Ejercitación 3

Macroeconomía Avanzada

Primer Trimestre - 2021

Gastón García Zavaleta

Francisco Jesús Guerrero López

Mariana Belén Santi

Profesores: Federico Sturzenegger y Javier García Cicco

Tutor: Santiago Mosquera

Universidad de San Andrés

Ejercicio 1. Calibrando un modelo OLG.

a) i. Se busca expresar el *stock* de capital per cápita de estado estacionario como función de los parámetros y de A.

Considérese una función de producción Cobb-Douglas de la forma

$$y = f(k) = Ak^{\alpha}$$

Asumiendo una función de utilidad logarítmica, el problema de un agente nacido en t es:

$$\max_{c_{1,t},c_{2,t+1}} \log(c_{1,t}) + \frac{1}{1+\rho}\log(c_{2,t+1})\ (1)$$

$$sujeto\ a$$

$$c_{1,t} + s_t \leq w_t(2)$$

$$c_{2,t+1} \leq (1 + r_{t+1})s_t(3)$$

Resolviendo para el ahorro[1]:

$$s_t = \frac{w_t}{2+\rho}$$

Asumiendo competencia perfecta, en equilibrio se cumple que:

$$w_t = f_L'(k_t) = f(k_t) - f'(k_t).k_t$$

Entonces:

$$s_t = \frac{f(k_t) - f'(k_t).k_t}{2+\rho}$$

Adicionalmente, en equilibrio el ahorro es igual a la inversión.

$$k_{t+1} - k_t = L_t s_t(w_t) - k_t$$

Resolviendo para k_{t+1}:

[1] Ver **Sección 1** de apéndice matemático para más detalles.

$$k_{t+1} = \frac{\frac{f(k_t) - f'(k_t)k_t}{2+\rho}}{(1+n)}$$

En estado estacionario, $k_{t+1} = k_t = k^*$. Operando:

$$k^* = \left[\frac{A(1-\alpha)}{(2+\rho)(1+n)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

ii. Se busca expresar el producto per cápita de estado estacionario como función de los parámetros y de A.

Reemplazando k^* en la función de producción:

$$y^* = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{(1-\alpha)}{(2+\rho)(1+n)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

iii. Usando datos de un país a elección, se calcula A.

El país elegido para el análisis es Grecia.

Valores propuestos de los parámetros y justificación.

Capital share (α): de acuerdo a estimaciones del Fondo Monetario Internacional, el *labor share* de la economía griega era de aproximadamente un 33% en el año 2016. Debido a la forma funcional de la función se producción, se establece:

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

Factor de descuento (ρ). Se asume que $\rho = r$, lo cual es una condición de equilibrio del mercado financiero. Para el cálculo de r se toma el valor de diciembre de 2019 del costo de financiamiento anualizado para los hogares estimado por el Banco Central Europeo y se le resta la tasa de inflación del correspondiente período. El resultado es:

$$\rho = r = 0{,}0262$$

Producto per cápita de estado estacionario: se asume que el producto bruto interno per cápita del año 2019 representa adecuadamente el valor de estado estacionario.

$$y^* = 17.120$$

Tasa de crecimiento de la población: se asume que la tasa de crecimiento de la población del año 2019 representa adecuadamente el valor de estado estacionario.

$$n = -0{,}0013$$

A partir de estos valores se obtiene:

$$A = 89{,}26$$

iv. Reemplazando el valor de los parámetros y de A, se calcula el *stock* de capital per cápita de estado estacionario de Grecia.

$$k^* = 2876{,}5$$

b) Una economía se encuentra en una situación de ineficiencia dinámica cuando el *stock* de capital de estado estacionario es mayor al correspondiente a la *Regla Dorada de acumulación de capital*, que es el nivel k^{GR} para el cual se maximiza el consumo de estado estacionario. Frente a esta situación, resulta óptimo implementar políticas que lleven a una reducción en la tasa de ahorro; haciendo esto, tanto las generaciones presentes como las futuras experimentarían un aumento en el bienestar. Una caída en la tasa de ahorro llevaría a un aumento del consumo durante la transición y a una reducción del stock de capital de estado estacionario generando un incremento de la productividad marginal del capital y como consecuencia del consumo.

La economía griega no se encuentra esta situación porque

$$0{,}0262 = r^* = f'(k^*) > f'(k^{GR}) = n = -0{,}0013$$

Esto implica que

$$k^* < k^{GR}$$

c) Antes de la implementación de la política, el ahorro per cápita de la economía era:

$$s_t = 2.872{,}77$$

En términos del producto, la tasa de ahorro era 16,8%.

Con el sistema *pay as you go*, el problema a resolver por un individuo nacido en algún t posterior a la implementación de la política es:

$$\max_{c_{1,t}, c_{2,t+1}} \log(c_{1,t}) + \frac{1}{1+\rho} \log(c_{2,t+1})$$

$$sujeto\ a$$

$$c_{1,t} + s_t + d_t \leq w_t$$

$$c_{2,t+1} \leq (1 + r_{t+1})s_t + b_{t+1}$$

Resolviendo para el ahorro[2]:

$$s_t = \frac{w_t}{(2+\rho)} - \frac{(1 + r_{t+1})d_t + b_{t+1}(1+\rho)}{(2+\rho)(1+r_{t+1})}$$

El anuncio del presidente establece que:

$$d_t = \frac{w_t}{3}$$

Por definición:

$$b_{t+1} = (1+n)d_{t+1}$$

Entonces:

$$b_{t+1} = (1+n)\frac{w_{t+1}}{3}$$

Reemplazando en la tasa de ahorro

$$s_t = \frac{w_t}{(2+\rho)} - \frac{w_t}{3(2+\rho)} + \frac{(1+n)w_{t+1}}{3(2+\rho)(1+r_{t+1})}$$

En estado estacionario el stock de capital permanece constante, entonces también lo hace el salario. Como consecuencia:

$$s_t = \frac{w}{(2+\rho)} - \frac{w}{3(2+\rho)}\left(1 + \frac{(1+n)}{(1+r_{t+1})}\right)$$

Tomando como referencia el estado estacionario previo a la implementación de la política[3], el nuevo valor del ahorro per cápita es

$$s_t = 983{,}25$$

En términos del producto, la nueva tasa de ahorro es 5,74%.

---

[2] El procedimiento se detalla en la **Sección 2** del apéndice matemático.

[3] Esta simplificación ignora el cambio en el ingreso que generaría la política, de modo que el cálculo es impreciso.

La caída de la tasa de ahorro, como consecuencia de la política, es de 11,06 puntos porcentuales del producto o bien del 66%.

d) Katerina, debo advertirle que la política anunciada tendría consecuencias catastróficas sobre la economía griega. Los argumentos de mis colegas chinos sobre los beneficios de pasar a este sistema son válidos únicamente en economías que sufren un exceso de ahorro, ¡pero ese no es nuestro caso! Pese a ser cierto que una generación entera de ancianos experimentaría un aumento del bienestar, el costo sería demasiado grande. La tasa de ahorro caería en un 66% llegando al 5.74% del PBI, reduciendo el *stock* de capital y en consecuencia el ingreso de forma permanente. Además, la tasa de crecimiento de nuestra población es negativa, lo cual vuelve a este sistema insostenible (ten en cuenta lo que ha estado ocurriendo en países vecinos). Comprendo los motivos electorales que la llevan a querer implementar esta política, pero le pido que considere las consecuencias mencionadas para los próximos años ya que afectarán el bienestar de toda la población.

Ejercicio 2. Política fiscal óptima en una cuarentena.

a) En el modelo propuesto se asume que durante la pandemia el deseo de consumo de los agentes se reduce. Este supuesto -que en general se verifica en las estimaciones realizadas durante el último año sobre la tasa de ahorro- puede tener distintas explicaciones. Desde una perspectiva individualista, es esperable que las personas prefieran permanecer en sus casas, reduciendo el consumo de bienes no esenciales, para disminuir el contacto con otras personas y evitar contagiarse. La visión altruista, en cambio, sugiere que este fenómeno es consecuencia de la satisfacción que genera en los agentes contribuir a una menor propagación del virus, lo que implica que toda reducción del consumo asociado a la interacción con otras personas genere una utilidad positiva.

b) Para encontrar la respuesta de política óptima, supóngase inicialmente el problema de una economía que no se ve afectada por la cuarentena. La función de utilidad de los agentes viene dada por:

$$U(c_t, g_t) = \int_0^\infty U\left(\min\left(\frac{c_t}{k}, g_t\right)\right) e^{-\rho t} dt \; (1)$$

Dada la forma Leontief de esta función, lo óptimo resulta

$$g_t = \frac{c_t}{k}, \forall t$$

La restricción presupuestaria de la economía en su conjunto es:

$$\dot{b_t} = rb_t + y - g_t - c_t$$

$$\dot{b_t} = rb_t + y - c_t\left(1 + \frac{1}{k}\right) (2)$$

Por lo tanto, el problema consiste en maximizar (1) sujeto a (2).

El Hamiltoniano que caracteriza este problema es:

$$H = U\left(\min\left(\frac{c_t}{k}, g_t\right)\right) e^{-\rho t} + \mu_t \left[rb_t + y - c_t\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]$$

Las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = U_c\left(\min\left(\frac{c_t}{k}, g_t\right)\right) e^{-\rho t} - \mu_t\left(1 + \frac{1}{k}\right) = 0 (H.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial b_t} = \mu_t r = -\dot{\mu}_t (H.2)$$

Resolviendo[4], se llega a que los niveles de consumo y gasto público óptimos son:

$$c^* = \frac{y}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

$$g^* = \frac{y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

Durante la pandemia el problema es análogo, pero tanto la utilidad de los agentes como el ingreso de la economía cambian.

La función de utilidad ahora viene dada por:

$$\int_T^{\infty} V\left(min\left(\frac{c}{k}, g\right)\right) e^{-\rho t} dt$$

La restricción presupuestaria es:

$$\dot{b_t} = rb_t + \phi y - c_t\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

El Hamiltoniano que caracteriza el problema de la economía es:

$$H = V\left(\min\left(\frac{c_t}{k}, g_t\right)\right) e^{-\rho t} + \mu_t \left[rb_t + \phi y - c_t\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]$$

Resolviendo[5],

$$c^l = \frac{\phi y}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \phi c^*$$

$$g^l = \frac{\phi y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \phi g^*$$

[4] Ver **Sección 3** del apéndice matemático.

[5] Ver **Sección 4** del apéndice matemático.

Este resultado indica que lo óptimo es reducir el gasto público durante la pandemia como consecuencia del menor deseo de consumo. En particular, la reducción optima del consumo y del gasto es tal que tanto la utilidad como la utilidad marginal permanecen constantes durante todos los períodos, debido a que:

$$V\left(min(\phi c^*, \phi g^*)\right) = U(\min(c^*, g^*))$$

$$V_c\left(min(\phi c^*, \phi g^*)\right) = U_c(\min(c^*, g^*))$$

Adicionalmente,

$$\phi y - c^l - g^l = \phi y - \frac{\phi y}{\left(1+\frac{1}{k}\right)} - \frac{\phi y}{k\left(1+\frac{1}{k}\right)} = 0$$

es posible observar que la economía gastará en cada período su ingreso corriente, debido a que la reducción proporcional en el ingreso durante la pandemia es igual a la reducción del consumo y del gasto.

c) Ahora supóngase que el gobierno decide establecer $g_t = g^*, \forall t$. Este gasto adicional durante la pandemia -con respecto al escenario óptimo- requiere una reducción del consumo para satisfacer la restricción presupuestaria intertemporal. Dadas las preferencias extremas de los hogares por mantener un sendero de consumo constante, resulta óptimo que esta reducción sea igual para todos los períodos.

Si el gobierno tiene acceso al mercado de capitales, la reducción en el consumo necesaria para afrontar los pagos de intereses de la deuda contraída durante la cuarentena es:

$$r\int_0^T (g^* - g_L)e^{-rt}dt$$

Como consecuencia, el sendero de consumo óptimo es:

$$c_t = \begin{cases} c^l - r\int_0^T (g^* - g_L)e^{-rt}dt, & \forall t \in [0, T] \\ c^* - r\int_0^T (g^* - g_L)e^{-rt}dt, & t > T \end{cases}$$

Es posible observar que durante la cuarentena la economía tendrá un nivel de absorción mayor al ingreso, mientras que lo contrario ocurrirá luego de la misma. De esta forma, se logra suavizar el efecto ingreso negativo del aumento en el gasto sin violar la restricción presupuestaria intertemporal.

La diferencia entre el producto de la economía y la absorción interna durante la cuarentena viene dada por[6]:

$$\phi y - c_t - g^* = \frac{2y(\phi - 1)}{1 + k}$$

Sabiendo que $\phi < 1$ y $k > 1$, se tiene que:

$$\phi y - c_t - g^* < 0 \forall t \in [0, T]$$

Post-pandemia, en cambio, esta diferencia es[7]:

$$y - c_t - g^* = \frac{y(3 - \phi)}{1 + k} > 0 \ \forall t > T$$

Esta observación implica que el acceso a mercados financieros internacionales es condición necesaria para que los agentes logren suavizar el consumo de forma óptima. Si el gobierno no tuviese acceso a estos mercados, entonces los agentes se verían forzados a reducir su consumo durante la cuarentena en una magnitud igual a $g^* - g^l$.

d) En la Gráfica 1 se verifica que en términos generales la tasa de ahorro aumentó durante la pandemia, en línea con lo supuesto en el modelo. Según lo explicado previamente, esta situación se relaciona con una disminución en el deseo de consumo durante la pandemia para mitigar el contacto con otras personas. Otra razón que podría explicar este resultado es el incremento de la incertidumbre, siguiendo el razonamiento del ahorro precautorio; durante las crisis económicas, las personas deciden disminuir su consumo y aumentar el ahorro ante al aumento en la probabilidad de perder el empleo o que se reduzcan los ingresos.

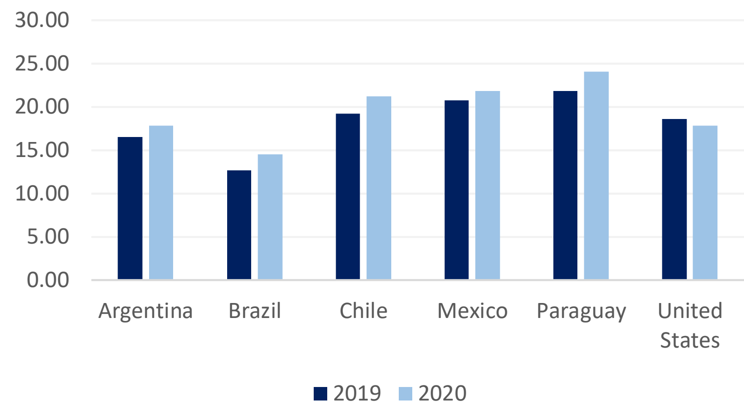
Según el modelo desarrollado, la política óptima ante este aumento en la tasa de ahorro habría consistido en disminuir el gasto durante la pandemia y trasladar recursos para el momento en que las personas volvieran a su función de utilidad previa, aumentado su deseo de consumo. En la Gráfica 2 se puede observar que todos los países incrementaron su déficit fiscal entre 2019 y 2020, lo que indicaría que no siguieron esta política de gasto óptima predicha por el modelo.

Este deterioro fiscal podría deberse a que los gobiernos no tuvieron en cuenta el cambio en la función de utilidad de las personas y priorizaron estimular la demanda y sostener la caída de la oferta evitando quiebres de empresas.

---

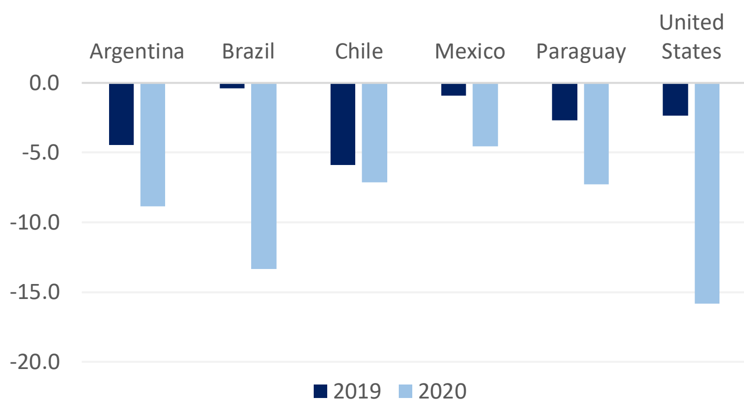
[6] Ver **Sección 5** del apéndice matemático.
[7] Ver **Sección 6** del apéndice matemático.

Gráfica 1 – Tasa de ahorro (como % de PBI)



Fuente: Fondo Monetario Internacional (FMI)

Gráfica 2 – Déficit total (como % de PBI)



Fuente: Fondo Monetario Internacional (FMI)

APÉNDICE MATEMÁTICO.

Sección 1.

El problema es:

$$\max_{c_{1,t},c_{2,t+1}} \log\left(c_{1,t}\right) + \frac{1}{1+\rho}\log(c_{2,t+1})\ (1)$$

$$sujeto\ a$$

$$c_{1,t} + s_t \leq w_t(2)$$

$$c_{2,t+1} \leq (1+r_{t+1})s_t(3)$$

De (3):

$$s_t = \frac{c_{2,t+1}}{(1+r_{t+1})}$$

Reemplazando en (2):

$$c_{1,t} + \frac{c_{2,t+1}}{(1+r_{t+1})} \leq w_t(2')$$

El problema consiste entonces el maximizar (1) sujeto a $(2')$.

El Lagrangiano que caracteriza este problema es:

$$L = \log\left(c_{1,t}\right) + \frac{1}{1+\rho}\log\left(c_{2,t+1}\right) + \lambda\left[w_t - c_{1,t} - \frac{c_{2,t+1}}{(1+r_{t+1})}\right]$$

Las condiciones de primer orden son:

$$CPO_{c_{1,t}} = \frac{1}{c_{1,t}} - \lambda = 0(CPO.1)$$

$$CPO_{c_{2,t+1}} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{c_{2,t+1}} - \frac{\lambda}{(1+r_{t+1})} = 0(CPO.2)$$

$$CPO_{\lambda} = w_t - c_{1,t} - \frac{c_{2,t+1}}{(1+r_{t+1})} = 0(CPO.3)$$

Combinando $(CPO.1)$ y $(CPO.2)$

$$\frac{c_{2,t+1}}{c_{1,t}} = \frac{(1+r_{t+1})}{(1+\rho)}$$

Reemplazando $c_{1,t}$ y $c_{2,t+1}$

$$\frac{(1+r_{t+1})s_t}{w_t - s_t} = \frac{(1+r_{t+1})}{(1+\rho)}$$

Resolviendo para el ahorro

$$s_t = \frac{w_t}{2+\rho}$$

<u>Sección 2.</u>

El problema es:

$$\max_{c_{1,t}, c_{2,t+1}} \log(c_{1,t}) + \frac{1}{1+\rho}\log(c_{2,t+1})\ (1)$$

$$sujeto\ a$$

$$c_{1,t} + s_t + d_t \leq w_t\ (2)$$

$$c_{2,t+1} \leq (1+r_{t+1})s_t + b_{t+1} (3)$$

De (3):

$$s_t = \frac{c_{2,t+1} - b_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

Reemplazando en (2):

$$c_{1,t} + \frac{c_{2,t+1} - b_{t+1}}{1+r_{t+1}} + d_t \leq w_t (2')$$

El problema consiste en maximizar (1) sujeto a (2′). El Lagrangiano que caracteriza este problema es:

$$L = \log(c_{1,t}) + \frac{1}{1+\rho}\log(c_{2,t+1}) + \lambda\left[w_t - c_{1,t} - \frac{c_{2,t+1} - b_{t+1}}{1+r_{t+1}} - d_t\right]$$

Condiciones de primer orden:

$$CPO_{c_{1,t}} = \frac{1}{c_{1,t}} - \lambda = 0 (CPO.1)$$

$$CPO_{c_{2,t+1}} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{c_{2,t+1}} - \frac{\lambda}{1+r_{t+1}} = 0 (CPO.2)$$

$$CPO_\lambda = w_t - c_{1,t} - \frac{c_{2,t+1} - b_{t+1}}{1 + r_{t+1}} - d_t = 0 (CPO.3)$$

Combinando $(CPO.1)$ y $(CPO.2)$:

$$\frac{c_{2,t+1}}{c_{1,t}} = \frac{(1 + r_{t+1})}{(1 + \rho)}$$

Reemplazando $c_{1,t}$ y $c_{2,t+1}$

$$\frac{(1 + r_{t+1})s_t + b_{t+1}}{w_t - d_t - s_t} = \frac{(1 + r_{t+1})}{(1 + \rho)}$$

Resolviendo para la tasa de ahorro:

$$s_t = \frac{w_t}{(2 + \rho)} - \frac{(1 + r_{t+1})d_t + b_{t+1}(1 + \rho)}{(2 + \rho)(1 + r_{t+1})}$$

<u>Sección 3.</u>

El Hamiltoniano que caracteriza este problema es:

$$H = U\left(\min\left(\frac{c_t}{k}, g_t\right)\right) e^{-\rho t} + \mu_t \left[r b_t + y - c_t \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]$$

Las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = U_c\left(\min\left(\frac{c_t}{k}, g_t\right)\right) e^{-\rho t} - \mu_t \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 0 (H.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial b_t} = \mu_t r = -\dot{\mu_t} (H.2)$$

Sea $\lambda_t = \mu_t e^{\rho t}$,

$$\mu_t = \lambda_t e^{-\rho t}$$

$$\dot{\mu_t} = \dot{\lambda}_{tt} e^{-\rho t} + \lambda_t(-\rho e^{-\rho t})$$

$$\dot{\mu_t} = e^{-\rho t}(\dot{\lambda_t} - \rho \lambda_t)$$

Reemplazando en $(H.2)$

$$\frac{\partial H}{\partial b_t} = \lambda_t e^{-\rho t} r = e^{-\rho t}(\dot{\lambda_t} - \rho\lambda_t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial b_t} = \lambda_t r = \dot{\lambda_t} - \rho\lambda_t$$

$$\frac{\partial H}{\partial b_t} = \lambda_t (r - \rho) = \dot{\lambda_t}$$

Dado que en equilibrio del mercado financiero $r = \rho$, entonces $\dot{\lambda_t} = 0$. Esto implica que $\lambda_t = \lambda, \forall t$.

Reemplazando en $(H.1)$:

$$U_c\left(\min\left(\frac{c_t}{k}, g_t\right)\right)e^{-\rho t} = \lambda e^{-\rho t}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$U_c\left(\min\left(\frac{c_t}{k}, g_t\right)\right) = \lambda\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Si se asume que $U_C(.)$ es una función estrictamente decreciente, entonces en el óptimo el consumo debe permanecer constante. Como consecuencia, el gasto también permanecerá constante.

Se busca el valor de c^* y g^*. Se integra la restricción de presupuesto.

$$\dot{b_t} = rb_t + y - c_t\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Primero se busca la parte homogénea:

$$\dot{b_t} - rb_t = 0$$

$$\frac{\dot{b_t}}{b_t} = r$$

$$\frac{\partial \ln(b_t)}{\partial t} = r$$

Integrando respecto al tiempo:

$$\ln(b_t) = rt + c$$

Aplicando exponencial:

$$b_t = e^{rt+c} = e^{rt}e^c = Ae^{rt} (B)$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$\dot{b_t} = \dot{A}_t e^{rt} + A_t r e^{rt}$$

En la restricción presupuestaria:

$$\dot{A}_t e^{rt} + A_t r e^{rt} = r A_t e^{rt} + y - c_t\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$\dot{A}_t = \left[y - c_t\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right] e^{-rt}$$

Integrando,

$$A_t = \int_t^m \left[y - c_s\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right] e^{-r(s-t)}\, ds + B (A)$$

$$b_t e^{-rt} = \int_t^m \left[y - c_s\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right] e^{-r(s-t)}\, ds + B$$

$$b_t = \left[\int_t^m \left[y - c_s\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right] e^{-r(s-t)}\, ds + B\right] e^{rt}$$

$$b_m = \left[\int_t^m \left[y - c_s\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right] e^{-r(s-t)}\, ds + B\right] e^{r(m-t)}$$

Si $m = t$,

$$b_t = [0 + B] e^{r(t-t)}$$

$$b_t = B$$

Sustituyendo en (A):

$$A = \int_t^m \left[y - c_s\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right] e^{-r(s-t)}\, ds + b_t (C)$$

De (B):

$$A = b_m e^{-r(m-t)}$$

Por condición de transversalidad:

$$\lim_{m\to\infty} b_m e^{-r(m-t)} = 0$$

En (C):

$$\int_t^\infty \left[y - c_s\left(1+\frac{1}{k}\right)\right] e^{-r(s-t)}\, ds + b_t = 0$$

$$b_t + \int_t^\infty y e^{-r(s-t)}\, ds = \int_t^\infty c_s\left(1+\frac{1}{k}\right) e^{-r(s-t)}\, ds$$

$$b_t + \frac{y}{r} = \left(1+\frac{1}{k}\right)\int_t^\infty c_s e^{-r(s-t)}\, ds$$

En el óptimo $c_t = c, \forall t$. Entonces:

$$b_t + \frac{y}{r} = \left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{c}{r}$$

Asumiendo $b_0 = 0$ y sabiendo que el producto, el consumo y el gasto son constantes, entonces: $b_t = 0, \forall t$.

$$c^* = \frac{y}{\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

Debido a que en el óptimo el gasto es una fracción k del consumo:

$$g^* = \frac{y}{k\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

<u>Sección 4.</u>

El Hamiltoniano que caracteriza el problema de la economía ahora es:

$$H = V\left(\min\left(\frac{c_t}{k}, g_t\right)\right)e^{-\rho t} + \mu_t\left[rb_t + \phi y - c_t\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$$

En el óptimo:

$$V_c\left(\min\left(\frac{c_t}{k}, g_t\right)\right) = \lambda\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$\dot{\lambda}_t = 0$$

La restricción presupuestaria integrada es:

$$b_t + \frac{\phi y}{r} = \left(1+\frac{1}{k}\right)\int_t^\infty c_s e^{-r(s-t)}\, ds$$

En el óptimo $c_t = c, \forall t$. Entonces:

$$b_t + \frac{\phi y}{r} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\frac{c}{r}$$

$$c^l = \frac{\phi y}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

$$g^l = \frac{\phi y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

Sección 5.

$$\phi y - c_t - g^* = \phi y - \left(\frac{\phi y}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - r\int_0^T (g^* - g_L)e^{-rt}dt\right)$$

$$-\frac{y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

$$= \phi y - \frac{\phi y}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - \frac{y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)} + r\int_0^T (g^* - g_L)e^{-rt}dt$$

$$= \phi y - \frac{\phi y}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - \frac{y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - (g^* - g_L)$$

$$= \phi y - \frac{\phi y}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - \frac{y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - g^* + g_L$$

$$= \phi y - \frac{\phi y}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - \frac{y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - \frac{y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)} + \frac{\phi y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

$$= \phi y - \frac{\phi y}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)} + \frac{\phi y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

$$\frac{-k\phi y + \phi y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \frac{\phi y(1 - k)}{(1 + k)} =$$

$$= \phi y - \frac{\phi y}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - \frac{y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - \frac{y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)} + \frac{\phi y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

$$= \phi y + \frac{\phi y(1-k)}{(1+k)} - \frac{2y}{k\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

$$= \frac{(1+k)\phi y + \phi y(1-k)}{1+k} - \frac{2y}{k\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

$$= \frac{2\phi y}{1+k} - \frac{2y}{1+k}$$

$$= \frac{2\phi y - 2y}{1+k}$$

$$= \frac{2y(\phi - 1)}{1+k}$$

Sección 6.

$$y - c_t - g^* = y - \left(\frac{y}{\left(1+\frac{1}{k}\right)} - r\int_0^T (g^* - g_L)e^{-rt}dt\right)$$

$$-\frac{y}{k\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

$$= y - \frac{y}{\left(1+\frac{1}{k}\right)} - \frac{y}{k\left(1+\frac{1}{k}\right)} + r\int_0^T (g^* - g_L)e^{-rt}dt$$

$$= \phi y - \frac{\phi y}{\left(1+\frac{1}{k}\right)} - \frac{y}{k\left(1+\frac{1}{k}\right)} - (g^* - g_L)$$

$$= y - \frac{y}{\left(1+\frac{1}{k}\right)} - \frac{y}{k\left(1+\frac{1}{k}\right)} - g^* + g_L$$

$$= y - \frac{y}{\left(1+\frac{1}{k}\right)} - \frac{y}{k\left(1+\frac{1}{k}\right)} - \frac{y}{k\left(1+\frac{1}{k}\right)} + \frac{\phi y}{k\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

$$= y - \frac{y}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - \frac{2y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)} + \frac{\phi y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

$$= y - \frac{y}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)} + \frac{-2y + \phi y}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

$$= y - \frac{ky}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)k} + \frac{y(\phi - 2)}{k\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

$$= y - \frac{ky + y(\phi - 2)}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)k}$$

$$= \frac{y\left(1 + \frac{1}{k}\right)k}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)k} - \frac{y(k + \phi - 2)}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)k}$$

$$= \frac{y(k + 1) - y(k + \phi - 2)}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)k}$$

$$= \frac{y(k + 1 - k - \phi + 2)}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)k}$$

$$= \frac{y(3 - \phi)}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)k}$$