



程序设计思维与实践 预 习 版

Thinking and Practice in Programming

动态规划（一） | 内容负责：师浩晏

动态规划热身

- 例题1.爬台阶问题：
 - TT想去图书馆学习，他现在要爬台阶进去，其中：一共有 n 级台阶，一步可以走 1 阶或 2 阶，问走到第 n 阶有多少种方案。
 - $n \leq 1000000$
 - $n = 2, \text{ ans} = 2$
 - 1+1
 - 2
 - $n = 4, \text{ ans} = 5$
 - 1+1+1+1
 - 1+1+2
 - 1+2+1
 - 2+1+1
 - 2+2

动态规划热身

● 例题2. 爬台阶问题 II (作业) :

- 还是TT, 他要去 N3 楼做实验, 要爬台阶到三楼, 其中一共有 n 级台阶, 一步可以走 1, 2, 3, ..., k 阶, 诶, 同时有些台阶不能落脚, 问走到第 n 阶的方案数。
- $n \leq 1000000$
- $n = 4$, 不能落脚的台阶 = [2], $k = 2$, $\text{ans} = 1$
 - $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$
- $n = 5$, 不能落脚的台阶 = [2], $k = 3$, $\text{ans} = 5$
 - $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$
 - $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$
 - $0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$
 - $0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$
 - $0 \rightarrow 3 \rightarrow 5$

动态规划热身

- 例题3. 最大区间和：
 - N 个数字，每个数字 $\in [-1e9, 1e9]$ ，TT想选定一个区间使得和最大，求这个和。
 - $[1, 2, 3, 4, 5] \rightarrow [1, 2, 3, 4, 5]$
 - $[1, 2, -100, 4, 5] \rightarrow [1, 2, -100, 4, 5]$
 - $n \leq 1000000$

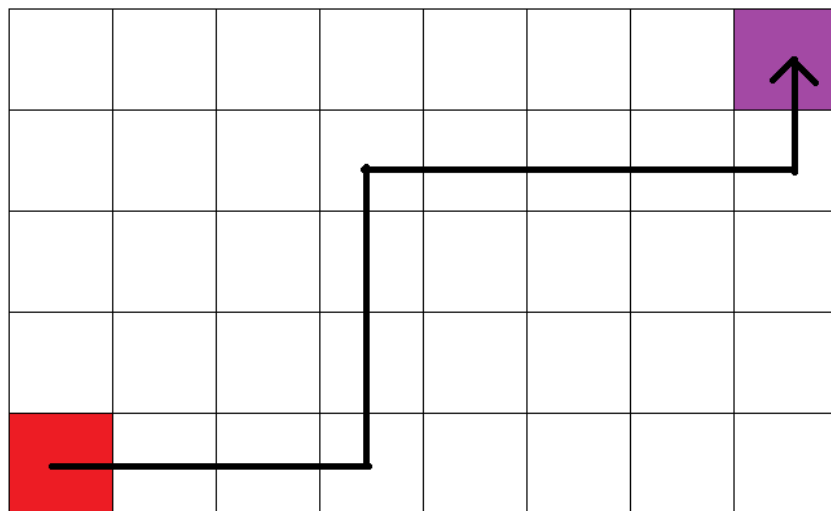
动态规划热身

- 例题4. 最大区间和 II:
 - 在 例题3 的基础上, π 会一个魔法, 使得其中一个数变成 x , 如果这个魔法至多能使用 1 次, 求最大区间和。
 - $x = 100$, $[1, 2, 3, 4, 5] \rightarrow [100, 2, 3, 4, 5]$
 - $x = 100$, $[1, 2, -100, 4, 5] \rightarrow [1, 2, 100, 4, 5]$
 - $n \leq 1000000$

动态规划热身

- 例题5. 走地图：

- TT在一个 $n \times m$ 的地图上，起点为左下角，终点为右上角，TT只能向右或向上行走，询问走到终点的方案数。
- $n, m \leq 1000$
- （其实可以通过排列组合解决，可以自行思考）
- 假定有些点存在障碍物而不可行走，又应当如何设计？



动态规划热身

- 例题6. 拿数问题（作业）：

- 给 n 个数，每一步能拿走一个数，比如拿第 i 个数， $A_i = x$ ，得到相应的分数 x ，但拿掉这个 A_i 后， $x+1$ 和 $x-1$ (如果有 $A_j = x+1$ 或 $A_j = x-1$ 存在) 就会变得不可拿（但是有 $A_j = x$ 的话可以拿这个 x ）。求最大分数。
- $n, A_i \leq 100000$

动态规划热身

- 例题7. TT弹钢琴：

- TT最近喜欢弹钢琴(在梦中)，一段旋律中的每个音符都可以用一个小写英文字母表示。当组成一段旋律的字符 ASCII 码是非递减的，旋律被称为是高昂的，例如 aaa,bcd.

现在TT已经学会了 n 段高昂的旋律，他想利用它们拼接处一个尽可能长的高昂的旋律，问最长长度是多少？ ($n \leq 1e6$, 字符串长度和 $\leq 1e6$)

- 5
bcdefhijk
bcd
aaa
eeeefghhh
zzzz

- 答案是 19 (aaa, bcd, eeeefghhh, zzz)

动态规划热身

- 例题8. 矩阵选数（作业）：

- 给定一个矩阵 $3 \times n$ ，比如

5 10 5 4 4

1 7 8 4 0

3 4 9 0 3

从每一列选择一个数，得到一个序列

- 序列“相邻两数差值的绝对值”求和
- 让这个和尽可能小

- $n \leq 1000000$

- 比如这里就是 5 4 5 4 4，使得 $|4-5|+|5-4|+|4-5|+|4-4|$ 最小，输出是 3

动态规划热身

练习题 1：山大青岛校区给同学们装空调。海信公司派出了 n 批施工队伍帮助大家装空调，每一个施工队最多负责 10 个宿舍。但是为了避免人员浪费，海信希望我们让每一个施工队所负责的宿舍尽可能多，所以承诺给予我们一定的经济补贴。

宿舍数目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
补贴金额	1	4	7	8	9	16	18	22	23	24

如果我们让一个施工队负责 1 间宿舍，那么补贴就是 1 元，如果我们让一个施工队负责 4 间宿舍，那么补贴就是 8 元，我们准备先给 55 间宿舍装空调，测试一下施工队的水平。现在委派你与海信进行交涉。

(1) 最少使用几个施工队，我们可以拿到多少补贴？

且工程队的数量尽可能多

(2) 我们想拿到尽可能多的补贴，需要多少个施工队？（设计动态规划算法，并给出详细的计算步骤）

动态规划热身

● 例题10. 装风力发电机：

练习题 4 :我们要沿着道路放置风力发电机以产生能量。由于地理原因,道路上共有 n 个位置可放置发电机,但是为了更高效,两个发电机之间的距离必须至少为 D 。可放置发电机的位置 d_1, d_2, \dots, d_n 作为线上的坐标给出,其中,第 i 个位置和最左边位置的距离为 d_i , 且满足 $d_1 = 0, d_i < d_{i+1}$ 。在 i 位置风力发电机产生的能量为 $e_i > 0$ 。如何安排风力发电机的位置以产生最大化的能量?

- (1) 举一个反例说明以下贪心策略不一定得到最优解：“每次均选择一个能产生最大能量的位置，直到无法再放置风力发电机”。

(1)举例： $d = [0, 1, 2, 3], e = [4, 5, 4, 1], D = 2$ 。根据题设贪心策略，解为 $t = [\times, \sqrt{}, \times, \sqrt{}]$ （最大化能量为 $5 + 1 = 6$ ），然而最优解为 $t = [\sqrt{}, \times, \sqrt{}, \times]$ （最大化能量为 $4 + 4 = 8$ ）。

- (2) 设计动态规划算法，尽可能高效的得到最大化的能量。

经典问题

- 最长上升子序列
 - 给定 n 个整数 A_1, A_2, \dots, A_n ，按从左到右的顺序选出尽量多的整数，组成一个上升子序列。输出最长上升子序列的长度。
 - $n \leq 1000000$
 - 例如，序列 1,6,2,3,7,5
 - 上升子序列可以是 1,6,2,3,7,5；也可以是 1,6,2,3,7,5
 - 最长上升子序列为 1,2,3,5，其长度为 4，故 $\text{ans} = 4$

经典问题

- 最长公共子序列
 - 给两个序列 $A[1..n]$ 和 $B[1..m]$, 求长度最大的公共子序列的长度
 - $n, m \leq 5000$
 - 例如:
A – 1,5,2,6,8,7
B – 2,3,5,6,9,8,4
 - 最长公共子序列为:
A – 1,5,2,6,8,7
B – 2,3,5,6,9,8,4 或
A – 1,5,2,6,8,7
B – 2,3,5,6,9,8,4