Relationen und Abbildungen

Ein Vortrag im Rahmen des mathematischen Vorkurses der

Fachschaft MathPhys

von

Fabian Grünig

Fragen, Anmerkungen und Korrekturen an

fabian @ mathphys.fsk.uni-heidelberg.de

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Dieser Vortrag entsand im Rahmen des mathematischen Vorkurses der Fachschaft MathPhys an der Universität Heidelberg und wurde zum ersten Mal im Wintersemester 2012/13 gehalten. Da dieser Vortrag, wie der gesamte Vorkurs, stets weiterentwickelt und verbessert wird, bitte ich ausdrücklich darum, mir Fragen, Anmerkungen und Korrekturen zukommen[1] zu lassen.

Notation

Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ und meinen mit $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit der Null. Ferner bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen, mit $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen und mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Wir werden diese Zahlenmengen nicht rigoros definieren, sondern vertrauen auf das intuitive Verständnis des Lesers oder der Leserin.

[1] fabian @ mathphys.fsk.uni-heidelberg.de

2 Naive Mengenlehre

Wir verwenden in diesem Vortrag eine naive Mengenlehre und wiederholen einige Grundlagen. Wer sich für die Probleme des naiven Mengenbegriffs interessiert oder diese gar fürchtet, den verweise ich auf den Vortrag „Mengen, natürlich Zahlen, Induktion“[2] von Tim Adler. In der praktischen Anwendung auf dem Niveau dieses Vortrags unterscheiden sich diese Mengenbegriffe nicht.

Definition (Georg Cantor, 1895) *„Unter einer* Menge *verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die* Elemente *von M genannt werden) zu einem Ganzen.“*

Wir bezeichnen Mengen typischerweise mit großen lateinischen Buchstaben A, B, M, X, Y. Sprechen wir von Elementen einer Menge, so bezeichnen wir diese mit kleinen lateinischen Buchstaben a, b, m, x, y. Ist m ein Element von M, so schreiben wir

$$m \in M.$$

Ist m kein Element von M, so schreiben wir

$$m \notin M.$$

Wir nennen die Menge, welche keine Elemente enthält, die *leere Menge* und bezeichnen diese mit $\emptyset$.

Definition *Seien X, Y Mengen, dann nennen wir X eine* Teilmenge *von Y, falls für alle Elemente $x \in X$ auch $x \in Y$ gilt. Gegebenenfalls schreiben wir*

$$X \subseteq Y$$

Existiert in diesem Fall ein Element $y \in Y$, welches nicht in X enthalten ist ($y \notin X$), so nennen wir X eine echte Teilmenge *und schreiben*

$$X \subsetneq Y.$$

Definition *Seien X, Y Mengen. Wir nennen X, Y* gleich *oder* identisch *und schreiben*

$$X = Y,$$

falls sowohl $X \subseteq Y$, als auch $Y \subseteq X$ gilt.

Beispiel Wir definieren Mengen (und damit ihre Elemente) auf verschiedene Weisen.

[2] johannes.uni-hd.de/vorkurs/2013/skripte/mengen/mengen.pdf

(i) *Explizite Angabe oder Aufzählung der Elemente*
Geben wir alle Elemente einer Menge explizit an, so verwenden wir geschwungene Klammern und trennen die Elemente durch Kommata ab.

$$\{1,2,3\} \text{ oder } \{\text{Alice}, \text{Bob}\}.$$

Dabei beachten wir weder die Reihenfolge der Angabe noch die Doppelnennung etwaiger Elemente. Es gilt etwa

$$\{1,2,3\} = \{1,3,2\} = \{3,2,1,1\}.$$

Besitzt eine Menge nicht endlich viele (oder sehr viele) Elemente, können (oder wollen) wir ihre Elemente nicht aufzählen In diesen Fällen behelfen wir uns mit anderen Möglichkeiten. Ist die Fortsetzung der Angabe klar, so können wir Fortsetzungspunkte verwenden.

$$\{1,2,3,4,\dots\} \text{ oder } \{a,b,c,\dots,A,B,C,\dots\}$$

(ii) *Angabe durch definierende Eigenschaften*
Charakerisieren wir eine Menge durch eine gemeinsame Eigenschaft E ihrer Elemente, so schreiben wir

$$\{x \mid E(x)\}.$$

Verwenden wir für diese Charakterisierung mehrere Eigenschaften $E_1, E_2, E_3, \dots,$ so können wir diese mittels logischen Operatoren verknüpfen.

$$\{x \mid E_1(x) \wedge E_2(x) \wedge E_3(x) \wedge \dots\}$$
$$\{x \mid E_1(x) \vee E_2(x) \vee E_3(x) \vee \dots\}$$

Wollen wir etwa alle natürlichen Zahlen, die gerade sind, zu einer Menge zusammenfassen, so formulieren wir dies durch

$$\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (x \text{ ist gerade.})\}.$$

Wollen wir über ein (unbestimmtes) Element einer Menge reden, so verwenden wir *Elementvariablen*. Es kann $x \in \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$ für Alice oder Bob stehen, ist aber innerhalb X unbestimmt. Alice ist eine *Elementkonstante* von $\{\text{Alice}, \text{Bob}\}$, also bestimmt.

Definition *Sei X eine Menge. Dann nennen wir die Menge aller Teilmengen von X die*

Potenzmenge von X *und bezeichnen diese mit*

$$\operatorname{Pot}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

Beispiel Sei $X := \{1,2,3\}$. Dann ist

$$\operatorname{Pot}(X) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$

Definition *Seien X, Y Mengen, dann nennen wir die Menge aller (geordneten) Paare von Elementen von X und Y das* kartesische Produkt *und schreiben*

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Beispiel Seien $X := \{1,2,3\}$ und $Y := \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} X \times Y = \Big\{&(1,\text{Alice}), (2,\text{Alice}), (3,\text{Alice}),\\ &(1,\text{Bob}), (2,\text{Bob}), (3,\text{Bob})\Big\} \end{aligned}$$

Definition *Seien X, Y und $X_1, X_2, X_3, \ldots$ Mengen. Wir definieren*

$$X \cup Y := \{z \mid z \in X \textit{ oder } z \in Y\}$$

als die Vereinigung von X und Y *und*

$$X \cap Y := \{z \mid z \in X \textit{ und } z \in Y\}$$

als den Schnitt von X und Y. *Ausserdem schreiben wir*

$$\bigcup_i X_i \textit{ bzw. } \bigcap_i X_i$$

für die Vereinigung bzw. den Schnitt aller Mengen $X_1, X_2, X_3, \ldots$.[3]

[3] Diese Notation ist nur dann wohldefiniert, falls $\cup$ bzw. $\cap$ assoziativ und kommutativ sind. Der Nachweis dieser Eigenschaften ist eine lohnende Übungsaufgabe.

3 Partitionen und Äquivalenzrelationen

3.1 „Wohngemeinschaften und die GEZ“

Wir blicken zurück auf den Beginn des Wintersemesters 2012. Viele viele Studienanfänger_innen lauschen gespannt dem mathematischen Vorkurs, lernen sich und die Stadt kennen und ziehen vielleicht in die ein oder andere Wohngemeinschaft. Ein paar Tage nach dem Einzug erhalten sie auf einmal Post von der Gebühreneinzugszentrale der öffentlich-rechtlichen Rundfunkanstalten (kurz GEZ). Seit langer Zeit verlangt sie von jedem Menschen in Deutschland Rundfunkgebühren. Das Gebührenmodell betrachtet dazu die Menge

$$D := \{x \mid x \text{ ist Mensch in Deutschland}\}$$

Dieses Jahr sieht die Welt aber anders aus. Die GEZ heißt dann ARD ZDF Deutschlandradio Beitragsservice, die Rundfunkgebühren heißen Rundfunkbeiträge, und das Gebührenmodell sieht eine Haushaltspauschale vor. Wir betrachten also

$$H := \{h \mid h \text{ ist ein Haushalt in Deutschland}\}$$

Die Haushalte h enthalten Menschen aus Deutschland[4]. Wir können nur spekulieren, was sich die Zuständigen dabei gedacht haben, aber vermutlich hatten sie folgende Hoffnungen

- Der Verwaltungsaufwand wird kleiner. „H ist kleiner als D“.
- Jeder Mensch ist Mitglied in einem Haushalt. Alle werden erfasst.
- Niemand ist Mitglied in zwei Haushalten. Keiner muss doppelt zahlen.

Die GEZ hofft also, dass H eine *Partition* von D ist.

Definition [3.1] *Sei X eine Menge und $P := \{P_1, P_2, P_3, \ldots\} \subseteq \mathrm{Pot}(M)$ eine Menge von nicht-leeren Teilmengen von X. Wir nennen P eine* Partition von X*, falls*

$$X = \bigcup_i P_i$$

und für alle $P_i, P_j \in P$ genau eine der folgenden Aussagen wahr ist:

(i) $P_i = P_j$

(ii) $P_i \cap P_j = \emptyset$

[4] Die Haushalte h sind also Mengen, auch wenn wir hier kleine Buchstaben verwenden.

3.2 Äquivalenzrelationen

Die Denkweise des Gebührenmodells der GEZ entspricht nicht unserem Denkmuster im Alltag. Wir nehmen unser Leben in Wohngemeinschaften selten als eine Partition aller Menschen wahr und denken wesentlich lokaler. Für uns ist das Zusammenwohnen eher eine *Beziehung* von einem Menschen zu einem anderen. Fragen wir Alice, wo Bob denn wohnt, hören wir „Bob? Mit dem wohne ich zusammen." und nicht „Bob und ich sind im selben Haushalt."

Welche (intuitiven) Anforderungen stellen wir an eine solche Beziehung?

- Alice wohnt zusammen mit Alice. Klingt komisch, ist aber so.
- Alice wohnt zusammen mit Bob. Also wohnt Bob auch zusammen mit Alice.
- Alice wohnt zusammen mit Bob. Bob wohnt zusammen mit mit Charlie. Also wohnt Alice auch zusammen mit Charlie.

Definition [3.2] *Sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$. Dann nennen wir R eine* Relation *auf X. Ist $(x,y) \in R$, so schreiben wir auch*

$$x \sim_R y$$

und sagen x steht in Relation R zu y.

Für den Relationenbegriff kodieren wir die Elemente, die in Beziehung stehen sollen in einem Paar, also ein Element des kartesischen Produkts. Beziehungen, die die obigen gewünschten Eigenschften besitzen, nennen wir Äquivalenzrelationen.

Definition [3.3] *Sei X eine Menge und R eine Relation auf X. Dann nennen wir R eine* Äquivalenzrelation*, falls für alle $x,y,z \in R$ folgendes gilt*

(i) $(x,x) \in R$. *(Reflexivität)*

(ii) *Aus $(x,y) \in R$ folgt $(y,x) \in R$.* *(Symmetrie)*

(iii) *Aus $(x,y),(y,z) \in R$ folgt $(x,z) \in R$.* *(Transitivität)*

Im Folgenden schreiben wir $x \sim y$, falls keine Verwechslungsgefahr mit anderen Relationen besteht. Ausserdem bezeichnen wir (by abuse of notation) die Relation mit $\sim$.

Wir wollen nun untersuchen, ob die beiden Denkweisen der Gebührenzentrale und der WG-Bewohner_innen äquivalent sind oder nicht. Dazu arbeiten wir mit den mathematischen Begriffen der Partition und der Äquivalenzrelation. Wir betrachten zunächst die Menge der Bewohner_innen einer WG, also die Menge aller Menschen, die zu einem bestimmten Menschen in der „... wohnt zusammen mit ..."-Relation stehen. Diese Mengen nennen wir Äquivalenzklassen.

Definition [3.4] *Sei X eine Menge, $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation und $x \in X$ ein Element in X. Dann nennen wir*

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim_R x\}$$

die Äquivalenzklasse von x. *Sie besteht aus allen Elementen, die mit x in Beziehung stehen.*

In unserem Beispiel der „... wohnt zusammen mit ...“-Relation ist [Bob] die Menge aller Mitbewohner von Bob (und auch Bob). Diese Menge ist aber identisch mit [Alice], da Alice und Bob natürlich die selben Mitbewohner haben. Die Auswahl des Menschen, der_die de_die Vertreter_in der WG ist, ist beliebig und ändert nichts an der WG.

Bemerkung [3.5] *Sei X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x \in X$. Dann gilt für alle $y \in [x]$:*

$$[x] = [y].$$

Beweis: Sei $y \in [x]$, das heißt $y \sim x$. Da $\sim$ symmetrisch ist, gilt auch $x \sim y$. Wir zeigen die Gleichheit von Mengen:

„$\subseteq$“ Sei $z \in [x]$, also $z \sim x$. Wegen der Transitivität von $\sim$ gilt dann $z \sim y$. Also $z \in [y]$.

„$\supseteq$“ Sei $z \in [y]$, also $z \sim y$. Wir nutzen wider die Transitivität von $\sim$ und erhalten $z \sim x$, d.h. $z \in [x]$.

Also gilt $[x] \subseteq [y]$ und $[x] \supseteq [y]$ und somit $[x] = [y]$.

□

Die Äquivalenzklassen von Elementen, die in Relation stehen sind demnach bereits gleich. Wir klären nun, wie sich Äquivalenzklassen von Elementen verhalten, die *nicht* in Relation stehen.

Bemerkung [3.6] *Seien X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x, y \in X$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) $[x] = [y]$

(ii) $[x] \cap [y] = \emptyset$

Beweis: Wir unterscheiden die Fälle $x \in [y]$ und $x \notin [y]$.

$(x \in [y])$ Gelte $x \in [y]$, dann folgt wegen Bemerkung [3.5] $[x] = [y]$. Also $x \in [x] \cap [y] \neq \emptyset$.

$(x \notin [y])$ Gelte $x \notin [y]$, also $[x] \neq [y]$. Angenommen es existiert ein $z \in [x] \cap [y]$, d.h. $z \sim x$ und $z \sim y$. Da $\sim$ symmetrisch ist, folgt $x \sim z$ und wegen der Transitivität von $\sim$ auch $x \sim y$. Dann gilt aber $x \in [y]$, ein Widerspruch. Die Annahme war falsch und es gilt $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

□

Definition [3.7] *Sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann bezeichnen wir mit*

$$X/_{\sim} := \Big\{[x] \mid x \in X\Big\}$$

die Menge der Äquivalenzklassen von X bzgl. $\sim$.

Die Menge $X/_{\sim}$ ist in unserem Beispiel die Menge aller WGs in Deutschland. Diese Menge bildet eine Partition aller Menschen in Deutschland und zwar genau die Partition, die der Denkweise der Gebührenzentrale entspricht.

Satz [3.8] *Sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann ist $X/_{\sim}$ eine Partition von M.*

Beweis: Seien $[x_1], [x_2], [x_3], \dots$ die verschiedenen Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. Wir müssen zeigen

(i) $M = \bigcup_i [x_i]$

(ii) Für alle $x, y \in X$ mit $[x] \neq [y]$ gilt $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Die zweite Aussage (ii) folgt direkt aus Bemerkung [3.6]. Wir zeigen noch (i) und müssen die Gleichheit dieser Mengen nachweisen. Sei $x \in X$, dann ist sicher $x \in [x]$. Die Äquivalenzklasse $[x]$ stimmt wegen Bemerkung [3.6] mit einer der Äquivalenzklassen $[x_j]$ überein. Damit ist

$$x \in [x_j] \subseteq \bigcup_i [x_i].$$

Ausserdem ist klar, dass $\bigcup_i [x_i] \subseteq X$, da $[x_i] \subseteq X$.

□

Satz [3.9] *Sei X eine Menge und $P \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ eine Partition von X, dann existiert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X, sodass*

$$X/_{\sim} = P.$$

Beweis: Diesen Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe. □

4 Abbildungen

Im letzten Kapitel haben wir den Begriff der *Relation* eingeführt, sind aber schnell zum Studium der spezielleren Äquivalenzrelationen übergegangen. Wir wollen uns in diesem Kapitel mit Abbildungen (oder Funktionen) beschäftigen. Um diese jedoch mathematisch korrekt formulieren zu können, brauchen wir einen allgemeineren Begriff der *Relation*, denn eine Abbildung setzt Elemente *verschiedener* Mengen in Beziehung.

Definition [4.1] *Seien X, Y Mengen und $R \subseteq X \times Y$. Dann nennen wir R eine* Relation zwischen X und Y.

Auch hier schreiben wir für $(x, y) \in R$ einfach $x \sim y$, falls keine Verwechlungsgefahr besteht. Inbesondere sprechen wir nun von allgemeinen Relationen und nicht von Äquivalenzrelationen. Die hier betrachteten Relationen müssen nicht länger reflexiv, symmetrisch oder transitiv sein und können diese Eigenschaften meist auch nich haben.

Definition [4.2] *Seien X, Y Mengen und $R \subseteq X \times Y$ eine Relation zwischen X und Y. Wir nennen R ...*

- rechtstotal*, falls für jedes Element $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, sodass $x \sim y$.*
- linkstotal*, falls für jedes Element $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert, sodass $x \sim y$.*

Definition [4.3] *Seien X, Y Mengen und $R \subseteq X \times Y$ eine Relation zwischen X und Y. Wir nennen R ...*

- rechtseindeutig*, falls zu jedem $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ existiert, sodass $x \sim y$.*
- linkseindeutig*, falls zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ existiert, sodass $x \sim y$*

4.1 Die „richtige" Definition

Aus der Schule kennen wir den folgenden Begriff einer Abbildung

Definition *Seien X, Y Mengen. Eine* Abbildung f *ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element aus X genau ein Element aus Y zuordnet.*

Schrecklich, nicht wahr? Was soll denn eine Zuordnungsvorschrift sein? Diese Definition ist total schwammig. Zum Glück können wir bereits mit unseren Mitteln einen exakten Abbildungsbegriff definieren.

Definition [4.4] *Seien X, Y Mengen und $G \subseteq X \times Y$ eine Relation zwischen X und Y. Ist G linkstotal und rechtseindeutig, so nennen wir das Tripel $f := (X, Y, G)$ eine* Abbildung von X nach Y *und schreiben*

$$f : X \longrightarrow Y.$$

Es gilt also:

- *zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ mit $x \sim y$*
- *und dieses y ist das einzige Element in Y mit $x \sim y$.*

Dieses zu x eindeutige y mit $x \sim y$ bezeichnen wir mit $f(x)$ und schreiben

$$f(x) = y \text{ oder } f: x \longmapsto y.$$

Gegebenfalls nennen wir X den Definitionsbereich*, Y die* Zielmenge *und G den* Graph *der Abbildung f.*

Dies ist die „richtige" Definition des Abbildungsbegriffs. Alle Grundbegriffe, die wir in der Definition verwendet haben, sind bekannt und eindeutig definiert.

Definition [4.5] *Seien X, Y, A, B Mengen, sowie $f: X \longrightarrow Y$, $g: A \longrightarrow B$ Abbildungen. Dann definieren wir die* Gleichheit *von f und g via*

$$f = g \quad :\Leftrightarrow \begin{cases} & X = A \\ \text{und} & Y = B \\ \text{und} & f(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in X = A \end{cases}$$

Definition [4.6] *Seien X, Y Mengen und $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann induziert f zwei weitere Abbildungen zwischen den Potenzmengen $\operatorname{Pot}(X), \operatorname{Pot}(Y)$:*

$$\begin{aligned} f\colon \operatorname{Pot}(X) &\longrightarrow \operatorname{Pot}(Y) \\ A &\longmapsto \{f(a) \in Y \mid a \in A\} \end{aligned}$$

die Bildabbildung *zu f und*

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \operatorname{Pot}(Y) &\longrightarrow \operatorname{Pot}(X) \\ B &\longmapsto \{x \in X \mid f(x) \in B\} \end{aligned}$$

die Urbildabbildung *zu f. Wir nennen $f(X)$ das* Bild von f *und schreiben auch* $\operatorname{Im}(f)$.

Definition [4.7] *Seien X, Y, Z Mengen und $f: X \longrightarrow Y$, sowie $g: Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Dann definieren wir die Abbildung*

$$\begin{aligned} g \circ f\colon X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

(gelesen: „g nach f") als die Komposition *oder* Verkettung *von f und g.*

4.2 Eigenschaften von Abbildungen

Abbildungen alleine sind recht langweilig. Wir definieren daher einige wichtige Adjektive für Mengen und untersuchen diese neuen Begriffe.

Definition [4.8] *Seien X, Y Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.*

(i) *Wir nennen f* injektiv *(oder eineindeutig), falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt.*

(ii) *Wir nennen f* surjektiv*, falls für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, mit $f(x) = y$.*

(iii) *Wir nennen f* bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.*

Definition [4.9] *Seien A, X Mengen mit $A \subseteq X$. Dann nennen wir*

$$\begin{aligned} \iota\colon A &\longrightarrow X \\ a &\longmapsto a \end{aligned}$$

die natürliche Inklusion *von A in X*

Anmerkung ι ist eine injektive Abbildung.

Definition [4.10] *Sei X eine Menge und $\sim$ ein Äquivalenzrelation auf X. Dann nennen wir*

$$\begin{aligned} \pi\colon X &\longrightarrow X/_{\sim} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

die natürliche Projektion *bzgl. $\sim$.*

Anmerkung π ist eine surjektive Abbildung.

Definition [4.11] *Sei X eine Menge. Dann nennen wir*

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X\colon X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

die Identität *auf X.*

Anmerkung id_X ist eine bijektive Abbildung.

Diese eben definierten Eigenschaften von Abbildungen, tauchen in der Mathematik immer wieder auf. Um diese Eigenschaften nachzuweisen, gibt es viele verschiedene Möglichkeiten. Die Gültigkeit einiger dieser Möglichkeiten werden wir nachfolgend zeigen.

Bemerkung [4.12] *Seien X, Y Mengen und $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent*

(i) *f ist injektiv, d.h. für alle $x_1 \neq x_2 \in X$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

(ii) *Für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ gilt bereits $x_1 = x_2$.*

(iii) *Für alle $y \in Y$ ist $f^{-1}(\{y\})$ höchstens einelementig.*

(iv) *Der Graph G von f ist eine linkseindeutige Relation.*

Beweis:

(i) ⇒ (ii) Dies folgt direkt durch Kontradiktion.

(ii) ⇒ (iii) Sei $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ und $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$. Dann gilt $f(x_1) = y = f(x_2)$, also wegen (ii) bereits $x_1 = x_2$. Also ist $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1\}$.

(iii) ⇒ (iv) Seien $y \in Y$ und $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \sim_G y$ und $x_2 \sim_G y$. Dies bedeutet gerade, dass $y = f(x_1) = f(x_2)$. Also gilt $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$. Wegen (iii) gilt dann $x_1 = x_2$. Es ist demnach $\sim_G$ linkseindeutig.

(iv) ⇒ (i) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$. Angenommen es gilt $f(x_1) = f(x_2) =: y$. Dann gilt aber $x_1 \sim_G y$ und $x_2 \sim y$. Dies ist ein Widerspruch zur Linkseindeutigkeit von $\sim_G$.

□

Bemerkung [4.13] *Seien X, Y Mengen und $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent*

(i) *f ist surjektiv, d.h. für alle $y \in Y$ existiert ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$.*

(ii) *Für alle $y \in Y$ ist $f^{-1}(\{y\})$ mindestens einelementig.*

(iii) *Es gilt $f(X) = Y$.*

(iv) *Der Graph G von f ist rechtstotal.*

Beweis:

(i) ⇒ (ii) Sei $y \in Y$, dann existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Also ist $x \in f^{-1}(\{y\})$, also $f^{-1}(\{y\})$ mindestens einelementig.

(ii) ⇒ (iii) Sei $y \in Y$, dann ist $f^{-1}(\{y\})$ mindestens einelementig. Also existiert ein $x \in X$ mit $x \in f^{-1}(\{y\})$, d.h. $f(x) = y$. Also ist $y \in f(X)$, was „$\supseteq$" zeigt. Die Inklusion „$\subseteq$" gilt nach Definition der Bildabbildung.

(iii) ⇒ (iv) Sei $y \in Y$. Wir zeigen die Existens von einem Element $x \in X$, mit $x \sim_G y$. Da $f(X) = Y$ gilt $y \in f(X)$, also existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Mit anderen Worten $x \sim_G y$.

(iii) ⇒ (i) Sei $y \in Y$. Da $\sim_G$ rechtstotal ist, existiert ein $x \in X$ mit $x \sim_G y$. Anders formuliert: $f(x) = y$.

□

4.3 Eine erste Strukturaussage

Wir werden an dieser Stelle eine Strukturaussage über Abbildungen zeigen. In der Tat lässt sich jede Abbildung als Verkettung einer injektiven, einer surjektiven und einer bijektiven Abbildung schreiben. Um diese Aussage zu beweisen, wenden wir sämtliche Erkenntnisse aus diesem Vortrag mehr oder weniger explizit an.

Bemerkung [4.14] *Seien X, Y Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann definiert*

$$x_1 \sim x_2 \quad :\Leftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

eine Äquivalenzrelation auf X.

Beweis: Dies folgt sehr einfach aus den Eigenschaften der „="-Relation. □

Satz [4.15] *Seien X, Y Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Wir betrachten das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

wobei $\pi\colon x \mapsto [x]$ die Projektion bzgl. der Relation aus [4.14] ist und ι die natürliche Inklusion von $f(X) \subseteq Y$ ist. Weiter sei

$$\begin{aligned} \varphi\colon X/_\sim &\longrightarrow \mathrm{Im}(f) \\ [x] &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Dann gilt

(i) *φ ist wohldefiniert.*

(ii) *φ ist bijektiv.*

(iii) *Das Diagramm kommutiert in dem Sinne, dass $f = \iota \circ \varphi \circ \pi$ gilt.*

Beweis:

(i) Seien $x_1, x_2 \in X$, mit $x_1 \sim x_2$. Dann gilt nach Definition von $\sim$, dass $f(x_1) = f(x_2)$. Also

$$\varphi\big([x_1]\big) = f(x_1) = f(x_2) = \varphi\big([x_2]\big).$$

(ii) Wir zeigen die Injektivität und die Surjektivität von φ.

(inj.) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $\varphi\big([x_1]\big) = \varphi\big([x_2]\big)$. Dies bedeutet $f(x_1) = f(x_2)$ und damit ist $x_1 \sim x_2$. Nach Bemerkung [3.5] ist dann $[x_1] = [x_2]$.

(surj.) Sei $y \in f(X)$. Dann existiert nach Definition von $f(X)$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Betrachten wir die Äquivalenzklasse von x, dann sehen wir $\varphi\big([x]\big) = f(x) = y$.

(iii) Wir zeigen die Gleichheit der Abbildungen

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow Y \\ \iota \circ \varphi \circ \pi\colon X &\longrightarrow Y \end{aligned}$$

Diese Abbildungen haben offensichtlich die selben Definitionsbereiche und Zielmengen. Bleibt noch zu zeigen, dass sie punktweise übereinstimmen. Sei also $x \in X$. Wir berechnen

$$(\iota \circ \varphi \circ \pi)(x) = (\iota \circ \varphi)(\pi(x)) = (\iota \circ \varphi)\big([x]\big) = \iota\Big(\varphi\big([x]\big)\Big) = \iota(f(x)) = f(x).$$

Damit ist alles gezeigt.

□