Cálculo de Probabilidades 2: Proyecto
Semestre: Primavera 2023
Prof: Eduardo Martínez Mayorga

Instrucciones: El proyecto se contesta en parejas. Se debe responder con R mediante un archivo .qmd compilado con Quarto para R, publicado en línea (sugerencia, usar Netlify [https://www.netlify.com]). Se debe poner el link de su sitio en Canvas a más tardar las 18:00 hrs del miércoles 10 de mayo de 2023. No seguir estas instrucciones implicará que el examen no sea considerado.

1. Considere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas todas con distribución exponencial con media 5. También considere $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas todas con distribución exponencial con media 15 e independientes de los X_is. Defina la cantidad

$$T = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j}$$

   (a) Tome $m = 20$. Simule $n = 10, 100, 1000, 1000$ X_is y Y_js y sugiera una posible distribución.

   (b) Tome $n = 20$. Simule $m = 10, 100, 1000, 1000$ X_is y Y_js y sugiera una posible distribución.

   (c) Encuentre la distribución de T

2. Considere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas todas con distribución normal estándar. Defina

$$U = \frac{\sqrt{n}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n]}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$$

   Haga $n = 10, 100, 1000, 10000$ simulaciones de U y sugiera una posible distribución para U

3. Considere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas todas con distribución $Unif(0, 5)$. Defina

$$U = \text{máx}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} - 5$$

   Haga $n = 10, 100, 1000, 10000$ simulaciones de U y sugiera una posible distribución para U

4. Se lanzan 3 dados balanceados. Sea X la suma de las caras.

   (a) Para $n = 100, 1000, 10000, 100000$ haga n simulaciones para obtener la función de masa de probabilidad aproximada de X.

   (b) Usando las funciones de las librería ‘patchwork‘ y ‘ggplot2‘ ponga en un mismo gráfico las cuatro gráficas de las funciones de masa del inicio anterior.

(c) Para $n = 10, \dots, 100000$ haga n simulaciones para obtener un estimado de la probabilidad $\mathbb{P}(X \leq 3)$. Ponga en un gráfico n en el eje horizontal y la probabilidad en el eje vertical.

5. Una urna tiene 7 bolas numeradas del 1 al 7. Se sacan 2 bolas de la urna SIN reemplazo. Sea X la suma del números en las bolas.

   (a) Para $n = 100, 1000, 10000, 100000$ haga n simulaciones para obtener la función de masa de probabilidad aproximada de X.

   (b) Usando las funciones de las librería 'patchwork' y 'ggplot2' ponga en un mismo gráfico las cuatro gráficas de las funciones de masa del inicio anterior.

   (c) Para $n = 10, \dots, 100000$ haga n simulaciones para obtener un estimado de la probabilidad $\mathbb{P}(X \leq 10)$. Ponga en un gráfico n en el eje horizontal y la probabilidad en el eje vertical.

6. Una urna tiene 7 bolas numeradas del 1 al 7. Se sacan 2 bolas de la urna CON reemplazo. Sea X la suma del números en las bolas.

   (a) Para $n = 100, 1000, 10000, 100000$ haga n simulaciones para obtener la función de masa de probabilidad aproximada de X.

   (b) Usando las funciones de las librería 'patchwork' y 'ggplot2' ponga en un mismo gráfico las cuatro gráficas de las funciones de masa del inicio anterior.

   (c) Para $n = 10, \dots, 100000$ haga n simulaciones para obtener un estimado de la probabilidad $\mathbb{P}(X \leq 10)$. Ponga en un gráfico n en el eje horizontal y la probabilidad en el eje vertical.

7. En un salón de clases del curso de Cálculo de Probabilidad 2 hay 50 estudiantes. Cada estudiante pone en papel su clave única (CU) y lo introduce en una urna común. Posteriormente dichxs estudiantes toman un papel de la urna. Sea X el número de alumnos que sacaron el papelito con su clave única.

   (a) Para $n = 100, 1000, 10000, 100000$ haga n simulaciones para obtener la función de masa de probabilidad aproximada de X.

   (b) Usando las funciones de las librería 'patchwork' y 'ggplot2' ponga en un mismo gráfico las cuatro gráficas de las funciones de masa del inicio anterior.

   (c) Para $n = 10, \dots, 100000$ haga n simulaciones para obtener un estimado de la probabilidad $\mathbb{P}(X \leq 15)$. Ponga en un gráfico n en el eje horizontal y la probabilidad en el eje vertical.

8. Simule tantos números uniformes en el intervalo (0,1) hasta que su suma sea mayor o igual que 1. Sea N el número de sumando requeridos para alcanzar dicho objetivo. Por ejemplo si obtuvo los números 0.35, 0.58, 0.22 se tiene que $N = 3$ (pues se necesitó 3 sumandos para que la suma sea mayor ó igual que 1).

   (a) Para $n = 100, 1000, 10000, 100000$ haga n simulaciones para obtener la función de masa de probabilidad aproximada de N.

   (b) Usando las funciones de las librería 'patchwork' y 'ggplot2' ponga en un mismo gráfico las cuatro gráficas de las funciones de masa del inicio anterior.

(c) Para $n = 10, \ldots, 100000$ haga n simulaciones para obtener un estimado del valor esperado de $\mathbb{E}(N)$. Ponga en un gráfico n en el eje horizontal y el valor esperado en el eje vertical.

9. Considere $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, $X_i \sim Unif(0,1)$. Sea $X_{(2)}$ el segundo valor mas de pequeño de estas n X_i's

(a) Para $n = 100, 1000, 10000, 100000$ haga $10,000$ simulaciones para obtener la función de densidad de probabilidad aproximada de $X_{(2)}$.

(b) Usando las funciones de la librería 'patchwork' ponga en un mismo gráfico las cuatro gráficas de las funciones de masa del inicio (a).

(c) ¿Qué densidad diría que tiene $X_{(2)}$?

(d) ¿Es consistente este resultado con ejemplo teórico que se vió en clase?

10. Considere $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, $X_i \sim Unif(-1,1)$. Sea X_{med} la mediana de estas n X_i's, i.e.

$$X_{med} = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{2}[X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}] & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

(a) Para $n = 100, 1000, 10000, 100000$ haga $10,000$ simulaciones para obtener la función de densidad de probabilidad aproximada de X_{med}.

(b) Usando las funciones de la librería 'patchwork' ponga en un mismo gráfico las cuatro gráficas de las funciones de masa del inicio (a).

(c) ¿Qué densidad diría que tiene X_{med}?

11. Considere $X_1, \ldots, X_{999}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $Unif[-1,1]$. También considere $X_{1000} \sim Unif[200, 300]$ independiente de las otras 999 variables aleatorias, i.e. en total se tienen 1000 variables aleatorias independientes.

(a) Para $n = 100, 1000, 10000, 100000$ haga n simulaciones para obtener la función de densidad de probabilidad aproximada de $\bar{X}$.

(b) Usando las funciones de la librería 'patchwork' ponga en un mismo gráfico las cuatro gráficas de las funciones de masa del inicio (a).

(c) ¿Qué densidad diría que tiene $\bar{X}$?

(d) ¿Diría que se violenta el Teorema del Límite Central?

12. Considere $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, $X_i \sim exp(1)$. Sea X_{med} la mediana de estas n X_i's, i.e.

$$X_{med} = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{2}[X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}] & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

(a) Para $n = 100, 1000, 10000, 100000$ haga $10,000$ simulaciones para obtener la función de densidad de probabilidad aproximada de X_{med}.

(b) Usando las funciones de la librería 'patchwork' ponga en un mismo gráfico las cuatro gráficas de las funciones de masa del inicio (a).

(c) ¿Qué densidad diría que tiene X_{med}?

13. Considere $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, $t(1)$.

    (a) Calcule teoricamente $\mathbb{E}(X)$

    (b) Para $n = 100, 1000, 10000, 100000$ haga $10,000$ simulaciones para obtener la función de densidad de probabilidad aproximada de $\bar{X}$, i.e. el promedio aritmético de las observaciones.

    (c) Usando las funciones de la librería ‘patchwork‘ ponga en un mismo gráfico las cuatro gráficas de las funciones de masa del inicio (a).

    (d) ¿Qué densidad diría que tiene $\bar{X}$?

    (e) ¿Diría que se violenta el Teorema del Límite Central?

14. Responda las siguientes preguntas:

    (a) Considere el lanzamiento de 2 dados y sea X la suma sus valores. Lleve a cabo 100,000 simulaciones y obtenga una aproximación de la función de masa de X

    (b) Considere dos hexaedros, uno con todas las caras marcadas con “5”; el otro tiene 3 marcas de “2” y el resto de “6”. Simule el lanzamiento de estos dos dados y sea Y la suma de sus valores. Lleve a cabo 100,000 simulaciones y obtenga una aproximación de la función de masa de Y

    (c) Considere el lanzamiento de dos hexaedros, uno marcado con las etiquetas “1”, “2”, “2”, “3”, “3”, “4” en cada cara; el otro tiene las etiquetas “1”, “3”, “4”, “5”, “6” y “8”. Sea Z la suma de sus valores. Lleve a cabo 100,000 simulaciones y obtenga una aproximación de la función de masa de Z.

    (d) ¿Qué puede decir de las densidades de X, Y y Z?