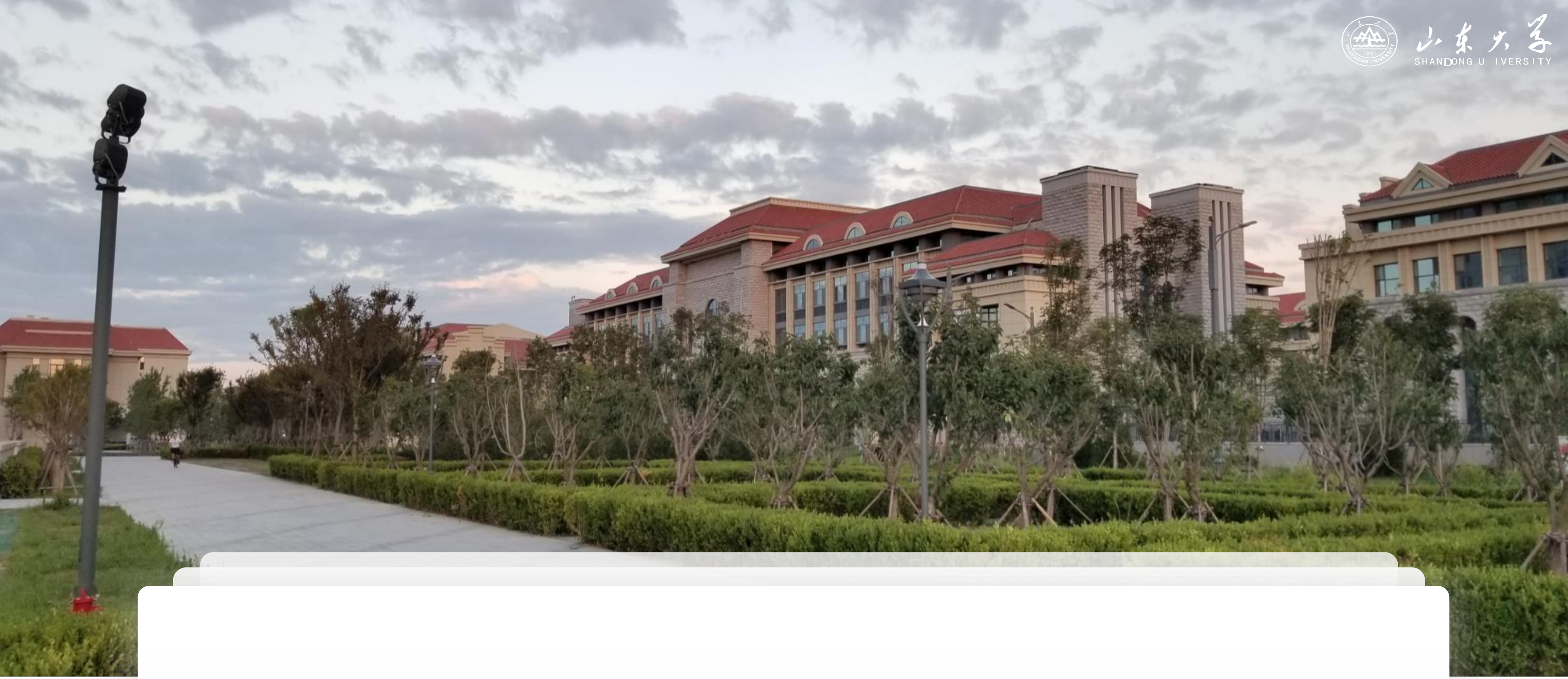
程序设计思维与实践

Thinking and Practice in Programming

矩阵快速幂 | 内容负责：师浩晏

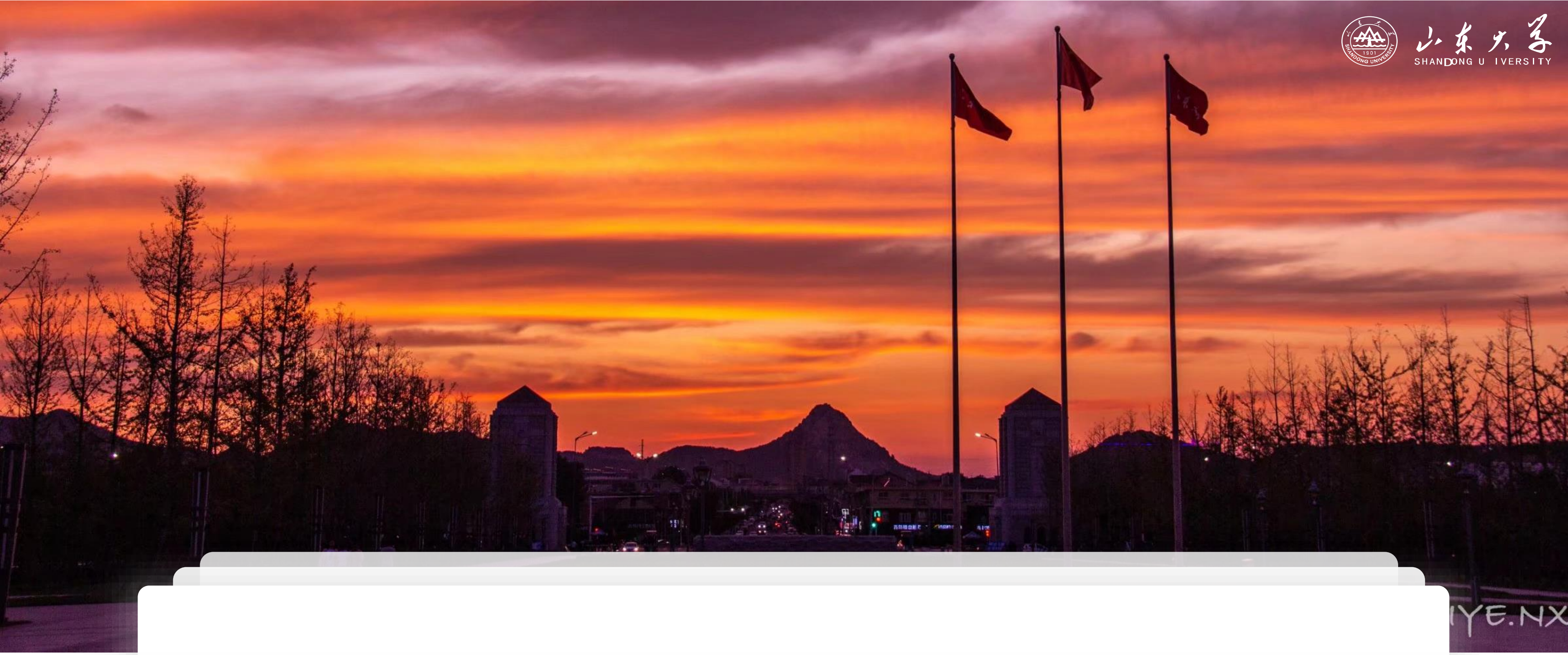


1 课 程 脉 络

The outline of course

课程脉络


矩阵快速幂
基础知识
矩阵乘法
矩阵快速幂
三大应用
快速求解线性递推式
例题 1
自然数幂前缀和
例题 2
矩阵快速幂优化 DP
例题 3
例题 4



2 矩 阵 乘 法

Matrix multiplication

矩阵乘法

1 预备知识

1.1 矩阵

矩阵可以看成一个$n \times m$的数表，其中n, m都是正整数。例如：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

一般可以用$\mathbf{A}[i, j]$表示第i行第j个数。

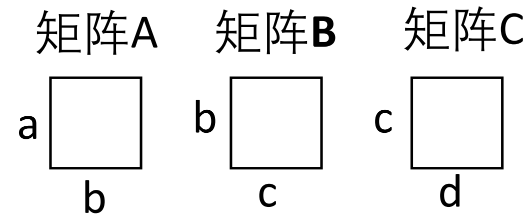
1.2 矩阵乘法

定义矩阵**A**,**B**。**A**和**B**可以作乘法操作当且仅当**A**的大小是$a \times b$，**B**的大小是$b \times c$，其中a, b, c皆为正整数。设矩阵$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$，则**C**的大小是$a \times c$，且有

$$\mathbf{C}[i, j] = \sum_{k=1}^{b} \mathbf{A}[i, k]\, \mathbf{B}[k, j] \quad (1 \le i \le a, 1 \le j \le c) \tag{1}$$

而且矩阵乘法满足结合律，即$(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{BC})$。设$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$的大小分别为$a \times b, b \times c, c \times d$，证明如下：

矩阵乘法



$$
\begin{aligned}
((\mathbf{AB})\,\mathbf{C})\,[i,j]
&= \sum_{l=1}^{c}\left(\sum_{k=1}^{b}\mathbf{A}\,[i,k]\,\mathbf{B}\,[k,l]\right)\mathbf{C}\,[l,j] \\
&= \sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}\mathbf{A}\,[i,k]\,\mathbf{B}\,[k,l]\,\mathbf{C}\,[l,j] \qquad (2) \\
&= \sum_{k=1}^{b}\mathbf{A}\,[i,k]\left(\sum_{l=1}^{c}\mathbf{B}\,[k,l]\,\mathbf{C}\,[l,j]\right) \\
&= (\mathbf{A}\,(\mathbf{BC}))\,[i,j]
\end{aligned}
$$

而$(\mathbf{AB})\,\mathbf{C}$和$\mathbf{A}\,(\mathbf{BC})$的大小都是$a \times d$，得证。

直接按照定义进行矩阵乘法时间复杂度是$O\,(abc)$，其中a, b, c分别表示两个矩阵大小是$a \times b$以及$b \times c$。将两个$N \times N$的矩阵相乘，朴素算法的时间复杂度为$O\,(N^3)$。其他有一些算法有更低的复杂度，例如 Strassen 算法时间复杂度约为$O\,(N^{2.81})$。而现有的算法中理论复杂度最低的是 Coppersmith—Winograd 算法，时间复杂度约为$O\,(N^{2.36})$。

矩阵乘法

- 矩阵 A，B 的大小分别为 a x b 和 b x c
- 设 C = AB，则 C 的大小为 a x c

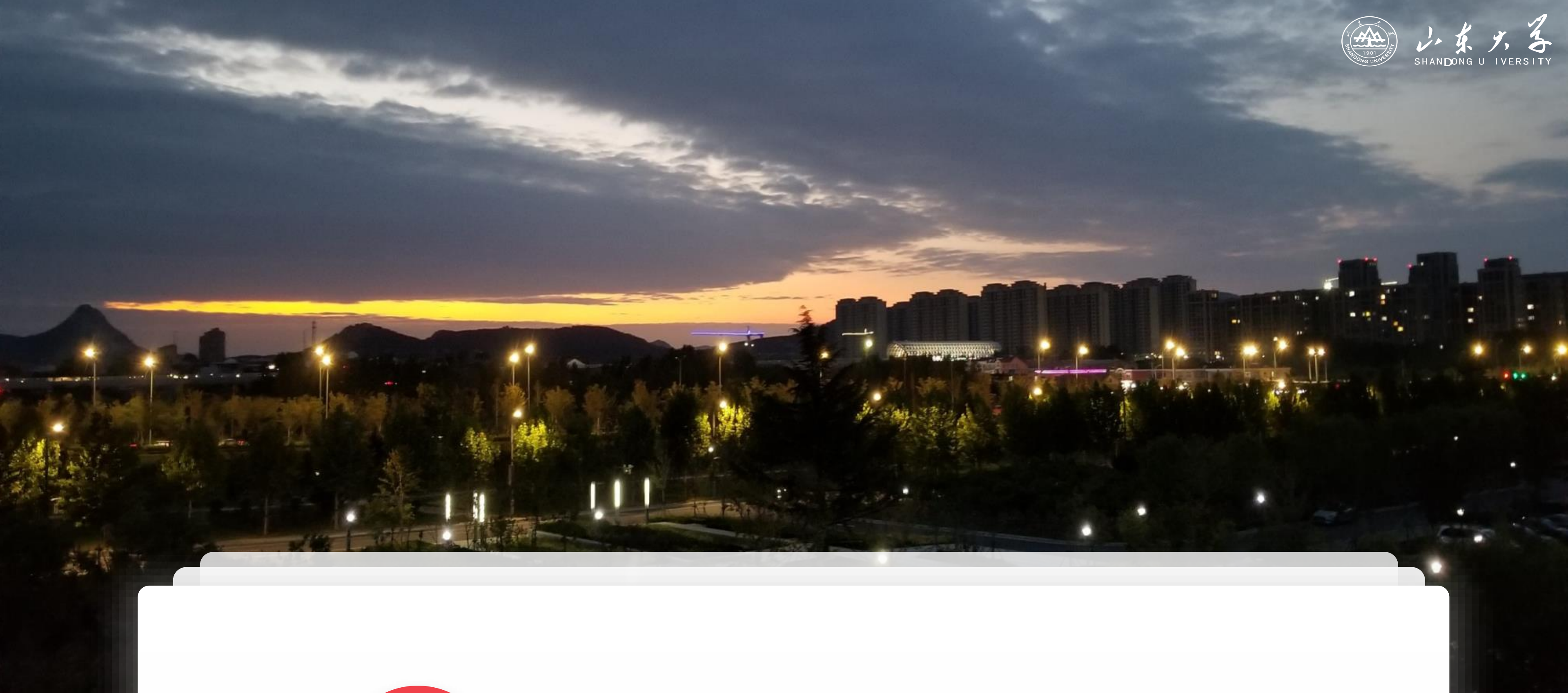
```
for(int i = 1; i <= a; i++) {
    for(int j = 1; j <= c; j++) {
        C[i][j] = 0;
        for(int k = 1; k <= b; k++) {
            C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
        }
    }
}
```

- 一般我们只考虑方阵，即 A、B 的大小都是 n x n

矩阵乘法

- 推荐封装成一个结构体并且重载乘法运算符

```
const int N = 3;
struct Matrix {
    int x[N][N];
    Matrix operator*(const Matrix& t) const {
        Matrix ret;
        for(int i = 0; i < N; ++i) {
            for(int j = 0; j < N; ++j) {
                ret.x[i][j] = 0;
                for(int k = 0; k < N; ++k) {
                    ret.x[i][j] += x[i][k] * t.x[k][j];
                }
            }
        }
        return ret;
    }
    // 强烈建议实现构造函数和复制构造!!!避免出现奇怪bug!!!
    Matrix() { memset(x, 0, sizeof x); }
    Matrix(const Matrix& t) { memcpy(x, t.x, sizeof x); }
};
```



3 矩阵快速幂

Fast Power of Matrix

矩阵快速幂

- 问题引入
  - 给定矩阵 A，请快速计算出 A^n（n 个矩阵 A 相乘）的结果，输出的每个数都 % p

矩阵快速幂

- 简单回顾
  - $2^{61} = 2^{32} \times 2^{16} \times 2^{8} \times 2^{4} \times 2^{1}$ (结合律)
  - $2^{61} = (2^{32})^{1} \times (2^{16})^{1} \times (2^{8})^{1} \times (2^{4})^{1} \times (2^{2})^{0} \times (2^{1})^{1}$

```
long long quick_pow(long long a, long long x) {
    long long ans = 1;
    while (x) {
        if (x & 1)  ans = ans * a;
        a = a * a;
        x >>= 1;
    }
    return ans;
}
```

- 快速幂利用了运算满足结合律这一性质，只要某种运算满足结合律，都可以使用快速幂。
  - 例如：快龟速乘

矩阵快速幂

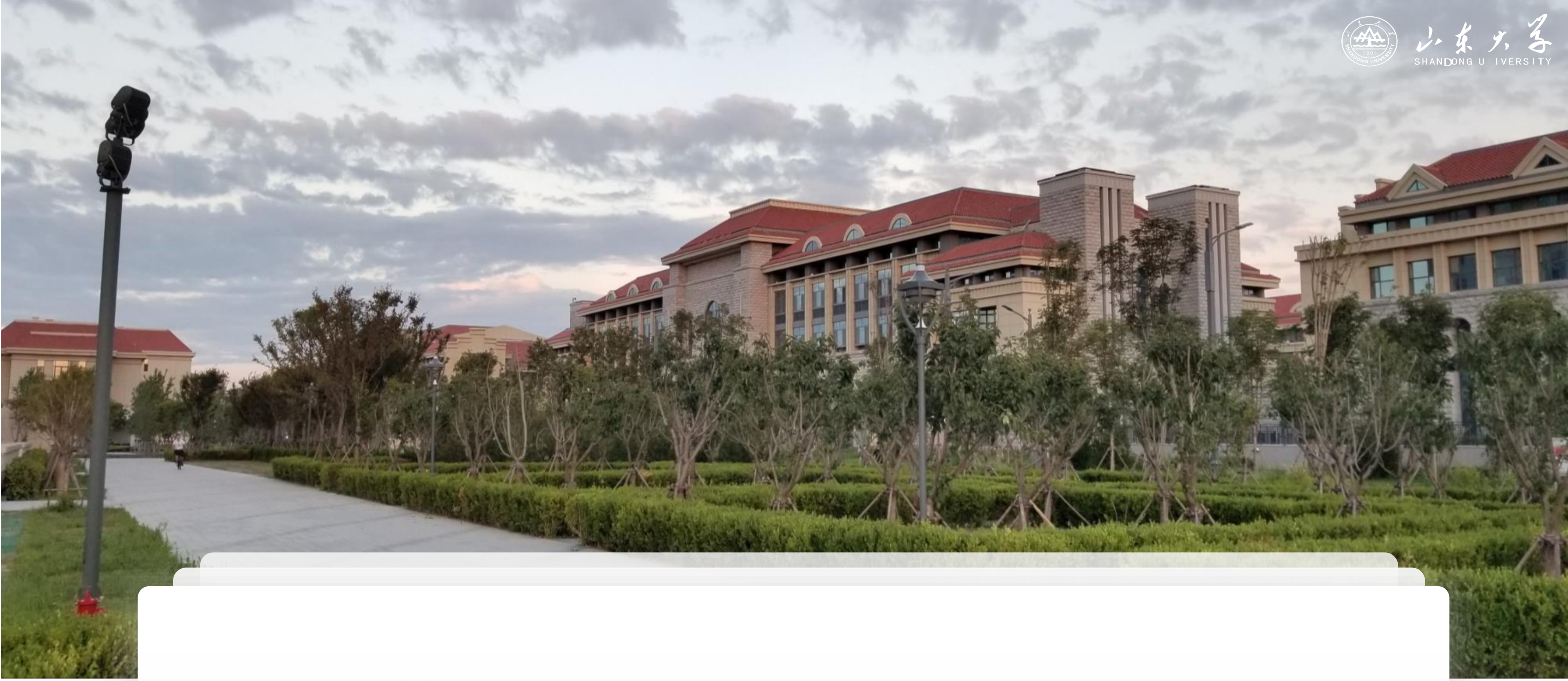
- 矩阵乘法运算也满足结合律
- 矩阵快速幂！
  - 矩阵乘法中的单位元为单位矩阵 E
  - 快速幂中的乘法替换成矩阵乘法

```
Matrix quick_pow(Matrix a, int x) {
    Matrix ret;
    /* 以2*2的矩阵为例
        1 0
        0 1
    */
    ret.x[0][1] = ret.x[1][0] = 0;
    ret.x[0][0] = ret.x[1][1] = 1;
    while (x) {
        if(x & 1)    ret = ret * a;   // 重载*运算符
        a = a * a;
        x >>= 1;
    }
    return ret;
}
```

矩阵快速幂

```cpp
const int N = 2;
struct Matrix {
    int x[N][N];
    Matrix operator*(const Matrix& t) const {
        Matrix ret;
        for(int i = 0; i < N; ++i) {
            for(int j = 0; j < N; ++j) {
                ret.x[i][j] = 0;
                for(int k = 0; k < N; ++k) {
                    ret.x[i][j] += x[i][k] * t.x[k][j] % p;
                    ret.x[i][j] %= p;
                }
            }
        }
        return ret;
    }
    // 强烈建议实现构造函数和复制构造!!!避免出现奇怪bug!!!
    Matrix() { memset(x, 0, sizeof x); }
    Matrix(const Matrix& t) { memcpy(x, t.x, sizeof x); }
};

Matrix quick_pow(Matrix a, int x) {
    Matrix ret;
    /* 以2*2的矩阵为例
        1 0
        0 1
    */
    ret.x[0][1] = ret.x[1][0] = 0;
    ret.x[0][0] = ret.x[1][1] = 1;
    while (x) {
        if(x & 1)   ret = ret * a;  // 重载*运算符
        a = a * a;
        x >>= 1;
    }
    return ret;
}
```



4

求解线性递推

Linear recursive

求解线性递推

- 再说斐波那契
  - 求解斐波那契第 N 项 % P 的余数
  - $N \le 10^9$，$P \le 10^8$

- 斐波那契数列

$$f(n)=\begin{cases}1 & ,\quad n=1,2\\ f(n-1)+f(n-2) & ,\quad n\ge 3\end{cases}$$

求解线性递推

- 再说斐波那契
  - 朴素做法：递推，维护两个数不断滚动
  - 它是怎么推导的？

初始：$\begin{bmatrix} f_2 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

推导出 $\begin{bmatrix} f_3 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

推导出 $\begin{bmatrix} f_4 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

推导出 $\begin{bmatrix} f_5 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

推导出 $\begin{bmatrix} f_6 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\cdots$

求解线性递推

- 再说斐波那契
  - 朴素做法：递推，维护两个数不断滚动

旧向量 新向量

$$\begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} f_{n} \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$f_n = 1 \times f_{n-1} + 1 \times f_{n-2}$$
$$f_{n-1} = 1 \times f_{n-1} + 0 \times f_{n-2}$$

求解线性递推

- 再说斐波那契
  - 朴素做法：递推，维护两个数不断滚动

旧向量 新向量

$$\begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix}$$

求解线性递推

- 斐波那契数列

$$f(n)=\begin{cases}1 & ,\quad \mathrm{n}=1,2\\ f(n-1)+f(n-2), & \mathrm{n}\geq 3\end{cases}$$

- 矩阵快速幂

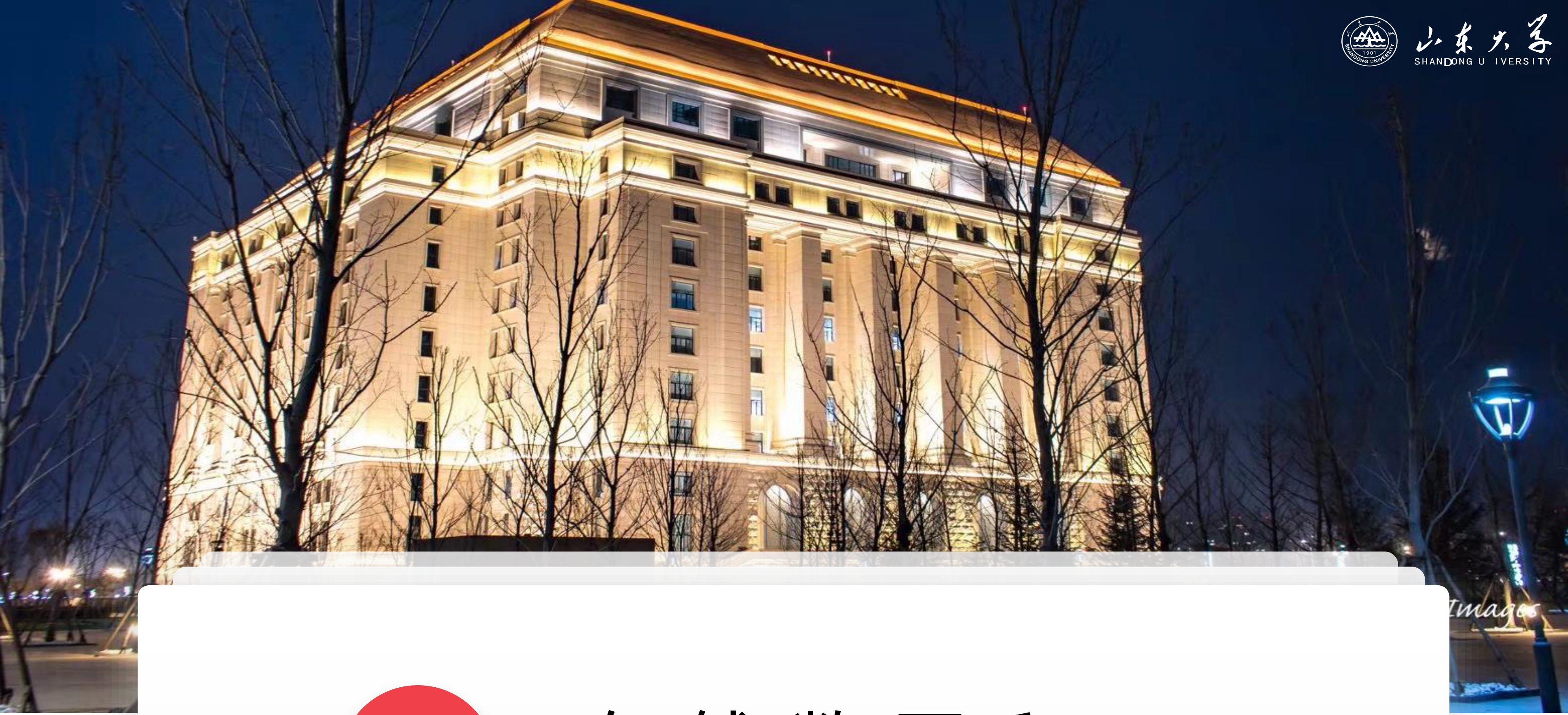
$$\begin{bmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(n-1) \\ f(n-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} f(n-2) \\ f(n-3) \end{bmatrix}$$

$$= \cdots\cdots = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{n}-2} \cdot \begin{bmatrix} f(2) \\ f(1) \end{bmatrix}$$

求解线性递推

- 如下式子应该如何求解?
  - $f(n) = 2 * f(n-1) + 4 * f(n-2) + 3 * f(n-3) + 5$
- 更一般的情况，又该如何求解?
  - $f(n) = a_1 * f(n-1) + a_2 * f(n-2) + \cdots + a_k * f(n-k) + b$
- 关键在于如何构造转移矩阵!



5 自然数幂和

Sum of the power

矩阵快速幂

- 问题引入
  - 给定 $n \le 10^9$ 和 $k \le 10$，计算 $\sum_{i=1}^{n} i^k$
- 思路
  - n 很大， k 很小，比较类似于矩阵快速幂的题
  - 可以考虑令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^k$
  - 问题变成了如何构造矩阵，使得可以从 S_{n-1} 推到 S_n

矩阵快速幂

- 令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^k$，推导如下：
  - $S_n = S_{n-1} + n^k$
  - $n^k = (n-1+1)^k$
    $= C_k^0(n-1)^k + C_k^1(n-1)^{k-1} + \cdots + C_k^k(n-1)^0$
  - $n^{k-1} = (n-1+1)^{k-1}$
    $= C_{k-1}^0(n-1)^{k-1} + C_{k-1}^1(n-1)^{k-2} + \cdots$
  - …

矩阵快速幂

- 利用二项式展开构造转移矩阵

$$\begin{bmatrix} S_n \\ n^k \\ n^{k-1} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_k^0 & C_k^1 & C_k^2 & \cdots & C_k^{k-1} & C_k^k \\ 0 & C_k^0 & C_k^1 & C_k^2 & \cdots & C_k^{k-1} & C_k^k \\ 0 & 0 & C_{k-1}^0 & C_{k-1}^1 & \cdots & C_{k-1}^{k-2} & C_{k-1}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{n-1} \\ (n-1)^k \\ (n-1)^{k-1} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

6 矩阵快速幂优化DP

Fast Matrix Exponentiation

动态规划回顾

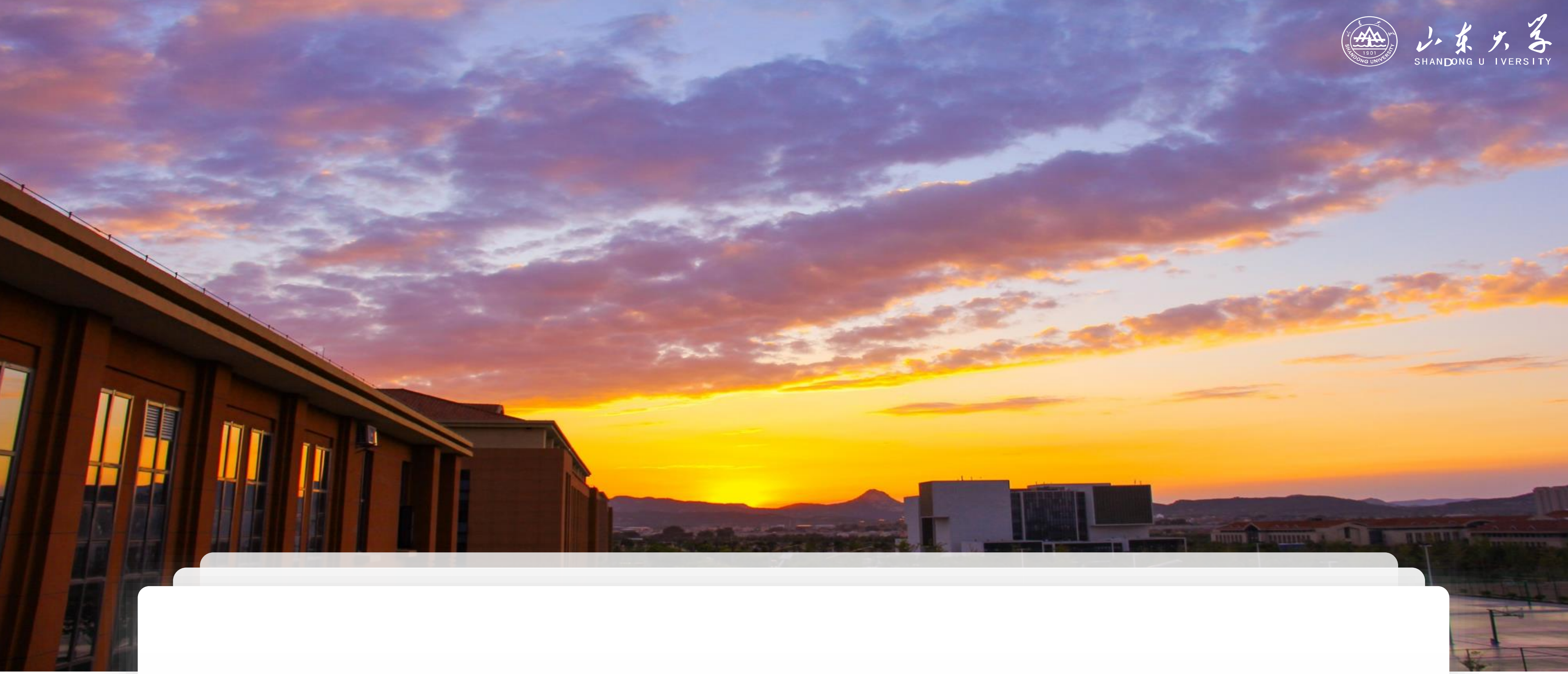
- 动态规划常见模型
  - 线性型
  - 坐标型
  - 背包型
  - 区间型
  - 状态压缩型
  - 树型
  - DP 的单调队列优化
  - **DP 的矩阵快速幂优化**

矩阵快速幂优化 DP

- 矩阵快速幂性质
  - 快速求解线性递推式的结果，如斐波那契递推

- 优化的 DP 需要满足的条件
  - 转移方程为线性递推式
  - 转移次数超级多（n 很大）

- 接下来以例3、例4为例进一步讲解



7 例 3 讲 解

Example 3

例3讲解

- 题意
  - 现需要用红、蓝、绿、黄四种颜色对 n 个连续格子染色
  - 询问满足红色、绿色格子数量同时为偶数的染色方案有多少种？（$1 \le n \le 10^9$）
  - 最终答案 % 10007
- 举例
  - Input: 2
  - Output: 6
    - [红红、绿绿、蓝蓝、黄黄、蓝黄、黄蓝]

例3讲解

- 算法判断?
  - 连续格子染色，很明显有子结构的性质，可以考虑 DP
  - 但是 n 很大，因此考虑矩阵快速幂优化 DP

- DP 思考
  - DP 状态
  - DP 转移方程（线性递推式）

例3讲解

- DP 状态思考?
  - 题目问 n 个格子，红绿均为偶数的染色方案数
  - 因此令 A[i] 表示 i 个格子，红绿均为偶数的染色方案数
  - 只有 A[i] 是否足够?
- DP 状态添加
  - 偶数需要从奇数转移而来，这一点在思考转移方程的时候可以发现，因此我们进行 DP 状态添加
  - B[i] 表示 i 个格子，红绿均为奇数的染色方案数
  - C[i] 表示 i 个格子，红绿有一个为偶数的染色方案数

例3讲解

- DP 转移方程
  - 根据 DP 状态，仔细思考转移情况即可得到
  - A[i] = 2 * A[i-1] + C[i-1]
  - B[i] = 2 * B[i-1] + C[i-1]
  - C[i] = 2 * A[i-1] + 2 * B[i-1] + 2 * C[i-1]
- 矩阵快速幂

$$ans[i] = \begin{bmatrix} A[i] \\ B[i] \\ C[i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} * ans[i-1]$$

- 复杂度：$O\left(3^3 \log(n)\right) = O(\log(n))$

8 例 4 讲 解

Example 4

例4讲解

- 题意
  - ZJM 有 M 件衬衫，现一共有 N 天
  - 如果 ZJM 昨天穿衬衫 A，今天穿衬衫 B，则他今天可以获得 H[A][B] 快乐值
  - 询问 N 天过后，ZJM 最多可以获得多少快乐值?
  - （$2 \le \mathrm{N} \le 10^5, 1 \le M \le 100$）
- 举例
  - Input：N = 3, M = 2, f 矩阵如下：
    - 0 1
    - 1 0
  - Output：2

例4讲解

- 算法判断?
  - 天数连续，很明显有子结构的性质，可以考虑 DP
  - n 不是很大，因此不一定是矩阵快速幂优化，先列出 DP 状态和 DP 转移方程再进行判断

- DP 状态思考?
  - 题目问 n 天后，最多快乐值，且每天的快乐值由今日与昨日两天的衣服决定
  - 因此令 $f[i][j]$ 表示第 i 天，穿的衣服为 j 所获得的快乐值总和

例4讲解

- DP 转移方程
  - 根据 DP 状态，不难得到如下的转移方程
  - 枚举前一天穿的衣服为 k，即
  - $f[i][j] = \max(f[i-1][k] + H[k][j]), 1 \le k \le M$
- 是否可行?
  - 直接求解复杂度：$O(N * M * M) = O(10^9) = O(\text{梦里有})$
- 如何优化?
  - 矩阵快速幂

例4讲解

- 矩阵快速幂转化方法
  - $f[i][j] = \max(f[i-1][k] + H[k][j]), 1 \le k \le M$

$$ans[i] = \begin{bmatrix} f[i][1] \\ \vdots \\ f[i][M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H[1][1] & \cdots & H[M][1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H[1][M] & \cdots & H[M][M] \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f[i-1][1] \\ \vdots \\ f[i-1][M] \end{bmatrix}$$

  - 转换过程
    - $C[i][j] = \sum(A[i][k] * B[k][j]) \Rightarrow \max(A[i][k] + B[k][j])$
    - 将累加换成了max，乘法换成了加法

例4讲解

- 为什么可行?
  - 矩阵快速幂要求矩阵乘法运算具有结合律
  - 因此新定义的矩阵乘法只要满足结合律，即正确
    - $C[i][j] = \sum(A[i][k] * B[k][j]) \Rightarrow \max(A[i][k] + B[k][j])$
- 如何证明?
  - $((AB)C)[i,j] = (A(BC))[i,j]$，具体数学证明在后一页
  - 写题时，可以用小例子验证
    - 三个 2x2 的矩阵，手动计算是否符合结合律

例4讲解

- 数学证明（选听）
  - $C[i][j] = \sum(A[i][k] * B[k][j]) \Rightarrow \max(A[i][k] + B[k][j])$
  - A、B、C 分别为 a x b、b x c、c x d 的矩阵

$$
\begin{aligned}
((AB)C)[i,j] &= \max_{l=1}^{c}((AB)[i,l] + C[l,j]) \\
&= \max_{l=1}^{c}(\max_{k=1}^{b}(A[i,k] + B[k,l]) + C[l,j]) \\
&= \max_{l=1}^{c}\max_{k=1}^{b}(A[i,k] + B[k,l] + C[l,j]) \\
&= \max_{k=1}^{b}\max_{l=1}^{c}(A[i,k] + B[k,l] + C[l,j]) \\
&= \max_{k=1}^{b}(A[i,k] + \max_{l=1}^{c}(B[k,l] + C[l,j]) \\
&= \max_{k=1}^{b}(A[i,k] + (BC)[k,j]) \\
&= (A(BC))[i,j]
\end{aligned}
$$

例4讲解

- 本质原因
  - max 对于加法可分配，即 $\max(a+b, a+c) = a + \max(b+c)$
  - max、加法均可结合，可交换
  - 因此对应的矩阵乘法也满足结合律

- 总结
  - 矩阵快速幂可优化包含 min、max、加减乘除的递推式

感谢收听

Thank You For Your Listening