还是研究者，无论您是带着功利目的还是单纯的好奇心走近数学，我都希望这本笔记能够成为您与世界对话的一个小小契机。

作者谨记
2025 年 9 月 29 日

目录

Chapter 1

常微分方程基础

引言：从牛顿运动方程谈起

常微分方程之所以成为数学、物理与工程学中最基本的语言之一，很大程度上要追溯到牛顿时代。

在十七世纪,牛顿通过《自然哲学的数学原理》(*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*）提出了著名的三大运动定律。特别是第二定律：

$$F = ma,$$

即作用在物体上的合力等于物体的质量乘以加速度。

若我们考虑一维运动，设质点的位置随时间为 $x(t)$，则加速度就是位置关于时间的二阶导数：

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

于是牛顿第二定律可以写成

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, t).$$

这就是一个最典型的 **常微分方程**：它把未知函数 $x(t)$ 的导数与函数本身以及外部输入联系起来。在这里，$F(x, t)$ 可以是一个依赖于位置和时间的函数，例如引力、弹力或阻力。

牛顿的运动方程是数学与自然科学中最早、也是最具代表性的常微分方程。它揭示了一个深刻的思想：*自然界的规律往往不是通过函数的显式表达给出的，而是通过函数满足的方程来刻画的。*

随着时间的发展，这种思想被不断推广。从单个质点的运动，到多体相互作用的体系；从单纯的力学系统，到电路、化学反应乃至人口模型——常微分方程逐渐成为描述变化、研究规律的通用工具。

因此，在学习常微分方程时，我们不仅是在掌握一种解题的技术，更是在继承一种数学的语言：通过方程来揭示变化的本质。正是在这一意义上，我们把常微分方程视为理解动力系统、研究世界运作方式的重要起点。

接下来，在第一节中，我们将正式给出常微分方程的定义，并对它们进行基本的分类。

1.1 常微分方程的定义与分类

在正式开始之前，我们需要先说明一点：在本书中，微分符号

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \cdots$$

表示的是函数关于某个变量的导数。若读者对导数和微分符号还不够熟悉，请务必先阅读一本微积分教材，以保证对后续内容的理解。

那么，什么是“常微分方程”呢？简单来说，常微分方程（ordinary differential equation, ODE）是含有未知函数及其导数的方程。比如

$$\frac{dy}{dx} = y$$

就是一个最基本的例子。

这里的“常”字，是相对于“偏”的。常微分方程只涉及一个自变量（通常记作 t 或 x），而偏微分方程（partial differential equation, PDE）则涉及多个自变量（如 x, y, t 等），它们的研究方法与性质也截然不同。

1.1.1 一阶、二阶与 n 阶常微分方程

常微分方程的“阶”指的是方程中出现的最高阶导数的阶数。例如：

- 一阶方程：$\dfrac{dy}{dx} = y$。
- 二阶方程：$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$。
- n 阶方程：$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$。

易混淆的例子：

1. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$ ——这是一个一阶方程，因为最高阶导数是 y'，即使它出现了平方。
2. $\dfrac{d}{dx}(y' + y) = 0$ ——这是一个二阶方程，因为展开后会出现 y''。
3. $\dfrac{dy}{dx} + \sin\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ ——这依然是一阶方程。

判断阶的标准非常类似于代数方程的“次数”：代数方程中最高次幂决定次数，而微分方程中最高阶导数决定阶。

1.1.2 线性与非线性常微分方程

我们称常微分方程为“线性”的，如果它可以写成如下形式：

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

其中 $a_i(x)$ 与 $f(x)$ 是已知函数，而未知函数 y 及其各阶导数只以一次幂出现，且不互相相乘。

例子：

1. $y' + y = 0$ ——线性。
2. $y'' + 3y' + 2y = e^x$ ——线性。
3. $y' + y^2 = 0$ ——非线性，因为出现了 y^2。
4. $y'' + (y')^2 = 0$ ——非线性，因为 $(y')^2$。

“线性”一词来源于代数学中的线性方程：解的叠加性仍然成立。如果 y_1, y_2 是齐次线性方程的解，那么它们的线性组合 $c_1y_1 + c_2y_2$ 仍然是解。这是线性方程最重要的性质。

1.1.3 初值问题与边值问题

代数方程只要求解一个数，因此不需要额外条件；但微分方程的解往往是一族函数。比如

$$y' = 0$$

的解是 $y = C$，其中 C 是任意常数。为了唯一确定一个解，我们需要额外的信息，这就引出了初值问题与边值问题。

初值问题： 给定方程

$$y' = f(x, y),$$

并指定 $y(x_0) = y_0$，则称为初值问题 (initial value problem, IVP)。例如

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

的唯一解是 $y = e^x$。

边值问题： 若在区间两端给定条件，如

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0,$$

这就是一个边值问题 (boundary value problem, BVP)。

代数方程没有 “初值” 与 “边值” 之分，原因在于代数方程的自由度通常只有有限个参数，而微分方程的解族往往包含任意常数，需要额外条件来选取唯一解。

1.1.4 解的存在与唯一性定理（可跳过）

注：本小节的证明需要一定的数学分析基础（度量空间、完备性、压缩映射原理等）。如果你目前只想掌握结论与直觉，可先跳过证明部分，直接记住定理的结论即可。

[Picard–Lindelöf（局部存在唯一性）] 设 $f(x, y)$ 在矩形

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$$

上连续，且关于 y 满足李普希茨条件：存在常数 $L > 0$，使得对任意 $(x, y_1), (x, y_2) \in R$，

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|.$$

则初值问题

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

在某个区间 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上存在且仅存在一条解。一个可行的选择是

$$h \le \min\left\{a,\ \frac{b}{M},\ \frac{1}{L}\right\}, \quad \text{其中} M := \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|.$$

证明（使用压缩映射原理）. **步骤 0：有界性与常量的选取**。由于 f 在紧集 R 上连续，故由 Weierstrass 定理知

$$M := \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)| < \infty.$$

取

$$h \le \min\left\{a,\ \frac{b}{M},\ \frac{1}{L}\right\},$$

并令 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$。记 $X = C(I)$ 为 I 上的连续函数空间，赋予一致范数

$$\|y\|_\infty := \sup_{x\in I} |y(x)|.$$

再定义闭子集

$$\mathcal{S} := \Big\{\, y \in X :\ \sup_{x\in I} \big|\, y(x) - y_0 \,\big| \le b \Big\}.$$

显然 $\mathcal{S}$ 非空、闭，且在 $(X, \|\cdot\|_\infty)$ 中完备。

步骤 1：定义皮卡算子并证明自映射性。定义算子 $T: \mathcal{S} \to X$：

$$(Ty)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt.$$

对任意 $y \in \mathcal{S}$、$x \in I$，有

$$\big|(Ty)(x) - y_0\big| \le \int_{x_0}^{x} \big|f\big(t, y(t)\big)\big|\, dt \le \int_{x_0}^{x} M\, dt \le Mh \le b,$$

故 $Ty \in \mathcal{S}$。于是 $T: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 是自映射。

步骤 2：压缩性（收缩性）。对任意 $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$、$x \in I$，由李普希茨条件得

$$\big|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\big| = \left|\int_{x_0}^{x} \Big[f\big(t, y_1(t)\big) - f\big(t, y_2(t)\big)\Big]\, dt\right| \le \int_{x_0}^{x} L\, |y_1(t) - y_2(t)|\, dt.$$

取上确界得

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_\infty \le Lh\, \|y_1 - y_2\|_\infty.$$

由 $h \le 1/L$，知 T 为压缩映射。

步骤 3：存在性与唯一性。由于 $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_\infty)$ 完备且 T 为压缩映射，Banach 不动点定理给出唯一不动点 $y^* \in \mathcal{S}$，满足

$$y^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y^*(t)\big)\, dt.$$

对两端求导（或利用微积分基本定理与 f 的连续性）即得 $y^{*\prime}(x) = f\big(x, y^*(x)\big)$ 且 $y^*(x_0) = y_0$，故 y^* 是所求解并且唯一。

补充（以 Grönwall 不等式证明唯一性）： 若 y_1, y_2 均为同一初值问题在 I 上的解，令 $e(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$。则

$$e(x) = \left|\int_{x_0}^{x} \big[f\big(t, y_1(t)\big) - f\big(t, y_2(t)\big)\big]\, dt\right| \le \int_{x_0}^{x} L\, e(t)\, dt.$$

由 Grönwall 引理得 $e(x) \equiv 0$，故解唯一。 □

术语小结（回顾）

- **李普希茨连续（Lipschitz）**：g 关于变量 y 的变化有一致线性界，即 $\exists L > 0$ 使 $|g(y_1) - g(y_2)| \le L|y_1 - y_2|$。
- **紧（compact）**：在 $\mathbb{R}^n$ 中，闭且有界的集合即为紧集；连续函数在紧集上取得最大最小值。
- **闭（closed）**：包含所有极限点；如 $[0, 1]$ 是闭集，而 $(0, 1)$ 非闭。

说明 定理给出的是局部存在与唯一性：当 f 连续且对 y 李普希茨时，至少在充分小的邻域 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 内，解存在且唯一。若进一步能在更大区间内保持有界与李普希茨等条件，可将解延拓为最大解；但若解在有限时间“爆破”或丢失条件，延拓可能终止。

习题

1. 判断下列微分方程的阶数：(a) $\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$；(b) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y = 0$。
2. 判断下列方程是否线性：(a) $y' + \sin(x)y = 0$；(b) $y'' + (y')^2 = 0$。
3. 给定方程 $y^2 + 3y + 2 = 0$，请说明它的“阶数”和“是否线性”，并思考为何这是一个陷阱题。
4. 解方程 $y' = 0$，并说明为什么它的解族需要初值条件来唯一确定解。
5. （思考题）如果函数 $f(x, y)$ 只是连续而不满足李普希兹条件，那么解是否一定存在？是否一定唯一？请结合实例进行讨论。

1.2 一阶方程的解法

在正式开始之前，我们先来复习一下什么是一阶常微分方程。所谓“一阶”，就是指方程中出现的最高阶导数是一阶，即含有 y' 而不含有 y''、$y^{(3)}$ 等。例如：

- 可分离变量的方程：$y' = ky$。
- 一阶线性方程：$y' + p(x)y = q(x)$。
- 恰当方程：$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$。

但并不是所有一阶方程都能“解出来”。比如：

$$y' = y^2 + x^2, \qquad y' = y + \sin(y),$$

这些方程在一般情况下并没有初等函数形式的解。这提醒我们：本节所介绍的方法只覆盖了一部分一阶方程，但这已经足够展示常微分方程的基本思想和解题技巧。

1.2.1 可分离变量的方程

定义. 如果一个一阶方程可以写成

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y),$$

我们称它为**可分离变量方程**。

解法. 通过变量分离：

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx,$$

然后两边积分：

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + C.$$

注意：积分后出现的常数 C 是必须的。因为微分过程会“抹掉”常数信息，所以积分回去必须加上常数。缺少这个常数，解就不完整。

例子 1：指数增长模型（Malthus 模型）.

$$y' = ky, \quad k > 0.$$

分离变量：

$$\frac{dy}{y} = k\,dx.$$

积分得

$$\ln|y| = kx + C,$$

即

$$y(x) = C_1 e^{kx}, \quad C_1 \neq 0.$$

这是人口增长、放射性衰变等现象的基本模型。

例子 2：物流增长模型（Logistic 方程）.

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right), \quad r, K > 0.$$

分离变量：

$$\frac{dy}{y(1-y/K)} = r\,dx.$$

部分分式展开：

$$\frac{1}{y(1-y/K)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}.$$

积分得

$$\ln\frac{y}{K-y} = rx + C.$$

解为

$$y(x) = \frac{K}{1 + C_1 e^{-rx}}.$$

这描述了有限资源下的人口增长。

例子 3：混合问题（盐水浓度）. 水箱初始有 Q_0 克盐，输入纯水，速率与浓度成比例：

$$Q'(t) = -kQ(t).$$

解法与例子 1 相同，得

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}.$$

说明盐浓度指数衰减。

1.2.2 一阶线性方程

一般形式为：

$$y' + p(x)y = q(x).$$

1.2.3 一阶线性方程

一阶线性方程的一般形式为：

$$y' + p(x)y = q(x).$$

齐次与非齐次

当 $q(x) = 0$ 时称为齐次，否则称为非齐次。这和线性代数中的“齐次线性方程组”与“非齐次方程组”是同样的命名逻辑。

齐次情形. 方程

$$y' + p(x)y = 0$$

相当于

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y.$$

它是一个可分离变量方程，解为

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

非齐次情形. 非齐次方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

的解法关键在于构造“积分因子”。定义

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}.$$

将原方程乘以 $\mu(x)$:

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x).$$

注意到左边是

$$\frac{d}{dx}\big(\mu(x)y(x)\big) = \mu(x)q(x).$$

于是积分得到

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)q(x)\,dx + C,$$

从而

$$y(x) = \mu(x)^{-1}\left(\int \mu(x)q(x)\,dx + C\right).$$

解的结构类比. 这与线性代数中的结果完全类似：齐次解构成一个线性空间，而非齐次解则是“一个特解 + 齐次解的全体”。这显示了“线性”这个词背后的深层联系。

例子 1：齐次方程.

$$y' + 2y = 0.$$

分离变量:

$$\frac{dy}{y} = -2\,dx.$$

积分:

$$\ln|y| = -2x + C,$$

解为

$$y(x) = C_1 e^{-2x}.$$

例子 2：非齐次方程（指数右端）.

$$y' + y = e^x.$$

积分因子:

$$\mu(x) = e^{\int 1\,dx} = e^x.$$

则

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = e^{2x}.$$

积分:

$$e^x y = \frac{1}{2}e^{2x} + C,$$

解为

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}.$$

例子 3：非齐次方程（多项式右端）.

$$y' + 2y = x.$$

积分因子:

$$\mu(x) = e^{2x}.$$

则

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}y) = xe^{2x}.$$

积分右边:

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}.$$

于是

$$e^{2x}y = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C,$$

解为

$$y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}.$$

1.2.4 恰当方程与积分因子法

一阶微分方程常可写成微分形式

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0.$$

若存在一个势函数（或位势函数）$\Phi(x, y)$，使得

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\, dy = M\, dx + N\, dy,$$

则称该方程（或对应的 1-形式）恰当（exact），并且通解为

$$\Phi(x, y) = C.$$

恰当判据（局部） 若 M, N 一阶连续可偏导，且在考虑的区域内

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

则该方程是*局部恰当*的。若区域为单连通，则该条件也充足且必要（Poincaré 引理）。

1.2.5 求解的标准步骤（恰当情形）

设 $M\,dx + N\,dy = 0$，在考察区域内 $\partial_y M = \partial_x N$。

1. **判定恰当性：** 计算 $\partial_y M$ 与 $\partial_x N$，验证是否相等。
2. **求势函数 Φ：** 任选一种方式积分，并加入"未知函数"补偿：

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \int M(x,y)\,dx + g(y) \quad （y \text{ 视作常量}）, \\ \text{或} \quad \Phi(x,y) &= \int N(x,y)\,dy + h(x) \quad （x \text{ 视作常量}）.\end{aligned}$$

3. **求补偿函数：** 对上式两边对另一个变量求偏导，并与 N（或 M）匹配，确定 $g'(y)$（或 $h'(x)$），进而得到 $g(y)$（或 $h(x)$）。
4. **给出隐式解：** $\Phi(x,y) = C$。若有初值 $y(x_0) = y_0$，代入求常数 C。

小心事项

- 判定与积分都依赖"区域"；非单连通区域可能局部恰当但全局不恰当。
- 第二步积分后切勿忘记加 $g(y)$ 或 $h(x)$；这是保持一般性的关键。

例题 1（标准恰当方程）

解

$$(2xy + y^3)\,dx + (x^2 + 3xy^2)\,dy = 0.$$

判定：

$$\partial_y M = 2x + 3y^2, \qquad \partial_x N = 2x + 3y^2 \ \Rightarrow\ \text{恰当。}$$

求势函数： 对 x 积分（y 视常）：

$$\Phi(x,y) = \int (2xy + y^3)\,dx + g(y) = x^2y + xy^3 + g(y).$$

匹配 N： 对 y 求偏导，

$$\partial_y \Phi = x^2 + 3xy^2 + g'(y) \overset{!}{=} N = x^2 + 3xy^2 \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = \text{常数}.$$

通解：

$$x^2y + xy^3 = C.$$

若给定初值 $y(1) = 1$，则 $C = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$，故隐式解为 $x^2y + xy^3 = 2$。

1.2.6 非恰当方程与积分因子

当 $\partial_y M \neq \partial_x N$ 时，可寻找积分因子 $\mu(x,y) \neq 0$，使

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$$

变为恰当。一般情形求 $\mu(x,y)$ 不易，但常见可判定两类：

$\mu = \mu(x)$ **情形** 若

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = f(x) \quad (\text{仅依赖}x),$$

则存在积分因子

$$\mu(x) = \exp\left(\int f(x)\,dx\right).$$

推导：恰当要求 $\partial_y(\mu M) = \partial_x(\mu N)$. 若 $\mu = \mu(x)$，则

$$\mu\,\partial_y M = \mu' N + \mu\,\partial_x N \;\Rightarrow\; \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial_y M - \partial_x N}{N} = f(x).$$

$\mu = \mu(y)$ **情形** 若

$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} = g(y) \quad (\text{仅依赖}y),$$

则

$$\mu(y) = \exp\left(\int g(y)\,dy\right).$$

例题 2 ($\mu = \mu(x)$)

解

$$(2y)\,dx + x\,dy = 0.$$

判定： $\partial_y M = 2,\ \partial_x N = 1 \Rightarrow$ 非恰当。计算

$$\frac{\partial_y M - \partial_x N}{N} = \frac{2-1}{x} = \frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad \mu(x) = \exp\left(\int \frac{1}{x}\,dx\right) = x.$$

乘以积分因子得

$$(2xy)\,dx + (x^2)\,dy = 0,$$

此时 $\partial_y(2xy) = 2x = \partial_x(x^2)$，已恰当。

$$\Phi = \int 2xy\,dx + g(y) = x^2 y + g(y), \quad \partial_y \Phi = x^2 + g'(y) \overset{!}{=} x^2 \Rightarrow g'(y) = 0.$$

通解： $x^2 y = C$。

例题 3 ($\mu = \mu(y)$)

解

$$(y^2)\,dx + x\,dy = 0.$$

判定： $\partial_y M = 2y$, $\partial_x N = 1$，非恰当。计算

$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} = \frac{1-2y}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} =: g(y),$$

故

$$\mu(y) = \exp\biggl(\int \left(y^{-2} - 2y^{-1}\right) dy\biggr) = \exp\biggl(-\frac{1}{y} - 2\ln y\biggr) = e^{-1/y}\,y^{-2}.$$

乘以积分因子：

$$\left(e^{-1/y}\right) dx + \left(x\,e^{-1/y} y^{-2}\right) dy = 0,$$

此时恰当（可验 ∂_y 与 ∂_x 相等）。积分得

$$\Phi = \int e^{-1/y}\,dx + g(y) = x\,e^{-1/y} + g(y),$$

匹配 N 可知 $g'(y) = 0$，故通解

$$x\,e^{-1/y} = C.$$

1.2.7 速查总结

- 标准形：$M\,dx + N\,dy = 0$。
- 判定：$\partial_y M \stackrel{?}{=} \partial_x N$（注意区域单连通性）。
- 解法 (恰当): 积分 M (或 N), 加未知函数, 匹配另一个偏导, 得 $\Phi(x, y) = C$。
- 非恰当：先试 $\mu(x)$ 或 $\mu(y)$：
  $$\mu(x) = \exp\int \frac{\partial_y M - \partial_x N}{N}\,dx \quad \text{或} \quad \mu(y) = \exp\int \frac{\partial_x N - \partial_y M}{M}\,dy,$$
  条件是右侧仅依赖对应单变量。

几何与拓扑的联系

形式 $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 1-形式。

- **闭形式**：满足 $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$。
- **恰当形式**：是某个函数的全微分。

在 $\mathbb{R}^n$ 上，闭形式与恰当形式等价。但在带洞的空间（如环面 T^2，也就是甜甜圈），存在闭形式却不是恰当形式。这意味着某些“恰当方程”在全局上没有解。这就是德拉姆上同调群 $H^1_{\mathrm{dR}}(M)$ 的意义之一。

习题

1. 解方程 $y' = ky$，并说明为什么解中必须包含常数项。

2. 解一阶齐次线性方程 $y' + 2y = 0$。

3. 解一阶非齐次线性方程 $y' + y = e^x$。

4. 解方程 $(2xy + 3)\,dx + (x^2 + 1)\,dy = 0$，必要时请寻找积分因子。

5. (思考题) 微分方程的解可以看作是某种"几何对象"。请思考：如果我们将背景空间换成一个环面（甜甜圈）或一个具有不同拓扑的空间（例如咖啡杯），微分方程的解会受到怎样的影响？它们是否仍然存在？是否仍然唯一？

1.3 高阶线性微分方程

高阶线性微分方程是常微分方程中最接近代数方程的一类。在它们的解法中，我们甚至会遇到与代数方程一模一样的对象——**特征方程**。特征方程的根在某种意义上决定了解的形态，这种现象让我们联想到代数方程与线性代数的影子。

更重要的是，这类方程的解空间结构与线性代数极为相似：解的集合本身是一个线性空间，可以用"基向量"来张成。理解这种结构化的观点，比单纯记公式更重要。

1.3.1 二阶常系数齐次方程

考虑二阶常系数齐次方程：

$$y'' + ay' + by = 0.$$

思路. 设解形如 $y = e^{rx}$。代入方程得

$$r^2 + ar + b = 0.$$

这就是所谓的**特征方程**。它是一个代数方程，解的情况分为三类：

1. **两实根不同**：$r_1 \neq r_2$，则通解为

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

2. **重根**：$r_1 = r_2 = r$，则通解为

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{rx}.$$

3. **复根**：$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，则通解为

$$y(x) = e^{\alpha x}\big(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\big).$$

解空间的类比. 就像线性代数里两个基向量可以张成一个二维空间,这里 $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$ 就像基函数，通解就是它们的线性组合。解空间本身是一个二维线性空间。

例子 1：实根不同.

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

特征方程：$r^2 - 3r + 2 = 0 \implies r = 1, 2$。解为

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

例子 2：重根.

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

特征方程：$r^2 - 2r + 1 = 0 \implies r = 1$（重根）。解为

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

例子 3：复根.

$$y'' + y = 0.$$

特征方程：$r^2 + 1 = 0 \implies r = \pm i$。解为

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

1.3.2 二阶常系数非齐次方程

考虑方程：

$$y'' + ay' + by = f(x).$$

结构. 解由两部分组成：

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

其中 y_h 是齐次解，y_p 是特解。这就像线性代数中的“解空间 = 齐次解空间 + 一个特解”，即非齐次解构成一个**仿射子空间**。

例子 1：常数右端.

$$y'' - y = 1.$$

齐次方程 $y'' - y = 0$ 的解：$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$。设特解 $y_p = A$，代入：$0 - A = 1 \implies A = -1$。通解为

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1.$$

例子 2：指数右端.

$$y'' - y = e^x.$$

齐次解：$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$。注意 e^x 已经是齐次解的一部分，所以要乘 x 尝试，设特解 $y_p = Axe^x$。代入：$y_p'' - y_p = e^x$，可算得 $A = \frac{1}{2}$。通解：

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \tfrac{1}{2} x e^x.$$

例子 3：三角函数右端.

$$y'' + y = \sin x.$$

齐次解：$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$。设特解 $y_p = Ax\cos x + Bx\sin x$。代入计算得 $A = 0,\ B = -\frac{1}{2}$。通解：

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \tfrac{1}{2} x \cos x.$$

1.3.3 更高阶方程与伽罗瓦理论的类比

对于 n 阶常系数齐次方程：

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0,$$

我们同样设 $y = e^{rx}$，得到特征多项式

$$r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

类比代数方程. 解的形态由代数方程的根决定。根可以是实数、重根、复数，情况与二阶类似。解空间维度为 n，基解是 $e^{r_i x}$ 或 $x^k e^{rx}$ 的形式。

1.3.4 特殊函数的出现

上一节我们看到，常系数线性方程往往能用指数、三角与多项式表达。但遇到变系数或更复杂右端时，解常常超出初等函数的范围，进入**特殊函数**的世界。典型例子：

Airy 方程

$$y'' - x\,y = 0.$$

其两个线性无关解记为 $\mathrm{Ai}(x), \mathrm{Bi}(x)$，不能化为有限次初等函数的组合，但满足良好渐近与正交性质，广泛出现在量子力学、衍射与拐点近似中。

Bessel 方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0.$$

两组基本解为第一、第二类 Bessel 函数 $J_\nu(x), Y_\nu(x)$，在圆筒/球对称问题（波动、热传导、膜振动）中扮演“极坐标的正弦余弦”。

Legendre 方程

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell + 1)y = 0.$$

其解 $P_\ell(x)$（勒让德多项式）在 $[-1, 1]$ 上构成正交系，是球谐函数与引力/电势展开的核心。

Frobenius 法（示例） 以 Bessel 方程为例，设 $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$，代回方程可得到首项指数 $s = \pm\nu$ 与递推关系，从而构造出 $J_\nu(x)$ 的幂级数展开

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}.$$

这展示了“超出初等函数”的必然：解依赖于系数的结构与奇点类型。特殊函数是“复杂线性微分方程的自然语言”。

1.3.5 这些解法为何成立：一步步推导

(A) 特征方程与指数试探

记微分算子 $D = \frac{d}{dx}$。二阶常系数齐次方程

$$y'' + ay' + by = 0$$

可写为 $P(D)y = 0$，其中 $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$。指数函数是 D 的“特征函数”：$D(e^{rx}) = re^{rx}$，从而

$$P(D)\,e^{rx} = P(r)\,e^{rx}.$$

要让 e^{rx} 成为解，必须 $P(r) = 0$，即 r 是特征方程的根。若有不同实根 $r_1 \neq r_2$，则 e^{r_1x}, e^{r_2x} 线性无关，张成二维解空间；若出现重根 r，则 $(D - r)^2y = 0$ 的通解由“广义特征函数”给出：

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{rx},$$

可直接验证：$(D-r)\big(xe^{rx}\big) = e^{rx}$。复根 $\alpha \pm i\beta$ 情形由欧拉公式转为实解对 $\{e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x\}$。

(B) 维数、基解与 Wronskian

n 阶线性齐次方程的解集是 n 维线性空间；任取 n 个线性无关解 $y_1,\ldots,y_n$ 形成**基解组**，其 Wronskian

$$W(y_1,\ldots,y_n) = \det\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \neq 0$$

保证“到处线性无关”。因此通解必为线性组合。

(C) 非齐次 = 齐次 + 特解（仿射结构）

对 $P(D)y = f(x)$，设 y_h 满足齐次方程 $P(D)y_h = 0$；若 y_p 满足 $P(D)y_p = f$，则 $P(D)(y_h + y_p) = f$。相反，任意两解之差满足齐次方程。于是解集是“齐次解空间的一个平移”，即仿射子空间。

(D) 参数变动法（推导）

以二阶为例：标准形 $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$。已知基解 y_1, y_2，设

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2, \quad \text{并强加约束} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

以消去二阶导。代回可得

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

用 Wronskian $W = y_1y_2' - y_1'y_2$ 解得

$$u_1' = -\frac{y_2 g}{W}, \qquad u_2' = \frac{y_1 g}{W},$$

积分即得经典公式

$$y_p = -y_1\int \frac{y_2 g}{W}\,dx + y_2\int \frac{y_1 g}{W}\,dx.$$

高阶情形可用矩阵基本解 Y 与 Y^{-1} 的积分表达式推广。

(E) 待定系数/湮灭子法（动机）

当 $f(x)$ 为指数/多项式/三角的线性组合时，它们是常系数算子族的“特征函数”或由之生成的有限维不变子空间。于是可猜测特解形状属于同一族；若与齐次解共振（例如 $f = e^{r_0 x}$ 且 r_0 是特征根），则乘以 x^s 提升到“广义特征函数”阶数，直至线性无关。这一图景可统一解释“为什么要乘以 $x, x^2, \dots$”。

1.3.6 伽罗瓦理论小科普（可跳过）

注：本节为通俗介绍，便于建立直觉；非严格证明。

核心问题 多项式方程的根能否用“有限次加减乘除和开方（根式）”表示？四次及以下存在通法，五次及以上一般没有。伽罗瓦理论给出判据：可否由根式表达，等价于多项式的“对称性群”（伽罗瓦群）是可解群。

基本对象 给定域 K（如有理数 $\mathbb{Q}$），把多项式 $f \in K[x]$ 的全部根加入得到最小的扩张域 L，称为分裂域。考察所有保持 K 不动、但可在 L 内“重新排列”根的自同构构成的群 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$，它编码了“根之间的对称性”。

基本定理 子群 $\leftrightarrow$ 中间域的对应（基本定理）让代数结构与域结构互译。若 G 有一个“可解的”子群链

$$\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_m = G, \qquad G_{i+1}/G_i \text{ 交换},$$

则 f 的根可由根式表达；反之不然。典型地，通用五次方程的伽罗瓦群为对称群 S_5，它不可解，故无根式解。

直观意义 “对称越复杂（群越不可解），越难用简单运算把根写出来”。这不是“不会解”，而是“本质上写不出来”。伽罗瓦把代数方程的可解性还原为对称性的层次结构问题，开辟了现代代数学与群论之路。

与微分的类比 常系数线性 ODE 的特征多项式根能决定解的形态；若要“显式解”可写成有限构造（类似“根式”），我们也需要某种“代数可解性”的刻画。这正引向微分伽罗瓦理论。

1.3.7 微分伽罗瓦理论小科普（可跳过）

注：本节为通俗介绍，聚焦直觉与结论。此处纪念我的一位好友 Artyom Lebedev 这一章的内容是当时我在 2024 年的时候说我想以后写一本常微分方程和动力系统

的教材，然后他当时开玩笑的和我说要给我加一个微分伽罗瓦理论的科普专题他是来自于莫斯科国立大学的博士生一个月后其于 2024 年音乐厅恐怖袭击中逝世，愿世界和平

基本问题 线性微分方程

$$y' = A(x)\,y \quad 或 \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

的解能否用“有限次积分、指数、代数运算”表达？这类函数族称为 *Liouvillian* 函数。答案取决于一个“微分对称性群”。

Picard–Vessiot 扩张与微分伽罗瓦群 在微分域 (K, δ)（如 $K = \mathbb{C}(x)$, $\delta = d/dx$）上，考虑把一个线性方程的所有解“加入”的最小扩张域 L（不扩张常数域），称为 Picard–Vessiot（PV）扩张。保持 K 元素与微分结构不变的 K-自同构构成的群

$$G = \mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}(L/K)$$

称为微分伽罗瓦群。它是一个线性代数群（可嵌入 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$），编码了“解之间的线性-微分对称”。

Liouvillian 可解性的判据 核心结论（Kolchin 等）：方程的解可由有限次代数扩张、积分与指数操作构造（即 Liouvillian），当且仅当 G 是可解型线性代数群(solvable-by-finite)。这与代数伽罗瓦中“根式 $\Leftrightarrow$ 可解群”形成精妙平行。

二阶情形与算法 当 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 时，*Kovacic* 算法给出判定与构造性过程：若存在 Liouvillian 解，它会产出；若失败，基本意味着没有这类“初等-积分-指数”组合的显式解。Airy、Bessel 等往往落在“非 Liouvillian”情形，解释了为何需要特殊函数。

哲学与方法论 微分伽罗瓦理论告诉我们：“能不能初等地写出解”是一个结构性问题，而非技巧缺失。当微分伽罗瓦群过于复杂（不可解），我们应转而研究解的性质（正交性、渐近、谱分解、特殊函数恒等式），而不执着于“把它写成初等式”。

与本章的联系 常系数方程之所以“可写”，在于指数族对 D 的谱是离散而“简单”；变系数后，PV 群可能迅速复杂化，迫使我们进入特殊函数与算子谱理论。这一脉络将贯穿后续动力系统与偏微分方程的更高级内容。

习题

1. 解方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$。
2. 解方程 $y'' - y = 1$。
3. 解方程 $y'' - y = e^x$。
4. 解方程 $y'' + y = \sin x$。
5. （思考题）请探索三阶常系数齐次方程的解空间：

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0.$$

它是否还能用特征方程法解出？当阶数升高到 4 阶、5 阶甚至 n 阶时，解的结构又会如何？

Chapter 2

动力系统视角

上一章我们主要从代数和分析的角度来研究常微分方程。本章我们将换一个视角：把方程理解为描述“运动”的语言，并且去看它们在几何空间中的图像。这一几何化的角度就是所谓的**动力系统视角**。

微分方程的几何图像

考虑一阶方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

它的几何意义是：在空间中，每个点 x 上，都放置一根“小箭头”，箭头的长度和方向由 $f(x)$ 决定。这些箭头构成了一个“速度场”。解曲线就是在这个速度场里运动的轨迹。

牛顿力学的例子. 牛顿第二定律写作

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x).$$

引入速度 $v = dx/dt$，则系统变为

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = F(x)/m. \end{cases}$$

这时 (x, v) 作为坐标点构成一个平面,每个点 (x, v) 都对应着一个矢量 $(v, F(x)/m)$，这就是相位平面上的**矢量场**。例如 $F(x) = -kx$（弹簧力），相位图就是一个中心型的闭合轨道；若加上阻尼 $F(x) = -kx - \gamma v$，则相位轨道向内螺旋收敛。

这种几何直观将“方程”变成了“图像”，也就是本章的主题。

2.1 相位平面分析

严格定义. 对于二维系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), \\ \dot{y} = g(x,y), \end{cases}$$

相位平面（phase plane）是 $\mathbb{R}^2$ 中的点 (x,y) 组成的平面。在每个点上画出向量 $(f(x,y), g(x,y))$，便得到相图。解曲线（轨道）正是这个向量场中的积分曲线。

物理类比. 在经典力学中，位置与动量（或速度）构成的空间叫**相空间**（phase space）。二维系统的相位平面正是相空间在低维情形的体现。

2.1.1 临界点与稳定性

临界点. 系统

$$\dot{x} = f(x,y), \quad \dot{y} = g(x,y)$$

的一个点 (x_0, y_0) 若满足 $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$，则称为临界点（equilibrium）。

稳定性. - 若所有从 (x_0, y_0) 附近出发的轨道都保持靠近它，称为**稳定**；- 若轨道不仅靠近它，还最终收敛到它，称为**渐近稳定**；- 若存在轨道会离开它，则称为**不稳定**。

Jacobi 矩阵判别法. 定义雅可比矩阵

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{pmatrix}.$$

在临界点 (x_0, y_0)，若 J 的特征值 λ_1, λ_2 满足：

- 实部均负 $\implies$ 渐近稳定；
- 实部均正 $\implies$ 不稳定（源点）；
- 一正一负 $\implies$ 鞍点。

这是一种线性化判别法。

例子.

1. $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -y$：临界点 $(0,0)$，Jacobi 矩阵为 $-I$，特征值 $-1,-1$，渐近稳定。

2. $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$：临界点 $(0,0)$，特征值 $1,-1$，鞍点。

3. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$：临界点 $(0,0)$，特征值 $\pm i$，中心点（纯旋转）。

2.1.2 鞍点、吸引子、中心点

鞍点 (saddle point). 一个特征值正、一个负。轨道有的方向趋近，有的方向发散。几何直观：像马鞍，前后凹，左右凸。

吸引子 (attractor). 所有轨道都被拉向它。简单例子是阻尼振动的平衡点。类比：小球落入碗底。

中心点 (center). 特征值为纯虚数，轨道是封闭曲线，既不收敛也不发散。类比：无摩擦的单摆，轨迹不断环绕。

朴素比喻. - 全负特征值：像一个被强力阻尼的小球，迅速平静。- 有正有负：像一个不安分的小球，某些方向稳定，某些方向失稳。- 纯虚特征值：像一个理想钟摆，永远不衰减。

例子.

1. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x - y$：特征值实部负，吸引子。

2. $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$：特征值均正，不稳定源点。

3. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$：特征值 $\pm i$，中心点。

2.1.3 李亚普诺夫稳定性初步

动机. Jacobi 矩阵判别依赖线性化，有时不足以判断稳定性（例如非线性效应、临界特征值）。这时需要更一般的工具：李亚普诺夫函数。

定义. 对系统 $\dot{x} = f(x)$，若存在函数 $V(x)$ 满足：

1. $V(x) \geq 0$ 且 $V(0) = 0$；
2. V 在原点邻域连续可微；
3. 沿解轨迹的导数 $\dot{V}(x) = \nabla V \cdot f(x) \leq 0$，

则称 V 为**李亚普诺夫函数**。它类似于能量函数：若能量单调下降，系统趋于稳定。

例子 1：阻尼谐振子.

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - \gamma y.$$

取 $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$。则

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = xy + y(-x - \gamma y) = -\gamma y^2 \leq 0.$$

说明原点稳定。

例子 2：非线性系统.

$$\dot{x} = -x^3.$$

取 $V(x) = \frac{1}{2}x^2$。则

$$\dot{V} = x\dot{x} = -x^4 \leq 0.$$

说明原点稳定。

意义. 李亚普诺夫函数是研究非线性系统稳定性的核心工具，超越了线性判别的局限。

习题

1. 给出系统 $\dot{x} = -x + y$, $\dot{y} = -y$。请找临界点并用 Jacobi 矩阵判定其稳定性。
2. 判断下列系统在 $(0,0)$ 处的平衡点是鞍点、吸引子还是中心点：(a) $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$；(b) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x - y$；(c) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$。
3. 对系统 $\dot{x} = -x^3$，请构造一个李亚普诺夫函数并判定其稳定性。
4. （挑战）考虑三维 Lorenz 系统：

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = xy - \beta z.$$

请用本章方法尽可能分析它的临界点与稳定性（无需完整解答，分析多少都算正确）。

5. (思考题)设想几何化的微分方程：如果系统来自某个空间的梯度流(例如 $\dot{x} = -\nabla U(x)$)，那么是否可以通过操控背景几何空间来设计任意的动力学行为？比如指定某点为吸引子、某点为中心点。这背后涉及微分几何中的"梯度场""流形""度量"等概念，请结合直觉展开讨论，当然我更推荐你可以捏一捏橡皮泥比如你给橡皮泥戳一个坑来让一个即使有惯性的小球也没办法冲出去。

2.2 * 非线性现象

上一节我们学习了相位平面的基本概念与稳定性判别。本节将进入动力系统中最迷人的部分：非线性现象。非线性系统往往表现出远比线性系统复杂的行为，例如极限环、分岔与混沌。这些现象不仅是数学研究的重要对象，也在物理、工程、生物、经济等领域有着广泛应用。

2.2.1 极限环与 Poincaré–Bendixson 定理

极限环定义. 设二维系统

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y).$$

如果存在一个闭曲线 Γ，它是系统的一条轨道，并且：

1. Γ 是孤立的(附近没有其他闭轨道)；
2. 存在开集 U，使得所有从 U 出发的轨道随着 $t \to \infty$ 都趋向 Γ(稳定的情形)，

则称 Γ 为一个**极限环**。

Floquet 理论. 考虑周期解 $x(t+T) = x(t)$。其稳定性由单周期线性化方程

$$\dot{y} = Df(x(t))y$$

的解矩阵 $\Phi(t)$ 决定。定义单周期映射 $\Phi(T)$ 的特征值 μ_i 为 **Floquet 乘子**。若除去平凡乘子 1 之外，其余均位于单位圆内，则周期解稳定。Floquet 理论为判别极限环的稳定性提供了工具。

例题. Van der Pol 方程.

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

当 $\mu > 0$ 时存在唯一稳定极限环。其 Floquet 乘子可通过数值方法计算，表明轨道吸引周围解。

Floquet 理论计算例子：一个可手算的稳定极限环 考虑极坐标下的二维自治系统

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \qquad \dot{\theta} = 1.$$

将其写成直角坐标可得

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x\,(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = \quad x + y\,(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

该系统的几何意义非常直观：角速度恒为 1，径向上 $r = 1$ 是吸引的（因 $\dot{r} = r(1-r^2)$ 在 $0 < r < 1$ 时为正、在 $r > 1$ 时为负）。故单位圆

$$\Gamma := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

是一条闭轨道（极限环），其周期 $T = 2\pi$。

我们用 Floquet 理论判定 Γ 的稳定性。设向量场 $F = (f, g)$，其雅可比矩阵为

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix}.$$

对于平面自治系统，沿一条周期解 $\gamma(t)$ 的单周期解矩阵 $\Phi(T)$ 的两个 Floquet 乘子中，一个必为 1（切向方向对应时间平移不变性），另一个（非平凡乘子）可由散度积分公式给出：

$$\mu_\perp \;=\; \exp\!\left(\int_0^T \operatorname{div} F(\gamma(t))\, dt\right), \quad \text{其中 } \operatorname{div} F = \partial_x f + \partial_y g.$$

对本例，先算散度。由

$$f(x, y) = -y + x(1 - r^2), \qquad g(x, y) = x + y(1 - r^2), \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

可得

$$\partial_x f = (1 - r^2) + x(-2x) = 1 - r^2 - 2x^2, \qquad \partial_y g = (1 - r^2) + y(-2y) = 1 - r^2 - 2y^2.$$

因此

$$\operatorname{div} F = \partial_x f + \partial_y g = 2(1 - r^2) - 2(x^2 + y^2) = 2(1 - 2r^2).$$

沿极限环 Γ 有 $r \equiv 1$，于是

$$\operatorname{div} F\big|_\Gamma = 2(1 - 2) = -2 \text{ （常数）}.$$

且沿 Γ 的周期 $T = 2\pi$，故

$$\mu_\perp = \exp\!\left(\int_0^{2\pi} (-2)\, dt\right) = \exp(-4\pi) \in (0, 1).$$

结论：非平凡 Floquet 乘子 $\mu_\perp = e^{-4\pi}$，位于单位圆内，故 Γ 为**稳定极限环**（吸引极限环）。

备注（与一般理论的对照）：对任意平面自治系统，沿周期轨道的乘子为 $\{1, \mu_\perp\}$，其中 $\mu_\perp = \exp\left(\int_0^T \operatorname{div} F(\gamma(t))\,dt\right)$。若 $|\mu_\perp| < 1$ 则稳定，$|\mu_\perp| > 1$ 则不稳定，$|\mu_\perp| = 1$ 为临界情形（需更高阶分析，如 Lyapunov–Floquet 正常形或中心流形理论）。

Poincaré–Bendixson 定理的完整证明（ 可跳过） [Poincaré–Bendixson] 设 $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$，并令 $\phi_t(z)$ 为系统 $\dot{z} = F(z)$ 的流。若一条轨道 $\gamma(t) = \phi_t(z_0)$ 的 ω-极限集 $\omega(z_0)$ 非空、紧、且包含于某个有界闭区域 $D \subset \mathbb{R}^2$，并且 $\omega(z_0)$ 不含平衡点，则 $\omega(z_0)$ 必为一条闭轨道（即一条周期解的像）。

证明思路概览： (1) ω-极限集的标准性质：非空、紧、连通、正不变；(2) 若 ω-极限集无平衡点，则存在一条简单闭曲线（周期轨道）；(3) 通过横截线与回归映射（Poincaré 映射）排除更复杂的极限集结构（在平面上不可出现像“怪异最小集”那样的情形）。

第一步：$\omega(z_0)$ 的基本性质。定义

$$\omega(z_0) := \left\{ w \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, t_n \to +\infty,\ \phi_{t_n}(z_0) \to w \right\}.$$

标准拓扑动力系统论断言：

$\omega(z_0)$ 非空、紧、连通且正不变（即 $\phi_t(\omega(z_0)) = \omega(z_0)$ 对所有 $t \geq 0$）。

这些性质源于：轨道在有界闭区域内的相对紧性（由 Ascoli–Arzelà 型紧性考虑与流的连续性可得极限存在），闭性来自定义，连通性可由极限集最小性与流的连续性证明，正不变性由半群性质与定义直接推出。

第二步：构造横截线与回归。取 $w \in \omega(z_0)$，因无平衡点，$F(w) \neq 0$。可在 w 附近取一小段横截线段 Σ，与向量场横截。由于 w 的每一邻域都被轨道 $\gamma(t)$ 无穷多次穿越（极限集定义），故 γ 与 Σ 有无穷多次横截。借此定义 Poincaré 回归映射

$$P : \Sigma \supset U \to \Sigma,$$

将一点映到其下一次返回 Σ 的交点。P 在足够小的子段上是良定义且连续的（C^1 向量场 + 横截性确保）。

第三步：排除非周期的 ω-极限结构。若 $\omega(z_0)$ 不是闭轨道，则回归映射 P 在 Σ 上不存在不动点（否则对应一条周期轨道穿过 w）。一方面，P 的迭代轨道必须在 Σ 的紧子集内有极限点；另一方面，P 在一维紧区间上的连续自映射若没有不动点，将导致端点行为或单调逃逸，与 $\omega(z_0)$ 的紧致正不变性与连通性矛盾。更几何地说：若没有周期轨道，γ 必在平面上产生无穷自相交或分支，借助 Jordan 曲线定

理与不可穿越性（2D 流的轨道不能横穿自身或彼此）可排除这种“乱绕”而不闭合的情况。于是只能出现闭合轨道。

严格表述如下：设 Σ 为小线段，P 在闭子段 $I \subset \Sigma$ 上连贯有界，且 $P(I) \subset I$。若 P 无不动点，则 $P(x) \neq x$ 对所有 $x \in I$。连续性意味着 $P(x) - x$ 在 I 上同号，于是迭代 P^n 将点单调推向 I 的某端点；但这与 $\omega(z_0)$ 在 w 附近的双侧回归（无穷次穿越）矛盾。因而 P 有不动点，给出一条周期轨道。该周期轨道包含于 $\omega(z_0)$，由极限集的极小性（若取极小非空闭不变子集）可知 $\omega(z_0)$ 本身即为该周期轨道。

结论：在平面上，若 $\omega(z_0)$ 有界、非空且不含平衡点，则它必为一条闭轨道。这就证明了定理。

□

补充（为什么二维很特别）：在 $\mathbb{R}^3$ 及更高维中，横截面与回归映射是高维的，可能出现奇异吸引子与混沌等复杂结构，Poincaré–Bendixson 定理不再成立。

2.2.2 分岔理论入门

分岔定义. 当系统中的参数逐渐变化时，平衡点或周期解的数目与稳定性可能发生突变，这称为**分岔**（bifurcation）。

直觉. 分岔的根源往往是系统的 Jacobi 矩阵的特征值穿过某个临界值（例如 0 或纯虚数），导致动力学行为发生质变。

常见类型.

1. 鞍结分岔 (saddle-node)：两个平衡点相遇并湮灭。
2. Hopf 分岔：平衡点失稳，出现极限环。
3. 翻转分岔 (period-doubling)：周期轨道倍增，最终通向混沌。

例子 1：鞍结分岔.

$$\dot{x} = r + x^2.$$

当 $r < 0$ 有两个平衡点，当 $r = 0$ 它们相遇消失，当 $r > 0$ 无平衡点。

例子 2：超临界 Hopf 分岔. 二维系统

$$\dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2).$$

当 $\mu < 0$，原点稳定；当 $\mu > 0$，原点失稳并出现稳定极限环。

例子 3：周期倍化. Logistic 映射

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

随着 r 增大，轨道从稳定点 $\to$ 周期 2 $\to$ 周期 4 $\to$ 混沌。这是分岔理论在离散动力系统中的经典场景。

2.2.3 混沌的严格定义与可计算判据（李亚普诺夫指数与 Floquet 乘子）

本小节给出混沌的数学定义，并提供李亚普诺夫指数（Lyapunov exponents, LEs）与 Floquet 理论的可操作算法。若仅需会用，可按“算法步骤”和“代码示例”直接操作；若需理论脉络，可先读定义与说明。

一、混沌的数学定义（Devaney 定义与流的对应）

Devaney 混沌（离散系统） 设 (X, d) 是无孤立点的紧度量空间，$f : X \to X$ 连续。若：

1. **拓扑传递**（topological transitivity）：对任意非空开集 $U, V \subset X$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$；
2. **周期点稠密**：$\mathrm{Per}(f)$ 在 X 中稠密；

则 f 称在 X 上是**混沌**的。对无孤立点空间，(1)+(2)$\Rightarrow$ *敏感依赖初值*（存在 $\delta > 0$，任意 x、任意邻域中有 y 使得某次迭代后 $d(f^n x, f^n y) > \delta$）。

连续时间流的混沌 对光滑流 $\varphi^t : M \to M$（M 为紧流形），常以横截面上的 Poincaré 映射 P 来刻画：若 P 在某不变致密集上 Devaney 混沌，则称该流在对应不变集（吸引子）上呈混沌。实践中等价可用：**最大李亚普诺夫指数** $\lambda_{\max} > 0$、**拓扑熵** > 0、或马蹄型结构等作为混沌证据（严格等价需额外条件，这里作为可用判据）。

二、李亚普诺夫指数：定义与计算

定义（连续系统） 对 $\dot{x} = F(x)$ 的解 $x(t)$，其线性化（变分方程）为

$$\dot{\delta x} = J(x(t))\,\delta x, \qquad J = \mathrm{D}F.$$

令 $\Phi(t)$ 为变分方程的基本解矩阵，则 Oseledec 乘法遍历定理保证极限

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sigma_i\big(\Phi(t)\big)$$

（σ_i 为奇异值）在遍历意义下存在，$\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 为系统在该轨道上的 n 个李亚普诺夫指数。最大者 $\lambda_{\max} > 0$ 通常作为混沌的数值判据。

数值算法（Benettin/QR 法，连续系统） 设维数 n。

1. （积分主系统）沿某轨道积分 $\dot{x} = F(x)$。
2. （积分变分方程）同时积分 $\dot{Q} = J(x(t))\,Q$，初始 $Q(0) = I_n$。
3. （周期正交化）每隔 Δt 对 Q 做 QR 分解：$Q = \widetilde{Q}R$，累加 $\log|R_{ii}|$ 到计数器 S_i，并令 $Q \leftarrow \widetilde{Q}$ 继续。
4. （收敛估计）迭代 K 次后，

$$\lambda_i \approx \frac{1}{K\,\Delta t}\sum_{k=1}^{K}\log|R_{k,ii}|.$$

若仅需 $\lambda_{\max}$，可用单向量版本：每步把偏差向量归一化并累加伸长率的对数。

离散映射的版本 对 $x_{k+1} = f(x_k)$，变分为 $\delta x_{k+1} = Df(x_k)\,\delta x_k$。重复 QR/Gram–Schmidt 正交化并累加 log 伸长率，平均到步数上即得指数。

例子 A：Logistic 映射 $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ 的 $\lambda_{\max}$

$$\lambda = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\log|f'(x_n)| = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\log|r(1-2x_n)|.$$

在 $r = 4$ 且对不变测度采样时，$\lambda = \ln 2$。数值上：迭代去掉前若干步（烧录），对后 N 步平均 $\log|4(1-2x_n)|$ 即可。

三、Floquet 理论：周期轨道的稳定性计算

定义与步骤 设 $\gamma(t)$ 为周期为 T 的周期解，沿其线性化变分方程

$$\dot{\eta} = J(\gamma(t))\,\eta, \qquad \Phi(0) = I.$$

单周期**单调矩阵**（monodromy）$\Phi(T)$ 的特征值 μ_i 为 **Floquet 乘子**，**Floquet 指数**为 $\Lambda_i = \frac{1}{T}\log\mu_i$。对自治系统，切向方向乘子恒为 1。稳定当且仅当非平凡乘子模长 < 1。算法要点：

1. **得到周期解 $\gamma(t)$ 与周期 T**：若无解析式，可数值积分至吸引的极限环并用 Poincaré 截面检测相邻穿越时间差得到 T（或射击法）。

2. **沿 γ 积分变分方程**：用 $\Phi'(t) = J(\gamma(t))\Phi(t)$、$\Phi(0) = I$ 积分 $t \in [0, T]$，得 $\Phi(T)$。

3. **谱计算**：对 $\Phi(T)$ 求特征值得乘子 μ_i，并判断模长。

平面系统的捷径(散度积分公式) 二维自治系统沿周期解 γ 的两个乘子为 $\{1, \mu_\perp\}$，且

$$\mu_\perp = \exp\left(\int_0^T \operatorname{div} F(\gamma(t))\, dt\right).$$

若 $|\mu_\perp| < 1$ 则环稳定；> 1 不稳定；$= 1$ 临界。

四、手算与数值示例

示例 1（手算 Floquet）：极坐标环 $\dot{r} = r(1 - r^2)$，$\dot{\theta} = 1$ 极限环 $r \equiv 1$，$T = 2\pi$。散度 $\operatorname{div} F = 2(1 - 2r^2)$，沿环为 -2，故

$$\mu_\perp = \exp\left(\int_0^{2\pi} -2\, dt\right) = e^{-4\pi} \in (0, 1),$$

稳定。亦可直接线性化得径向扰动 $\dot{\delta r} = -2\delta r$，一周期伸缩因子 $e^{-2T} = e^{-4\pi}$。

示例 2（离散映射 LE）：Logistic $r = 4$ 的 $\lambda_{\max}$ 数值复现

```
import numpy as np

def logistic_map(r, x):
    return r*x*(1 - x)

r = 4.0
N_burn, N = 1000, 200000
x = 0.123456
for _ in range(N_burn):
    x = logistic_map(r, x)

s = 0.0
for _ in range(N):
    x = logistic_map(r, x)
    s += np.log(abs(r*(1 - 2*x)))

lam = s / N
print("lambda_max␣", lam)  # 约等于 ln 2  0.6931
```

示例 3（连续系统 LE）：Lorenz 系统的 λ 谱（Benettin/QR）

```
import numpy as np
from numpy.linalg import qr
from scipy.integrate import solve_ivp

sig, beta, rho = 10.0, 8.0/3.0, 28.0

def F(t, X):
    x, y, z = X
    return [sig*(y - x), x*(rho - z) - y, x*y - beta*z]

def J(X):
    x, y, z = X
    return np.array([[-sig, sig, 0],
                     [rho - z, -1, -x],
                     [y, x, -beta]])

def augmented(t, Y):
    # 状态 + 变分矩阵（展平成长度 3+9 向量）
    x = Y[:3]
    Phi = Y[3:].reshape(3,3)
    dx = F(t, x)
    dPhi = J(x).dot(Phi)
    return np.concatenate([dx, dPhi.ravel()])

# 初值与烧录
x0 = np.array([1.0, 1.0, 1.0])
Phi0 = np.eye(3).ravel()
Y0 = np.concatenate([x0, Phi0])

dt = 0.02
T_burn, T_total = 50.0, 300.0
# 先烧录到吸引子
solve_ivp(augmented, [0, T_burn], Y0, max_step=dt, rtol=1e-8,
   atol=1e-10)

# 重置在吸引子上的起点（从上次末值取也可）
Y = np.concatenate([x0, Phi0])
```

```
t0 = 0.0

S = np.zeros(3)      # 累加 log|R_ii|
Q = np.eye(3)        # 重置正交基
steps = int(T_total/dt)

for k in range(steps):
    # 将当前正交基注入变分初值
    Y[3:] = Q.ravel()
    sol = solve_ivp(augmented, [t0, t0+dt], Y, max_step=dt, rtol
        =1e-8, atol=1e-10)
    Y = sol.y[:, -1]
    t0 += dt
    Phi = Y[3:].reshape(3,3)
    # QR 正交化
    Q, R = qr(Phi)
    S += np.log(np.abs(np.diag(R)))

lambdas = S / (steps*dt)
print("Lyapunov␣spectrum␣", np.sort(lambdas)[::-1])  # 期望 ~
   [0.9..., ~0, -14.5...]
```

示例 4 (Floquet 乘子): Van der Pol 极限环

```
import numpy as np
from numpy.linalg import eig
from scipy.integrate import solve_ivp

mu = 1.0

def vdp(t, X):
    x, y = X  # y = x'
    return [y, mu*(1 - x**2)*y - x]

def J(X):
    x, y = X
    return np.array([[0, 1],
                     [-1 - 2*mu*x*y, mu*(1 - x**2)]])
```

```
# 1) 先沿时间积分到极限环附近，并用相位条件估计周期 T
x0 = np.array([2.0, 0.0])
sol = solve_ivp(vdp, [0, 200], x0, max_step=0.02, rtol=1e-9,
    atol=1e-11)
t, X = sol.t, sol.y.T

# 简单 Poincaré 截面：取 x 过零且 y>0 的相邻两次过零时间差为 T
    的估计
idx = np.where((X[:-1,0] < 0) & (X[1:,0] >= 0) & (X[1:,1] > 0))
    [0]
t1, t2 = t[idx[-2]+1], t[idx[-1]+1]
T = t2 - t1
x_phase = X[idx[-1]+1]  # 周期点近似

# 2) 沿一周期积分变分方程
def augmented(t, Y):
    x = Y[:2]
    Phi = Y[2:].reshape(2,2)
    dx = vdp(t, x)
    dPhi = J(x).dot(Phi)
    return np.concatenate([dx, dPhi.ravel()])

Y0 = np.concatenate([x_phase, np.eye(2).ravel()])
sol2 = solve_ivp(augmented, [0, T], Y0, max_step=0.01, rtol=1e
    -9, atol=1e-11)
PhiT = sol2.y[2:, -1].reshape(2,2)
mu_vals = eig(PhiT)[0]
print("Floquet multipliers:", mu_vals)  # 其中一个约为 1，另一个
    判稳定性（应 <1）
```

数值注意事项

- **步长/容差**：LE 与乘子对数值误差敏感，建议小步长、严格容差，并做收敛性检查。
- **烧录**：对吸引子问题，先长时间积分进入吸引子再开始累计。
- **正交化频率**：太稀会溢出，太密会增开销；经验上 Δt 与系统特征时间同阶。

- **计算量**：全谱 LE 需并行积分 $n \times n$ 变分（$O(n^3)$ QR），Floquet 也需积分矩阵 ODE；现代计算机完全可胜任，必要时并行化。

五、小结与作业提示

- 判定混沌的“硬指标”是 $\lambda_{\max} > 0$（数值）；理论上可辅以拓扑传递与周期点稠密（Devaney）。
- 计算极限环稳定性：若可解析，优先用散度积分公式；否则用“周期解 + 变分矩阵”的单周期法。
- 做本章习题：仿照示例 2（Logistic）算 $\lambda_{\max}$、示例 3（Lorenz）算全谱、示例 4（Van der Pol）算 Floquet 乘子。

习题

1. 给定系统 $\dot{x} = 1 - y,\ \dot{y} = x - x^3$，判断是否存在极限环。
2. 使用 Poincaré–Bendixson 定理，快速判断二维系统
$$\dot{x} = -y - x(x^2 + y^2 - 1), \quad \dot{y} = x - y(x^2 + y^2 - 1)$$
是否存在极限环。
3. 考虑系统 $\dot{x} = rx - x^3$。请分析参数 r 的变化如何引起分岔，并说明相位平面上发生了什么质变。
4. 对 Logistic 映射 $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$，计算当 $r = 3.8$ 时的最大李亚普诺夫指数，并判定是否混沌。
5. （思考题）Poincaré–Bendixson 定理仅适用于二维系统。请思考在三维及以上时，为什么此定理失效？在三维空间中还能出现哪些新现象？（提示：混沌吸引子、奇异吸引子）

Chapter 3

分布理论与定性分析

写在开头的话

这一章与前两章的风格明显不同。前两章我们主要关心“如何解微分方程”，本章我们开始介绍一些**更广泛的工具和思想**，它们往往不直接给出解的公式，而是帮助我们处理一些非标准情况（比如奇异激励），或者帮助我们理解解的整体性质（比如连续依赖性、存在性、稳定性）。

需要特别说明的是：**这些内容并不是考试的重点**。如果你只想应付考试，可以放心地跳过。但如果你希望在数学学习中积累更深的理解，那么这一章会向你展示常微分方程与现代数学的一些连接：泛函分析、分布理论、拓扑方法。

3.1 分布理论与广义解

3.1.1 为什么需要分布？

很多实际问题无法用传统的“光滑函数”来描述：

- 电路中开关的瞬间动作，可以看作一个阶跃函数输入；
- 力学中的瞬时冲击力，可以看作 函数输入；
- 控制理论中的脉冲响应，天然涉及分布。

在这些情况下，如果我们坚持“解必须是光滑函数”，很多方程根本无解。于是数学家们扩展了解的概念，允许解在更广泛的意义下存在，这就是**分布解**（distributional solution 或 weak solution）。

3.1.2 泛函分析的视角（科普）

为了理解分布理论，我们需要一点点泛函分析的背景。

函数空间. 我们不再把“函数”仅仅看作公式，而是把它们放到一个集合里，并且赋予结构。比如：

- $C^k[a,b]$：区间上 k 次连续可导函数；
- $L^p[a,b]$：满足 $\int |f|^p < \infty$ 的函数（以等价类定义）。

范数与拓扑. 这些空间通常配备一个范数（norm），衡量函数的大小。例如

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

这样我们就能讨论函数列是否收敛。

线性泛函与对偶空间. 在泛函分析中，一个核心对象是“线性泛函”：从函数空间到实数/复数的线性映射。比如积分算子

$$T(f) = \int f(x)\varphi(x) \, dx$$

就是一个典型的线性泛函。所有连续线性泛函的集合，叫做这个函数空间的**对偶空间**。

这就是分布的思路：我们不要求“分布”本身是函数，而是要求它能对每个测试函数 φ 给出一个数值。

3.1.3 分布的严格定义

测试函数空间. 设 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 是所有在实数轴上具有紧支撑的光滑函数的集合。也就是说，$\varphi \in \mathcal{D}$ 当且仅当：

- φ 无穷次可微；
- 存在有界区间 $[a,b]$，使得 $\varphi(x) = 0$ 在区间外恒成立。

分布. 一个**分布**是定义在 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 上的连续线性泛函。记作 $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$。

例如，狄拉克 定义为

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

导数. 分布的导数定义为

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle.$$

这样，分布的导数总是存在。比如

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

因此我们得到 $H'(t) = \delta(t)$。

3.1.4 Schwartz 空间与 Tempered 分布（科普）

在前面我们定义了分布作为作用在 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 上的连续线性泛函。但在很多物理和工程问题中，函数并不一定有紧支撑（例如 $\sin t$、e^{-t^2} 这种函数没有紧支撑）。这时我们需要更大的测试函数空间，这就是 Schwartz 空间。

Schwartz 空间. Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 定义为所有**快速下降的光滑函数**：

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty,\ \forall \alpha, \beta \right\}.$$

这意味着 φ 及其所有导数在无穷远处都衰减得比任何多项式都快。

Tempered 分布. 作用在 $\mathcal{S}$ 上的连续线性泛函称为 tempered 分布，记作 $\mathcal{S}'$。直观地说，tempered 分布允许我们处理“增长不太快”的对象，例如多项式增长的函数。常见的 函数、阶跃函数都属于 tempered 分布。

Fourier 变换与分布. Schwartz 空间的一个重要性质是它在 Fourier 变换下封闭：如果 $\varphi \in \mathcal{S}$，那么 $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$。这使得我们可以把 Fourier 变换扩展到 tempered 分布上：

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle.$$

因此我们就能对 函数、阶跃函数这样的奇异对象进行 Fourier 变换。例如：

$$\widehat{\delta}(\xi) = 1, \qquad \widehat{1}(\xi) = 2\pi\delta(\xi).$$

应用场景.

- 在 ODE 中：解常系数线性微分方程时，经常会用 Fourier 变换，把微分算子变成代数方程；
- 在 PDE 中：热方程、波动方程的基本解常常通过 Fourier 分布理论来构造；
- 在信号处理里： 函数的 Fourier 变换对应于“所有频率成分都有”，这与脉冲信号的直观完全吻合。

直观总结. 如果说 $\mathcal{D}$ 和分布理论是为了解决“局部奇异”的问题（如冲击），那么 $\mathcal{S}$ 和 tempered 分布则是为了解决“全局频率分析”的问题（如傅里叶变换）。这两个体系共同构成了现代分析中处理非光滑对象的基本框架。

3.1.5 弱解的思想

对于方程
$$x'(t) = \delta(t), \quad x(0) = 0,$$
如果严格理解导数，x 不存在。但在分布意义下，我们可以取 $x(t) = H(t)$。因为
$$\langle x', \varphi \rangle = -\langle x, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(t)\,dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$
这就说明 $H(t)$ 是方程的一个**弱解**。

3.1.6 应用举例

例子 1：冲击振子.
$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = \delta(t).$$
解法：对 $t = 0$ 积分一次，得到速度的跳跃条件
$$m\left(\dot{x}(0^+) - \dot{x}(0^-)\right) = 1.$$
因此冲击会让速度瞬间增加 $1/m$。

例子 2：阶跃响应.
$$\dot{x} + x = H(t), \quad x(0) = 0.$$
解：对 $t < 0$，$H = 0$，解为 0；对 $t > 0$，解为
$$x(t) = 1 - e^{-t}.$$
这是一个典型的非平滑输入问题。

总结. 分布理论是处理非光滑激励的一种优雅方法，广泛应用于物理和工程。

3.2 定性分析

3.2.1 解的连续依赖性

动机. 在数值计算或实验中，初值和参数总是带有误差。一个好的数学理论应该告诉我们：小小的误差不会导致完全不同的结果。

定理（解对初值的连续依赖）. 设 $f(t,x)$ 在某区域 Lipschitz 连续，则：

1. 初值问题有唯一解；
2. 解对初值和参数连续依赖。

证明思路. 利用 Gronwall 不等式。如果两个解 x_1, x_2 的初值差 ε，那么有

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le \varepsilon e^{Lt},$$

其中 L 是 Lipschitz 常数。这保证了解的稳定性。

例子.

1. $\dot{x} = -x$：连续依赖性良好。
2. $\dot{x} = \sqrt{|x|}$：在 $x = 0$ 时 Lipschitz 失效，解不唯一，因此没有连续依赖性。

3.2.2 拓扑方法初步

不动点定理. Brouwer 定理：连续映射 $f : D \to D$（D 紧凸）必有不动点。Schauder 定理：若 D 是 Banach 空间中的非空闭凸有界集，$f : D \to D$ 是紧算子，则有不动点。

应用. 微分方程可以转化为积分方程

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

如果我们把右边看作算子 T，那么 $x = T(x)$ 就是一个不动点。于是 ODE 的解问题转化为不动点问题。

例子：周期解存在性. 考虑系统 $\dot{x} = f(x)$ 在紧区域内。若能证明相应的 Poincaré 映射有不动点，就能推出存在周期解。这是拓扑方法的典型应用。

度理论（科普）. 拓扑度（topological degree）是一个整数，用来度量映射“覆盖”空间的方式。它能告诉我们方程 $f(x) = 0$ 至少有多少个解。虽然这里不展开，但要记住：这是拓扑方法的重要思想。

小结

本章向你展示了两条数学的“高阶路线”：

- 分布理论：通过泛函分析，把 函数、阶跃函数纳入解的框架；
- 定性分析：通过连续依赖性和拓扑方法，保证解的整体性质。

请记住：这些知识不是考试重点，而是你未来进入数学更深领域的钥匙。本章不设置习题因为这一章是科普的

Chapter 4

数值解法与模拟

如何阅读本章

本章面向两类读者：

- 只想快速上手的读者：**直接使用每节给出的 Python / MATLAB 代码**跑通示例即可，先不必纠结原理。
- 想深入理解的读者：**在代码后面附上了严格的定义与理论依据**（收敛阶、稳定性、刚性等），你可以细读推导与证明思路。

注意：本章内容在基础考试中一般**不是重点**；但在科研与工程模拟中非常实用。

4.1　4.1 欧拉法（前向/后向）

问题设置

考虑初值问题（IVP）

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0.$$

取步长 $h > 0$，离散点 $t_n = t_0 + nh$，记数值解 $y_n \approx y(t_n)$。

4.1.1　前向欧拉（显式 Euler）

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)}$$

局部截断误差（LTE）为 $O(h^2)$，**全局误差（GE）**$O(h)$（一阶方法）。

Python（显式 Euler）

Listing 4.1: Forward Euler

```python
import numpy as np

def euler_forward(f, t0, y0, h, N):
    t = t0
    y = np.array(y0, dtype=float)
    T, Y = [t], [y.copy()]
    for _ in range(N):
        y = y + h * f(t, y)
        t = t + h
        T.append(t); Y.append(y.copy())
    return np.array(T), np.array(Y)

# 示例: y' = -y, y(0)=1
f = lambda t, y: -y
T, Y = euler_forward(f, 0.0, [1.0], 0.1, 100)
```

MATLAB（显式 Euler）

Listing 4.2: Forward Euler (MATLAB)

```matlab
function [T,Y] = euler_forward(f, t0, y0, h, N)
t = t0; y = y0(:).';
T = t;  Y = y;
for k = 1:N
    y = y + h * f(t, y);
    t = t + h;
    T(end+1) = t;  Y(end+1,:) = y;
end
end
% 用法:
% f = @(t,y) -y; [T,Y] = euler_forward(f,0,[1],0.1,100);
```

4.1.2 后向欧拉（隐式 Euler）

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h\,f(t_{n+1}, y_{n+1})}$$

需解非线性方程（常用 Newton 或不动点迭代）。后向欧拉一阶，但 **A-稳定且 L-稳定**，对刚性问题更可靠。

Python（隐式 Euler + Newton）

Listing 4.3: Backward Euler with Newton

```
import numpy as np

def newton_step(F, J, y_guess, tol=1e-10, maxit=20):
    y = y_guess.copy()
    for _ in range(maxit):
        Fy = F(y)
        if np.linalg.norm(Fy, ord=2) < tol: break
        Jy = J(y)
        dy = np.linalg.solve(Jy, -Fy)
        y = y + dy
        if np.linalg.norm(dy, ord=2) < tol: break
    return y

def euler_backward(f, Jfy, t0, y0, h, N):
    t = t0
    y = np.array(y0, dtype=float)
    T, Y = [t], [y.copy()]
    for _ in range(N):
        F = lambda z: z - y - h * f(t+h, z)
        J = lambda z: np.eye(len(y)) - h * Jfy(t+h, z)
        y = newton_step(F, J, y)  # 以 y 作为初猜
        t = t + h
        T.append(t); Y.append(y.copy())
    return np.array(T), np.array(Y)

# 示例: y' = lambda*y; f'=lambda
lam = -50.0
f   = lambda t,y: lam*y
Jfy = lambda t,y: np.array([[lam]])
T,Y = euler_backward(f,Jfy,0.0,[1.0],0.1,40)
```

理论要点

- **一致性**：Taylor 展开可证两种欧拉法均有 LTE $O(h^2)$。
- **稳定性函数**（对测试方程 $y' = \lambda y$，记 $z = h\lambda$）：

$$R_{\mathrm{FE}}(z) = 1 + z, \qquad R_{\mathrm{BE}}(z) = \frac{1}{1-z}.$$

前向欧拉稳定域 $\{z : |1+z| < 1\}$（左半圆），后向欧拉为 **A-稳定且 L-稳定**（$\Re z < 0$ 全部稳定且 $z \to -\infty$ 时 $R \to 0$）。

4.2 4.2 改进的欧拉法/梯形法与 Runge–Kutta 法

4.2.1 改进的欧拉（Heun）与梯形法

两种二阶方法：

$$\text{Heun:} \quad \begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n), \\ k_2 = f(t_n + h,\, y_n + h\, k_1), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \end{cases}$$

$$\text{梯形法 (隐式)：} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\big).$$

Heun 显式、二阶；梯形隐式、二阶且 **A-稳定**（但非 L-稳定）。

Python（Heun 与梯形）

Listing 4.4: Heun (explicit) and Trapezoidal (implicit)

```
def heun(f, t0, y0, h, N):
    t = t0; y = np.array(y0, float)
    T,Y=[t],[y.copy()]
    for _ in range(N):
        k1 = f(t, y)
        k2 = f(t+h, y + h*k1)
        y = y + 0.5*h*(k1 + k2)
        t = t + h
        T.append(t); Y.append(y.copy())
    return np.array(T), np.array(Y)

def trapezoidal(f, Jfy, t0, y0, h, N):
    t = t0; y = np.array(y0, float)
    T,Y=[t],[y.copy()]
    for _ in range(N):
        k1 = f(t, y)  # predictor for good initial guess
        y_guess = y + h*k1
        F = lambda z: z - y - 0.5*h*(f(t, y) + f(t+h, z))
        J = lambda z: np.eye(len(y)) - 0.5*h*Jfy(t+h, z)
```

```
        y = newton_step(F, J, y_guess)
        t = t + h
        T.append(t); Y.append(y.copy())
    return np.array(T), np.array(Y)
```

MATLAB（Heun 简版）

Listing 4.5: Heun (MATLAB)

```
function [T,Y] = heun(f,t0,y0,h,N)
t=t0; y=y0(:).';
T=t; Y=y;
for k=1:N
    k1 = f(t,y);
    k2 = f(t+h, y + h*k1);
    y  = y + 0.5*h*(k1 + k2);
    t  = t + h;
    T(end+1)=t; Y(end+1,:)=y;
end
end
```

4.2.2 经典四阶 Runge–Kutta（RK4）

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + \tfrac{h}{2},\, y_n + \tfrac{h}{2}k_1), \\ k_3 &= f(t_n + \tfrac{h}{2},\, y_n + \tfrac{h}{2}k_2), \\ k_4 &= f(t_n + h,\, y_n + h\,k_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}}$$

RK4 局部截断误差 $O(h^5)$，全局误差 $O(h^4)$，是最常用的通用显式方法。

Python（RK4）

Listing 4.6: RK4

```
def rk4(f, t0, y0, h, N):
    t=t0; y=np.array(y0,float)
    T,Y=[t],[y.copy()]
    for _ in range(N):
        k1 = f(t, y)
```

```
        k2 = f(t + 0.5*h, y + 0.5*h*k1)
        k3 = f(t + 0.5*h, y + 0.5*h*k2)
        k4 = f(t + h,     y + h*k3)
        y  = y + (h/6.0)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)
        t  = t + h
        T.append(t); Y.append(y.copy())
    return np.array(T), np.array(Y)
```

理论要点（简述证明思路）

- **一致性与阶**：用多点 Taylor 展开匹配到 h^4 级别，或用 Butcher 树与代数条件验证四阶。
- **稳定性**：对 $y' = \lambda y$，RK4 稳定函数 $R(z)$ 为其四阶 [Padé/Taylor] 近似，可数值描绘稳定域（非 A-稳定）。

4.3 误差、稳定性与刚性

4.3.1 局部截断误差与全局误差

记真解 $y(t)$、一步法 $\Phi_h(t_n, y_n)$。定义

$$\tau_{n+1} := \frac{y(t_{n+1}) - \Phi_h(t_n, y(t_n))}{h}.$$

若 $\tau_{n+1} = O(h^p)$，称方法 **局部阶** $p+1$；解的**全局误差**一般为 $O(h^p)$。例如：显式/隐式欧拉 $p = 1$，Heun/梯形 $p = 2$，RK4 $p = 4$。

4.3.2 数值稳定性（线性稳定性分析）

测试方程 $y' = \lambda y$, 写出方法的稳定函数 $R(z)$。若对给定 $z = h\lambda$ 满足 $|R(z)| < 1$，则数值解在该步长下衰减。不同方法的稳定域决定了可用步长与可靠性。

- 显式欧拉：$R = 1 + z$，稳定域为单位圆左侧，刚性问题往往需要极小 h。
- 后向欧拉：$R = 1/(1 - z)$，**A-稳定、L-稳定**。
- 梯形法：$R = (1 + \frac{z}{2})/(1 - \frac{z}{2})$，**A-稳定**但非 L-稳定。

4.3.3 刚性方程与隐式方法

直观定义：如果为了稳定性而被迫取极小步长（远小于解的平滑尺度），则问题是**刚性的**。典型线性刚性模型：

$$y' = \lambda y, \quad \Re\lambda \ll 0.$$

显式法需 $h \ll -2/\Re\lambda$ 才稳定；隐式 A-稳定方法（如后向欧拉、BDF）可用较大步长安全推进。
严格刻画可用特征时间尺度分离或基于稳定区判据；但在实践中，刚性的识别往往通过数值行为（显式法爆炸/极小步长）来判断。

4.4 方法选择与适用场景（实战建议）

- **平滑、非刚性**：优先 RK4（高效、通用）；或 Heun（较快且二阶）。
- **有耗散/稳定性敏感**：梯形或后向欧拉，尤其当 $\Re\lambda \ll 0$。
- **强刚性**：隐式多步（BDF）、后向差分族，或使用成熟库（MATLAB `ode15s`/`ode23s`，Python `solve_ivp` 的 `BDF`/`Radau`）。
- **长期能量守恒（哈密顿系统）**：考虑辛积分法（本章不展开）。

4.5 示例：数值模拟混沌（Lorenz 系统）

我们用 RK4 模拟 Lorenz 系统，展示“初值敏感性”。注意：混沌模拟对步长敏感，**必须**做步长收敛性检查；需要更可靠的 Lyapunov 指数见前章代码。

Listing 4.7: Lorenz RK4 simulation

Python（RK4 模拟与对比两条近初值轨道）

```
import numpy as np

sig, beta, rho = 10.0, 8.0/3.0, 28.0
def F(t, y):
    x, u, v = y
    return np.array([sig*(u - x), x*(rho - v) - u, x*u - beta*v
       ])

from math import sqrt
```

```python
def rk4(f, t0, y0, h, N):
    t=t0; y=np.array(y0,float)
    T=[t]; Y=[y.copy()]
    for _ in range(N):
        k1=f(t,y)
        k2=f(t+0.5*h, y+0.5*h*k1)
        k3=f(t+0.5*h, y+0.5*h*k2)
        k4=f(t+h,     y+h*k3)
        y  = y + (h/6.0)*(k1+2*k2+2*k3+k4)
        t += h
        T.append(t); Y.append(y.copy())
    return np.array(T), np.array(Y)

h=0.01; N=20000
y0  = [1.0, 1.0, 1.0]
y0p = [1.0+1e-6, 1.0, 1.0]
T,Y1 = rk4(F,0.0,y0,h,N)
_,Y2  = rk4(F,0.0,y0p,h,N)
# 可视化：将 Y1[:,0] 与 Y2[:,0] 的差值随时间画半对数图，观察指数
  分离
```

MATLAB（调用内置 RK：ode45 快速体验）

Listing 4.8: Lorenz with ode45

```matlab
sig=10; beta=8/3; rho=28;
F = @(t,y)[sig*(y(2)-y(1));
           y(1)*(rho-y(3))-y(2);
           y(1)*y(2)-beta*y(3)];
[t1,y1] = ode45(F,[0 100],[1;1;1]);
[t2,y2] = ode45(F,[0 100],[1+1e-6;1;1]);
% 画 |y1(:,1)-y2(:,1)| 的半对数图，感受敏感依赖。
```

如何阅读数值结果

- 用不同步长 h 重复模拟，比较宏观几何（轨道形状、穿越次数）是否一致；若差异显著，需缩小步长或改用稳定方法。
- 对“长期准确性”不必执着（混沌会指数分离），关注统计/几何性质（吸引子形状、穿越分布、Lyapunov 指数）。

4.6 本章小结

- 欧拉、Heun、梯形、RK4：从一阶到四阶，显式与隐式各有千秋。
- 误差：LTE $O(h^{p+1})$，GE $O(h^p)$；稳定性域决定“能否用较大步长”。
- 刚性：显式法步长受限；隐式 A-稳定/L-稳定方法在工程上更稳健。
- 混沌数值：*看统计与结构，做步长收敛与稳定性检查。*

习题

1. （编程）**不用任何 ODE 调包函数**，用**显式欧拉**在 Python 或 MATLAB 中求解
$$y' = -10\,y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 2],$$
试 $h = 0.2, 0.05, 0.01$，比较数值解与真解 e^{-10t} 的误差，并讨论稳定性与步长的关系。

2. （调用库）使用 **RK4 或 ode45** 求解
$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$
写成一阶系统后数值求解，并与真解 $\sin t$ 对比误差。

3. （隐式二阶）实现**梯形法**解
$$y' = -50(y - \sin t) + \cos t, \quad y(0) = 0,\ t \in [0, 2],$$
对比 Heun 与梯形的稳定性与误差（提示：此方程带刚性特征）。

4. （混沌模拟）选取一个混沌系统（如 Rössler 系统），用 RK4 或 ode45 模拟两条相近初值轨道，展示敏感依赖；改变步长观察数值效应。

5. （思考题）**Dahlquist 障碍**：*是否存在显式一阶一步法在保持阶数大于 1 的*同时又 *A-稳定？*请查阅资料或基于稳定域直观论证你的观点，并讨论这对“刚性问题选择显式/隐式”的方法论意义。

Chapter 5

综合专题：从自然到金融的 ODE 建模

写在开头的话

本章是全书的综合应用篇。我们将不再单独介绍新的解法或定理，而是把前面学到的工具综合起来，去分析一些现实世界中的模型。我们选择了三个经典案例：

- 物理：**受迫阻尼振子**——描述机械和电路系统的共振与耗散；
- 生物：**Logistic 增长与捕食-被捕食模型**——人口动力学的经典模型；
- 金融：**Black–Scholes 随机微分方程**——现代金融数学的基石，同时是我们第一次接触随机方程。

每个专题都会包含：

1. **理论建模**：为什么这个方程是合理的？是否存在其他模型？不同模型的解释力有什么差异？
2. **数值模拟**：如何用我们前面介绍过的数值方法来模拟？
3. **现象解释**：如何从几何直观、稳定性、定性分析角度来理解解的性质？

5.1 专题一：物理——受迫阻尼振子

建模

考虑一个带有质量 m、阻尼系数 γ、弹性系数 k 的振子，在外部周期力 $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ 作用下：

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t).$$

这是最经典的二阶线性非齐次 ODE。

不同模型的比较：

- 若 $\gamma = 0$（无阻尼），系统会出现**共振**，振幅趋于无穷大，这是理想化模型。
- 若 $\gamma > 0$，共振峰有限，振幅随阻尼减小而增加，更符合现实。
- 若 $F(t)$ 换成方波、脉冲等非光滑信号，则需要用第三章介绍过的**分布理论**处理。

数值模拟

我们可以用 RK4 或梯形法数值求解：

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -\tfrac{\gamma}{m}x_2 - \tfrac{k}{m}x_1 + \tfrac{F_0}{m}\cos(\omega t).$$

（代码略，可复用第 4 章的 RK4 程序。）

现象解释

- 动力系统视角：这是一个二维系统，解的轨道会趋向一个“受迫周期解”。- 稳定性分析：Jacobi 矩阵的实部为负，保证了解不会爆炸。- 物理解释：阻尼削弱共振，外力频率与固有频率的关系决定振幅。

5.2 专题二：生物——Logistic 与捕食-被捕食模型

建模

单种群 Logistic 增长：

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

其中 r 为内禀增长率，K 为环境承载力。相比指数增长模型，Logistic 更合理，因为它考虑了资源有限性。

Lotka–Volterra 捕食-被捕食模型：

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy, \\ \dot{y} = \delta xy - \gamma y, \end{cases}$$

其中 x 为被捕食者，y 为捕食者。

数值模拟

我们用 RK4 数值求解。模拟结果显示：- Logistic 方程会趋向稳定平衡 K； - Lotka–Volterra 系统会出现闭轨道（周期性种群波动）。

现象解释

- Logistic 的平衡点 $N = K$ 是稳定的（Jacobi 矩阵特征值负实部）。- 捕食-被捕食模型的临界点 $(x, y) = (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ 是一个中心点，导致解周期性振荡。- 如果加入阻尼项或环境扰动，周期轨道会变成极限环或消失。

5.3 专题三：金融——Black–Scholes 随机微分方程

建模

金融市场中的股票价格 S_t 常被建模为几何布朗运动：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

其中：

- μ 是预期收益率；
- σ 是波动率；
- W_t 是布朗运动（随机过程）。

这是一个**随机微分方程**（SDE）。

为什么不是普通 ODE？ 因为金融市场价格受无数微小、不可预测的因素影响，必须用随机过程建模。ODE 无法描述这种本质上的随机性。

数值模拟

数值方法：Euler–Maruyama 法（SDE 的欧拉法）。

$$S_{n+1} = S_n + \mu S_n h + \sigma S_n \sqrt{h}\, \xi_n,$$

其中 $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 独立同分布。

（Python 和 MATLAB 实现可与第四章代码类似，只需加入噪声项。）

现象解释

- 理论上，S_t 的解是

$$S_t = S_0 \exp\Big((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\Big),$$

它服从对数正态分布。- 数值模拟能展示出价格的“随机游走”行为。- 金融建模往往存在多种假设（几何布朗运动、跳跃扩散、随机波动率模型），不同模型对市场现象的解释力不同。

小结

通过这三个专题，我们看到了 ODE 及其推广在不同学科中的威力：

- **物理模型**展示了线性系统在外力作用下的稳定性与共振；
- **生物模型**展示了非线性系统的平衡与周期行为；
- **金融模型**引入了随机微分方程，把不确定性纳入建模框架。

这三类模型的对比也说明：数学建模并不是唯一的，而是根据问题和解释需求选择合适的模型。

本章习题与开放思考

A. 物理专题：受迫阻尼振子

考虑

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0\cos(\omega t), \qquad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{\gamma}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{F_0}{m}\cos(\omega t).$$

1. （扫频/共振曲线）固定 $m = 1, k = 1, \gamma \in \{0, 0.1, 0.5\}$，令 $F_0 = 1$，用 RK4 数值积分，不同 ω 下稳态振幅 $A(\omega)$ 的估计：丢弃初 transient 后对 x_1 做峰峰值估算，画 $A(\omega)$ 曲线。对比无阻尼与有阻尼的共振峰位置与峰值。

2. （数值与理论比对）推导线性系统稳态特解的幅相公式，并与数值的 $A(\omega)$、相位差比较，讨论误差来源（步长、离散相位偏移）。

3. （能量耗散）定义能量 $E = \frac{1}{2}mx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$，计算一周期内平均输入功与耗散功，并讨论与稳态时能量平衡的关系。数值上用梯形法积分能量流，比较显式/隐式方法在能量守恒（耗散）上的差异。

B. 生物专题：Logistic 与捕食-被捕食

模型一（Logistic）：

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

模型二（Lotka–Volterra）：

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy, \qquad \dot{y} = \delta xy - \gamma y.$$

1. （参数同定）给定合成数据 $N(t_i)$，用最小二乘拟合 (r, K)。先用欧拉法生成“观测”，再反过来拟合；讨论噪声与步长对估计的影响。

2. （相位平面与稳定性）对 Lotka–Volterra，画若干初值的相图；线性化原点与非平凡平衡点 $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$，判断其类型（鞍/中心/吸引子），并数值印证（轨道是否闭合）。

3. （功能反应修正与分岔）用 Holling-II 修正：$\dot{y} = \delta \frac{x}{1+ax} y - \gamma y$。数值改变参数 a，观察是否出现极限环的产生/消失；用 Poincaré 截面估计周期并作参数-周期图，联系 Hopf 分岔直觉。

C. 金融专题：几何布朗运动与欧式期权

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t, \qquad S_{n+1} = S_n + \mu S_n h + \sigma S_n \sqrt{h}\, \xi_n,\ \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1).$$

1. （强/弱收敛）用 Euler–Maruyama 法模拟 S_t，比较强误差 $\mathbb{E}|S_T - \widehat{S}_T|$ 与弱误差 $|\mathbb{E}[\phi(S_T)] - \mathbb{E}[\phi(\widehat{S}_T)]|$（取 $\phi(x) = x$ 或 $\phi(x) = \mathbf{1}_{x>K}$），用对数-对数图估计收敛阶。

2. （蒙特卡洛定价）估计欧式看涨 $C = \mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+]$；与 Black–Scholes 闭式公式对比；分析样本方差、方差缩减（对偶变量/控制变量）效果。

3. （参数敏感性）数值估计 Delta、Vega（用微小扰动/共路模拟）；讨论“连续依赖性”与数值噪声之间的取舍。

D. 综合数值实践（可选）

选取你在前章实现的任意两种方法（如 Heun 与梯形），在同一问题上对比：

- 误差-步长曲线（估计阶数）；

- 稳定域限制（测试方程 $y' = \lambda y$ 数值实验）；
- 刚性问题上的效率（同一误差阈值下的步长/CPU 时间）。

E. 终极思考题（世界级未解之谜）：Hilbert 第十六问题（二）——二维多项式向量场的极限环

问题背景（简述）：在平面多项式向量场

$$\dot{x} = P(x, y), \qquad \dot{y} = Q(x, y),$$

中，给定多项式总次数 n，关于**极限环**的数目与排列（位置、互相嵌套等）有无统一上界？哪怕仅 $n = 2$（**二次系统**），极限环最多有多少个、如何分布——依然是长期开放问题。这就是 Hilbert 第十六问题第二部分的核心。它属于常微分方程/动力系统的范畴（二维 ODE），兼具**数值困难**与**深度理论难度**。

你可以做什么（数值方向）

- 选取一个具体二次向量场族（如 Bautin 家族），用 Poincaré 截面 + 回归映射数值找闭轨道；做参数连续延拓（续弧法）跟踪极限环的产生/湮灭。
- 计算 Floquet 乘子判稳定性；记录分岔类型（Hopf、鞍结环等）。
- 系统性扫描参数平面，绘制“极限环计数图”（注意：数值伪闭轨道与截面漂移的陷阱，需要步长/截面收敛检验）。

你可以思考什么（理论方向）

- 试用 Bendixson–Dulac 判据排除某些区域的闭轨道；局部用中心流形、归一化形判断 Hopf 的阶与方向。
- 探索 Bautin 情形（多重焦点）下的代数条件与极限环多重分岔；尝试把“可出现的极限环数目”约束为有限。
- 反思“为何二维已如此艰难”：极限集结构在二维虽受 Poincaré–Bendixson 限制，但计数/排列与代数次数的耦合极其复杂。

重要提示　这是一个真正的**开放问题**：目前没有普适答案。它跨越代数几何、微分方程与动力系统理论；数值上则面临“接近同宿/异宿连接”时的严重刚性与条件数问题。你的数值探索与局部理论分析，都是通往前沿研究的真实第一步。

后记

一、写作的缘起与个人动机

当我提笔写下这本《常微分方程与动力系统入门笔记》的第一行时，我清楚地知道，这不会是一部“标准教材”，更不是一本“完整的研究专著”。它更像是一份学习旅程的日记，一份记录我在数学学习道路上的思考、疑问、困惑与喜悦的手稿。

常微分方程（ODE）与动力系统是我第一次尝试写作系统性数学笔记的主题，并非偶然。从牛顿的运动定律到现代混沌理论，从单摆的振动到金融市场的波动，ODE 与动力系统无处不在。选择它作为开端，是出于我一种柏拉图式的信念：世界背后必然存在某种“冥冥之中的法则”，而微分方程正是我们触摸这头“大象”的方式之一。

这本书既是我作为学习者的一份总结，也是我作为写作者的一次尝试。我不企图在其中建立完整的体系，而是想通过自己的语言，把抽象的公式和定理转化为可感的图景，把读者从初学的困惑带向思考的兴奋。

二、本书的知识线索与核心思想

回顾全书，我们大体经历了五个部分的旅程：

1. 常微分方程的基础

第一章里，我们学习了 ODE 的定义与分类，理解了“常”与“偏”的区别，区分了一阶、二阶与高阶方程，讨论了线性与非线性的边界。在存在唯一性定理里，我们第一次体会到数学的严谨性：解不仅仅“可能”存在，而是被逻辑所保障。

2. 一阶与高阶方程的解法

在第二章和第三章里，我们逐步掌握了解法——可分离变量、积分因子、一阶线性方程、二阶常系数方程、以及更高阶的系统。解的形式让人联想到代数方程的

根，而解空间的概念则让人自然地过渡到线性代数的类比。我们也顺势引入了特殊函数，领略到“解”本身也可能成为新的研究对象。

3. 动力系统的视角

从牛顿力学到相位平面分析，我们开始意识到：ODE 并不仅仅是“解的公式”，它更是“几何的流”。临界点、稳定性、鞍点、吸引子、中心点、李亚普诺夫函数——这些术语为我们提供了一个新的视角：不关心解的细节，而关心整体的结构。

4. 非线性与混沌

在极限环、分岔、混沌中，我们第一次看到了确定性与不可预测性并存的奇妙场景。Floquet 理论与 Poincaré–Bendixson 定理让我们明白，数学可以为复杂的现象提供强有力的框架。而李亚普诺夫指数则让我们能“量化混沌”，把抽象的敏感依赖具体化为可计算的数值。

5. 分布、定性与数值

在第三、第四章，我们走向了更广阔的领域：分布理论让我们能处理冲击与不连续，定性方法让我们能保证解的存在与依赖性，数值方法让我们把理论转化为计算机上的曲线。刚性方程、误差分析、稳定性域——这些既是理论问题，也是实践难题。

6. 应用与建模

最后，我们尝试用 ODE 去触摸真实世界：物理中的受迫振子，生物中的种群动力学，金融中的几何布朗运动。这些模型提醒我们：数学既是抽象的逻辑体系，也是解释世界的语言。

三、数学与哲学的交织

数学从来不是孤立的公式游戏。ODE 背后有着深刻的哲学含义：

- **决定论与不确定性**：牛顿的方程似乎宣告世界完全可预测，但混沌理论告诉我们：确定性的规则并不排斥不可预测的结果。
- **模型与现实**：Logistic 方程、Lotka–Volterra 模型、Black–Scholes 方程，它们都不是世界本身，而是我们对世界的投影。正如盲人摸象，我们触摸到的只是局部。

- **结构与语言**：ODE 既可以看作函数的方程，也可以看作流的几何结构；既可以用解析语言描述，也可以用拓扑与数值语言诠释。数学本身就是一种多重视角的哲学。

四、未来的展望与未解的问题

常微分方程只是动力系统理论的一扇门。走过这扇门，我们会看到更广阔的世界：

1. 偏微分方程（PDE）

ODE 描述的是单条轨迹，而 PDE 描述的是“场”。从热传导方程到 Navier–Stokes 方程，PDE 是现代数学与物理的核心。

2. 随机微分方程（SDE）

我们在金融建模中初步见到了它。未来，SDE 在物理中的热噪声、生物中的基因表达、工程中的不确定系统，都会占据越来越重要的位置。

3. 分岔与混沌

关于非线性系统的分岔图谱仍然在不断被拓展。三维以上系统中的混沌结构、分岔链条、同宿与异宿轨道，都是现代研究的前沿。

4. 未解之谜

Hilbert 第十六问题、Navier–Stokes 方程的光滑性与存在性、动力系统中的普适常数……这些都是世界级的难题。它们提醒我们：数学并非一个已完成的体系，而是一个正在生长的生命。

五、写给读者的话

亲爱的读者，无论你是数学系的学生，还是工程、物理、经济、文学的爱好者，我希望这本书能成为你与数学的一次深度对话。

数学并不是冷冰冰的符号，而是一种探索世界的方式。它有时严谨得近乎苛刻，有时又浪漫得近乎诗意。写作这本书的过程，让我更加坚信：学习数学不仅是为了得到答案，更是为了学会提问，学会思考，学会怀疑，也学会相信。

我并不奢望这本书能给你所有的答案，但我希望它能成为你走向更深数学旅程的一个起点。就像牛顿说他自己“只是站在海边玩耍，捡到几颗光滑的鹅卵石”，而真正的海洋还在我们面前。

愿你在数学的海洋中，既能感受到逻辑的严谨，也能体会到思想的自由；既能触摸到公式的精确，也能感受到哲学的深邃。

最后，让我们用希尔伯特的名言来作为结尾，也作为这本书的寄语：

我们必将知道，我们终将知道。