Examen Final

Francisco Jesús Guerrero, y Juan Pablo Agustín Pedregal

Macroeconomía Dinámica - Maestría en Economía - UdeSa

Septiembre de 2021

1. Parte I: Leverage equity with incomplete markets

A) Firmas

i) State the problem of the firm.

Se tiene una familia superpuesta de firmas neutrales al riesgo que viven 2 períodos cada una. En el primer período minimizan sus costos sujetos a una función de producción Cobb-Douglas que tiene una productividad denotada como z, rendimientos decrecientes a escala y cuyos exponentes α y β corresponden a cada uno de los dos insumos que utiliza. A su vez, los precios de cada insumo son p_1 y p_2 respectivamente. También en este período tiene que decidir de qué manera financiar sus costos:

La primera modalidad involucra un endeudamiento con el sector externo (D) y la segunda modalidad consiste en emitir acciones a un precio q por un total de $(1-E)$ acciones. Siendo E la proporción de acciones que conserva la firma.

Dados estos ingresos la firma tiene la capacidad de operar y despejando del problema de minimización de costos de puede obtener su producción y en función de sus dos fuentes de financiamiento:

$$y(D,E) = \left[\frac{(D+q(1-E))z}{\left(\frac{\alpha}{\beta}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \frac{\beta}{\alpha}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right) p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} \right]^{\alpha+\beta} \tag{1}$$

En el segundo periodo la firma vende toda su producción y con estos ingresos paga la deuda que pidió en el primer periodo más los intereses. Si lo que se obtuvo de la producción es mayor a lo adeudado entonces la firma tiene beneficios, los cuales $(1-E)$ se entregan a los accionistas y el otro E restante lo conserva la firma. Si sus ventas no logran cubrir los servicios de la deuda entonces entra en default y sus beneficios son nulos, es decir, paga hasta donde sus ventas lo permiten. De cualquier forma, la firma es disuelta al final de este periodo.

Además, el segundo periodo esta sujeto a incertidumbre, donde se tienen dos posibles estados $s = H, L$ que determinan el nivel de eficiencia de la producción $\xi(s)$ y la tasa de interés bruta pagada $r(s)$ por la deuda contraída por la empresa .

Los beneficios o el valor de la firma viene dado por la siguiente ecuación:

$$\eta(s) = max(\xi(s)y - r(s)D, 0) \tag{2}$$

El problema de la firma en $t = 1$ es maximizar sus beneficios esperados en $t = 2$ escogiendo la deuda y la fracción que conserva de estos beneficios:

$$max_{(D,E)} \quad \pi E[\xi(H)y(D,E) - r(H)D] + (1-\pi)E[\xi(L)y(D,E) - r(L)D] \tag{3}$$

Sujeto a $\quad 0 \leq D \leq 1 \; , \quad 0 \leq E \leq 1$

ii) Characterize it (i.e., derive the first order conditions taking into account the bounds for equity and debt, both in [0, 1]).

El lagrangiano asociado a este problema es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D, E, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \pi\, E\, [\xi(H)\, y(D,E) - r(H)\, D] \\ + (1-\pi)\, E\, [\xi(L)\, y(D,E) - r(L)\, D] \\ + \lambda_1 D + \lambda_2 E + \lambda_3 (1-D) + \lambda_4 (1-E) \end{aligned} \tag{4}$$

El nuevo lagrangiano suponiendo que existe solución interior resulta ser:

$$\mathcal{L}(D,E) = \pi\, E\, [\xi(H)\, y(D,E) - r(H)\, D] + (1-\pi)\, E\, [\xi(L)\, y(D,E) - r(L)\, D] \tag{5}$$

Las condiciones de primer orden simplificadas son:

$$CPO_D : \xi\, y'_D(D,E) - r = 0 \tag{6}$$

$$CPO_E : \quad \xi\, y(D,E) + E\, \xi\, y'_E(D,E) - r\, D = 0 \tag{7}$$

donde $\xi \equiv \pi\, \xi(H) + (1-\pi)\, \xi(L) \quad$ y $\quad r \equiv \pi\, r(H) + (1-\pi)\, r(L)$

iii) Compute the closed form solution for debt $\widehat{D}$ and equity $\widehat{E}$ and interpret these results.

Se deriva primero la producción con respecto a D:

$$y'_D(D,E) = (\alpha+\beta) \left[\frac{(D + q\,(1-E))\, z}{\left(\frac{\alpha}{\beta}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \frac{\beta}{\alpha}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right) p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} \right]^{\alpha+\beta-1} \frac{z}{\left(\frac{\alpha}{\beta}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \frac{\beta}{\alpha}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right) p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} \tag{8}$$

Por simplicidad se define a A:

$$A \equiv \frac{z}{\left(\frac{\alpha}{\beta}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \frac{\beta}{\alpha}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right) p_1{}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \, p_2{}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} \tag{9}$$

Reemplazando (9) en (8):

$$y'_D(D,E) = (\alpha+\beta)\ \left[(D + q(1-E))\, A\right]^{\alpha+\beta-1}\ A \tag{10}$$

Reemplazando (9) en (1) tenemos:

$$y(D,E) = \left[(D + q(1-E))\, A\right]^{\alpha+\beta} \tag{11}$$

Reemplazando (11) en (10) tenemos:

$$y'_D(D,E) = (\alpha+\beta)\, y(D,E)^{\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+\beta}}\ A \tag{12}$$

Luego se deriva la producción respecto a E y se utiliza directamente A:

$$y'_E(D,E) = -q(\alpha+\beta)\ \left[(D + q(1-E))\, A\right]^{\alpha+\beta-1}\ A \tag{13}$$

Reemplazando (11) en (13) se llega a:

$$y'_E(D,E) = -q(\alpha+\beta)\, y(D,E)^{\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+\beta}}\ A \tag{14}$$

Dividiendo (14) entre (12) se obtiene que el precio de la acción dentro de una solución interior será igual al cociente de productividades marginales por emitir acciones o aumentar la dueda:

$$-\frac{y'_E(D,E)}{y'_D(D,E)} = q \tag{15}$$

Reorganizando la CPO$_D$ y la CPO$_E$:

$$y(D,E) + E\, y'_E(D,E) = \frac{r}{\xi}\, D \tag{16}$$

$$y'_D(D,E) = \frac{r}{\xi} \tag{17}$$

Reemplazando (17) en (16) y usando (15) se tiene que:

$$y(D,E) = y'_D(D,E)\,(D + qE) \tag{18}$$

Usando la definición de la ecuación (12) de y'_D:

$$y(D,E)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = (\alpha+\beta)\, A\,(D + qE) \tag{19}$$

Reemplazando (11) en (19) y despejando obtenemos la relación entre D y E

$$D = \frac{q((1+\alpha+\beta)E - 1)}{1-\alpha-\beta} \tag{20}$$

Con esta ecuación ya se pueden inferir que D y E están relacionadas positivamente en un óptimo interior.

Reemplazando esta expresión hallada de D en (11), introduciéndola en (12) y esto en (17) se obtiene:

$$\widehat{E}(q,p_1,p_2,z,\xi,r) = \Big(A(\alpha+\beta)\Big)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{1-\alpha-\beta}{2q}\right) + \frac{1}{2} \tag{21}$$

Remplazando esto en (20) se obtiene:

$$\widehat{D}(q,p_1,p_2,z,\xi,r) = \Big(A(\alpha+\beta)\Big)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{q}{2} \tag{22}$$

Recordando que $0 \leq D \leq 1$, $0 \leq E \leq 1$, estas soluciones son válidas si los parámetros cumplen con las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{lll}
\widehat{D} \geq 0 \quad \text{si} & \Big(A(\alpha+\beta)\Big)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1+\alpha+\beta) \geq q & \text{si no} \quad \widehat{D} = 0 \\
\widehat{D} \leq 1 \quad \text{si} & \Big(A(\alpha+\beta)\Big)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1+\alpha+\beta) \leq 2+q & \text{si no} \quad \widehat{D} = 1 \\
\widehat{E} \leq 1 \quad \text{si} & \Big(A(\alpha+\beta)\Big)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1-\alpha-\beta) \leq q & \text{si no} \quad \widehat{E} = 1
\end{array}$$

Analizando el efecto marginal de incrementar el precio de la acción tenemos que:
Para el Equity:

$$\frac{\partial \widehat{E}}{\partial q} = -\Big(A(\alpha+\beta)\Big)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{1-\alpha-\beta}{2q^2}\right) \leq 0 \tag{23}$$

Para la Deuda:

$$\frac{\partial \widehat{D}}{\partial q} = -\frac{1}{2} \leq 0 \tag{24}$$

Es decir que un incremento del precio del valor de la firma reduce la proporción que esta decide conservar y también reduce la cantidad de deuda. Intuitivamente, al estar mejor valuada la empresa le es más conveniente financiar su operación emitiendo más acciones sin tomar tanta deuda. Notar que $\widehat{E} \geq 0,5$

También se puede notar que si hay un aumento en la esperanza de su eficiencia ξ relativo a la esperanza de la tasa de interés r se espera que dentro de una solución interior $\widehat{E}$ y $\widehat{D}$ aumenten. En otras palabras, si la empresa en promedio es relativamente más eficiente y los intereses que debe pagar son en promedio bajos, entonces podrá emitir menos acciones y tomar más deuda.

Además, mientras más productiva sea la empresa relativo a sus costos de producción, o sea, mientras más alta sea $A(z,p_1,p_2)$, entonces mayor cantidad de deuda podrá tomar y más cantidad de acciones podrá conservar en su poder dado que el valor agregado que logra crear es suficiente para pagar los intereses y de esta forma es más sencillo retener los beneficios.

Con los valores óptimos de deuda y equity se facilita hallar el valor de y, en función del factor tecnológico, los precios de los insumos y la eficiencia relativa a la tasa de interés esperadas. Reemplazando (21) y (22) en (11) tenemos:

$$\widehat{y} = \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(A\left(\alpha+\beta\right)\right)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \tag{25}$$

La empresa no cumplirá con sus obligaciones de deuda en el estado de naturaleza s si sucede que la relación deuda sobre producto es mayor a la relación entre la eficiencia en la producción y la tasa de interés bruta de la deuda en s:

$$\frac{\xi(s)}{r(s)} < \frac{\widehat{D}}{\widehat{y}} = \frac{(1+\alpha+\beta)\xi}{2r} - \frac{q}{2}\Big(\frac{r}{\xi\, A(\alpha+\beta)}\Big)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \tag{26}$$

Lógicamente, si la desigualdad es el revés entonces la firma cumple con el pago de su deuda. Notar también que mientras más productiva sea la empresa o menor sea su valor q en el mercado, mayor será su relación deuda producto.

B) Household

i) State the problem of the house in terms of individual and agreggate states.

Para desarrollar este problema se asume un hogar, el cual recibe una dotación w que es una variable aleatoria $i.i.d$ en cada periodo y tiene 2 modos de transferir recursos en el tiempo. La primera modalidad viene dada por la compra o venta de bonos internacionales b, los cuales rinden a una tasa de interés mundial libre de riesgo R, la cual se asume constante en el tiempo por simplicidad.
La segunda modalidad que tiene el agente, es comprar acciones de la firma y esperar los rendimientos luego de que la firma terminó de madurar en su segundo periodo de vida. Se simboliza con α_t a la proporción que compra de acciones en el periodo t.
Además de esto el agente es consciente que esta sujeto a incertidumbre y por ende lo que invirtió en la firma puede que no le de retorno alguno dado que la firma puede quebrar bajo condiciones desfavorables, por eso el agente fija una restricción colateral para la cual lo que coloca en los bonos es siempre mayor a una fracción de lo que pagó por las acciones.
Con lo mencionado se escribe el problema del hogar individual y el hogar agregado.

Hogar individual:

$$max_{c_{i,t},\alpha_{i,t+1},b_{i,t+1}} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{i,t})\right) \tag{27}$$

Sujeto a:

$$c_{i,t} + q_{t+1}\,\alpha_{i,t+1} + b_{i,t+1} \leq w_{i,t} + \eta_t(s)\,\alpha_{i,t} + R\,b_{i,t} \tag{28}$$

$$b_{i,t+1} \geq -k\, q_{t+1}\, \alpha_{i,t+1} \qquad \lim_{t\to\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{b_{i,t}}{R^t} \geq 0 \tag{29}$$

Para obtener el problema de los hogares agregados se supone que hay infinitos agentes dentro de un intervalo desde el 0 al 1 que comparten las mismas preferencias, el factor de descuento intertemporal y la dotación recibida. Por lo tanto, la suma de los consumos, bonos, dotaciones y fracciones de equity individuales serán iguales a la variable individual respectiva. Desde aquí se simplifica la notación descartando el subíndice i.

Hogar agregado:

$$max_{c_t,\alpha_{t+1},b_{t+1}} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t\, u(c_t) \right) \tag{30}$$

Sujeto a:

$$c_t + q_{t+1}\, \alpha_{t+1} + b_{t+1} = w_t + \eta_t(s)\, \alpha_t + R\, b_t \tag{31}$$

$$b_{t+1} \geq -k\, q_{t+1}\, \alpha_{t+1} \qquad \lim_{t\to\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{b_t}{R^t} \geq 0 \tag{32}$$

ii) Characterize and interpret the optimal solutions

Se desarrollara el problema del hogar agregado. Para esto se plantea el lagrangiano asociado a este y se obtienen las condiciones de primer orden:

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t\, u(c_t) - \lambda_t(c_t + q_{t+1}\, \alpha_{t+1} + b_{t+1} - w_t - \eta_t(s)\, \alpha_t - R\, b_t) + \gamma_t(kq_{t+1}\, \alpha_{t+1} + b_{t+1}) \tag{33}$$

Se supone que las preferencias satisfacen no saciedad local, por lo tanto, el consumo será positivo y entonces la derivada del lagrangiano respecto al consumo se cumple con igualdad. Además, como la utilidad marginal del consumo es positiva, esto hace que el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria sea positivo, por lo tanto, esta restricción se cumplirá con igualdad en el óptimo también.

$$CPO[c_t]: \qquad u'(c_t) = \lambda_t \qquad \forall t \tag{34}$$

Asimismo, típicamente los hogares querrán trasladar sus ingresos de un período a otro, entonces α_{t+1} y b_{t+1} por lo general serán distintos de cero óptimamente. Por lo tanto, las respectivas derivadas del lagrangiano también se cumplirán con igualdad.

$$CPO[\alpha_{t+1}]: \qquad q_t(\lambda_t - \gamma_t k) = \beta E_t[\lambda_{t+1}\, \eta_{t+1}(s)] \qquad \forall t \tag{35}$$

$$CPO[b_{t+1}]: \qquad (\lambda_t - \gamma_t) = \beta R E_t[\lambda_{t+1}] \qquad \forall t \tag{36}$$

Remplazando (34) en (36) se obtiene la ecuación de Euler con la presencia del multiplicador de lagrange asociado a la restricción de colateral:

$$u'(c_t) = \beta R E_t[u'(c_{t+1})] + \gamma_t \tag{37}$$

Despejando este multiplicador de (35), remplazando en (37) y usando (34) se obtiene:

$$\frac{u'(\widehat{c}_t)}{E_t[u'(\widehat{c}_{t+1})]} = \frac{\beta}{1-k}\Big(\frac{E_t[\eta_{t+1}(s)]}{q_t} - kR\Big) \quad si \quad Cov(\eta_{t+1}(s), u'(c_{t+1})) = 0 \tag{38}$$

Esta expresión dice que si la decisión de consumo futuro no está correlacionada directamente con el patrimonio neto futuro de la empresa entonces el agente va intercambiar consumo entre períodos de acuerdo a la relación entre el factor de descuento y la diferencia entre su retorno bruto esperado por comprar las acciones y los intereses de la potencial deuda contraída. Todo esto ponderado por el factor k perteneciente a la restricción de colateral.

Ahora bien, si la restricción de colateral no se activa, entonces su multiplicador asociado debe ser igual a cero para satisfacer las condiciones de K-T. Entonces la ecuación (37) de vuelve una ecuación de Euler típica. Luego, a partir de las condiciones de primer orden, en particular, de la decisión óptima de α_t se obtiene la siguiente expresión:

$$R\, q_t = E_t[\eta_{t+1}(s)] + \frac{Cov(\eta_{t+1}(s), u'(\widehat{c}_{t+1}))}{E_t[u'(\widehat{c}_{t+1})]} \tag{39}$$

En este caso notamos que $\widehat{\alpha}_{t+1}$ queda indeterminado y que $\widehat{b}_{t+1}$ se determina despejando de la restricción presupuestaria dado algún $\widehat{\alpha}_{t+1}$.

Por otro lado, si la restricción de colateral se activa, entonces de allí se puede despejar $\widehat{\alpha}_{t+1}$ en función de $\widehat{b}_{t+1}$ y obtener:

$$\widehat{b}_{t+1} = \big(\tfrac{k}{1-k}\big)\big[\widehat{c}_t - w_t + \widehat{b}_t(\tfrac{\eta_t(s)}{kq_t} - R)\big]$$

$$\widehat{\alpha}_{t+1} = \big(\frac{1}{(1-k)q_t}\big)\big[w_t - \widehat{c}_t + \widehat{b}_t(R - \frac{\eta_t(s)}{kq_t})\big] \tag{40}$$

Recordando que el consumo se determinada dentro de la ecuación de Euler y respetando la condición de no juego de Ponzi podemos ver que en este caso para poder comprar las acciones los hogares deben endeudarse.

C) Market clearing and equilibrium conditions

Para hallar el vaciado de mercados y las condiciones de equilibrio tenemos que trabajar sobre los 3 mercados que existen: Bienes, Activos, Bonos.

Mercado de bienes

En el mercado de bienes se considera que el hogar tiene que consumir lo que es producido por la firma por lo tanto tenemos que:

$$\widehat{c} = \widehat{y} \tag{41}$$

Recordamos que $\widehat{y}$ es la ecuación (25), por ende reemplazando tenemos que el consumo en equilibrio esta dado por:

$$\widehat{c} = \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(A\left(\alpha+\beta\right)\right)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \tag{42}$$

Mercado de acciones

Para el mercado de activos se considera que para vaciar el mercado la proporción de acciones demandadas es igual a la proporcion de acciones ofrecidas por lo tanto se tiene que cumplir que:

$$\widehat{\alpha}_{t+1} = 1 - \widehat{E_t} \tag{43}$$

Recordando que $\widehat{\alpha_t}$ es la decisión que toman los hogares y α es un parámetro en la función de producción de las firmas, reemplazando se obtiene:

$$\widehat{\alpha}_{t+1} = \frac{1}{2} - \Big(A(\alpha+\beta)\Big)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{1-\alpha-\beta}{2q_t}\right) \tag{44}$$

En el caso en que las familias no tengan activa su restricción de colateral entonces el precio de la acción será tal que los hogares estén indiferentes entre comprar acciones y comprar bonos. Este resultado se obtiene a partir de la ecuación (39), asumiendo que la covarianza entre el patrimonio neto de las firmas y el consumo futuro es cero. Con este valor de q se obtiene finalmente la cantidad de acciones en equilibrio.

$$q_t^* = \frac{E_t[\eta_{t+1}(s)]}{R} \tag{45}$$

Por otra parte, si las familias tienen la restricción de colateral activa porque se endeudaron para suavizar consumo entonces el q_t^* se obtiene implícitamente igualando la ecuación (40) con la (44).

Mercado de bonos

Para el mercado de bonos se supone que el sector externo es suficientemente grande como para atender las necesidades de ahorro o deuda de la economía doméstica que estamos analizando. Siendo b_t^* los activos externos netos en poder de los extranjeros, la siguiente ecuación representa que no puede haber deudor sin acreedor:

$$b_t + b_t^* = 0 \tag{46}$$

También tiene que suceder que la condición de transversalidad se cumpla óptimamente con igualdad ya que los hogares no derivan utilidad por acumular activos sino que los utilizan simplemente para trasladar su ingreso entre los periodos de tiempo.

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{b_t}{R^t} = 0 \tag{47}$$

ii) Equilibrio recursivo competitivo

Para definir un equilibrio recursivo consideramos al operador de Bellman

$$TV(x_t) = max_{x_{t+1}} \left(F(x_t, x_{t+1}) + \beta\, V(x_{t+1}) \right) \tag{48}$$

El problema de la familia es:

$$V(\alpha, b) = max_{\alpha', b'} \Big(u\big(w + \eta\alpha + Rb - q'\alpha' - b'\big) + \beta\, E[V(\alpha', b')] \Big) \tag{49}$$

Sujeto a:

$$b' \geq -kq'\alpha' \qquad\qquad c = w + \eta\alpha + Rb - q'\alpha' - b' \geq 0 \tag{50}$$

El problema de la firma se resuelve tal que:

$$E = \widehat{E}(q, p_1, p_2, z, \xi, r) = \Big(A(\alpha + \beta) \Big)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\xi}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{1 - \alpha - \beta}{2q} \right) + \frac{1}{2} \tag{51}$$

$$D = \widehat{D}(q, p_1, p_2, z, \xi, r) = \Big(A(\alpha + \beta) \Big)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\xi}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{1 + \alpha + \beta}{2} \right) - \frac{q}{2} \tag{52}$$

En equilibrio se debe cumplir el vaciado del mercado de acciones:

$$\widehat{E}(q, p_1, p_2, z, \xi, r) = 1 - \alpha' \tag{53}$$

Por lo tanto, el equilibrio competitivo recursivo, dada una función de expectativas G^E para los hogares, es un conjunto de funciones V, H, g que resuelven el siguiente problema y determinan el valor de q:

$$V(\alpha, b; G^E) = max_{\widehat{E}, b'} \Big(u\big(w + \eta\alpha + Rb - q'(1 - \widehat{E}) - b'\big) + \beta\, E[V(\widehat{E}, b'; G^E)] \Big) \tag{54}$$

Sujeto a:

$$b' \geq -kq'(1 - \widehat{E}), \quad c \geq 0, \quad D = \widehat{D}(q, \xi, r), \quad \widehat{E}(q, \xi, r) = 1 - \alpha' \tag{55}$$

Además V, H y G^E cumplen que:
1) $g(b) = b'$ dado G^E
2) $H(w, \eta; G^E) = (w', \eta')$

D) Comentario sobre la afirmación

Por un lado, la afirmación hace mención al efecto negativo que le sucede a los deudores, por ejemplo a las firmas, cuando sube la tasa de interés internacional a la que piden prestado para financiar su producción. Esto naturalmente produce que sus beneficios caigan o incluso que no logren cumplir con sus obligaciones de pago de la deuda. No obstante, se menciona que este aumento en la tasa también produce un aumento en la demanda de acciones extranjeras por parte de los hogares. Por lo tanto, el efecto en el bienestar se compensa.

Por otro lado, el modelo que se analiza en este trabajo plantea lo que le sucedería a una pequeña economía apalancada y abierta con incumplimiento empresarial local, sin la posibilidad de comprar acciones extranjeras pero sí bonos. En efecto, si aumenta la tasa de interés internacional R y los hogares están tan apalancados que su restricción de colateral se cumple con igualdad, entonces a partir de la ecuación (40) se puede predecir el movimiento de la demanda de acciones y de bonos. Suponiendo que en el período anterior estaban endeudados los hogares y que $0 < k < 1$ entonces la demanda de acciones locales aumentan y caen sus bonos. Por lo tanto, debería subir el precio de las acciones y la empresa podrá financiarse con menos deuda y más capital social. En cambio, si $k > 1$ entonces la demanda de acciones cae y aumentan los bonos de los hogares. Esto produce una caída en el precio de equilibrio de las acciones. Por lo tanto, la empresa se verá perjudicada en dos sentidos. Primero porque le aumentaron la tasa y luego porque el valor de sus acciones también cayeron. Por lo tanto, en este caso el efecto en el bienestar por una suba de tasas de interés es negativo.

2. Ejercicio Numérico(RBC)

2.1. Escriba la ecuación de Bellman del planificador

La ecuación de Bellman del planificador viene dada de la siguiente forma:

$$V(x) = (F(x, y) + \beta.V(y)) \tag{56}$$

Es una función de valor que determina cuánta utilidad indirecta otorga una variable con un valor inicial, dada una función objetivo y el valor presente de la función de valor del próximo periodo.

Se reescribe la restricción de presupuesto siendo el consumo

$$c_t = f(k_{t-1}) - I_t \tag{57}$$

Regresando a nuestro operador de Bellman aplicamos una contracción, y con la verdadera forma de la utilidad se tiene que la contracción tiene la siguiente forma:

$$T(V(X)) = max_{y\in\Gamma(x)}\left(\frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \beta.V(y)\right) \tag{58}$$

Reemplazando por la ecuación (57) y el valor de la $I_t = k_t - k_{t-1}\,(1-\delta)$ se tiene

$$T(V(k_{t-1})) = max_{k_t\in\Gamma(k_{t-1})}\left(\frac{\left(f(k_{t-1}) + k_{t-1}\,(1-\delta) - k_t\right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \beta.V(k_t)\right) \tag{59}$$

Ahora procedemos a probar la unicidad de nuestra función.

2.1.1. Demostración de unicidad

Con el fin de demostrar que lo que va a dar la contracción es una solución única, es decir solo existe un maximizador que encuentra el máximo valor de $V(k_{t-1})$, demostraremos que se cumplen las condiciones de suficiencia de Blackwell, estas son:

Condición de Monotonía:

$$f, g \in B(X), \quad f(x) \le g(x), \forall x \in X, \longrightarrow (Tf)\,(x) \le (Tg)(x)\ \forall x \in X. \tag{60}$$

Condición de Descuento:

$$\exists \beta \in (0,1)\,/\,T(f+a)(x) \le (Tf)\,(x) + \beta\,a \quad \forall\, f \in B(X)\,a \ge 0, x \in X. \tag{61}$$

La primera condición quiere decir que dadas 2 funciones donde una es menor o igual que la otra, las contracciones de ambas conservarán el orden.

La segunda condición menciona que la aplicación que la contracción a una constante más una función es menor o igual a la contracción de la función más el descuento de la constante.

Siendo $B(X)$ el espacio de funciones acotadas y continuas, para nuestro caso específico la CRRA usada como función de utilidad así como la Cobb Douglas de producción son continuas y acotadas así que están sobre $B(X)$.

Asimismo estamos sobre un espacio métrico $(B(X), \rho)$ y dado que la contracción T maximiza esas funciones, su máximo pertenece a $B(X)$, por lo tanto $T \in B(X)$

Se tiene el operador de Bellman con la función f.

$$(Tf)(c_t) = max[u(c_t) + \beta\, f(k_t)] \tag{62}$$

Al maximizar esto se obtiene c^* y k^*, que son los argumentos que maximizan la combinación:

$$(Tf)(c_t) = u(c^*) + \beta\, f(k^*) \tag{63}$$

Ahora se tiene a la función g

$$(Tg)(c_t) = u(c^{**}) + \beta\, g(k^{**}) \tag{64}$$

Donde k^{**} ,y c^{**} son los valores que la maximizan.

La primera condición indica que

$$(Tf)(c_t) \leq (Tg)(c_t) \tag{65}$$

En su forma extendida:

$$u(c^*) + \beta\, f(k^*) \leq u(c^{**}) + \beta\, g(k^{**}) \tag{66}$$

La parte izquierda de la desigualdad va a ser menor o igual a la contracción de g evaluada en c^* dado que $g > f$

$$u(c^*) + \beta\, f(k^*) \leq u(c^*) + \beta\, g(k^*) \tag{67}$$

y al mismo tiempo este valor no puede ser superior a la maximización dado que es su cota superior

$$u(c^*) + \beta\, g(k^*) \leq max[u(c_t) + \beta\, g(k_t)] \tag{68}$$

Y por lo tanto esto hace que la desigualdad (66) se cumpla, por lo que (65) no es un absurdo y se satisface monotonicidad.

Para la condición de descuento se tiene que cumplir que :

$$(Tf + a)(c_t) \leq (Tf)(c_t) + \beta\, a \tag{69}$$

De la definición de T

$$(Tf + a)(c_t) = max[u(c_t) + \beta\ (f(k_t) + a)] \tag{70}$$

Al ser una constante $\beta\, a$ puede salir de la maximización, luego reemplazando por la definición de Tf tenemos:

$$(Tf)(c_t) + \beta\, a \leq (Tf)(c_t) + \beta\, a \tag{71}$$

La cual cumple con igualdad, por ende las condiciones de Blackwell fueron satisfechas.

Por el teorema de contracción aplicada se tiene un espacio métrico (S, ρ) y una contracción T que va de S a S, de módulo β entonces

$$\exists x^* \,/\, x^* = T(x^*), \qquad x^* \in X \tag{72}$$

$$\forall x_0 \in X \qquad \rho(T^n(x_0), x^*) \leq \beta^n\,(\rho, x) \tag{73}$$

Esto implica que la contracción T tiene un punto fijo en el espacio S.

Podemos aplicar el teorema del máximo para demostrar la continuidad de la función de valor, esto se satisface dado que tanto c_t y k_{t+1} existen en un subconjunto de los números reales, nuestra función f es continua, y la función de factibilidad también.

2.2. Defina un equilibrio recursivo para este modelo.

De la ecuación de Bellman planteada se encuentra el máximo.

$$\beta.V'(k_t) = (f(k_{t-1}) - k_t - k_{t-1}.(1-\delta))^{-\gamma} \tag{74}$$

Ahora se aplica la Envolvente

Diferenciamos en la variable de estado k_{t-1}

$$V'(k_{t-1}) = (f(k_{t-1}) - k_t + k_{t-1}.(1-\delta))^{-\gamma}\,.\,[f'(k_{t-1}) + (1-\delta)] \tag{75}$$

Adelantamos todo un periodo:

$$V'(k_t) = (f(k_t) - k_{t+1} + k_t.(1-\delta))^{-\gamma}\,.\,[f'(k_t) + (1-\delta)] \tag{76}$$

Lo comparamos con la condición de primer orden.

$$\beta.\,(f(k_t) - k_{t+1} + k_t.(1-\delta))^{-\gamma}\,.\,[f'(k_t) + (1-\delta)] = (f(k_{t-1}) - k_t - k_{t-1}.(1-\delta))^{-\gamma} \tag{77}$$

Reordenamos los términos.

$$\beta.\,[f'(k_t) + (1-\delta)] = \frac{(f(k_{t-1}) - k_t - k_{t-1}.(1-\delta))^{-\gamma}}{(f(k_t) - k_{t+1} + k_t.(1-\delta))^{-\gamma}} \tag{78}$$

Con esto podemos hallar el estado estacionario. Es importante notar que los dos términos que están en la fracción, son la misma variable c_t pero en diferentes periodos, como la solución de estos sistemas nos da un estado estacionario, quiere decir que dado un punto inicial convergemos a un punto fijo entonces tenemos que para cualquier variable: $a_t = a_{t+1} = a_{ss}$.

Por ende la ecuación (78) resulta.

$$\beta.\left[f'(k_t) + (1-\delta)\right] = 1 \tag{79}$$

Derivando $f(k_t)$ y reemplazando se tiene que:

$$f'(k_{ss})) = \frac{1}{\beta} - (1-\delta) \tag{80}$$

$$\alpha.A.k_{ss}^{\alpha-1} = \frac{1}{\beta} - (1-\delta) \tag{81}$$

Entonces

$$k_{ss} = \left(\frac{\beta.A.\alpha}{1-\beta+\beta.\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{82}$$

Con el valor de k_{ss} resulta trivial hallar c_{ss}

$$c_{ss} = f(k_{ss}) - k_{ss} + k_{ss}.(1-\delta) \tag{83}$$

Resolviendo

$$c_{ss} = A.\left(\frac{\beta.A.\alpha}{1-\beta+\beta.\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta.\left(\frac{\beta.A.\alpha}{1-\beta+\beta.\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{84}$$

Hallamos la inversión también

$$I_{ss} = \delta.k_{ss} \tag{85}$$

$$I_{ss} = \delta.\left(\frac{\beta.A.\alpha}{1-\beta+\beta.\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{86}$$

2.3. Compute la evolución temporal de la inversión, el stock de capital, el producto y el consumo si $K_0 = 80$. Muestre cómo sería la trayectoria de dichas variables para un modelo sin la restricción de no-negatividad sobre la inversión.

Luego de correr el código se obtuvieron estos 2 gráficos, los cuales muestran la evolución temporal de las variables de consumo, inversión, producto y stock de capital para inversión restringida e inversión libre.

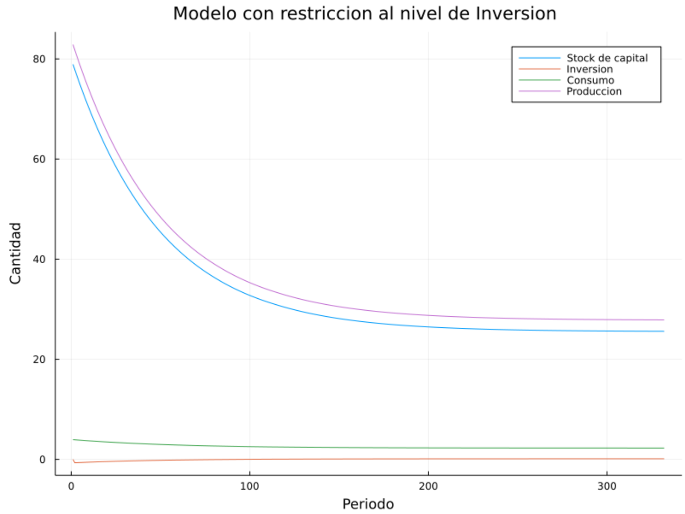


Figura 1

Después de varios periodos se puede observar que todas las variables llegan a un estado estacionario, el mismo estado predicho mediante el método analítico ($k_{ss} = 25{,}47$). Como podemos ver si se empieza con un nivel de capital mayor al de estado estacionario, el agente incrementa levemente su consumo mientras tiene este capital, con esto reduce el k_{t+1}, hasta que converge a su valor de estado estacionario.

Figura 2

En este segundo modelo podemos apreciar que el agente se queda sin stock de capital y por lo tanto su dinámica termina aproximadamente un poco más alla del periodo 330. Esto es explicado dado que al agente al no tener restricción en su inversión tiene la capacidad de aumentar su consumo y maximiza su utilidad, pensando en que le importa más el presente que el futuro dado que para periodos futuros el descuento:

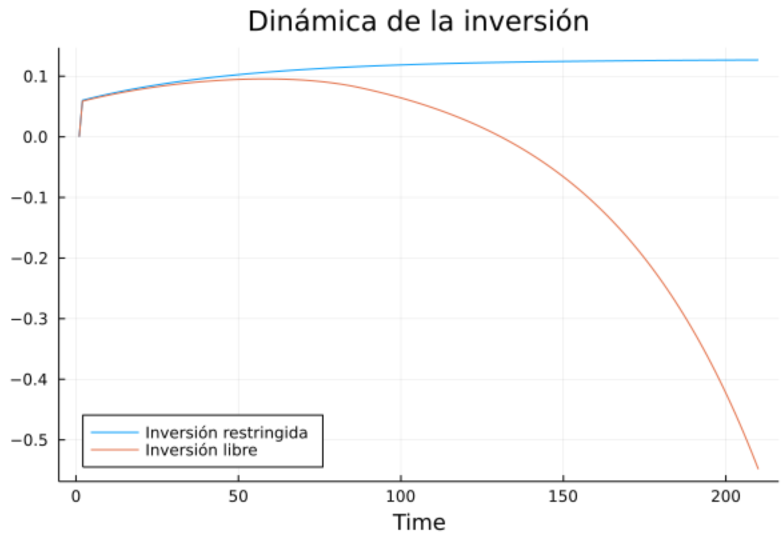
$$\beta^N \longrightarrow 0 \qquad \forall\, 0 < \beta < 1 \tag{87}$$

La utilidad que puede brindar el consumo de un periodo futuro lejano en sí no agrega mucho valor, dado que se descuenta. La relevancia de la utilidad futura depende de qué tan cerca esté β de 1 y cuántos periodos estamos alejados del presente.

En este modelo pudimos ver de que mientras el agente eleva su consumo aún así sea una pequeña parte, empieza a descapitalizarse, y no va a regresar a su estado original dado que el agente sigue terco en mantener su nivel de consumo. Esto solo le va a durar hasta que la producción caiga hasta su nivel de consumo y allí se le termina la dinámica.

Enfocar este problema desde el punto de vista de utilidad del agente podría decir si ambos alcanzaron la misma utilidad, y si las utilidades siguientes del agente que mantuvo la restricción, son mínimas y despreciables.

2.4. Compute la evolución temporal de la inversión, si $K_0 = 30$. Muestre en un mismo gráfico como sería la trayectoria de dicha variable para un modelo sin la restricción de no-negatividad sobre al inversión.



Continuando con lo mencionado en el punto 2.3, aquí se observa como la inversión del agente que no tiene restricción cae por debajo de 0, lo que demuestra que el agente optó por mantener un nivel de consumo ligeramente mayor. A su vez, generó desahorro y la pendiente negativa de la curva se acentúa más conforme la evolución del tiempo dado que el agente sigue con un mismo nivel de consumo, pero el stock de capital y la inversión caen cada vez mas fuerte. Podemos ver que el agente con la restricción(Linea azul),llegó a un nivel estacionario de inversión. Para este capital inicial las dinámicas del agente sin restricción duraron un poco más allá del periodo 200.