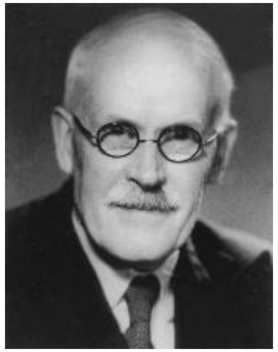
Lindley‘s Paradox

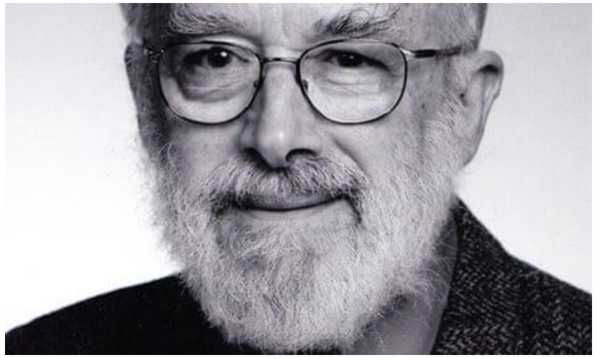
VON SEBASTIAN FAY

Historie

1939: Von Harold Jeffrey in einem Buch Problem diskutiert



1957: Dennis Lindley nennt es „Paradox“ in paper



Hypothesentests

EINE KURZE EINFÜHRUNG

Hypothese aufstellen

$A: \theta \neq 0{,}5$
$H: \theta = 0{,}5$

Verteilung P eines Zufallsmechanismus sei nicht bekannt

Man geht davon aus, dass $P \in \{P_\theta |\ \theta \in \Theta\}$ wobei θ ein Parameter ist

Teile $\Theta_H \subset \Theta$ und $\Theta_A \coloneqq \Theta \setminus \Theta_H$

Hypothese (=: H): $P \in \{P_\theta |\ \theta \in \Theta_H\}$

Alternative(=: A): $P \in \{P_\theta |\ \theta \in \Theta_A\}$

Daten $x = (x_1, \dots, x_n)$ Rückschluss

Tests

Daten → Test → Annehmen / Ablehnen

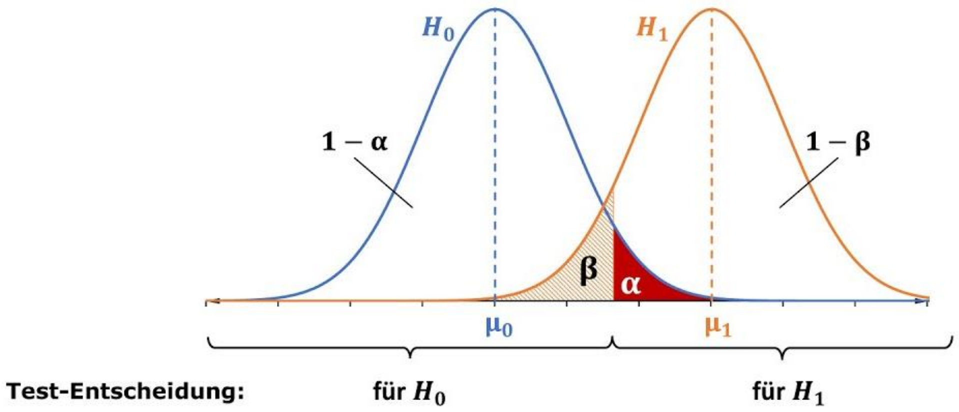
$\phi: R^n \to \{0,1\}$

Verwerfungsbereich: $\{x \in R^n |\ \phi(x) = 1\}$ H wird abgelehnt

Annahmebereich: $\{x \in R^n |\ \phi(x) = 0\}$ H wird angenommen

Fehler 1. Art: H liegt vor, wird aber abgelehnt

Fehler 2. Art: H liegt nicht vor, wird aber angenommen



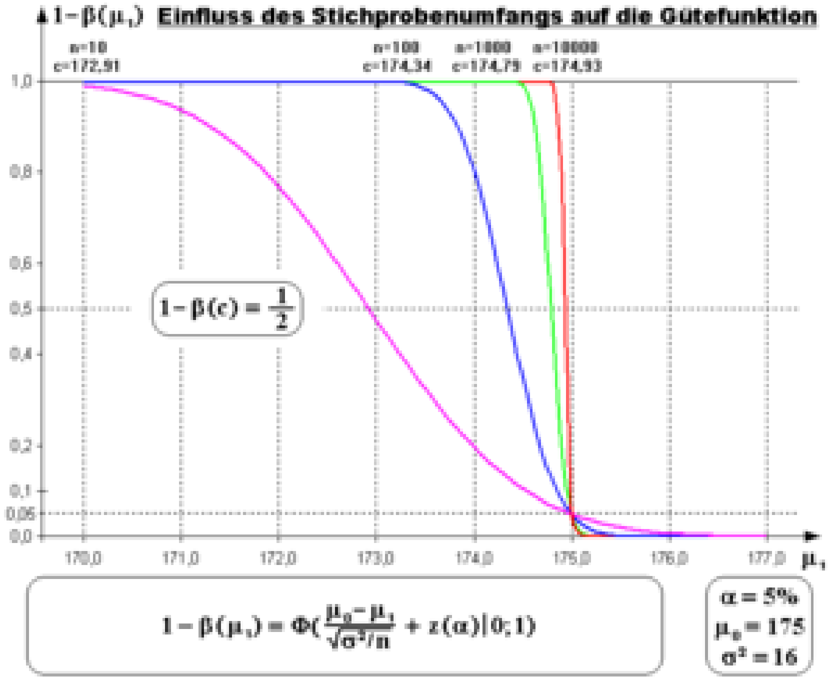
Gütefunktion

$$\pi_\phi : \Theta \to [0,1],\ \pi_\phi(\theta) := P(\phi(x) = 1)$$

Ordnet jedem θ die Verwerfungswahrscheinlichkeit von H zu

Ideal wäre:

- $\pi_\phi(\theta) = 0\ \forall \theta \in \Theta_H$
- $\pi_\phi(\theta) = 1\ \forall \theta \in \Theta_A$



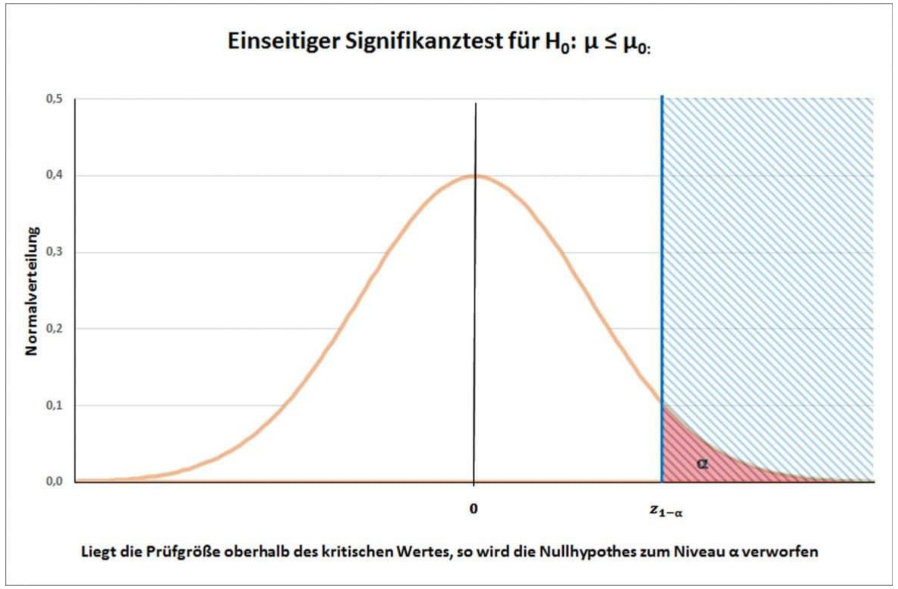
Test zum Niveau α

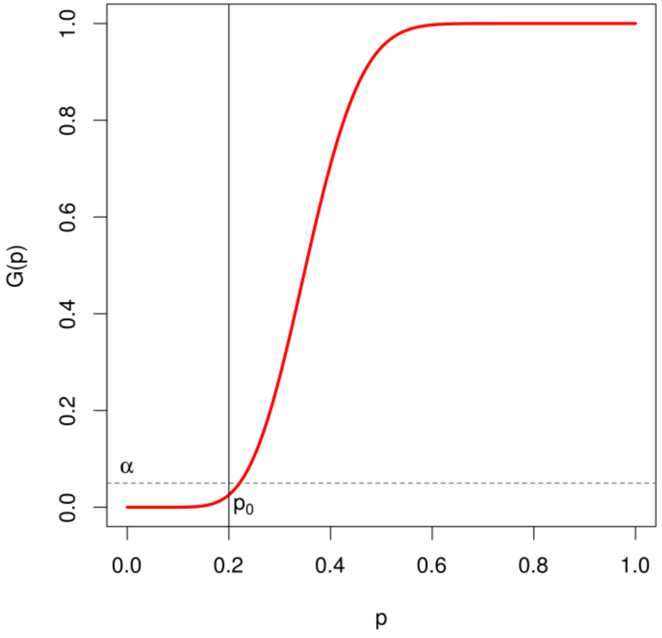
Verwerfungsbereich: $\{x \in R^n | \, \phi(x) = 1\}$
Hypothese (=: H): $P \in \{P_\theta | \, \theta \in \Theta_H\}$
Alternative(=: A): $P \in \{P_\theta | \, \theta \in \Theta_A\}$

$$\pi_\phi(\theta) = P(\phi(x) = 1) \leq \alpha \, \forall \theta \in \Theta_H$$

Kontrolliert Fehlerwahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art

Z.B. Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$





p-Wert / Signifikanzwert

EINE KURZE EINFÜHRUNG

Einsatzzweck & Umgang

Maß für Glaubwürdigkeit der Nullhypothese $(=: H_0)$

(besagt oft, dass ein Zusammenhang nicht besteht)

Wahrscheinlichkeit unter H den beobachteten Wert zu erhalten

- Rechtsseitiger Test: $\mathrm{p}_{\mathrm{rechts}} \coloneqq P(T \geq t | H_0)$ für t aus konkreten Daten
- Gilt: $\mathrm{p}_{\mathrm{rechts}} \leq \alpha \Rightarrow$ H wird abgelehnt

Zusammenhang zum Signifikanzniveau

Beispiel Rechtsseitiger Test:

$\mathrm{p}_{\mathrm{rechts}} = P(T \geq t|H_0)$

$\alpha = P(T \geq k|H_0)$

$\Rightarrow p < \alpha \Leftrightarrow t > k$

Bayssche Statistik

EINE KURZE EINFÜHRUNG

(JETZT WIRKLICH DIE LETZTE)

Satz von Bayes & Statistik

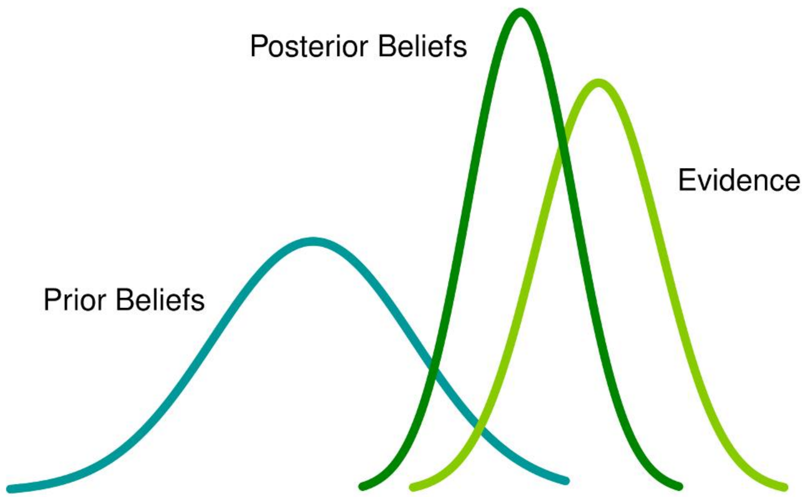
Sei A_i $i = 1, \ldots, N$ eine Zerlegung von Ω $\Rightarrow$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(B \mid A_j) \cdot P(A_j)}$$

Erlaubt Umkehrung Schlussfolgerung man kennt P(B|A) interessiert sich aber für P(A|B)

Man Updated bereits vorhandenes Wissen mit gemessenen Daten

Nach neuen Daten: a posteriori



Lindley‘s Paradox

EIN WIRKLICHES PARADOX?

Grundproblem

Gegeben H_0, H_1 als Alternativen für ein Experiment

1. x ist „signifikant“ z.B. 5% für einen Test von H_0, sodass H_0 abgelehnt wird
2. Die a posteriori Wahrscheinlichkeit von H_0 unter x ist hoch, sodass H_0 besser zu den Daten x passt als H_1

Ein Widerspruch?

Zahlenbeispiel

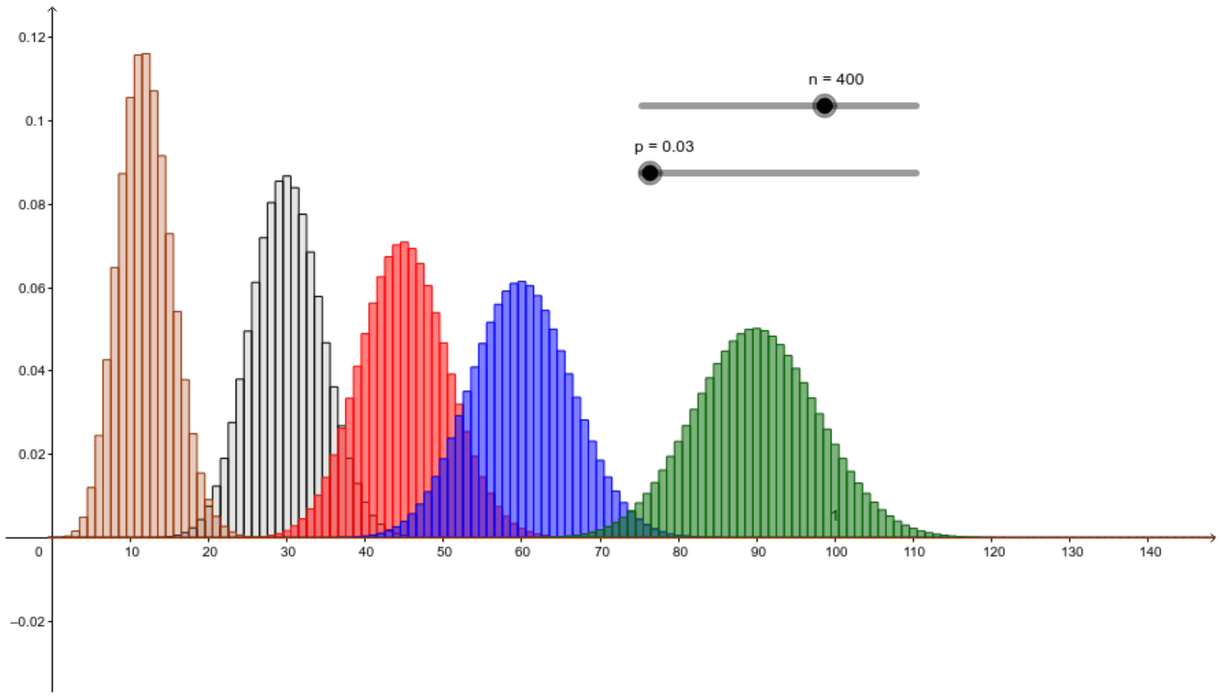
In einer Stadt wurden 49.581 Jungen und 48.870 Mädchen geboren

x = 49.581/98.451 ≈ 0,5

Wir nehmen eine Binomiale Verteilung an

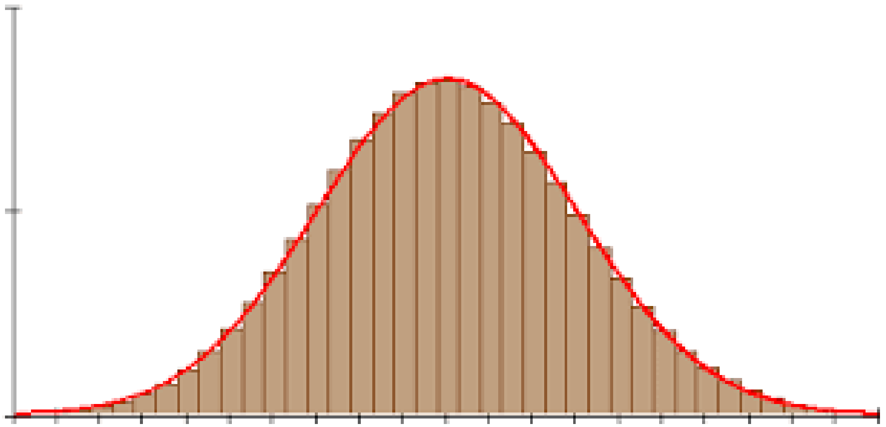
$H_0: \theta = 0,5$

$H_1: \theta \neq 0,5$



P-Wert

$H_1: \theta \neq 0{,}5$
$H_0: \theta = 0{,}5$



$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\mu = np = n\theta = 98,451 \times 0.5 = 49,225.5$$

$$\sigma^2 = n\theta(1-\theta) = 98,451 \times 0.5 \times 0.5 = 24,612.75$$

$$P(X \geq x \mid \mu = 49225.5) = \int_{x=49581}^{98451} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2/2} du$$

$$= \int_{x=49581}^{98451} \frac{1}{\sqrt{2\pi(24,612.75)}} e^{-\frac{(u-49225.5)^2}{24612.75}/2} du \quad \approx 0.0117 \leq \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \text{Ablehnung!}$$

Bayes

$\pi(H_0) = \pi(H_1) = 0{,}5$

Gleichverteilung von θ unter H_1

$$P(H_0 \mid k) = \frac{P(k \mid H_0)\pi(H_0)}{P(k \mid H_0)\pi(H_0) + P(k \mid H_1)\pi(H_1)}$$

$$P(k \mid H_0) = \binom{n}{k}(0.5)^k(1-0.5)^{n-k} \approx 1.95 \times 10^{-4}$$

$$P(k \mid H_1) = \int_0^1 \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}d\theta = \binom{n}{k}\mathrm{B}(k+1, n-k+1) = 1/(n+1) \approx 1.02 \times 10^{-5}$$

$$P(H_0 \mid k) \approx 0.95$$

Vereinbarkeit & Paradox

Signifikanzlevel sollte von Datenmenge abhängig sein um falsch positiv zu verhindern

uninformative prior in Bayes (ähnelt dem dem Modell der Signifikanzberechnung mehr)

Gar kein Paradox?

1. p-Wert: testet H_0 ohne H_1 einzubeziehen
2. Bayes : testet H_0 als Alternative zu H_1

1. p-Wert: findet H_0 ist eine schlechte Hypothese für die Daten
2. Bayes: findet H_0 als bessere Erklärung als H_1 für die Daten

Variation am Zahlenbeispiel

Stichprobe

Angenommen nur 100 Personen $\Rightarrow$ Bei gleichem Verhältnis $\approx 50{,}36$ Jungs $\Rightarrow 50$

1. p-Wert: $0{,}47087 > 0{,}05$
2. Bayes: 0,889

Verhältnis

Angenommen 100 Personen und 55 Jungs

1. p-Wert: $0{,}398 > 0{,}05$
2. Bayes: $0{,}83$

Quellen

https://en.wikipedia.org/wiki/Lindley%27s_paradox

https://www.youtube.com/watch?v=4YwYYAwimLk&list=PLfk0Dfh13pBPH8ABVC9WBiOb5Vh4WdE7M&index=16

https://de.wikipedia.org/wiki/P-Wert

Quellen Bilder

https://www.theguardian.com/science/2014/mar/16/dennis-lindley

https://en.wikipedia.org/wiki/Harold_Jeffreys

https://www.youtube.com/watch?v=xd4KeoQRrVI

https://de.wikipedia.org/wiki/Operationscharakteristik

https://de.wikipedia.org/wiki/G%C3%BCtefunktion

https://www.statistik-nachhilfe.de/ratgeber/statistik/induktive-statistik/signifikanztests-hypothesentests/testtheorie/alphafehler

https://www.analyticsvidhya.com/blog/2016/06/bayesian-statistics-beginners-simple-english/

https://www.geogebra.org/m/AqvLiULD

https://123mathe.de/approximation-binomialverteilung