数学分析笔记

沈翰

目录

序言

记号与约定

本书默认使用经典逻辑与集合论作为基础。本节对全书中最常用的记号与约定做统一说明。

数集与基本对象

- 自然数集、整数、有理数、实数、复数分别记为

  $$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}.$$

  除非另有说明，

  $$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

  表示正整数集合；记

  $$\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$$

  为非负整数集合。

- 若无特别说明，本书中

  $$x, y, z, t, s, a, b, c, \dots$$

  表示实数；$n, m, k, \ell, i, j, \dots$ 表示整数（通常是自然数或非负整数），具体含义由上下文决定。

- $|A|$ 表示集合 A 的势（元素个数，若有限），或按上下文表示长度/测度时会特别说明。

区间、集合与运算

- 对 $a, b \in \mathbb{R}$，区间记号采用如下约定：

  $$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\},$$

  $$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}.$$

对 $a \in \mathbb{R}$，$r > 0$，开区间/邻域记为

$$(a-r, a+r) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}.$$

在多维情形下，常用开球记号

$$B(x,r) := \{y : \|y-x\| < r\}.$$

- 集合运算采用标准记号：

$$A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ A \subset B,\ A \subseteq B.$$

$A \subset B$ 表示 A 是 B 的真子集；$A \subseteq B$ 表示 A 是 B 的子集（可能相等）。

- 若论域 X 已经明确，则 A^c 表示 X 中相对于 A 的补集，即 $A^c := X \setminus A$。

函数、序列与向量

- 函数 f 从集合 X 到集合 Y 记为

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x).$$

当需要强调定义域与值域时，会明确写出 X, Y。若无特别说明，默认函数在 $\mathbb{R}$ 或其子集上定义并取值于 $\mathbb{R}$。

- 两个函数 $f : X \to Y$ 与 $g : Y \to Z$ 的复合记为

$$g \circ f : X \to Z, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

X 上的恒等映射记为 id_X。

- 序列通常记为 (x_n) 或 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 x_n 是第 n 项。必要时会写明索引集合，例如 $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$。

- 向量通常用粗体或带箭头记，视排版方便在全书中统一采用粗体：

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

向量的欧氏范数记为

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

绝对值、范数与内积

- 对实数 x，绝对值记为 $|x|$。对复数 $z \in \mathbb{C}$，$|z|$ 表示其模。

- 在赋范线性空间中，范数一律记为 $\|\cdot\|$，具体是哪一种范数由上下文说明。

- 在（实或复）内积空间中，内积记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。

上界、下界与极限相关记号

- 对 $A \subset \mathbb{R}$，若 A 有上界，则其上确界记为 $\sup A$，下确界记为 $\inf A$。
- 对数列 (x_n)，若极限存在，则记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L.$$

上极限、下极限记为

$$\limsup_{n\to\infty} x_n, \quad \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

对函数 f，当 $x \to a$ 时的极限记为 $\lim_{x\to a} f(x)$，左右极限记为

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \quad \lim_{x\to a^+} f(x).$$

- 常用近似关系记号（在需要时引入）：

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to a)$$

表示 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$。

常数约定

- 记号 $C, C_1, C_2, \ldots$ 通常表示与自变量无关的常数，其具体值可以在不同出现处改变。必要时会注明“仅依赖于某些参数”。
- 记号 $O(\cdot)$、$o(\cdot)$ 在渐近估计中采用标准含义：

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to a)$$

表示存在常数 $M > 0$ 及邻域，使得 $|f(x)| \le M|g(x)|$；而

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a)$$

表示 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$。

逻辑符号与量词约定

本书在需要显式书写逻辑结构（特别是极限、连续、上确界等定义）时，采用如下符号：

- 命题用大写字母 $P, Q, R, \ldots$ 表示。
- 基本逻辑联结词：

$$\neg P \text{ (非}P\text{)}, \quad P \wedge Q \text{ (}P\text{ 且}Q\text{)}, \quad P \vee Q \text{ (}P\text{ 或}Q\text{)},$$

$$P \Rightarrow Q \text{ (若}P\text{ 则}Q\text{)}, \quad P \Leftrightarrow Q \text{ (}P\text{ 当且仅当}Q\text{)}.$$

- 量词采用标准记号：

$$\forall x \in X,\ \varphi(x) \quad (\text{对任意}x \in X,\ \varphi(x)\ \text{成立}),$$

$$\exists x \in X,\ \varphi(x) \quad (\text{存在}x \in X\ \text{使得}\varphi(x)\ \text{成立}).$$

- 否定量词时，采用经典逻辑对偶关系：

$$\neg(\forall x \in X,\ \varphi(x)) \ \equiv\ \exists x \in X,\ \neg\varphi(x),$$

$$\neg(\exists x \in X,\ \varphi(x)) \ \equiv\ \forall x \in X,\ \neg\varphi(x).$$

基础逻辑与集合论背景

本书默认采用经典一阶逻辑，即诸如

$$\neg\neg P \equiv P, \qquad \neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$$

等常见逻辑等价始终成立。极限、连续等定义中的

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ \ldots$$

都在这一逻辑体系下理解。

在集合论层面，我们可以认为是在通常的 ZFC （Zermelo–Fraenkel 集合论加选择公理）背景下工作。本书只涉及实数、欧氏空间及常见函数空间等初等对象，不会触及集合论的深层问题。读者可以放心地将“集合”理解为日常数学中的集合，而不必关心具体公理系统的细节。

第一部分

一元实分析：极限、连续与微积分

第一章　预备知识：逻辑、集合与实数结构

1.1　命题逻辑与常用证明方法

1.1.1　命题、量词与逻辑联结词

本节我们回顾数学分析中最基础的逻辑语言：命题、量词、逻辑联结词。以后所有诸如“极限、连续、上确界、完备性”之类的定义，都是用这一套语言写出来的。

命题与命题函数

定义 1 (命题). *在本书中，命题指一切可以被判断为“真”或“假”的陈述句，而且既不会“又真又假”，也不会“真假不明”。*

*当一个表达式中还含有未说明取值范围的变量时，我们通常称之为*命题函数*而不是命题本身。*

例 1. *下面是一些典型的命题：*

1. $2+2=4$（真命题）；
2. $1+1=3$（假命题）；
3. “存在无穷多个素数”（真命题）；
4. “对任意实数 x，有 $x^2 \geq 0$”（真命题）。

下面这些不是命题：

1. “请把门关上。”（命令句，没有真假）；
2. “你叫什么名字？”（疑问句，没有真假）；
3. “这个数很大。”（若没有说明“这个数”是哪个，语义不清）；
4. “$x > 0$”，当 x 的含义和取值范围尚未说明时，它只是一个带自由变元的命题函数，而不是一个有确定真假值的命题。

在实际书写中，我们常用大写字母 $P, Q, R, \ldots$ 记一个抽象命题。例如：

$$P:\text{“函数 } f \text{ 在点 } a \text{ 处连续”}, \qquad Q:\text{“数列 } (x_n) \text{ 收敛”}.$$

逻辑联结词

有了命题之后，我们可以用逻辑联结词把简单命题组合成更复杂的命题。

定义 2 (逻辑联结词)**.** 设 P, Q 为命题，我们使用以下常见联结词：

1. **否定**：$\neg P$，读作“非 P”。当 P 为真时 $\neg P$ 为假；反之亦然。
2. **合取**：$P \wedge Q$，读作“P 且 Q”。仅当 P, Q 都为真时，$P \wedge Q$ 为真。
3. **析取**：$P \vee Q$，读作“P 或 Q”。只要 P, Q 至少一个为真，则 $P \vee Q$ 为真；只有 P, Q 都假时为假。
4. **蕴含**：$P \Rightarrow Q$，读作“若 P，则 Q”或“P 蕴含 Q”。其真值约定为：

   $$P \Rightarrow Q \text{ 仅在 } P \text{ 为真且 } Q \text{ 为假时为假，在其余三种情况均为真。}$$
5. **当且仅当**：$P \Leftrightarrow Q$，读作“P 当且仅当 Q”或“P 等价于 Q”。它定义为

   $$P \Leftrightarrow Q \;\equiv\; (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

例 2. 设 $x \in \mathbb{R}$，考虑命题

$$P:\; x > 1, \qquad Q:\; x^2 > 1.$$

则

- $P \Rightarrow Q$ 表示“若 $x > 1$，则 $x^2 > 1$”，这是一个真命题；
- $\neg P$ 表示“$x \leq 1$”，$\neg Q$ 表示“$x^2 \leq 1$”。

量词

在数学分析中，我们频繁使用“对所有⋯⋯”和“存在⋯⋯”这样的表达，它们通过量词形式化。

定义 3 (全称量词与存在量词)**.** 设 X 为某个集合，$\varphi(x)$ 是关于 $x \in X$ 的命题函数。

1. **全称量词**：命题

   $$\forall x \in X,\; \varphi(x)$$

   读作“对任意 $x \in X$，$\varphi(x)$ 成立”。当且仅当 X 中每个元素代入 φ 后都为真时，该命题为真。

2. **存在量词**：命题

$$\exists x \in X,\ \varphi(x)$$

读作“存在 $x \in X$ 使得 $\varphi(x)$ 成立”。只要 X 中至少有一个元素代入 φ 后为真，该命题就为真。

例 3. 1. “对任意实数 x，有 $x^2 \geq 0$” 写作

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0.$$

2. “存在实数 x，满足 $x^2 = 3$ 且 $x > 0$” 写作

$$\exists x \in \mathbb{R},\ (x^2 = 3 \wedge x > 0).$$

3. “存在无穷多个素数” 常用等价形式表示为

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists \text{素数} p > N.$$

量词的否定与 De Morgan 律

当我们做反证法或构造反例时，经常需要否定一个带量词的大命题，因此需要熟练掌握量词和逻辑联结词的否定规则。

[De Morgan 律与量词的否定] 对任意命题 P, Q，有

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q),$$
$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

对任意命题 P, Q，蕴含的否定为

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q.$$

对任意命题函数 $\varphi(x)$，量词的否定为

$$\neg(\forall x,\ \varphi(x)) \equiv \exists x,\ \neg\varphi(x),$$
$$\neg(\exists x,\ \varphi(x)) \equiv \forall x,\ \neg\varphi(x).$$

例 4 (典型 ε–δ 结构的否定)**.** 考虑如下命题：

$$A: \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \big(|x| < \delta \Rightarrow |x| < \varepsilon\big).$$

它的否定 $\neg A$ 可以逐层改写：

$$\begin{aligned}
\neg A &\equiv \exists \varepsilon_0 > 0,\ \neg\big(\exists \delta > 0,\ \forall x,\ (|x| < \delta \Rightarrow |x| < \varepsilon_0)\big) \\
&\equiv \exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \neg\big(\forall x,\ (|x| < \delta \Rightarrow |x| < \varepsilon_0)\big) \\
&\equiv \exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ \neg\big(|x| < \delta \Rightarrow |x| < \varepsilon_0\big) \\
&\equiv \exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ \big(|x| < \delta \wedge |x| \geq \varepsilon_0\big).
\end{aligned}$$

最后一句的直观含义是：存在一个固定的 $\varepsilon_0 > 0$，无论你选多小的 $\delta > 0$，总能找到一个 x，使得 $|x|$ 虽然小于 δ，却始终不小于 ε_0。

习题与学习记录

下面记录一次实际学习过程中的练习、回答以及纠正，作为读者思路的范例。

判断下列句子是否为命题，并说明理由：

1. $2+2=4$；
2. “请把门关上。”；
3. “存在无穷多个素数。”；
4. $x>0$（此处未说明 x 的含义和取值范围）。

[某次学习的回答与点评] 一位读者的回答如下：

1. 是命题；
2. 不是命题；
3. 是命题；
4. 不是命题，因为 x 没有申明，即 x 现在不存在于这个模型空间里。

前三项判断都是正确的。第四项的思路也十分严谨：严格的数理逻辑观点下，$x>0$ 在未指定 x 的论域时，只是一个带自由变元的公式，还不是有确定真假值的“封闭句子”，因此不视为命题本身，而称为*命题函数*。

用逻辑符号语言改写下列陈述：

1. “对任意实数 x，若 $x>1$，则 $x^2>1$。”；
2. “存在实数 x，使得 $x^2=3$ 且 $x>0$。”。

[某次学习的回答与纠正] 读者的初始回答大意为：

1. 设 $P(x)$ 表示“$x>1$”，$Q(x)$ 表示“$x^2>1$”，则
$$\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)\Rightarrow Q(x),$$
即 $\forall x\in\mathbb{R}, (x>1\Rightarrow x^2>1)$。这完全正确。
2. 读者最初尝试用“若，则”的结构来写第二条，认为只是把前面的全称量词改成存在量词、把 P,Q 改换一下即可。

但第二条的原句是“存在实数 x，使得 $x^2=3$ 且 $x>0$”，这里的逻辑结构是“合取”而不是“蕴含”。因此正确的形式是
$$\exists x\in\mathbb{R},\ (x^2=3\wedge x>0).$$

这也展示了一个小坑：自然语言中的“使得”“满足”往往对应的是“且”，而不是“若……则……”。在翻译时需要格外留意语义。

设

$$A: \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \big(|x| < \delta \Rightarrow |x| < \varepsilon\big).$$

写出 $\neg A$ 的等价形式（不含蕴含号 $\Rightarrow$），并尽量用自然语言解释。

[某次学习的思考与修正] 读者的关键观察是：

- 否定一个带多层量词的命题时，可以“从左往右”地依次将全称量词改为存在量词、存在量词改为全称量词（这一点完全正确），这就是量词的对偶；
- 难点在于如何否定蕴含 $P \Rightarrow Q$。读者最初的猜测是“否定算子作用在蕴含上可以理解为对两端命题分别取补”，即类似“把 $<$ 变成 $\geq$”之类，但没有完全意识到还需要改变逻辑结构。

实际上，如前所述，

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q,$$

而不是 $\neg P \Rightarrow \neg Q$。直观理解为：“否定‘若 P 则 Q’就是出现了‘P 真但 Q 不真’的打脸情况”。

因此对 A 逐层否定可得到：

$$\neg A \equiv \exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ \big(|x| < \delta \wedge |x| \geq \varepsilon_0\big),$$

这与前面的例子完全一致。自然语言可以表述为：

> 存在一个正数 $\varepsilon_0 > 0$，使得无论你如何选取 $\delta > 0$，总可以找到一个实数 x，
> 它一方面满足 $|x| < \delta$，另一方面却始终不满足 $|x| < \varepsilon_0$。

读者在这个过程中正确地把握了“量词互换”的思路，而在“蕴含的否定”处一开始猜错，这恰好暴露了一个典型易错点：否定一个复杂命题，除了改量词之外，还必须对内部的逻辑联结词（如 $\Rightarrow$）做局部的精确处理。

拓展：从布尔函数与生成元的视角看逻辑联结词

下面记录一段有启发性的学习想法，它将命题逻辑与代数、布尔函数、甚至“生成元”的概念联系了起来。

[矩阵–列向量的真值表视角] 设有 n 个命题变量 $P_1, \ldots, P_n$。所有可能的真假组合共有 2^n 种，可以排成一个 $2^n \times n$ 的“真假矩阵”

$$M = \begin{pmatrix} T & T & \cdots & T \\ T & T & \cdots & F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F & F & \cdots & F \end{pmatrix}.$$

每一个具体的逻辑公式 $F(P_1,\ldots,P_n)$ 都会在这 2^n 种组合中的每一行给出一个真值，于是对应一个 2^n 维列向量

$$\vec{v}_F=\begin{pmatrix}F(T,T,\ldots,T)\\F(T,T,\ldots,F)\\\vdots\\F(F,F,\ldots,F)\end{pmatrix}\in\{T,F\}^{2^n}.$$

从这个角度看，一个逻辑公式本质上就是一个布尔函数

$$F:\ \{T,F\}^n\longrightarrow\{T,F\},$$

而所有可能的真值列向量构成了一个 2^{2^n} 个元素的集合 $\{T,F\}^{2^n}$。

[“最小生成元”与功能完备性] 读者提出了如下类比：

- 在群论中，一个元素 g 若能通过幂 g^n（以及必要时的逆元）生成整个群，则称 g 为生成元；
- 在命题逻辑中，若一组联结词（例如 $\neg,\wedge,\vee$）足以写出任意布尔函数的真值表，我们称这组联结词是*功能完备的*；
- 于是自然问：是否存在一个“打包的单一算符”（例如 NAND），类似群论中的生成元，只靠它一个就能“遍历整个布尔函数的空间”？以及如何判定一个单一联结词何时具有这样的功能完备性？

经典结果表明：

1. 在命题逻辑层面，只要有否定 $\neg$ 与合取 $\wedge$，就能够定义出析取 $\vee$、蕴含 $\Rightarrow$、当且仅当 $\Leftrightarrow$ 等所有常用联结词，并且对任意真值表都能构造出与之对应的公式。换言之，集合 $\{\neg,\wedge\}$ 就已经是功能完备的。
2. 更极端地，单一的 Sheffer 划线（NAND）或 NOR 箭头本身就是功能完备的：只用 NAND 就能写出 $\neg P$ 和 $P\wedge Q$，从而间接张成所有布尔函数。

从“矩阵 $\to$ 列向量”的视角来看，这意味着：对每一个 n，对每一个列向量

$$\vec{v}\in\{T,F\}^{2^n},$$

都存在一个仅用 $\neg,\wedge$（或者仅用 NAND）构成的公式 $F(P_1,\ldots,P_n)$，使得 $\vec{v}_F=\vec{v}$。

这一现象与线性代数/群论中的“基/生成元”十分相似：我们在布尔函数的世界里选取一组极其简单的“生成元”（例如 NAND），却可以通过组合它们获得整个复杂的布尔结构。

[量词的“生成”与对偶] 在一阶逻辑中，量词 $\forall$ 与 $\exists$ 也存在类似的“对偶生成”关系。在经典逻辑框架下，有

$$\exists x\, \varphi(x) \;\equiv\; \neg\forall x\, \neg\varphi(x), \qquad \forall x\, \varphi(x) \;\equiv\; \neg\exists x\, \neg\varphi(x).$$

因此，在“原始符号”的选择上，我们可以只选取

$$\{\neg, \wedge, \forall\}$$

作为一套极简“基底”，其余诸如 $\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \exists$ 等全部视为方便书写的派生符号。这与读者提出的“用最小的逻辑联结词和量词去张成整个逻辑语言”的想法完全一致。

1.1.2 证明方法：直接证明、反证法与反例

在数学分析中，我们最常遇到的命题形式是

$$\forall x \in X,\ [P(x) \Rightarrow Q(x)],$$

以及各种“对所有⋯⋯存在⋯⋯”的结构。本节介绍三种基本的证明/反驳方式：

- 直接证明（direct proof）；
- 反证法（proof by contradiction）及其相关的逆否命题（contrapositive）方法；
- 用反例（counterexample）否定一条“对所有⋯⋯”的命题。

直接证明

定义 4 (直接证明)**.** 设命题为

$$\forall x \in X,\ [P(x) \Rightarrow Q(x)].$$

直接证明的基本思路是：从任意但固定的 $x \in X$ 出发，假设 $P(x)$ 成立，在这一前提下通过推理和计算推出 $Q(x)$ 成立。由于 x 是任意的，故全称命题成立。

例 5. 证明：对任意实数 x，若 $x > 0$，则 $x^2 + 1 > 0$，即

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0).$$

证明. 令 $x \in \mathbb{R}$，并假设 $x > 0$。由实数的基本性质，$x^2 \geq 0$，于是

$$x^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 > 0.$$

因此在 $x > 0$ 的前提下有 $x^2 + 1 > 0$。由于 x 任意，命题对所有实数 x 成立。 □

例 6. 证明：对任意整数 n，若 n 为奇数，则 n^2 为奇数。

等价地，

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (n \text{ 为奇} \Rightarrow n^2 \text{ 为奇}).$$

证明. 令 $n \in \mathbb{Z}$，并假设 n 为奇数。则存在整数 k，使

$$n = 2k + 1.$$

于是

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

记 $m := 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$，则 $n^2 = 2m + 1$，故 n^2 也是奇数。命题得证。 □

反证法与逆否命题

定义 5 (反证法)**.** 要证明某个命题 P，反证法的思路是：假设它的否定 $\neg P$ 为真，在这一假设基础上推理，若能导出矛盾（例如 $0 = 1$、或与已知结论相矛盾），则说明 $\neg P$ 不可能为真，从而 P 必须为真。

在 1.1.1 中我们已经看到

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q.$$

因此要否定一个“若 P 则 Q”的命题，就是假设出现了“P 真且 Q 不真”的情形。反证法往往与如下概念一起使用：

定义 6 (逆否命题)**.** 命题 $P \Rightarrow Q$ 的逆否命题是

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

在经典逻辑中，两者等价：

$$(P \Rightarrow Q) \ \Leftrightarrow\ (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

因此证明 $P \Rightarrow Q$ 时，可以选择证明其逆否命题 $\neg Q \Rightarrow \neg P$。

例 7. 证明：对任意整数 n，若 n^2 为奇数，则 n 为奇数，即

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (n^2 \text{ 为奇} \Rightarrow n \text{ 为奇}).$$

我们给出两种常见证明视角。

方法一：用反证法

证明. 用反证法。假设存在整数 n，使得 n^2 为奇数但 n 为偶数。“n 为偶”意味着存在整数 k，使 $n = 2k$。于是

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

从而 n^2 为偶数。这与“n^2 为奇数”的假设矛盾。故假设不成立，原命题必为真。 □

方法二：证明逆否命题

证明. 原命题的逆否命题是：

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (n \text{ 为偶} \Rightarrow n^2 \text{ 为偶}).$$

我们直接证明这一命题。令 $n \in \mathbb{Z}$，并假设 n 为偶数，则存在整数 k，使

$$n = 2k.$$

于是

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

故 n^2 为偶数。由逆否命题与原命题在经典逻辑中的等价性，原命题得证。 □

[学习记录与思路] 在实际学习过程中，有读者最先写出的正是"若 n 为偶，则 n^2 为偶"的证明。虽然这与题目原陈述不完全一致，但实际上恰好是原命题的逆否命题，因此在逻辑上已经足以证明原命题。这说明：在很多情形下，直接考虑"逆否命题"往往比硬攻"正面命题"更自然、更容易运算。

反例：如何否定一个"对所有"的命题

定义 7 (反例). 设命题为

$$\forall x \in X,\ P(x).$$

若存在某个具体的 $x_0 \in X$，使得 $P(x_0)$ 不成立，则称 x_0 为该命题的一个反例。此时原命题为假。这与 *1.1.1* 中的逻辑等价

$$\neg(\forall x,\ P(x)) \equiv \exists x,\ \neg P(x)$$

是一致的。

例 8. 考虑命题：

$$(*)\quad \text{“对任意实数 } x\text{，有 } x^2 \geq x\text{。”}$$

我们来判断其真假。

解不等式 $x^2 < x$：

$$x^2 - x < 0 \iff x(x-1) < 0.$$

该不等式在 $0 < x < 1$ 时成立。因此只要取任何 $0 < x < 1$，都将得到 $x^2 < x$。例如取 $x = 0.2$，

$$0.2^2 = 0.04 < 0.2,$$

故 $x = 0.2$ 是命题 $(*)$ 的一个反例。于是命题"对任意实数 x，有 $x^2 \geq x$"是错误的。

习题与学习记录

试用本节方法解决下列问题：

1. （直接证明）证明：对任意实数 x，若 $x>0$，则 $x^2+1>0$。
2. （反证法/逆否命题）证明：对任意整数 n，若 n^2 为奇数，则 n 为奇数。
3. （反例）判断下列命题是否正确；若不正确，给出反例：
   (a) 对任意实数 x，有 $x^2 \geq 0$；
   (b) 对任意实数 x，有 $x^2 > x$。

[某次学习的回答与点评] (1) 一位读者的思路是："设实数 $x>0$，则 $x^2+1>1>0$。"

这一证明本质上是正确的，只需将命题的形式化表达与逻辑结构写清楚即可。例如：

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x>0 \Rightarrow x^2+1>0).$$

证明时令 $x \in \mathbb{R}$ 且 $x>0$，由 $x^2 \geq 0$ 得 $x^2+1 \geq 1 > 0$，从而结论成立。读者原文中曾把结论误写成"$x^2>0$"，属于笔误。

(2) 对第二问，读者写出了如下证明：

"设 $\forall n \in \mathbb{Z}$，若 n 为偶，则 $n=2k$ $(k \in \mathbb{Z})$，则 $n^2=4k^2$，从而 n^2 为偶数。"

这个命题是：

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (n \text{ 为偶} \Rightarrow n^2 \text{ 为偶}),$$

它是原命题

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (n^2 \text{ 为奇} \Rightarrow n \text{ 为奇})$$

的*逆否命题*。在经典逻辑下，命题与其逆否命题是等价的（见定义 6），因此读者的证明实际上已经等价地证明了题目要求的结论。

从学习角度看，这是很好的现象：在很多问题中，证明逆否命题比直接证明原命题要自然得多。

(3) 对于第 (3) 问：

1. 命题"对任意实数 x，有 $x^2 \geq 0$"是正确的，这是实数基本性质之一。
2. 命题"对任意实数 x，有 $x^2 > x$"是错误的。读者给出的反例为 $x=0.2$：

   $$0.2^2 = 0.04 < 0.2.$$

   更一般地，任何 $0<x<1$ 都能作为反例。这正是利用了

   $$\neg(\forall x,\ P(x)) \equiv \exists x,\ \neg P(x)$$

   的逻辑等价：给出一个具体反例 x_0，就构造出了"存在 x 使 $P(x)$ 不成立"这一事实。

1.1.3 数学归纳法

本节介绍一个在后续章节中频繁使用的证明工具：数学归纳法。它主要用于证明与自然数 n 有关的一族命题 $P(n)$ 在所有 $n \in \mathbb{N}$ 上都成立。

直观地说，可以把自然数看作一排从 1 开始的"多米诺骨牌"。若我们能证明：

- 第一块骨牌会倒下（即 $P(1)$ 成立）；
- 任意一块骨牌倒下会带动它的下一块倒下（即 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$）；

那么整排骨牌都会倒下，即 $P(n)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。

数学归纳法的标准形式

[数学归纳法，标准形式] 设对每个自然数 $n \in \mathbb{N}$ 有一个命题 $P(n)$。若满足：

1. （基础步骤）$P(1)$ 成立；
2. （归纳步骤）对任意 $n \in \mathbb{N}$，若 $P(n)$ 成立，则 $P(n+1)$ 也成立，即

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1);$$

则可以推出：

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \text{ 成立}.$$

在实际使用时，我们通常不再每次重述定理，而是按如下模式写证明：

- **基础步骤：** 验证 $n = 1$ 时命题成立；
- **归纳步骤：** 假设对某个 n 命题 $P(n)$ 已经成立（称为*归纳假设*），在此基础上证明 $P(n+1)$ 也成立。

例一：奇数求和公式

例 9 (前 n 个奇数之和)**.** *证明：对任意自然数 n，有*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

等价地，若记

$$a_n := 2n-1, \quad S_n := \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

则要证明 $S_n = n^2$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。

证明. **基础步骤：** 当 $n=1$ 时，

$$S_1 = a_1 = 2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2,$$

故 $P(1)$ 成立。

归纳步骤： 假设对某个 $n\in\mathbb{N}$，命题 $P(n)$ 成立，即

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = n^2.$$

要证明 $P(n+1)$ 成立，即

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i = (n+1)^2.$$

由定义，

$$S_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

由归纳假设 $S_n = n^2$ 以及 $a_{n+1} = 2(n+1)-1$，

$$S_{n+1} = n^2 + \big(2(n+1)-1\big) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

因此 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$。由数学归纳法可知，$P(n)$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立。 □

[学习记录] 在实际计算中，可以先像这样写出 S_{n+1}：

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = n^2 + 2(n+1) - 1,$$

再整理为 $(n+1)^2$。这一过程体现了典型的归纳思路：先用归纳假设替换掉“前 n 项之和”，然后再加上“第 $n+1$ 项”并化简。

例二：指数与线性函数的不等式

例 10. 证明：对所有整数 $n\geq 1$，有

$$3^n \geq 1 + 2n.$$

证明. **基础步骤：** 当 $n=1$ 时，

$$3^1 = 3 = 1 + 2\cdot 1,$$

故不等式成立。

归纳步骤： 假设对某个 $k\geq 1$，不等式成立，即

$$3^k \geq 1 + 2k.$$

要证明对 $k+1$ 也成立，即

$$3^{k+1} \geq 1+2(k+1) = 3+2k.$$

由归纳假设，

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geq 3(1+2k) = 3+6k.$$

比较 $3+6k$ 与 $3+2k$：

$$(3+6k)-(3+2k) = 4k \geq 0 \quad (k \geq 1),$$

因此 $3+6k \geq 3+2k = 1+2(k+1)$。于是

$$3^{k+1} \geq 3+6k \geq 1+2(k+1).$$

故 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$。由数学归纳法，命题对所有 $n \geq 1$ 成立。 □

[学习记录] 在这一例中，一位读者的原始证明大致为：

$$3^{k+1} = 3^k \cdot 3 \geq (1+2k) \cdot 3 = 3+6k \geq 1+2(k+1).$$

关键在于最后一步"$3+6k \geq 1+2(k+1)$"需要显式写出

$$3+6k-\big(1+2(k+1)\big) = 4k \geq 0.$$

这说明在归纳不等式时，经常需要额外一步简单的代数比较，把"为什么大于等于"写清楚。

例三（预告）：调和级数与对数函数

下面这个命题是分析中的一个重要不等式，它常用来比较调和级数与对数函数。完整的严谨证明需要利用对数函数的性质（例如凹性或积分），因此我们在本节只作预告性质的讨论。

例 11 (思考题：调和级数与对数)**.** 设

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

断言：对所有 $n \geq 1$，有

$$S_n \geq \ln(n+1).$$

[学习记录与未完成的归纳尝试] 某次学习中，读者尝试用归纳法来处理这一命题：

- 基础步骤：

$$S_1 = 1 \geq \ln 2 = \ln(1+1).$$

- 归纳假设：假设对某个 n 成立，即
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1).$$
- 归纳步骤：
$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1} \geq \ln(n+1) + \frac{1}{n+1}.$$
要证明 $S_{n+1} \geq \ln(n+2)$，等价于证明
$$\ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \geq \ln(n+2),$$
或
$$\frac{1}{n+1} \geq \ln\frac{n+2}{n+1} = \ln\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big).$$

最后一步实际上需要用到不等式
$$\ln(1+x) \leq x \quad (x > 0),$$
而这一不等式通常借助微积分工具（例如导数、凹函数或积分）来证明。因此单纯依靠目前的代数和初等不等式，很难将这一归纳过程在本章中完全闭合。

从逻辑结构看，读者已经构造出了正确的归纳框架，并精准地定位到"缺失的一步"所在；只是在技术上，这一步需要更深的分析工具。我们将在后续章节（讨论对数函数及其性质时）回到这一命题并给出完整证明。

从 n_0 开始的归纳法与强归纳（略述）

在很多场合，命题 $P(n)$ 只在 $n \geq n_0$ 的自然数上有意义，此时可以使用从 n_0 开始的归纳法：

[从 n_0 开始的归纳法] 设 $n_0 \in \mathbb{N}$，若对每个 $n \in \mathbb{N}$ 有命题 $P(n)$，并且

1. $P(n_0)$ 成立；
2. 对所有 $n \geq n_0$，有 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$；

则 $P(n)$ 对所有 $n \geq n_0$ 都成立。

此外，还有一种常用变体称为*强归纳法*（完全归纳法），其归纳假设不是"$P(n)$ 成立"，而是"$P(1), P(2), \ldots, P(n)$ 全部成立"。在证明诸如"每个大于 1 的整数都可以表示为素数的乘积"之类的命题时，强归纳法往往更加自然。严格来说，强归纳与标准归纳在经典逻辑下是等价的，本书在后续章节需要时再作详细使用。

习题与思考

使用数学归纳法或其变体，尝试解决下列问题：

1. 证明：对任意自然数 n，有
$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

2. 证明：对所有整数 $n\geq 1$，有
$$3^n\geq 1+2n.$$

3. （思考题，预告）设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，尝试用归纳法分析为什么可能有
$$S_n\geq \ln(n+1),$$
并思考在哪一步会遇到困难。将你的思路与本节“学习记录”对比。

1.1.4 小结与综合练习

本节对第 1.1 章的内容做一个简要小结，并给出若干综合练习题。

小结

在本章中，我们主要完成了以下几件事情：

- 建立了命题与命题函数的概念，区分了“有确定真假值的陈述”和“仅仅带有自由变元的公式”；
- 介绍了基本的逻辑联结词（$\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow$）和量词（$\forall,\exists$），并通过真值表和量词对偶关系理解了它们的用法；
- 学习了如何将自然语言中的数学陈述翻译为逻辑符号语言，反之亦然；
- 掌握了否定一个复杂命题（尤其是带量词、蕴含的命题）的技巧，包括 De Morgan 律和
$$\neg(P\Rightarrow Q)\equiv P\wedge\neg Q,\qquad \neg(\forall x,\ \varphi(x))\equiv \exists x,\ \neg\varphi(x)$$
等等；
- 介绍了几种基本的证明方法：直接证明、反证法、逆否命题证明以及用反例否定全称命题；
- 学习了数学归纳法的标准形式，并通过若干例子体会如何利用归纳假设从 n 推到 $n+1$。

总体而言，本章的目标不是给出很深刻的定理，而是训练读者：

1. 对命题的逻辑结构足够敏感，能看出“对所有/存在”“若……则……”等内部骨架；
2. 在证明时能自觉地选择合适的证明策略（直接、反证、逆否、归纳等）；
3. 能写出清晰、完整的数学证明，而不仅仅是“算出正确答案”。

综合练习答案

[综合练习 1.1] 本习题选自本章内容的各个方面。请尽量用本章介绍的逻辑语言和证明方法写出完整解答。

1. （命题与命题函数）判断下列句子是否为命题；若不是命题，说明原因。
   (a) $2+2=4$；
   (b) “请把窗户关上。”；
   (c) $x^2>1$；
   (d) “存在无穷多个素数。”；
   (e) “对任意实数 x，若 $x>1$，则 $x^2>1$。”
2. （自然语言 $\leftrightarrow$ 逻辑符号）用逻辑符号改写下列陈述：
   (a) “对任意实数 x，若 $x\geq 1$，则 $x^2\geq 1$。”；
   (b) “存在实数 x，使得 $0<x<1$ 且 $x^2<x$。”；
   (c) “存在无穷多个素数。”（提示：可以使用“对任意 $N\in\mathbb{N}$，存在素数 $p>N$”。）
3. 将下列逻辑公式翻译成自然语言（用中文写出完整的数学陈述）：
   (a) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \big(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon\big)$；
   (b) $\exists x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ x>n$；
   (c) $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists m>n,\ a_m>a_n$。
4. （否定与等价变形）对下列命题写出其否定，并尽量简化到不含蕴含号 $\Rightarrow$ 的形式：
   (a) $\forall x\in\mathbb{R},\ \big(x>1\Rightarrow x^2>1\big)$；
   (b) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \big(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon\big)$；
   (c) $\exists x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ x>n$；
   (d) $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R},\ y^2=x$。

提示：可使用等价

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q, \quad \neg(\forall x,\ \varphi(x)) \equiv \exists x,\ \neg\varphi(x), \quad \neg(\exists x,\ \varphi(x)) \equiv \forall x,\ \neg\varphi(x).$$

5.（功能完备性的小练习）设只允许使用联结词 $\neg$ 和 $\wedge$。

(a) 写出一个只用 $\neg, \wedge$ 表示 $P \vee Q$ 的公式，并证明其与 $P \vee Q$ 等价（可以用真值表或逐格分析）；

(b) 写出一个只用 $\neg, \wedge$ 表示 $P \Rightarrow Q$ 的公式，并证明其与 $P \Rightarrow Q$ 等价；

(c) 讨论：为什么说 $\{\neg, \wedge\}$ 这组联结词"功能完备"？（用你自己的话简短说明即可。）

6.（直接证明）用直接证明的方法完成下列命题：

(a) 对任意实数 x，若 $x > 1$，则 $x^2 > x$；

(b) 对任意实数 x，若 $0 < x < 1$，则 $x^2 < x$；

(c) 对任意实数 a, b, c，若 $a > b$ 且 $c > 0$，则 $ac > bc$。

7.（逆否命题与反证法）对下列命题：

"若$x^2 \geq 1$，则$|x| \geq 1$."　　"若n^2 为偶数，则n 为偶数."

(a) 写出每个命题的*逆否命题*；

(b) 任选其一，用*逆否命题*的方法证明该命题；

(c) 对另一个，用*反证法*给出证明。

8.（反例）判断下列命题的真伪。若为真，给出证明；若为假，给出一个具体反例。

(a) "对任意实数 x，有 $x^2 \geq 0$。"；

(b) "对任意实数 x，有 $x^2 \geq x$。"；

(c) "对任意实数 x，若 $x^2 = 1$，则 $x = 1$。"；

(d) "对任意整数 n，若 n 为奇数，则 n^2 为奇数。"

9.（数学归纳法 · 基础）用数学归纳法证明下列恒等式：

(a) 对任意 $n \in \mathbb{N}$，

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

(b) 对任意 $n \in \mathbb{N}$，

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2;$$

(c) 对任意 $n \in \mathbb{N}$，

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

10. （数学归纳法 · 不等式）用数学归纳法证明下列不等式：

(a) 对任意整数 $n \geq 1$，有

$$2^n \geq n + 1;$$

(b) 对任意整数 $n \geq 1$，有

$$3^n \geq 1 + 2n;$$

(c) 对任意整数 $n \geq 1$，有

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

（提示：$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$。）

11. （选做 · 强归纳预告）设 $P(n)$ 为命题："整数 $n > 1$ 可以表示为若干个素数的乘积。"

(a) 写出用*强归纳法*证明 $P(n)$ 时的归纳假设和归纳步骤的大致结构（可以用自然语言描述，不必写完整证明）；

(b) 思考：相比普通的"$P(n) \Rightarrow P(n+1)$"形式，为什么在这里用"假设 $P(2), P(3), \ldots, P(n)$ 都成立"会更自然？

[综合练习 1.1 参考解答]

1. **（命题与命题函数）**

逐条判断：

(a) $2 + 2 = 4$：这是一个陈述句，且其真假值确定（为真），因此是命题。

(b) "请把窗户关上。"：这是一个祈使句，没有真假可言，因此不是命题。

(c) $x^2 > 1$：其中 x 未说明取自何处，且含有自由变元 x，其真假未定。它是一个*命题函数*（或谓词），在指定 x 的取值后才变成命题。

(d) "存在无穷多个素数。"：这是一个陈述句，且真伪可以讨论（实际上为真），因此是命题。

(e) "对任意实数 x，若 $x > 1$，则 $x^2 > 1$。"：这是一个完整陈述句，不含自由变元，其真伪可定（为真），故是命题。

2. **（自然语言 $\leftrightarrow$ 逻辑符号）**

(a) “对任意实数 x，若 $x \geq 1$，则 $x^2 \geq 1$。” 可以写为

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1).$$

(b) “存在实数 x，使得 $0 < x < 1$ 且 $x^2 < x$。” 可以写为

$$\exists x \in \mathbb{R},\ (0 < x < 1) \wedge (x^2 < x).$$

(c) “存在无穷多个素数。” 可以写为

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ \big(p\ \text{是素数}\big) \wedge (p > N).$$

3. **（逻辑符号 → 自然语言）**

(a)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \big(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\big).$$

翻译：对任意实数 $\varepsilon > 0$，存在实数 $\delta > 0$，使得对任意实数 x，若 $|x-a| < \delta$，则 $|f(x) - L| < \varepsilon$。

(b)

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ x > n.$$

翻译：存在一个实数 x，使得对任意自然数 n，都有 $x > n$。

(c)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m > n,\ a_m > a_n.$$

翻译：对任意自然数 n，存在一个整数 $m > n$，使得 $a_m > a_n$。

4. **（否定与等价变形）**

依次取否定并化简。

(a) 原命题：

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(x > 1 \Rightarrow x^2 > 1\big).$$

否定为：

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \neg\big(x > 1 \Rightarrow x^2 > 1\big).$$

又

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q,$$

所以

$$\exists x \in \mathbb{R},\ (x > 1) \wedge \neg(x^2 > 1) \equiv \exists x \in \mathbb{R},\ (x > 1) \wedge (x^2 \leq 1).$$

(b) 原命题：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \big(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon\big).$$

否定为：

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ \neg\big(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon\big).$$

再用 $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$：

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ (|x-a| < \delta) \wedge (|f(x)-L| \geq \varepsilon).$$

(c) 原命题：

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ x > n.$$

否定为：

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \neg\big(\forall n \in \mathbb{N},\ x > n\big) \equiv \forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \neg(x > n),$$

即

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x \leq n.$$

(d) 原命题：

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 = x.$$

否定为：

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \neg\big(\exists y \in \mathbb{R},\ y^2 = x\big) \equiv \exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 \neq x.$$

5. **（功能完备性的小练习）**

(a) 要用 $\neg, \wedge$ 表示 $P \vee Q$。由 De Morgan 律：

$$\neg(\neg P \wedge \neg Q) \equiv P \vee Q.$$

因此可以取

$$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q).$$

(b) 要用 $\neg, \wedge$ 表示 $P \Rightarrow Q$。经典等价有：

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q.$$

再套用 (a) 的表示方法：

$$\neg P \vee Q \equiv \neg\big(\neg(\neg P) \wedge \neg Q\big) = \neg(P \wedge \neg Q).$$

因此可取

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q).$$

(c) 说明 $\{\neg, \wedge\}$ 的功能完备性。

任意命题公式都是通过有限次使用 $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$ 等联结词组合而成的。上两问已经表明：

- $\vee$ 可以用 $\neg, \wedge$ 表示；
- $\Rightarrow$ 可以用 $\neg, \wedge$ 表示；
- 其他常见联结词（如 $\Leftrightarrow$）也可以通过 $\Rightarrow, \wedge, \vee$ 再次表达出来。

因此，凡是包含 $\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$ 的公式，都可以等价地改写为只含 $\neg, \wedge$ 的公式。也就是说，任何命题公式都能用 $\{\neg, \wedge\}$ 这组联结词来表达，故称它是功能完备的。

6. **（直接证明）**

(a) 命题：对任意实数 x，若 $x > 1$，则 $x^2 > x$。

证明. 令 $x \in \mathbb{R}$，假设 $x > 1$。则 $x^2 - x = x(x-1) > 0$（因为 $x > 0$ 且 $x - 1 > 0$），故 $x^2 > x$。命题得证。 □

(b) 命题：对任意实数 x，若 $0 < x < 1$，则 $x^2 < x$。

证明. 令 $x \in \mathbb{R}$，假设 $0 < x < 1$。则 $x^2 - x = x(x-1)$，其中 $x > 0$ 而 $x - 1 < 0$，故 $x^2 - x < 0$，即 $x^2 < x$。 □

(c) 命题：对任意实数 a, b, c，若 $a > b$ 且 $c > 0$，则 $ac > bc$。

证明. 由 $a > b$ 得 $a - b > 0$。因 $c > 0$，两边同乘 c 得

$$c(a-b) > 0.$$

即 $ac - bc > 0$，从而 $ac > bc$。 □

7. **（逆否命题与反证法）**

给出的两个命题分别是：

$$(1) \quad x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1; \qquad (2) \quad n^2 \text{ 为偶数} \Rightarrow n \text{ 为偶数}.$$

(a) 逆否命题：

- (1) 的逆否命题：若 $|x| < 1$，则 $x^2 < 1$；
- (2) 的逆否命题：若 n 为奇数，则 n^2 为奇数。

(b) 例如用*逆否命题*证明 (1)。我们证明其逆否命题：若 $|x| < 1$，则 $x^2 < 1$。

证明. 假设 $|x| < 1$。则 $-1 < x < 1$，两边平方得 $x^2 < 1$。因此逆否命题成立，故原命题也成立。 □

(c) 再用反证法证明 (2)。

证明. 用反证法。假设存在某个整数 n，使得 n^2 为偶数但 n 不为偶数（即 n 为奇数）。"n 为奇数" 意味着 $n = 2k+1$，其中 $k \in \mathbb{Z}$。则

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

可见 n^2 为奇数。这与 "n^2 为偶数" 的假设矛盾，故假设不成立。因此若 n^2 为偶数，则 n 必为偶数。 □

8. **（反例）**

(a) "对任意实数 x，有 $x^2 \geq 0$。" 为真。证明：若 $x \geq 0$，则 $x^2 \geq 0$；若 $x < 0$，则 $(-x) > 0$，且 $x^2 = (-x)^2 \geq 0$。故对任意实数 x，$x^2 \geq 0$。

(b) "对任意实数 x，有 $x^2 \geq x$。" 为假。取 $x = \frac{1}{2}$，则

$$x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x.$$

故 $\frac{1}{2}$ 是该命题的一个反例。

(c) "对任意实数 x，若 $x^2 = 1$，则 $x = 1$。" 为假。反例：$x = -1$ 时，$x^2 = 1$，但 $x \neq 1$。因此命题不真。

(d) "对任意整数 n，若 n 为奇数，则 n^2 为奇数。" 为真。证明：设 n 为奇数，则存在整数 k 使 $n = 2k+1$。于是

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

故 n^2 也是奇数。

9. **（数学归纳法 · 基础）**

(a) 证明：对任意 $n \in \mathbb{N}$，

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

证明. 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$。**基础步骤：** $n = 1$ 时，$S_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$。**归纳步骤：** 假设 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$，则

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

故命题对 $n+1$ 成立。由数学归纳法，命题对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。 □

(b) 证明：对任意 $n \in \mathbb{N}$，

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

证明．令 $a_k = 2k-1$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$。**基础步骤：** $n=1$ 时，$S_1 = 1 = 1^2$。**归纳步骤：** 假设 $S_n = n^2$，则

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = n^2 + \big(2(n+1)-1\big) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

故命题对 $n+1$ 成立。由数学归纳法，结论对所有 n 成立。 □

(c) 证明：对任意 $n \in \mathbb{N}$，

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证明．记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$。**基础步骤：** $n=1$ 时，$S_1 = 1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$。**归纳步骤：** 假设

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

则

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

提出公因子 $(n+1)$：

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} = \frac{(n+1)\big(2n^2 + n + 6n + 6\big)}{6} = \frac{(n+1)\big(2n^2 + 7n + 6}{6}$$

又

$$2n^2 + 7n + 6 = (2n+3)(n+2),$$

故

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6}.$$

即公式对 $n+1$ 也成立。由数学归纳法，命题对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。 □

10. **（数学归纳法 · 不等式）**

(a) 证明：对任意整数 $n \geq 1$，有

$$2^n \geq n + 1.$$

证明．**基础步骤：** $n=1$ 时，$2^1 = 2 = 1+1$。**归纳步骤：** 假设对某个 $n \geq 1$ 有 $2^n \geq n+1$。则

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) = 2n + 2.$$

又因为 $n \geq 1$，所以

$$2n+2=(n+2)+n \geq n+2.$$

于是 $2^{n+1} \geq n+2$，即命题对 $n+1$ 成立。由数学归纳法，命题对所有 $n \geq 1$ 成立。 □

(b) 证明：对任意整数 $n \geq 1$，有

$$3^n \geq 1+2n.$$

证明与 1.1.3 例二相同，这里略述：

证明. 基础步骤 $n=1$ 时成立。假设 $3^k \geq 1+2k$，则

$$3^{k+1}=3 \cdot 3^k \geq 3(1+2k)=3+6k.$$

而

$$3+6k-(1+2(k+1))=3+6k-(3+2k)=4k \geq 0 \quad (k \geq 1),$$

故 $3^{k+1} \geq 1+2(k+1)$。由归纳法，命题对所有 $n \geq 1$ 成立。 □

(c) 证明：对任意整数 $n \geq 1$，有

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

证明. 用归纳法。**基础步骤：** $n=1$ 时, $1!=1=2^0$。**归纳步骤：** 假设 $n! \geq 2^{n-1}$，则

$$(n+1)!=n! \cdot (n+1) \geq 2^{n-1}(n+1).$$

记 $B:=2^{n-1}(n+1)$。则

$$B-2^n=2^{n-1}(n+1)-2^n=2^{n-1}(n-1) \geq 0 \quad (n \geq 1),$$

故 $B \geq 2^n$。于是

$$(n+1)! \geq B \geq 2^n=2^{(n+1)-1}.$$

故命题对 $n+1$ 成立。由数学归纳法，命题对所有 $n \geq 1$ 成立。 □

11. **（选做 · 强归纳预告）**

设 $P(n)$ 为命题：“整数 $n>1$ 可以表示为若干个素数的乘积”。

(a) 强归纳证明的大致结构可以写成：

- *基础步骤：* $P(2)$ 成立。因为 2 本身是素数，可以视为只含一个因子的素数乘积。

- 归纳步骤：设对所有整数 k，$2 \le k \le n$，$P(k)$ 都成立。考虑 $n+1$：
  - 若 $n+1$ 是素数，则 $n+1$ 本身就是一个素数的乘积（只有一个素数因子），故 $P(n+1)$ 成立；
  - 若 $n+1$ 不是素数，则存在 a, b，其中 $2 \le a, b \le n$，使得 $n+1 = ab$。由归纳假设，a 和 b 都可以表示为素数乘积，因此 $n+1 = ab$ 也可以表示为这些素数的乘积，故 $P(n+1)$ 成立。
- 由强归纳法，对所有 $n > 1$，$P(n)$ 成立。

(b) 讨论：为什么这里强归纳更自然？

因为在处理 $n+1$ 不是素数的情形时，我们需要把 $n+1$ 分解成 ab，其中 $2 \le a, b \le n$。要使用“a、b 可以分解为素数乘积”，我们需要同时知道 $P(2), P(3), \ldots, P(n)$ 都成立，而不仅仅是 $P(n)$。这正是强归纳假设所提供的：假设对所有不大于 n 的整数命题都成立，然后用来证明 $n+1$ 的情形。

[学习记录：关于功能完备性的构造算法] 在思考「$\{\neg, \wedge\}$ 功能完备」时，除了给出

$$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q), \qquad P \Rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$$

这样的具体等价式之外，作者还尝试为“一般命题公式如何系统地改写成只含 $\neg, \wedge$ 的形式”设计一个构造算法。

设 P 是一个只含有限个命题变元 x_i 及联结词 m_i 的公式：

$$P = x_1\, m_1\, x_2\, m_2\, x_3\, \ldots,$$

其中 m_i 可能是 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ 等。粗略的思路是：

1. 从左到右扫描公式，将每个出现的 $\vee, \Rightarrow$ 用上面的等价式替换成只含 $\neg, \wedge$ 的片段；
2. 注意到替换时会引入新的 $\neg(\cdot)$，从而在某个“内部公式”上施加否定；
3. 为了在多层嵌套的情形下不迷路，可以想象维护一个“否定计数器”k：每进入一层外侧的 $\neg(\cdot)$，令 $k \leftarrow k+1$，离开这一层时再减一；
4. 当 k 为偶数时，内部联结词保持“正常极性”（如 $\wedge$ 仍视为“并且”）；当 k 为奇数时，可以选择用 De Morgan 律先把否定传到底层，再统一整理；

虽然在书面证明里没有必要把上述算法形式化写完，但这种“从左到右依次替换 + 追踪否定层数”的思路，反映了一个重要事实：并不是只知道若干个具体等价式，而是确实存在一种（至少在原则上可执行的）程序，可以把任意有限公式机械地改写为只含 $\{\neg, \wedge\}$ 的形式。这也是「功能完备」在构造论视角下的一种理解。 [学习过程中的几个小卡点] 在完成本节综合练习的过程中，作者遇到过若干颇有代表性的问题：

- **关于变量的“域”未指明带来的歧义**。比如判断“$x^2>1$”是否为命题时，如果没有事先约定 x 的取值范围（如默认 $x\in\mathbb{R}$），它更自然地应被视为一个带自由变元的命题函数而非命题。这促使我们在本书前面加入了一句统一约定：未说明时，x 默认取值于 $\mathbb{R}$，以避免不必要的歧义。
- **关于调和级数与对数的不等式**。在尝试用归纳法证明

  $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geq\ln(n+1)$$

  时，可以顺利写出归纳框架

  $$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{n+1}\geq\ln(n+1)+\frac{1}{n+1},$$

  但最后一步若想得到 $\ln(n+2)$，会自然被引向不等式

  $$\ln\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)\leq\frac{1}{n+1},$$

  而这一不等式通常需要借助对数函数的微积分性质（如凹性或积分估计）来证明。这说明：有些“看起来只差一点点”的归纳不等式，其实隐藏着本书后续章节才会正式建立的分析工具。

这些卡点本身并不是坏事，它们恰好标记出本书逻辑与分析技术之间的接口：前几节只准备了逻辑与证明方法，某些更深的问题则留待后续章节的函数理论和微积分来解决。

1.2 集合与映射

1.2.1 集合运算与笛卡儿积

本节回顾并、交、差、补等基本集合运算，并引入笛卡儿积的概念。这些运算与上一节中命题逻辑的“与”“或”“非”等运算在代数结构上完全平行，这一点在后文的思考中会专门记录。

定义 8 (子集与真子集)**.** *设 A,B 是集合。*

- *若 A 的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的*子集，*记为*

  $$A\subseteq B.$$

- *若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的*真子集，*记为*

  $$A\subset B.$$

定义 9 (并、交、差、补)**.** 设 X 是一个固定的“宇宙”集合，$A, B \subseteq X$。

- 并：
$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \text{ 或} x \in B\}.$$
- 交：
$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \text{ 且} x \in B\}.$$
- 差集：
$$A \setminus B := \{x \in X : x \in A \text{ 且} x \notin B\}.$$
- 在 X 中 A 的补集：
$$A^c := X \setminus A.$$

[集合运算的基本律] 设 A, B, C 是 X 的子集，则有：

1. 交换律：
$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$
2. 结合律：
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$
3. 分配律：
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$
4. De Morgan 律：
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

定义 10 (幂集与有限集)**.** 设 X 为集合。

- X 的幂集定义为
$$\mathcal{P}(X) := \{A : A \subseteq X\},$$
即 X 的所有子集的集合。
- 若 A 中的元素个数有限，则称 A 为有限集，记其元素个数为 $|A|$；否则称 A 为无限集。

定义 11 (有序对与笛卡儿积). 对任意元素 a, b，有序对 (a, b) 是一个满足

$$(a,b)=(c,d) \iff a=c,\ b=d$$

的对象。

若 A, B 是集合，定义它们的笛卡儿积为

$$A\times B := \{(a,b) : a\in A,\ b\in B\}.$$

例 12. 设 $A=\{1,2\}, B=\{a,b\}$，则

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\},$$

$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}.$$

一般而言，$A\times B\neq B\times A$。

[1.2.1] 设 $X=\mathbb{R}$。

1. 设 $A=(0,2], B=[1,3)$。求 $A\setminus B$ 与 $B\setminus A$。
2. 写出集合 $(0,1)$ 与 $[0,+\infty)$ 在 X 中的补集。
3. 设 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$。写出幂集 $\mathcal{P}(A)$，并计算

$$|A\times B|, \qquad |B\times A|.$$

习题 1.2.1 的解答记录与反思

下面记录本人第一次做题时的解答、出现的错误以及纠正过程与相关思考，方便后续回顾。

第 1 小题 题目：$A=(0,2]$, $B=[1,3)$，求 $A\setminus B$ 和 $B\setminus A$。

第一次尝试：

$$\begin{aligned} A\setminus B &= \{x \mid x\in A\wedge x\notin B\} \\ &= \emptyset \quad \text{因为 } A \text{ 是 } B \text{ 的子集}, \end{aligned}$$

$$B\setminus A=(0,1)\cup(2,3).$$

这里出现了两个错误：

- 误判：A 是 B 的子集。实际上

$$A=(0,2]\supset(0,1),$$

而 $(0,1)$ 并不包含在 $B=[1,3)$ 中，因此 $A\subseteq B$ 不成立。

- 误把 $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 的两段混在一起，写成 $(0,1) \cup (2,3)$。

纠正后的解答：

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in (0,2] : x \notin [1,3)\} \\ &= (0,1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \setminus A &= \{x \in [1,3) : x \notin (0,2]\} \\ &= (2,3). \end{aligned}$$

几何直观：在实数轴上画出区间 $(0,2]$ 和 $[1,3)$，可以看到

$$A \cap B = [1,2],$$

于是 A 里被删掉交集部分，留下 $(0,1)$；B 被删掉交集部分，留下 $(2,3)$。

第 2 小题 题目：在宇宙 $X = \mathbb{R}$ 中，写出 $(0,1)$ 与 $[0,+\infty)$ 的补集。

解答：

$$(0,1)^c = \mathbb{R} \setminus (0,1) = (-\infty,0] \cup [1,+\infty),$$
$$[0,+\infty)^c = \mathbb{R} \setminus [0,+\infty) = (-\infty,0).$$

这两问的解答是正确的，同时加深了“补集总是要相对于一个固定的宇宙 X 来理解”的印象。

第 3 小题 题目：$A = \{1,2\}, B = \{1,2,3\}$。写出 $\mathcal{P}(A)$，并计算 $|A \times B|, |B \times A|$。

解答：

幂集为

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

第一次书写笛卡儿积时，将有序对写成了集合的形式：

$$A \times B = \{\{1,1\}, \{1,2\}, \dots\},$$

这是不严谨的。正确的是使用有序对记号 $(\cdot,\cdot)$：

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\},$$
$$B \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}.$$

因此

$$|A \times B| = 6, \qquad |B \times A| = 6.$$

这里顺便再次体会到：虽然 $A \times B$ 与 $B \times A$ 的基数相同，但集合本身并不相同——有序对的“顺序”是实打实的结构，而不是可以忽略的。

思考：逻辑运算与集合运算的“完全平行”

在 1.1 命题逻辑中，已经出现了逻辑运算 $\wedge, \vee, \neg$ 及其各种恒等式（交换律、结合律、分配律、De Morgan 等）；在 1.2.1 中，又看到集合运算 $\cap, \cup, \cdot^c$ 满足完全一样的代数规律。这种“平行性”并非偶然，而可以用下面的方式理解：

[布尔代数视角的初步想法] 可以固定一个“世界集合” Ω（例如所有可能的真值赋值），对每个命题公式 φ 考虑

$$\varphi := \{\omega \in \Omega : \varphi \text{ 在世界}\omega \text{ 中为真}\},$$

即让 φ 成立的那些“世界”组成的集合。

在此对应下，

$$\neg\varphi = \Omega \setminus \varphi, \quad \varphi \wedge \psi = \varphi \cap \psi, \quad \varphi \vee \psi = \varphi \cup \psi.$$

于是命题逻辑中的“真值运算”和某个集合 Ω 上的集合运算完全平行。从代数角度看，这两套结构都是布尔代数的一种具体实现。

基于这一点，自然会产生进一步的联想：例如把“群的公理”看成一阶逻辑中的若干命题（结合律、单位元存在、逆元存在等），那么“群”可以被视作“让这些公理在某个世界中为真的结构”。更进一步的问题是：判定“在某个世界中为真”的这个动作本身，是在更高层的逻辑体系中完成的，那么这个更高层的“真”的判定又由谁来裁决？如果在更高层还要求这些“世界”本身满足额外结构（例如不仅是群，还要是流形、Banach 空间等），那么这些额外要求是否可以再被压回到底层世界中，表现为新的公理（例如 Lie 群公理）？这类问题会在后续学习逻辑、模型论以及范畴论时继续深化。 [作者的进一步想法：真理分层与附加结构的压回] 在上一条思考中，我把“命题逻辑 $\leftrightarrow$ 集合布尔代数”的对应记成了

$$\varphi \longmapsto \varphi \subseteq \Omega,$$

即每个命题对应为“让它为真的那些世界”的集合。这里自然会延伸出几个更高一层的问题。

(1) 群公理与“世界”的集合

在一阶逻辑的语言 $L_{\mathrm{grp}} = \{\cdot, e, ^{-1}\}$ 中，一个“世界”可以理解为一个 L_{grp}-结构

$$\omega = \big(|\omega|,\ \cdot^{\omega},\ e^{\omega},\ (\,)^{-1,\omega}\big),$$

也就是一个底层集合加上在其上解释这几个符号的具体运算。群公理是一族 L_{grp} 的句子 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$（例如结合律、单位元存在、逆元存在等），于是

$$\text{“是群”} = \{\omega : \omega \models \sigma_i \text{ 对所有群公理} \sigma_i\}$$

就是“使群公理为真的那些世界”的集合。从范畴观点看，这一类世界正是范畴 **Grp** 的对象类。

这与前面“命题 $\mapsto$ 真值集合”的图景是平行的：只是现在的“命题”换成了“某个理论 T 的全部公理的合取”，而“真值集合”换成了“满足这些公理的全部结构组成的类”。

(2) 对象语言与元语言：谁来判定“为真”？

记号

$$\omega \models \varphi$$

是在“元语言”中说的：对象语言里写的是公式 φ 本身，而“在结构 ω 中为真”这一判断，是在更高一层的数学（通常是经典集合论 + 一阶逻辑）里递归定义出来的。

于是会自然产生一个问题：既然对象语言中的真值由元语言来裁决，那么“元语言中的真”又由谁来裁决？这就导致一种*真理分层*的直觉：一层的真总是在更高一层被定义或判定。形式逻辑中，这会通向诸如 Tarski 关于“真不可在同一系统内部完全定义”的定理；在本书里暂时不深入，而是把“集合论 + 经典逻辑”视作一个默认的元层地基。

(3) 在更高层附加结构，再压回到底层

假设在元层我提出额外要求：不仅要 ω 满足群公理，还要底层集合 $|\omega|$ 带有流形结构且群运算是光滑映射。非形式地说：我想只考虑“既是群又是流形且运算光滑”的那些世界，也就是 Lie 群。

形式上，可以通过扩展语言

$$L_{\text{LieGrp}} = L_{\text{grp}} \cup L_{\text{manifold}}$$

并加入“流形公理”和“兼容性公理”，得到一个更强的理论 T_{LieGrp}。其模型类

$$T_{\text{LieGrp}}$$

就是全部 Lie 群。这在概念层面上对应着：先在更高层提出“世界还必须是流形”之类的条件，再把这些条件*压回到底层*语言中，表现为额外的公理（可以视为“第四条、第五条命题”）。

(4) 给“是”附加结构与更丰富的真值

在经典语义里，一个公式在某个结构中要么为真要么为假，真值落在两元布尔代数 $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ 中，逻辑里的“是”本身不携带其它几何或分析结构。

如果希望给“为真”本身附加几何或分析上的结构，一种思路是：不再在 **Set** 中看结构，而是在某个带几何味道的范畴 $\mathcal{E}$ 中看“内部结构”。在一般的 topos 中，真值对

象 Ω 是一个内部 Heyting 代数，真值不再只是 0/1，而形成一个有更丰富结构的格；谓词的“真值”落在 Ω 中。这可以被理解为：逻辑中的“是”被放置到一个更有结构的对象上。

1.2.2 映射、单射、满射与双射

在数学分析中，几乎所有对象都是通过“映射”彼此联系起来的：数列可以看成 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，函数是 $f:A\to\mathbb{R}$，线性算子是 $T:V\to W$。在进入极限与连续之前，先把映射的基本概念整理清楚。

定义 12 (映射、定义域、值域与像)**.** 设 X,Y 为集合。一个从 X 到 Y 的映射（或函数）是一个规则 f，它对每个 $x\in X$ 指定唯一的 $y\in Y$，记为

$$f:X\to Y,\qquad x\mapsto f(x).$$

- 集合 X 称为 f 的定义域（*domain*）。
- 集合 Y 称为 f 的值域或陪域（*codomain*），它是我们事先选定的目标集合。
- 对任意 $A\subset X$，定义 A 在 f 下的像为

  $$f(A):=\{f(x):x\in A\}\subset Y.$$

  特别地，$f(X)$ 称为 f 的象集，有时记为 $\operatorname{Im} f$。
- 对任意 $B\subset Y$，定义 B 在 f 下的原像为

  $$f^{-1}(B):=\{x\in X:f(x)\in B\}\subset X.$$

  注意：此处 $f^{-1}(B)$ 只是“原像集合”的记号，并不要求 f 本身存在映射意义上的 $f^{-1}:Y\to X$。

严格地说，Y 是我们事先规定的“目标集合”，而 $\operatorname{Im} f=f(X)$ 是 f 真正打到的那一部分。很多教材会偷懒把“值域”直接当成 $\operatorname{Im} f$，但在拓扑、测度论等场景下，刻意选一个比 $\operatorname{Im} f$ 大的 Y 反而有好处，因此区分这两个概念很有必要。

例 13. *1.* 定义 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=x^2$。则

$$\operatorname{Im} f=f(\mathbb{R})=[0,+\infty),$$

虽然陪域写的是 $\mathbb{R}$，但 f 实际上只取到非负实数。

2. 定义 $g:(0,1)\to(0,1)$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x$。则

$$g((0,1))=(0,\tfrac{1}{2}),$$

像严格小于陪域 $(0,1)$。

3. 对 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$，取 $B=[1,4]$，则

$$f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}:1\le x^2\le 4\}=[-2,-1]\cup[1,2].$$

定义 13 (映射的复合与恒等映射)**.** 设 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ 为映射。定义复合映射

$$g\circ f:X\to Z,\qquad (g\circ f)(x):=g\big(f(x)\big).$$

对任意集合 X，定义恒等映射

$$\mathrm{id}_X:X\to X,\qquad \mathrm{id}_X(x):=x.$$

[复合的基本性质] 设 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, $h:Z\to W$，则:

1. 复合满足结合律:
$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

2. 恒等映射在复合下为单位元:
$$f\circ\mathrm{id}_X=f,\qquad \mathrm{id}_Y\circ f=f.$$

定义 14 (单射、满射与双射)**.** 设 $f:X\to Y$ 为映射。

- 若对任意 $x_1,x_2\in X$,
$$x_1\ne x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)\ne f(x_2),$$
等价地
$$f(x_1)=f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1=x_2,$$
则称 f 为单射（*injective*）。

- 若对任意 $y\in Y$，都存在 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$，即 $\operatorname{Im}f=f(X)=Y$，则称 f 为满射（*surjective*）。

- 若 f 既是单射又是满射，则称 f 为双射（*bijective*）。

例 14. *1.* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$：单射，因为若 $x_1+1=x_2+1$ 则 $x_1=x_2$；满射，因为对任意 $y\in\mathbb{R}$，取 $x=y-1$ 即有 $f(x)=y$。所以 f 是双射。

2. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2$：不是单射，因为 $g(1)=g(-1)$；也不是满射，因为例如 -1 不在像中。

3. $h:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $h(x)=x^2$：单射，因为 $x,y\ge 0$ 时若 $x^2=y^2$ 则 $x=y$；满射，因为对任意 $y\ge 0$，取 $x=\sqrt{y}$ 即有 $h(x)=y$。因此 h 是双射。

4. $k:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $k(n)=2n$：单射（$2m_1=2m_2\Rightarrow m_1=m_2$），但不是满射（1 无法表示成 $2n$）。

定义 15 (反函数)**.** 若 $f : X \to Y$ 为双射，则存在唯一映射 $f^{-1} : Y \to X$，使得对所有 $x \in X$ 与 $y \in Y$：

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad f\big(f^{-1}(y)\big) = y.$$

称 f^{-1} 为 f 的反函数。

此前对 $B \subset Y$ 的记号 $f^{-1}(B)$ 表示原像集合；只有在 f 为双射时，我们才有真正意义上的映射 $f^{-1} : Y \to X$。二者语境不同，需要通过上下文区分。

[原像与集合运算] 设 $f : X \to Y$，$B_1, B_2 \subset Y$。则

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2),$$
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

证明. 以第一式为例。记 $C_1 = f^{-1}(B_1 \cup B_2)$，$C_2 = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$。

先证 $C_1 \subset C_2$。任取 $x \in C_1$，则 $f(x) \in B_1 \cup B_2$，即 $f(x) \in B_1$ 或 $f(x) \in B_2$。若 $f(x) \in B_1$，则 $x \in f^{-1}(B_1) \subset C_2$；若 $f(x) \in B_2$，则 $x \in f^{-1}(B_2) \subset C_2$。故 $x \in C_2$。

再证 $C_2 \subset C_1$。任取 $x \in C_2$，则 $x \in f^{-1}(B_1)$ 或 $x \in f^{-1}(B_2)$。若 $x \in f^{-1}(B_1)$，则 $f(x) \in B_1 \subset B_1 \cup B_2$，故 $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) = C_1$；另一种情况同理。两边互相包含，等式成立。

第二式类似：注意到

$$f(x) \in B_1 \cap B_2 \iff (f(x) \in B_1 \text{ 且 } f(x) \in B_2),$$

将“且”分别翻译成对 $f^{-1}(B_1)$ 与 $f^{-1}(B_2)$ 的属于关系即可。 □

[1.2.2] 设 f, g, h, k 如下：

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x+1$;　$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$;　$h : [0, +\infty) \to [0, +\infty),\ h(x) = x^2$;　$k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ k($

1. 判断 f, g, h, k 分别是否为单射、满射、双射，并证明之。

2. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$f(x) = x^2$。

   (a) 求 $f([-2, 3])$；

   (b) 求 $f^{-1}([1, 4])$；

   (c) 求 $f^{-1}((-\infty, 0))$。

3. 设 $f : X \to Y$，$B_1, B_2 \subset Y$。仿照上面的命题证明：

   (a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$；

   (b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$。

4. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$f(x) = 2x + 1$，$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$g(x) = x^2$。

(a) 求 $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 的解析式；

(b) 判断 $f, g, g \circ f, f \circ g$ 在各自的定义域与值域下分别是否为单射、满射。

5. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$。

(a) 说明为什么 f 不存在反函数 $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$；

(b) 通过调整定义域或值域，构造一个从某个区间到某个区间的双射，并写出其反函数。

6. 设 $X = \{1, 2, 3\}$，$Y = \{a, b, c\}$。

(a) 能否构造出一个从 X 到 Y 的单射但非满射的映射？若能，举例；若不能，说明原因。

(b) 能否构造出一个从 X 到 Y 的满射但非单射的映射？同样举例或说明原因。

(c) 写出所有从 X 到 Y 的双射，并计算它们的总数。

习题 1.2.2 的解答记录与反思

下面记录本人第一次做题时的解答、出现的错误以及纠正过程与相关思考。

第 1 题：单射 / 满射 / 双射　结论：

- $f(x) = x + 1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为双射；
- $g(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 既非单射也非满射；
- $h(x) = x^2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 为双射；
- $k(n) = 2n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 为单射但非满射。

说明： 例如对 k，若 $k(m_1) = k(m_2)$，则 $2m_1 = 2m_2$，从而 $m_1 = m_2$，故 k 为单射；另一方面，取 $1 \in \mathbb{Z}$，若存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使 $k(m) = 1$，则 $2m = 1$，与 m 为整数矛盾，故 k 非满射。

整体而言，这一题的答案与理由都是正确的，只是可以逐渐养成“写出标准逻辑形式”的习惯，例如：

$$(\forall x_1, x_2 \in X)\big(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\big)$$

这类形式在后面写证明时会非常熟练。

第 2 题：像与原像　设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=x^2$。

(a) 第一次解答与纠正：

$$f([-2,3])=[0,9].$$

这部分是正确的：f 在 $[-2,3]$ 上达到的最小值为 0（在 $x=0$ 处），最大值为 9（在 $x=3$ 处），中间值全部出现。

(b) 第一次解答与错误：

最初写的是

$$f^{-1}([1,4])=[1,2],$$

漏掉了负半轴的部分。

纠正：

$$f^{-1}([1,4])=\{x\in\mathbb{R}:1\le x^2\le 4\}=\{x\in\mathbb{R}:1\le |x|\le 2\}=[-2,-1]\cup[1,2].$$

错误的本质在于：在处理 $x^2\in[1,4]$ 时，只注意到了 $x\ge 0$ 的分支，而忽略了 $x\le 0$ 时同样满足 $x^2\in[1,4]$ 的部分。以后遇到包含绝对值或平方的不等式时，需要有意识地考虑两个分支。

(c) 第一次解答：

$$f^{-1}((-\infty,0))=\varnothing.$$

这是正确的，因为 $x^2\ge 0$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 成立，故不可能落入 $(-\infty,0)$。

第 3 题：原像的运算性质　题目要求仿照命题证明

$$f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2),\qquad f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2).$$

3.1 联合的情况

第一次写出的思路基本正确，但略显简略。完整的证明如下：

设 $C_1=f^{-1}(B_1\cup B_2)$，$C_2=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$。一方面，任取 $x\in C_1$，则 $f(x)\in B_1\cup B_2$，于是 $f(x)\in B_1$ 或 $f(x)\in B_2$。若 $f(x)\in B_1$，则 $x\in f^{-1}(B_1)\subset C_2$；若 $f(x)\in B_2$，则 $x\in f^{-1}(B_2)\subset C_2$。故 $C_1\subset C_2$。另一方面，任取 $x\in C_2$，则 $x\in f^{-1}(B_1)$ 或 $x\in f^{-1}(B_2)$。若 $x\in f^{-1}(B_1)$，则 $f(x)\in B_1\subset B_1\cup B_2$，故 $x\in f^{-1}(B_1\cup B_2)=C_1$；$x\in f^{-1}(B_2)$ 情形同理。于是 $C_2\subset C_1$，二者相等。

3.2 交集的情况：卡住与突破

一开始的尝试是：

$$\forall x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \ \Rightarrow \ f(x) \in B_1 \cap B_2,$$

但在如何继续往下拆解时卡住了。

关键的一步是注意集合交的定义：

$$f(x) \in B_1 \cap B_2 \iff (f(x) \in B_1 \text{ 且 } f(x) \in B_2).$$

一旦把“$\in B_1 \cap B_2$”拆成“两条同时成立的属于关系”，下面就可以分别翻译到 $f^{-1}(B_1)$ 和 $f^{-1}(B_2)$ 上。

具体证明如下：

设 $D_1 = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$，$D_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$。一方面，任取 $x \in D_1$，则 $f(x) \in B_1 \cap B_2$，从而 $f(x) \in B_1$ 且 $f(x) \in B_2$。因此 $x \in f^{-1}(B_1)$ 且 $x \in f^{-1}(B_2)$，即 $x \in D_2$。所以 $D_1 \subset D_2$。另一方面，任取 $x \in D_2$，则 $x \in f^{-1}(B_1)$ 且 $x \in f^{-1}(B_2)$，从而 $f(x) \in B_1$ 且 $f(x) \in B_2$，即 $f(x) \in B_1 \cap B_2$，故 $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) = D_1$。于是 $D_2 \subset D_1$。

这题的卡点本质上是：对“$\cap$”的逻辑含义不够熟练，没立刻想到要用

$$x \in B_1 \cap B_2 \iff (x \in B_1 \text{ 且 } x \in B_2)$$

这一点来拆分。以后在写证明时，可以有意识地把“集合运算”翻译成“命题逻辑中的与/或/非”。

第 4 题：复合映射　解析式： 给定 $f(x) = 2x + 1$，$g(x) = x^2$。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x+1)^2, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x^2 + 1.$$

单射/满射判断：

- $f(x) = 2x + 1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$：线性函数，显然单射；对任意 $y \in \mathbb{R}$，取 $x = \frac{y-1}{2}$ 即 $f(x) = y$，故满射，是双射。
- $g(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$：既非单也非满。
- $g \circ f(x) = (2x+1)^2$：本质仍为“开口向上”的二次函数，类似 x^2，对称轴在 $x = -\frac{1}{2}$，因此非单射；值域为 $[0, +\infty)$，小于陪域 $\mathbb{R}$，因此非满射。
- $f \circ g(x) = 2x^2 + 1$：偶函数，非单射；值域为 $[1, +\infty)$，故非满射（例如 0 无法到达）。

这里有一个有趣的观察：f 本身是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的一个同构（甚至是同胚），与非双射的 g 复合后，所得映射的“单/满/双”性质完全由 g 决定。这体现了“同构不改变本质问题”的直觉。

第 5 题：反函数的存在性 (1) 由于 $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 既不是单射（例如 $f(1) = f(-1)$），也不是满射（例如 -1 没有原象），所以 f 不是双射，按定义不存在映射意义上的 $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。

(2) 一种标准做法是限制定义域与值域。例如：

$$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad f(x) = x^2.$$

此时 f 为双射，其反函数为

$$f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

更抽象的想法是：在 $\mathbb{R}$ 上取一个等价关系 $x \sim -x$，将 $\mathbb{R}$ 商掉这个关系得到 $\mathbb{R}/\sim$，则 $x \mapsto x^2$ 在商空间上成为一个良好的双射；在拓扑意义上，这个商空间与区间 $[0, +\infty)$ 同构。这里已经隐含了“通过商掉对称性来获得可逆的结构”的思想。

第 6 题：有限集合上的映射 设 $X = \{1, 2, 3\}$，$Y = \{a, b, c\}$。

(1) 单射但非满射？

若 $f : X \to Y$ 是单射，则三个不同的 $x \in X$ 必须被送到三个不同的 $y \in Y$ 上。由于 $|X| = |Y| = 3$，单射意味着刚好用完了 Y 的三个元素，因此自动满射。结论：不存在从 X 到 Y 的单射但非满射。

(2) 满射但非单射？

若 $f : X \to Y$ 是满射，则 Y 的三个元素 a, b, c 都要被某些原象命中。但 X 只有三个元素；一旦有两个不同的 $x_1 \neq x_2$ 被映到同一个 y 上，那么最多只能覆盖到两个不同的 y，与满射矛盾。结论：不存在从 X 到 Y 的满射但非单射。

(3) 双射的列举

由于 $|X| = |Y| = 3$，从 X 到 Y 的双射恰好对应于 Y 上的所有排列，数量为 $3! = 6$。例如可以列出如下六个：

$$\begin{aligned}
f_1 &: 1 \mapsto a,\ 2 \mapsto b,\ 3 \mapsto c; \\
f_2 &: 1 \mapsto a,\ 2 \mapsto c,\ 3 \mapsto b; \\
f_3 &: 1 \mapsto b,\ 2 \mapsto a,\ 3 \mapsto c; \\
f_4 &: 1 \mapsto b,\ 2 \mapsto c,\ 3 \mapsto a; \\
f_5 &: 1 \mapsto c,\ 2 \mapsto a,\ 3 \mapsto b; \\
f_6 &: 1 \mapsto c,\ 2 \mapsto b,\ 3 \mapsto a.
\end{aligned}$$

这些双射同时也是 **Set** 中 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 的“最对称的一部分”。

[作者的进一步想法：有限集合上的态射与遗忘函子] 在第 6 题中，$X = \{1, 2, 3\}$ 与 $Y = \{a, b, c\}$ 只是“最基础的集合”。在更高的结构层面，我们完全可以在 X 与 Y 上附

加各种额外结构（例如拓扑、群结构、向量空间结构，的某种结构），这时在相应的范畴中，从 $(X, 结构_X)$ 到 $(Y, 结构_Y)$ 的态射是那些“保结构”的映射。

有一个自然的视角是：存在一个遗忘函子 $U : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$，它把带结构的对象 $(X, 结构_X)$ 送到底层集合 X，把态射送到底层的函数 $U(f) : X \to Y$。在这种压缩下，许多在高层世界中极其丰富的态射，一旦被“遗忘”到只剩下底层集合，就只能表现为

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$$

中的若干函数模式。如果我们只关心“底层函数长什么样”，那么所有高层的态射都被归入这些底层函数所决定的“等价类”中。

在本题中，双射一共有 6 个，它们可以被看作 X 与 Y 之间“完全匹配”的 6 种排列型；在任何允许 X、Y 具有额外结构的范畴中，只要底层集合仍然是这两个三元集合，那么所有“保结构”的双射，在遗忘到底层时都必须落在这 6 个排列之中的某一个。用一种形象的说法，这 6 个排列是“所有更丰富结构之间态射被压扁之后剩下的 6 个原型”。

1.3 实数与确界

1.3.1 有理数、不等式与上界/下界

本节我们回顾数学分析中最基础的一些“大小”概念：有理数、不等式规则、绝对值，并正式引入上界/下界与有界性。后面“上确界、完备性、公理化实数”的内容，都要在这一节的语言上展开。

有理数的回顾

定义 16 (有理数)**.** *一个实数 x 称为有理数，如果存在整数 m, n $(n \neq 0)$，使得*

$$x = \frac{m}{n}.$$

全体有理数组成的集合记为 $\mathbb{Q}$。

[有理数的基本代数性质] 有理数集 $\mathbb{Q}$ 具有以下性质：

1. 每个整数都是有理数：若 $k \in \mathbb{Z}$，则 $k = \dfrac{k}{1} \in \mathbb{Q}$；
2. 若 $a, b \in \mathbb{Q}$，则
$$a \pm b, \quad ab, \quad \frac{a}{b}\ (b \neq 0)$$
仍然属于 $\mathbb{Q}$。

在本书中我们不从等价类的角度重建 $\mathbb{Q}$，而是把它当作已经给定的有序数系，重点关注它与 $\mathbb{R}$ 的稠密性与完备性的差别。

实数上的不等式与绝对值

不等式的基本性质 在实数集 $\mathbb{R}$ 上，我们默认配有一个线性次序 $\leq$。对任意 $a, b, c \in \mathbb{R}$，有：

1. **三歧性**：恰有一个成立：
$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$
2. **传递性**：若 $a \leq b$ 且 $b \leq c$，则 $a \leq c$。
3. **加法保序性**：若 $a \leq b$，则 $a + c \leq b + c$。
4. **乘法保序性（正数）**：若 $a \leq b$ 且 $c > 0$，则 $ac \leq bc$。
5. **乘法反序性（负数）**：若 $a \leq b$ 且 $c < 0$，则 $ac \geq bc$。

下面是一个典型命题，后面会频繁使用。

若 $0 < a < b$，则
$$0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

证明. 由 $0 < a < b$ 得 $a > 0, b > 0$，从而 $ab > 0$，故 $\dfrac{1}{ab} > 0$。利用乘法保序性，在不等式 $0 < a < b$ 两边同乘以正数 $\dfrac{1}{ab}$，得到
$$0 < \frac{1}{ab} \cdot a < \frac{1}{ab} \cdot b,$$
化简为
$$0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a},$$
命题得证。 □

绝对值与三角不等式

定义 17 (绝对值)**.** 对实数 $x \in \mathbb{R}$，定义其绝对值
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

直观上，$|x|$ 可以理解为 x 到原点 0 的距离。它满足以下基本性质：

[绝对值的基本性质] 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，有：

1. 非负性与零点：
$$|x| \geq 0, \qquad |x| = 0 \iff x = 0;$$

2. 乘法：

$$|xy| = |x| \cdot |y|;$$

3. **三角不等式**：

$$|x+y| \le |x| + |y|;$$

4. **差的三角不等式**：

$$\big||x| - |y|\big| \le |x-y|.$$

最后一条常用于“反向估计”，在极限、连续性等证明中非常高频。

上界、下界与有界性

定义 18 (上界、下界、有界)**.** 设 $A \subset \mathbb{R}$ 为非空集合。

1. 若存在实数 M，使得对所有 $x \in A$ 都有

$$x \le M,$$

则称 M 为 A 的一个上界（*upper bound*），并称 A 有上界或上有界。

2. 若存在实数 m，使得对所有 $x \in A$ 都有

$$x \ge m,$$

则称 m 为 A 的一个下界（*lower bound*），并称 A 有下界或下有界。

3. 若 A 既有上界又有下界，则称 A 是有界的（*bounded*）。

例 15. *1.* $A = (0,1)$：任取 $M \ge 1$ 是 A 的上界，任取 $m \le 0$ 是 A 的下界，因此 A 有界。

2. $B = [0,1]$：同样有上界 1 与下界 0，也有界。

3. $C = \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$：有下界 1，但没有上界（任意给出 M，总可在 $\mathbb{N}$ 中找到 $n > M$），因此不有界。

4. $D = \mathbb{R}$：既无上界也无下界。

定义 19 (最大值、最小值)**.** 设 $A \subset \mathbb{R}$ 为非空集合。

1. 若存在 $M \in A$，使得对所有 $x \in A$ 都有 $x \le M$，则称 M 为 A 的最大值，记作

$$M = \max A.$$

2. 若存在 $m \in A$，使得对所有 $x \in A$ 都有 $x \geq m$，则称 m 为 A 的最小值，记作

$$m = \min A.$$

注意：上界/下界不要求属于集合本身，而最大值/最小值必须是集合中的元素。

例 16. 1. 对于开区间 $A = (0, 1)$，1 是上界但不在 A 中，因此 A 没有最大值；同理 0 是下界但不在 A 中，因此 A 没有最小值。

2. 对于闭区间 $B = [0, 1]$，1 既是上界又在集合里，因此 $\max B = 1$；0 既是下界又在集合里，因此 $\min B = 0$。

在下一小节中，我们将把"上界/下界"升级为"最小的上界（上确界）"和"最大的下界（下确界）"，这正是实数完备性的核心。

习题

设 $0 < a < b$，证明

$$0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

设

$$A = (1, 3), \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \subset \mathbb{R}.$$

1. 判断 A 是否有上界/下界，并说明是否有最大值/最小值；
2. 判断 B 是否有上界/下界，并说明是否有最大值/最小值。

设 $A \subset \mathbb{R}$ 非空且有上界，$B \subset A$。证明：若 M 是 A 的上界，则 M 也是 B 的上界。

习题与学习记录

本小节记录一次实际解题过程中的原始想法、错误与卡点以及整理后的标准答案，供日后回顾。

习题 1.3.1 的解答与分析 [某次学习的回答] 你的原始证明可以整理为：

$$\begin{aligned}
&0 < a < b. \\
&\text{乘法保序：} \quad 0 < \frac{1}{ab} \cdot a < \frac{1}{ab} \cdot b. \\
&\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

错误/卡点说明：

- 思路完全正确，唯一略显简略的是：应当先说明 $a>0,b>0$，从而 $ab>0$，进而 $\frac{1}{ab}>0$，这样才能合法使用“乘法保序性”。

[整理后的标准解答] 由 $0<a<b$ 得 $a>0,b>0$，从而 $ab>0$，故

$$\frac{1}{ab}>0.$$

利用乘法保序性，在不等式 $0<a<b$ 两边同乘以正数 $\frac{1}{ab}$，得到

$$0<\frac{1}{ab}\cdot a<\frac{1}{ab}\cdot b,$$

即

$$0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}.$$

习题 1.3.1(1) 的解答与分析 [结论] 对 $A=(1,3)$，有：

$$A\text{ 有上界、有下界，但没有最大值，也没有最小值。}$$

[标准解答] 对任意 $x\in(1,3)$，有 $1<x<3$。因此任取 $M\geq 3$，总有 $x\leq 3\leq M$，故 M 是 A 的上界，A 有上界；同理任取 $m\leq 1$，对任意 $x\in A$ 有 $x>1\geq m$，故 m 是 A 的下界，A 有下界。

另一方面，3 虽是 A 的上界，但 $3\notin A$，因此不能作为最大值。实际上，若 $M\in A$，则 $1<M<3$，可取

$$x=\frac{M+3}{2}\in(1,3),$$

使得 $x>M$，故 M 不可能是最大值，所以 A 无最大值。同理可以证明 A 无最小值。

习题 1.3.1(2) 的解答与分析 [你的原始思路（概括）]

- 注意到 $2\in\mathbb{Q}$，取 $a=5$，则 $a^2=25>2$，因此 5 是 B 的上界，从而 B 有上界；
- 写下了“只要其有上界则一定有下界”，并尝试通过 x^2 映射到某个等价类空间来说明这一点；
- 在“假设存在最大值 $m=\frac{k}{l}$，构造更大的有理数 $\frac{n}{m}$ 使得 $(\frac{n}{m})^2<2$”这一环节卡住，构造不出满足要求的显式公式。

错误与卡点说明：

- 命题“一个集合有上界 $\Rightarrow$ 必有下界”在一般情况下是假的。反例如 $\mathbb{N}$（有下界无上界）、$-\mathbb{N}$（有上界无下界）。
- 把 $x^2:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\sim$（识别 $x\sim -x$）这一层抽象引入，会使本来很直接的“上界/下界”问题变得复杂，在这里并不必要。

- 关于“构造比 m 更大、但平方仍小于 2 的有理数”：这是一个经典构造问题，可以给出很具体的 $r = r(m)$，而不必只写成“存在某个 $\frac{n}{m}$”。

[标准解答：上下界] 若 $x \in B$，则 $x^2 < 2$。若 $x \geq 2$，则 $x^2 \geq 4 > 2$，与 $x^2 < 2$ 矛盾，因此 $x < 2$。于是 2 是 B 的上界，任意 $M \geq 2$ 也是上界。

同理，若 $x \leq -2$，则 $x^2 \geq 4 > 2$，矛盾，因此 $x > -2$。于是 -2 是 B 的下界，任意 $m \leq -2$ 也是下界。

故 B 上下有界。

[标准解答：不存在最大值] 反设 m 是 B 的最大值，则

$$m \in \mathbb{Q}, \quad m^2 < 2, \quad \forall x \in B,\ x \leq m.$$

由于 $0 \in B$，故 $m \geq 0$。记

$$\varepsilon := 2 - m^2 > 0.$$

构造新的有理数

$$r := m + \frac{2 - m^2}{m + 2} = m + \frac{\varepsilon}{m + 2}.$$

因为 $m \geq 0$，故 $m + 2 > 0$，而 $\varepsilon > 0$，于是

$$\frac{\varepsilon}{m + 2} > 0 \quad \Rightarrow \quad r > m.$$

又 $m, \varepsilon \in \mathbb{Q}$，故 $r \in \mathbb{Q}$。

直接计算：

$$r^2 = \left(m + \frac{\varepsilon}{m + 2}\right)^2 = m^2 + \frac{2m\varepsilon}{m + 2} + \frac{\varepsilon^2}{(m + 2)^2}.$$

从而

$$r^2 - 2 = (m^2 - 2) + \frac{2m\varepsilon}{m + 2} + \frac{\varepsilon^2}{(m + 2)^2}.$$

代入 $\varepsilon = 2 - m^2$ 并整理可得

$$r^2 - 2 = \frac{2(m^2 - 2)}{(m + 2)^2}.$$

由于 $m^2 < 2$，故 $m^2 - 2 < 0$，而 $(m + 2)^2 > 0$，于是

$$r^2 - 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 < 2.$$

因此 $r \in \mathbb{Q}$ 且 $r^2 < 2$，即 $r \in B$，并且 $r > m$，这与 m 为最大值矛盾。

故 B 不存在最大值。

[标准解答：不存在最小值] 若 $x \in B$，则 $x^2 < 2$，于是 $(-x)^2 = x^2 < 2$，故 $-x \in B$。即 B 关于原点对称：

$$x \in B \iff -x \in B.$$

若 B 有最小值 m，即对所有 $x \in B$ 有 $x \geq m$，则对所有 $x \in B$ 也有 $-x \leq -m$。由于 $x \in B \Rightarrow -x \in B$，于是对所有 $y \in B$ 有 $y \leq -m$，这说明 $-m$ 是 B 的最大值，与上一步“B 无最大值”的结论矛盾。

因此 B 也无最小值。

习题 1.3.1 的解答与分析 [你的原始证明（略作整理）]

$$\begin{aligned}&M \text{ 是}A \text{ 的上界} \iff \forall a \in A,\ a \le M.\\&B \subset A \iff \forall b \in B,\ b \in A.\\&\Rightarrow \forall b \in B,\ b \le M,\ \text{因此}M \text{ 也是}B \text{ 的上界。}\end{aligned}$$

你在草稿中还写了“因为 A 非空因此 a 存在”，这一句在形式上不是必须，但不影响正确性。

[整理后的标准解答] 已知 M 是 A 的上界，即对任意 $a \in A$ 有 $a \le M$。又 $B \subset A$，故对任意 $b \in B$，有 $b \in A$，从而 $b \le M$。这说明 M 满足上界对 B 的定义，因此 M 也是 B 的上界。

1.3.2 上确界与下确界

上一节我们引入了上界、下界与有界性。本节在此基础上进一步刻画“所有上界中最小的那个”“所有下界中最大的那个”，分别称为*上确界*和*下确界*。实数系的完备性可以用“任何有上界的非空子集都有上确界”这一性质来表述，是本章乃至整个分析的核心。

上确界与下确界的定义

定义 20 (上确界)**.** *设 $A \subset \mathbb{R}$ 非空且有上界。若实数 s 满足*

1. *s 是 A 的上界：对任意 $x \in A$，有*
$$x \le s;$$
2. *s 在所有上界中最小：对任意 $M \in \mathbb{R}$，若 M 也是 A 的上界（即 $\forall x \in A,\ x \le M$），则*
$$s \le M,$$

*则称 s 为 A 的*上确界（*least upper bound*），*记作*

$$s = \sup A.$$

直观地说，上确界一方面“足够大”（是上界），另一方面在所有上界中“尽量小”。

定义 21 (下确界)**.** *设 $A \subset \mathbb{R}$ 非空且有下界。若实数 t 满足*

1. *t 是 A 的下界：对任意 $x \in A$，有*
$$x \ge t;$$

2. t 在所有下界中最大：对任意 $m \in \mathbb{R}$，若 m 也是 A 的下界（即 $\forall x \in A,\ x \geq m$），则

$$t \geq m,$$

则称 t 为 A 的下确界（*greatest lower bound*），记作

$$t = \inf A.$$

完备性公理与最大值/最小值的关系

[实数的完备性公理] 若 $A \subset \mathbb{R}$ 非空且有上界，则 $\sup A$ 在 $\mathbb{R}$ 中存在且唯一。

若 $A \subset \mathbb{R}$ 非空且有下界，则 $\inf A$ 在 $\mathbb{R}$ 中存在且唯一。

这条公理一般作为实数系的本质特征来使用。相比之下，有理数 $\mathbb{Q}$ 并不满足这一完备性性质。

[最大值/最小值与上确界/下确界的关系] 设 $A \subset \mathbb{R}$ 非空。

1. 若 $\max A$ 存在，记 $\max A = M$，则

$$\sup A = M.$$

2. 若 $\sup A$ 存在且 $\sup A \in A$，记 $\sup A = s$，则

$$\max A = s.$$

3. 对偶地，若 $\min A$ 存在，则 $\inf A = \min A$；若 $\inf A$ 存在且 $\inf A \in A$，则 $\min A = \inf A$。

也就是说：

- 最大值/最小值是“确界刚好落在集合内部”的特殊情形；
- 当“端点不在集合里”时，最大值/最小值可能不存在，但上确界/下确界依然存在。

上确界的 ε–刻画

下面给出一个在实际证明中更常用的等价刻画：利用“任意接近”的 ε 语言来描述上确界。

[上确界的 ε–刻画] 设 $A \subset \mathbb{R}$ 非空且有上界。实数 S 是 A 的上确界，当且仅当同时满足：

1. S 是 A 的上界，即

$$\forall x \in A,\ x \leq S;$$

2. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $x \in A$，使得

$$S - \varepsilon < x \le S.$$

直观理解：

- 第一条保证 S 不会太小（否则压不住 A）；
- 第二条保证 S 不会太大——你随便往左挖掉一小段 $(S-\varepsilon, S]$，都一定能撞到 A 的点。

证明. "$\Rightarrow$"：设 $S = \sup A$。第一条由"上界"的定义立即得到。要证第二条，取任意 $\varepsilon > 0$，用反证法：若不存在 $x \in A$ 满足 $S - \varepsilon < x \le S$，则

$$\forall x \in A,\ x \le S - \varepsilon.$$

于是 $S - \varepsilon$ 也是 A 的上界，而且 $S - \varepsilon < S$，这与 S 是最小上界矛盾。故必存在 $x \in A$ 满足

$$S - \varepsilon < x \le S.$$

"$\Leftarrow$"：反过来，假设 S 满足上述两条。第一条说明 S 是上界。现设 M 是 A 的任一上界，要证 $S \le M$。若不然，假设 $M < S$，则令

$$\varepsilon := S - M > 0.$$

由第二条，存在 $x \in A$，使得

$$S - \varepsilon < x \le S.$$

把 $\varepsilon = S - M$ 代入，得到

$$S - (S - M) = M < x \le S,$$

即 $x > M$。但 M 是上界，应有 $x \le M$，矛盾。故假设不成立，只能 $S \le M$。这对任意上界 M 都成立，因此 S 是最小上界，即 $S = \sup A$。 □

下确界的 ε–刻画与此完全对偶：$t = \inf A$ 当且仅当

1. t 是下界：$\forall x \in A,\ x \ge t$；
2. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $x \in A$，使得

$$t \le x < t + \varepsilon.$$

几个典型例子

例 17 (开区间与闭区间)**.**

1. $A=(0,1)$。上界可以取任意 $M\geq 1$，下界可以取任意 $m\leq 0$。容易验证

$$\sup A=1, \qquad \inf A=0,$$

但 $0,1\notin A$，因此 A 无最大值、最小值。

2. $B=[0,1]$。同样有 $\sup B=1$，$\inf B=0$，并且 $0,1\in B$，于是

$$\max B=\sup B=1, \qquad \min B=\inf B=0.$$

例 18 (有理数中的经典例子)**.** 设

$$C:=\{x\in\mathbb{Q}:x^2<2\}\subset\mathbb{R}.$$

在上一节我们已经证明：C 上下有界，但既没有最大值，也没有最小值。

在实数轴上看它，利用完备性公理可知 $\sup C,\inf C$ 一定存在。直观上有

$$\sup C=\sqrt{2}, \qquad \inf C=-\sqrt{2}.$$

上确界 $\sqrt{2}$ 并不属于 C，但可以用 ε–刻画理解为：对任意 $\varepsilon>0$，总能在 C 中找到一个有理数 q，使得

$$\sqrt{2}-\varepsilon<q<\sqrt{2}.$$

这反映了“有理数在实数中的稠密性”。

若仅在 $\mathbb{Q}$ 内部看 C，则 $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$，因此在有理数世界中 C 没有上确界，这也说明了 $\mathbb{Q}$ 不完备。

习题

设

$$A=\left\{1-\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

1. 写出 A 中前几个元素；
2. 求 $\sup A$，$\inf A$，并判断是否有最大值/最小值。

设

$$B=\left\{\frac{n}{n+1}:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

1. 写出 B 中前几个元素；

2. 求 $\sup B$, $\inf B$，并判断是否有最大值/最小值；

3. 比较 B 作为 $\mathbb{Q}$ 的子集和作为 $\mathbb{R}$ 的子集时，其上确界是否有区别。

设 $A \subset \mathbb{R}$ 非空且有上界。证明定理 1.3.2 中上确界的 ε–刻画：

1. 若 $S = \sup A$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $x \in A$，使得

$$S - \varepsilon < x \leq S;$$

2. 反过来，若 S 是 A 的上界且满足上述 ε–性质，则 $S = \sup A$。

习题与学习记录

本小节记录一次实际学习中对习题 1.3.2–1.3.2 的作答、错误与修正。

习题 1.3.2 的解答与分析 [某次学习的回答] (1) 代入前几个 n：

$$\begin{aligned} n &= 1, & 1 - \frac{1}{1} &= 0, \\ n &= 2, & 1 - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}, \\ n &= 3, & 1 - \frac{1}{3} &= \frac{2}{3}, \\ n &= 4, & 1 - \frac{1}{4} &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(2) 观察可知

$$\sup A = 1, \qquad \inf A = 0,$$

并且 $0 \in A$，所以 A 有最小值 $\min A = 0$，而 1 不在 A 中，因此无最大值。

点评：

- 元素展开部分完全正确。
- 对上确界、下确界和最小值的判断也正确。若要更严谨，可以补充说明：对任意 $n \geq 1$，有 $1 - \frac{1}{n} < 1$，因此 1 是上界；若取任意 $M < 1$，则可以选取足够大的 n 使得 $1 - \frac{1}{n} > M$，从而 M 不是上界，这说明 $\sup A = 1$。

[整理后的标准解答] 对任意 $n \in \mathbb{N}$，有 $1 - \frac{1}{n} \leq 1$，因此 1 是 A 的上界。又对任意 $M < 1$，取 $n > \frac{1}{1-M}$，则

$$1 - \frac{1}{n} > 1 - (1 - M) = M,$$

故 M 不是上界，从而 $\sup A = 1$。另一方面，$n = 1$ 时有 $1 - \frac{1}{1} = 0 \in A$，并且对任意 $n \geq 1$，有 $1 - \frac{1}{n} \geq 0$，因此 $\inf A = 0$，且 $\min A = 0$。由于 1 不在 A 中，所以 A 无最大值。

习题 1.3.2 的解答与分析 [某次学习的回答] (1) 代入前几个 n：

$$\begin{aligned} n &= 1, & \frac{n}{n+1} &= \frac{1}{2}, \\ n &= 2, & \frac{n}{n+1} &= \frac{2}{3}, \\ n &= 3, & \frac{n}{n+1} &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

于是可类比上一题得到

$$\sup B = 1, \qquad \inf B = \frac{1}{2}.$$

且 $\min B = \inf B = \frac{1}{2}$，而 1 不在 B 中，因此无最大值。

(3) 无论 B 被看作 $\mathbb{Q}$ 的子集还是 $\mathbb{R}$ 的子集，其上确界都为

$$\sup B = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

这里的 1 本身是有理数，因此在 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 中都是同一个数，且都不属于 B。

点评：

- 把 B 写成 $1 - \frac{1}{n+1}$ 的形式非常自然，直接继承上一题的结构。
- 关于“作为 $\mathbb{Q}$ 的子集与作为 $\mathbb{R}$ 的子集”这一点，你正确地意识到：因为 $1 \in \mathbb{Q}$，所以两种视角下的上确界是一致的，不像例 18 那样会产生差别。

[整理后的标准解答] 对任意 $n \in \mathbb{N}$，

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$

故 1 是 B 的上界。若取 $M < 1$，则可取 $n > \frac{1}{1-M}$，使得

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - (1 - M) = M,$$

从而 M 不是上界，这说明 $\sup B = 1$，而 1 不在 B 中，因此无最大值。

另一方面，$n = 1$ 时有 $\frac{1}{2} \in B$，且若 $n \geq 1$，则

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

因此 $\inf B = \frac{1}{2}$，且 $\min B = \frac{1}{2}$。

由于 $1 \in \mathbb{Q}$，把 B 视作 $\mathbb{Q}$ 的子集或视作 $\mathbb{R}$ 的子集时，其上确界均为 1。

习题 1.3.2 的解答与分析 [某次学习的初始思路] (1) 方向一：设 $A \subset \mathbb{R}$ 非空有上界，且 $S = \sup A$。原始草稿中写道：

“由确界存在原理，A 在 $\mathbb{R}$ 中一定有上确界。设 m 为 A 在 $\mathbb{R}$ 中的上确界，则

$$\forall a \in A,\ m \geq a, \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists a' \in A \ \text{ s.t. } m - \varepsilon < a' \leq m.$$

”

(2) 方向二：设 S 是上界且满足 ε 性质。原始草稿的想法是：假设存在某个上界 $m < S$，取 $\varepsilon = S - m$，利用

$$S - \varepsilon < a' \leq S$$

推导出 $a' > m$，与 m 是上界矛盾，从而说明 S 是最小上界。

错误与卡点说明：

- 在方向一中，“由确界存在原理，$\forall \varepsilon > 0, \exists a' \in A$ 使得 $m - \varepsilon < a' \leq m$” 这一句，其实正是我们要证明的性质，不能当作“原理”直接使用。正确做法是以“m 是最小上界”为出发点，用反证法推出这一条。

- 在方向二中，你的总体思路是对的：假设存在更小的上界 $m < S$，令 $\varepsilon = S - m$，然后利用 ε–性质得到矛盾。只需要把“对任意上界 M 均有 $S \leq M$”这一点明确写出，符号规范一点就很好。

[方向一的标准解答] 设 $S = \sup A$。第一条“S 是上界”由上确界定义立刻得到。下面证明第二条。

固定任意 $\varepsilon > 0$。若不存在 $x \in A$ 满足 $S - \varepsilon < x \leq S$，则对所有 $x \in A$ 都有 $x \leq S - \varepsilon$，即 $S - \varepsilon$ 也是 A 的上界。由于 $S - \varepsilon < S$，这与 S 是最小上界矛盾。故否定命题不成立，必存在 $x \in A$ 满足

$$S - \varepsilon < x \leq S.$$

[方向二的标准解答] 假设 S 是 A 的上界，即对任意 $a \in A$ 有 $a \leq S$，并且满足：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $x \in A$ 使

$$S - \varepsilon < x \leq S.$$

要证 $S = \sup A$，只需证明 S 是最小上界：即对任意 M，若 M 是 A 的上界，则 $S \leq M$。

设 M 为 A 的任一上界。若 $M \geq S$，则已满足 $S \leq M$；否则假设 $M < S$。此时令

$$\varepsilon := S - M > 0.$$

由 ε–性质，存在 $x \in A$ 使得

$$S - \varepsilon < x \leq S.$$

代入 $\varepsilon = S - M$，得到

$$S - (S - M) = M < x \leq S.$$

于是 $x > M$，但 M 是上界，又应对任意 $x \in A$ 有 $x \leq M$，矛盾。故假设“$M < S$”不成立，只能 $S \leq M$。这对所有上界 M 都成立，因而 S 是最小上界，即 $S = \sup A$。

1.3.3 实数的完备性公理

第二章　数列极限与实数完备性

第三章　函数极限与连续性

3.1　函数极限的 ε–δ 定义

3.2　Heine 定义与序列刻画

3.3　极限运算与复合函数极限

3.4　连续函数与间断点

3.5　闭区间上连续函数的性质

3.5.1　有界性与极值定理

3.5.2　介值定理

3.6　一致连续与紧致区间

第四章　导数、微分与一元函数的性质

4.1　导数的定义与几何意义

4.2　可导与连续的关系

4.3　Rolle 定理与 Lagrange 中值定理

4.4　函数的单调性与极值

4.5　凸函数与二阶导数

4.6　Cauchy 中值定理与 L'Hospital 法则

4.7　Taylor 展开与余项估计

第五章 Riemann 积分与反常积分

5.1 Riemann 积分的定义

5.2 可积条件与分段连续函数

5.3 微积分基本定理

5.4 积分中值定理与积分不等式

5.5 反常积分与收敛判别

第二部分

多元分析与向量分析

第六章　$\mathbb{R}^n$ 中的极限与连续

6.1　$\mathbb{R}^n$ 的向量与范数

6.2　多元数列与极限

6.3　多元函数的极限与连续性

6.4　路径极限与极限不存在的判定

第七章　多元微分与微分学

第八章　多重积分与变量替换

8.1　二重积分与可积性

8.2　Fubini 定理与反复积分

8.3　常见区域上的重积分计算

8.4　变量替换与 Jacobian 行列式

8.5　极坐标、柱坐标与球坐标中的积分

第九章 曲线积分、曲面积分与积分定理

9.1 向量场、梯度、散度与旋度

9.2 曲线积分

9.3 曲面积分

9.4 Green 定理

9.5 Gauss 散度定理

9.6 Stokes 定理

第三部分

无穷级数、函数列与 Fourier 分析

第十章　数项级数

10.1　无穷级数与部分和

10.2　正项级数与比较判别法

10.3　比值判别法与根值判别法

10.4　交错级数与 Leibniz 判别法

10.5　绝对收敛与条件收敛

10.6　幂级数与收敛半径

第十一章　函数列与函数项级数

11.1　点态收敛与一致收敛

11.2　一致收敛的 Cauchy 准则

11.3　Weierstrass M 判别法

11.4　极限与积分的交换

11.5　极限与导数的交换

11.6　幂级数的逐项积分与逐项求导

第十二章　经典 Fourier 分析与调和分析入门

12.1　内积空间与正交展开

12.1.1　内积空间与正交系

12.1.2　Parseval 等式与最小二乘意义

12.2　Fourier 级数

12.2.1　Fourier 系数与部分和

12.2.2　Dirichlet 核与 Fejér 核

12.2.3　Cesàro 平均与 Fejér 定理

12.3　卷积与逼近恒等算子

12.3.1　卷积的定义与基本性质

12.3.2　逼近恒等算子与函数的平滑

12.4　Fourier 变换初步

12.4.1　Fourier 变换在 L^2 上的定义

12.4.2　Plancherel 定理与 Riemann–Lebesgue 引理

12.5　简单应用示例（选学）

第四部分

抽象分析与 Lebesgue 积分入门

第十三章　度量空间与紧致性

13.1　度量空间与开集/闭集

13.2　序列收敛与 Cauchy 序列

13.3　完备性与完备化

13.4　紧致性与 Heine–Borel 定理

13.5　连续性在度量空间中的刻画

13.6　Banach 不动点定理及应用

第十四章　Lebesgue 测度与积分入门

14.1　可测集与测度的直观

14.2　Lebesgue 可测函数

14.3　Lebesgue 积分的构造思想

14.4　收敛定理：单调收敛与主导收敛

14.5　Lebesgue 积分与 Riemann 积分的比较

14.6　与概率论的联系：随机变量与期望

附录 A　常用不等式与技巧总结

A.1　经典不等式

A.2　极限与估计的常用方法

A.3　积分与级数的常用判别法

附录 B　习题来源与参考书目

B.1　习题来源

B.2　参考书推荐