



Revista Mexicana de Física

ISSN: 0035-001X

rmf@ciencias.unam.mx

Sociedad Mexicana de Física A.C.

México

López-Lambraño, A.; Carrillo-Yee, E.; Fuentes, C.; López-Ramos, A.; López-Lambraño, M.

Una revisión de los métodos para estimar el exponente de Hurst y la dimensión fractal en series de precipitación y temperatura

Revista Mexicana de Física, vol. 63, núm. 3, mayo-junio, 2017, pp. 244-267

Sociedad Mexicana de Física A.C.

Distrito Federal, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=57050507007>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## Una revisión de los métodos para estimar el exponente de Hurst y la dimensión fractal en series de precipitación y temperatura

A. López-Lambrano<sup>a,b,\*</sup>, E. Carrillo-Yee<sup>a</sup>, C. Fuentes<sup>c</sup>, A. López-Ramos<sup>d</sup>, M. López-Lambrano<sup>e</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño, Universidad Autónoma de Baja California, Unidad Ensenada, Km. 103 Carretera Tijuana - Ensenada, Ensenada, Baja California.

<sup>b</sup>HIDRUS S.A. de C.V. Querétaro, México.

<sup>c</sup>Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Paseo Cuauhnahuac 8532, Progreso, 62550 Jiutepec, Morelos, México.

<sup>d</sup>Escuela de Ingenierías y Arquitectura, Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Pontificia Bolivariana-Seccional Montería, Cra 6 No 97A-99, Montería, Córdoba, Colombia

<sup>e</sup>Universidad del Norte,

Km.5 Vía Puerto Colombia, Barranquilla, Colombia.

\*Correspondiente al autor: Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño, Universidad Autónoma de Baja California. Km. 103 carretera Tijuana-Ensenada, 22860, Ensenada, Baja California, México.

Tel.: +52 14421 946 654

e-mail: altoti@gmail.com

Received 7 February 2017; accepted 2 March 2017

Este artículo presenta una revisión del estado del arte de los métodos fundamentados en la geometría fractal que han sido utilizados para estimar la dimensión fractal y/o el exponente de Hurst; así como un análisis de sus parámetros de entrada, ventajas y desventajas. Posteriormente se presenta una sección de aplicaciones, en donde se realizó un compilado de los resultados de investigaciones que aplican los métodos anteriores para analizar la estructura de series de precipitación y temperatura en diversas regiones del planeta. Además, se analiza la relación entre los resultados de las investigaciones consultadas y las características climáticas de la región correspondiente; encontrando que el exponente de Hurst de precipitación y temperatura permite caracterizar la precipitación promedio anual y temperatura promedio anual. Finalmente, se presenta un mapa global de la localización de las investigaciones realizadas donde pueden apreciarse las mayores concentraciones de este tipo de investigación en Europa y Medio Oriente. Las series de precipitación y temperatura con comportamiento antipersistente se concentran cerca del Ecuador. Sin embargo, aún se requiere desarrollar investigaciones en diversas regiones del mundo para lograr obtener información suficiente que permitan realizar inferencias de la estructura de series de precipitación y temperatura.

**Descriptores:** Series de tiempo; precipitación; temperatura; cambio climático; geometría fractal.

This paper presents a review of the state of the art of methods with fractal geometry foundation that have been used to estimate the fractal dimension and/or Hurst exponent; as well as an analysis of their parameters, advantages and disadvantages. Subsequently an applications section is presented, where a results compilation of researches using these methods to analyze rainfall and temperature series' structure across the world is shown. Furthermore, a relationship analysis between the consulted researches results and climatic characteristics of the corresponding region is performed; showing that rainfall and temperature series' Hurst exponent values can characterize average annual rainfall and average annual temperature. Finally, a global map displaying the location of the conducted researches is presented, where the higher concentration corresponds to Europe and Middle East. Rainfall and temperature series that display antipersistent behavior are registered near the equator line. However, a lot of research is needed in other regions of the world in order to obtain enough information to make inferences about rainfall and temperature series' structure.

**Keywords:** Time series; rainfall; temperature; climatic change; fractal geometry

PACS: 92.40.Ea; 92.60.Ry; 92.60.Wc

### 1. Introducción

El ciclo hidrológico es la base fundamental de la hidrología, debido a que estudia la distribución del agua en la superficie terrestre. Para efectos prácticos, el componente denominado precipitación se constituye como la variable de entrada a dicho ciclo debido a la facilidad de poder registrar su magnitud, así como la relevancia que posee en la evaluación del cambio climático.

La precipitación es una variable aleatoria que evoluciona en el tiempo y en el espacio [1-6], por lo tanto puede ser analizada de manera espacial y/o temporal utilizando estudios de series temporales, el cual consiste en el análisis de la precipitación para lograr comprender la evolución que presenta en el tiempo [7]; para lo cual se han aplicado métodos estocásticos y métodos fundamentados en la geometría fractal. Los métodos estocásticos permiten realizar predicciones y obte-

ner la relación existente con otras variables climáticas, tales como temperatura y presión atmosférica [8-10]; sin embargo, presentan la desventaja que una variable aleatoria, en este caso la precipitación, no puede ser analizada a diferentes escalas [11,12]; por lo tanto, se han aplicado los fundamentos de la teoría fractal para el análisis de las series de precipitación a múltiples escalas y dimensiones [6,13-22]. La teoría fractal se basa en el concepto de fractal definido por Mandelbrot [23], el cual establece que los fractales son objetos que poseen una apariencia similar cuando se observan en diferentes escalas y que poseen detalles que no pueden ser estudiados por la geometría Euclidiana. El estudio de los fractales está caracterizado por la prevalencia de variables aleatorias tales como la precipitación [16,24] y, la determinación de sus características de autosimilitud y fluctuaciones espacio-temporales en múltiples escalas; para lo cual se han utilizado diversas metodologías, entre las cuales se encuentran el método de rango rescalado (R/S) [24-26], conteo de caja [13,27], análisis multifractal de fluctuación sin tendencia (MF-DFA) [28], método de Wavelet [29], espectro de potencia [30], método de Higuchi [31], análisis de fluctuación sin tendencia (DFA) [32], fractal-multifractal [11], Hurst-Kolmogorov [33], flujo integrado fraccional (FIF) [34], superficie fractal Browniana [35] y dimensión de correlación (D2) [36]. Debido a la aplicación de los métodos anteriores, se ha determinado que la precipitación posee características fractales [21,37-44]; sin embargo, la distribución de las gotas de la misma en el espacio no posee esta característica dentro del cuerpo nuboso [45-50]. También se ha encontrado que el comportamiento fractal de la precipitación, tiene relación con las características fisiográficas del entorno, debido a que la precipitación observada en zonas con mayor altitud, presenta una tendencia antipersistente más fuerte que las registradas en altitudes bajas [29]; así mismo, se estableció que la alta frecuencia de ceros en el análisis de series de tiempo es un factor importante a considerar, debido a que puede influenciar la estimación de los parámetros fractales y multifractales de la precipitación [34,51,52].

Además de la precipitación, la temperatura se ha tomado como parámetro de referencia en el estudio del cambio climático, justificado como una consecuencia del efecto invernadero que provoca la emisión de gases; razón por la cual es una variable ampliamente estudiada [53-62]. Al igual que la precipitación, la temperatura es una variable que no presenta un comportamiento lineal en el tiempo ni en el espacio [63], y también en la determinación de características de autosimilitud y fluctuaciones, se utilizan los fundamentos de la geometría fractal [24,64,65]. Las investigaciones desarrolladas al respecto revelan que la temperatura muestra comportamiento no estacionario para periodos de corto plazo que es posible expresar en función de una ley de potencia [66-67] y puede cuantificarse con la función de autocorrelación [68,69]; además, a mayor distancia del Ecuador se encuentre la zona de estudio, menor será su exponente de correlación [70]. Así mismo la memoria de las series de temperatura disminuye en función de la altitud [71,72], y existe

una relación entre la temperatura del aire y la dimensión fractal estimada [73]. De acuerdo a lo anterior, la teoría fractal permite describir la estructura de las series, por lo que podría utilizarse la teoría multifractal para completar la descripción de series temporales de precipitación y temperatura [74-96].

A continuación se presenta una revisión de la literatura enfocada a series de precipitación y temperatura, en donde se consideran dos secciones principales, una teórica y otra de aplicaciones. La sección teórica comprende la descripción de los métodos fractales que han sido utilizados para el análisis de la estructura y comportamiento persistente o antipersistente en series de precipitación y temperatura en distintas regiones del planeta, así como la fundamentación teórica de los mismos. La sección de aplicaciones, está constituida por la compilación de resultados obtenidos para valores del exponente de Hurst y dimensión fractal estimados en las investigaciones consultadas.

Es importante resaltar, que las investigaciones que han utilizado métodos fractales para el estudio de series de precipitación y temperatura a partir del exponente de Hurst y de la dimensión fractal han sido muy numerosas, de manera que el objetivo de este documento es compilar los métodos empleados, ventajas y desventajas; así como los resultados obtenidos en diversas condiciones climáticas.

## 2. Teoría de métodos fractales

Mandelbrot [97] describió un fractal como un conjunto para el cual su dimensión de Hausdorff es mayor a su dimensión topológica. Así mismo definió la dimensión fractal como un valor no entero, que permite describir la geometría fractal, así como la heterogeneidad de figuras irregulares; permitiendo capturar la información perdida al utilizar representaciones de geometría tradicional. La dimensión fractal se relaciona con el exponente de Hurst, mediante la siguiente ecuación desarrollada por Voss [98]:

$$2H + 1 = 5 - 2D \quad (1)$$

Despejando la ecuación anterior se obtiene una relación directa entre la dimensión fractal ( $D$ ) y el exponente de Hurst ( $H$ ), por lo tanto:

$$D = 2 - H \quad (2)$$

Donde  $D$  es la dimensión fractal y  $H$  es el exponente de Hurst.

A continuación se presenta una descripción de las metodologías más utilizadas en el análisis fractal de series de precipitación y temperatura.

### 2.1. Rango Rescalado de Hurst (R/S)

Este método fue desarrollado por Hurst [25,26], y permite obtener el valor del exponente de Hurst mediante el cociente

entre la suma de rangos parciales de las desviaciones de las medias de una serie de tiempo y la desviación estándar.

El exponente de Hurst permite clasificar la serie de acuerdo a la correlación a largo plazo de sus incrementos. De acuerdo a Karner [99], al estudiar la dependencia a largo plazo se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones: a) Al analizar series de tiempo cortas, la correlación a corto plazo se considera importante y b) Es necesario detectar la trayectoria de interés antes de realizar cualquier análisis.

Debido a su sencillez, el método de rango rescalado ha sido utilizado de manera satisfactoria al momento de analizar las propiedades escalares de tiempo, estadísticos y el comportamiento antipersistente, persistente y aleatorio para series de precipitación, temperatura, nivel del mar, manchas solares, entre otras [100]. De acuerdo a Hurst [25,26] el método consiste en los siguientes pasos:

Los datos de entrada son obtenidos de la diferencia entre registros de dos puntos consecutivos:

$$I'_i = I_i - I_{i+1} \quad (3)$$

donde  $I_i$  es el registro para el tiempo  $i$ . El promedio de diferencias en un periodo  $\tau$  está dado por:

$$\langle I' \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} I'_i \quad (4)$$

Si  $X(i, \tau)$  es la diferencia entre  $I'_i$  y  $\langle I' \rangle_\tau$ , definida como:

$$X(i, \tau) = \sum_{u=1}^i [I'_u - \langle I' \rangle_\tau] \quad (5)$$

Finalmente, la variable  $R$  y la desviación estándar  $S$  están dadas por:

$$R(\tau) = \max_{1 \leq i \leq \tau} X(i, \tau) - \min_{1 \leq i \leq \tau} X(i, \tau) \quad (6)$$

$$S(\tau) = \left\{ \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} [I'_i - \langle I' \rangle_\tau]^2 \right\}^{1/2} \quad (7)$$

De donde se obtiene, para cada valor de escala  $\tau$ , un valor de  $R/S$  que obedece a una ley de potencia. Aplicando logaritmos a ambos términos de la igualdad, se obtiene el valor de  $H$  igual al valor de la pendiente:

$$\log(R/S) = H \log(\tau) \quad (8)$$

donde  $H$  es el exponente de Hurst. Este generalmente toma valores entre 0 y 1. Este análisis es robusto debido a que el comportamiento está influenciado solamente por la persistencia a largo plazo, detecta ciclos no periódicos aún cuando estos tengan longitud mayor o igual al periodo de muestreo en estudio y además es un método sensible para detectar correlaciones a largo plazo en procesos aleatorios.

## 2.2. Conteo de caja

Es uno de los métodos más utilizados, el cual consiste en generar una cobertura del sistema y medir la densidad de dicha cobertura [27].

Al cubrir una señal binaria, con cajas de tamaño definido  $\delta$ , se procede a determinar la dimensión fractal, considerando el número de cajas que se requieren para cubrir la señal; es decir, se coloca una malla de cuadros de tamaño  $\delta$  sobre la señal, este proceso se puede repetir para diversos tamaños de caja; posteriormente se grafica el número de cajas con datos, contra el tamaño de cajas ( $\delta$ ) de forma log-log. Si la gráfica se comporta de manera lineal, la pendiente de la curva se relaciona con la dimensión fractal [101].

Siguiendo a Falconer [102] y a Breslin y Belward [27], el método se puede aplicar a conjuntos en cualquier dimensión, por ejemplo, ha sido utilizado para el análisis de imágenes que involucran desde agrupamientos menores hasta galaxias. Una curva fractal es aquella que posee detalle infinito debido a su autosimilitud, incrementando su resolución de acuerdo a la exactitud del método de medición. La dimensión fractal determina el incremento de resolución y por lo tanto la longitud de la misma. Para un fractal, la longitud  $L$  como función de la resolución de la medida  $\delta$  es dada por:

$$L(\delta) \propto \delta^{-D} \quad (9)$$

donde  $D$  es un exponente conocido como la dimensión fractal. En el método de conteo de caja, se determina la medición de  $L(\delta)$  para un  $\delta$  variable, a partir del conteo del número de cajas que no se superponen de tamaño requerido para cubrir la curva mencionada anteriormente. Estas mediciones se basan en la Ec. (9) para obtener un estimado de la dimensión fractal, la cual se conoce como dimensión de caja.

Una dimensión fractal, puede ser asignada a un conjunto de datos de una serie de tiempo al graficarlos como función del tiempo y calcular la dimensión de caja. La Ec. (9) tendrá un rango finito de tamaños de caja. Las cajas más pequeñas tendrán un ancho de ventana de  $\tau$ , donde  $\tau$  es la resolución en el tiempo y una altura  $\alpha$ , donde  $\alpha$  es la resolución de los datos.

## 2.3. Análisis Multifractal de fluctuación sin tendencia (MF-DFA)

El método se basa en la identificación de los momentos de  $q$ -ésimo orden que dependen de la longitud de la señal con la generalización de  $q = 2$ . Posteriormente se obtiene un promedio de todos los segmentos para determinar la función de fluctuación, el comportamiento escalar de la función se obtiene mediante gráficos log-log y finalmente se establece una ley en potencia, donde  $q(2) = H$  [28].

Según Gómez y Poveda [103] es posible identificar diversos órdenes de MF-DFA, los cuales se caracterizan por la forma en la cual se remueven las tendencias de los datos. En

el orden más bajo (MF-DFA1) se determina, para cada segmento, el mejor ajuste lineal del perfil, y se identifican las fluctuaciones por medio de la varianza del perfil respecto a la línea recta. De esta forma, se elimina la posible influencia de tendencias lineales a escalas mayores a la del segmento. Es importante mencionar que al eliminar las tendencias del perfil, también se están eliminando en los datos.

El método permite generar una caracterización multifractal de una serie de tiempo multifractal no estacionaria, además permite determinar correlaciones de largo alcance contenidas en series temporales aparentemente no estacionarias, enfocándose en eliminar las tendencias que se puedan presentar en la señal analizada y que no están relacionadas con sus propiedades de correlación [1].

De acuerdo a Movahed *et al* [28] en el análisis multifractal de fluctuaciones sin tendencia (MF-DFA), se supone que  $x_k$  es una serie de longitud  $N$  y que esta serie no posee valores de cero en un conjunto cerrado, es decir,  $x_k = 0$  para una insignificante fracción de valores. A continuación, se presenta el desarrollo de la metodología a seguir en el análisis de una serie de tiempo:

Paso 1.- Se determina el perfil:

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i [x_k - \langle x \rangle], \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

La sustracción de la media  $\langle x \rangle$  no es obligatoria ya que será eliminada en el análisis de tendencia que se desarrolla en el paso 3.

Paso 2.- Se divide el perfil  $Y(i)$  en  $N_s = \text{int}(N/s)$  segmentos que no se superpongan de igual longitud  $s$ , ya que la longitud  $N$  de la serie no es usualmente un múltiplo de la escala de tiempo  $s$  considerada, una pequeña parte al final del perfil puede ser residual. Para eliminar la parte residual de la serie, se realiza el mismo procedimiento anterior, comenzando desde el extremo opuesto de la serie; por lo tanto se obtienen  $2N_s$  segmentos.

Paso 3.- Se calcula la tendencia local para cada uno de los  $2N_s$  segmentos por medio de un ajuste de mínimos cuadrados aplicados a la serie. Posteriormente se determina la varianza de la siguiente manera:

$$F^2(s, \nu) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(\nu-1)s+i] - y_\nu(i)\}^2 \quad (11)$$

Para cada segmento  $\nu$ ,  $\nu = 1, \dots, N_s$ , y:

$$F^2(s, \nu) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N - (\nu - N_s)s + i] - y_\nu(i)\}^2 \quad (12)$$

Para  $\nu = N_s + 1, \dots, 2N_s$ . En este punto  $y_\nu(i)$  es el polinomio de ajuste en el segmento  $\nu$ . En el procedimiento de ajuste también se pueden emplear polinomios lineales, cuadráticos, cúbicos o de mayor orden. Dado que la eliminación de tendencia de la serie de tiempo se realiza por la sustracción del polinomio de ajuste al perfil; los análisis de fluctuaciones

sin tendencia (DFA) de diferente orden, difieren en su capacidad de eliminar tendencias en la serie.

Paso 4.- Se promedia sobre todos los segmentos para obtener la función de fluctuación o fluctuación media de  $q$ -ésimo orden, definida como:

$$F_q(S) \equiv \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(s, \nu)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (13)$$

Donde, generalmente, la variable de índice  $q$  puede tomar cualquier valor real excepto cero. Para  $q = 2$ , se utiliza el procedimiento estándar del DFA.

Paso 5.- Se determina el comportamiento escalar de la función de fluctuación analizando los gráficos logaritmo-logaritmo de  $F_q(s)$  contra  $s$  para cada valor de  $q$ . Si la serie de tiempo  $x_i$  presenta correlaciones con una ley de potencia, entonces se tiene que:

$$F_q(s) = s^{h(q)} \quad (14)$$

En general, el exponente  $h(q)$  puede depender de  $q$ . Para series de tiempo estacionarias tales como fGn (Ruido Gaussiano fraccionario),  $Y(i)$  de la Ec. (10) será una señal fBm (movimiento Browniano fraccionario), por lo que,  $0 < h(q=2) < 1$ . El exponente  $h(2)$  es idéntico al conocido exponente de Hurst  $H$  [104].

Por tal motivo se propone este método al considerar investigaciones que estiman la dimensión fractal de series de precipitación y temperatura.

## 2.4. Espectro de Potencia

Es un método que describe la variación de potencia de una señal respecto a la frecuencia [105]. Usualmente los fractales con autoafinidad son analizados con métodos espectrales.

### 2.4.1. Espectro de potencia de Wavelet

Método desarrollado por Grossmann y Morlet [108], el cual de acuerdo a Malamud y Turcotte [69], brinda información de la dependencia espacio-temporal de una serie de tiempo, posee una base fractal y usualmente se aplica a series de tiempo no periódicas.

De acuerdo a Torrence y Compo [148] la transformada Wavelet permite descomponer una serie de tiempo en el dominio tiempo-frecuencia, y por lo tanto es posible determinar los modos dominantes de variabilidad, y cómo varían tales modos con el tiempo. La función de tal transformada se define mediante:

$$W(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \psi_{\lambda, t}(u) du, \quad \text{para } \lambda > 0 \quad (15)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro de escala (dilatación),  $t$  es el parámetro de localización (traslación) y  $\psi(t)$  es la Wavelet madre. Se escoge la constante de normalización  $1/\sqrt{\lambda}$ , de tal manera que

$$\int |\psi_{\lambda, t}(u)|^2 du = \int |\psi_t|^2 dt,$$

para todas las escalas. En este caso se toma la Wavelet madre de Morlet, definida mediante  $\psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} e^{i\omega_0\eta} e^{-\eta^2/2}$ . Siguiendo a Torrence y Compo [148], la transformada Wavelet continua de una secuencia discreta,  $X_n$ , se define como la convolución de  $X_n$  con una versión de la función Wavelet  $\psi_0(\eta)$  escalada en el espacio y trasladada en el tiempo:

$$W_n(s) = \sum_{n'=-1}^{N-1} X_n \psi * \left[ \frac{(n' - n)\delta t}{s} \right] \quad (16)$$

donde (\*) indica la complejidad conjugada. Variando la escala Wavelet y trasladándola a lo largo de un índice  $n$  de la serie temporal, se puede construir una imagen de la amplitud o cualquier otra variable que muestre cómo cambia ésta frente a la escala de tiempo.

Debido a que la función Wavelet escalada en el espacio y trasladado en el tiempo en general es una función compleja, la transformada  $W_n(s)$  también es compleja. Entonces la transformada puede ser dividida en una parte real,  $\Re\{W_n(s)\}$ , y una parte imaginaria  $\Im\{W_n(s)\}$ , con amplitud,  $|W_n(s)|$ , y fase,  $\tan^{-1}[\Im\{W_n(s)\}/\Re\{W_n(s)\}]$ . Finalmente se define el espectro de Wavelet como  $|W_n(s)|^2$ .

Según Velásquez *et al* [29], si la serie de tiempo posee autoafinidad, la varianza de

$$W(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \psi_{\lambda,t}(u) du,$$

será afectada por un parámetro de escala de manera asintótica:

$$V(\lambda) = \langle W^2 \rangle - \langle W \rangle^2 \propto \lambda^\delta \quad (17)$$

El exponente  $\delta$  se encuentra entre -1 y 3,  $-1 \leq \delta \leq 3$ ; de tal manera que el exponente de Hurst quedará definido como:

$$H_W \begin{cases} \frac{\delta+1}{2} & \text{si } -1 \leq \delta < 1 (\text{FGN}) \\ \frac{\delta-1}{2} & \text{si } 1 \leq \delta \leq 3 (\text{FBM}) \end{cases} \quad (18)$$

donde FGN es un ruido Gaussiano fractal, mientras que FBM es un movimiento Browniano fraccionario.

#### 2.4.2. Espectro de potencia de Fourier

Por analogía con el análisis de Fourier, se puede definir el espectro de potencia Wavelet como el cuadrado de la transformada Wavelet. Si la función fuese compleja, su espectro de potencia Wavelet será el cuadrado de la parte real de la transformada Wavelet.

La frecuencia expresada en Fourier y la escala de la Wavelet no son cantidades recíprocas, por lo tanto es necesario realizar un re-escalamiento con un factor que dependerá de la Wavelet madre, para la Wavelet de Morlet esta conversión es dada por  $4\pi s/(\omega_0 + \sqrt{2 + \omega_0^2})$ . Para comparar espectros de Wavelet de señales distintas, el espectro de potencia Wavelet

se normaliza con un factor ó valor de expectación  $\sigma^2/N$ , donde  $\sigma^2$  corresponde a la varianza y  $N$  es el número de puntos de la serie temporal [148].

Por otra parte, los fractales con autoafinidad generalmente son analizados usando técnicas de espectro. La variación del espectro de potencia con frecuencia  $f$  sigue la ley de potencia  $f^{-\beta}$ , permitiendo obtener una relación entre el exponente espectral  $\beta$  y la dimensión fractal  $D$  [30], de tal forma que se llega a la relación:

$$\beta = 2H + 1 = 5 - 2D \quad (19)$$

el exponente  $\beta$  de la ecuación anterior, puede ser un indicativo de la ausencia de una escala de tiempo característica en el rango de la ley de potencias y por lo tanto se puede asumir la presencia de un comportamiento multifractal [89,103]. Así mismo, el exponente  $\beta$  será mayor a 1 si la serie presenta persistencia fuerte y no es estacionaria; para valores entre 0 y 1 indicará una serie estacionaria con persistencia débil; un valor igual a 0, significará una serie estacionaria sin correlación; y un valor menor a 0, implicará una serie estacionaria antipersistente [69].

La dimensión fractal se obtiene de la pendiente del espectro [106], y se establece que:

$$D = \frac{5 - \beta}{2} \quad (20)$$

donde  $D$  denota la dimensión fractal estimada a partir del espectro de potencia.

Según Sivakumar [107] y, Gómez y Poveda [103], para un proceso aleatorio, el espectro de potencia oscila aleatoriamente alrededor de un valor constante, indicando que una frecuencia no explica más de la varianza de la secuencia que otra. Para secuencias periódicas o casi periódicas, solo existen picos a ciertas frecuencias, el ruido medido le agrega un piso continuo al espectro. De esta manera, en el espectro, la señal y el ruido son fácilmente diferenciados. Señales caóticas pueden tener líneas espectrales muy notorias, pero siempre en la ausencia de ruido ellas serán parte continua del espectro [107].

#### 2.5. Análisis de fluctuaciones sin tendencia (DFA)

Es un método introducido por Peng *et al* [104]. De acuerdo a Yuval y Broday [32], el DFA permite detectar correlaciones de largo alcance contenidas en series temporales aparentemente no estacionarias; así mismo, el método a partir de un análisis de invariancia de escala es capaz de eliminar tendencias de diferentes órdenes que se puedan presentar en la señal analizada y que no están relacionadas con sus propiedades de correlación [109].

Siguiendo a Yuval y Broday [32], un conjunto de datos  $y_i$  es integrado de la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^i y_j \quad \text{para } i = 1, \dots, N \quad (21)$$

A continuación la serie integrada se divide en segmentos que no se superpongan de igual longitud  $m$  y un polinomio

de ajuste  $\hat{X}$  se utiliza para cada segmento. La fluctuación sin tendencia en cada segmento es dada por:

$$F(m) = \frac{1}{m \sum_{j=1}^m (X_j - \hat{X}_j)^2} \quad (22)$$

Posteriormente para series de tiempo con autoafinidad, la fluctuación media de los segmentos está relacionada con su escala de longitud mediante la siguiente ley de potencia:

$$\bar{F}(m) \sim m^{2H} \quad (23)$$

donde  $H$  se puede encontrar mediante una regresión de  $\log(\bar{F}(m))$  contra  $\log(m)$  usando un número de divisiones con longitud de segmento  $m$ .

## 2.6. Modelo Fractal-Multifractal

De acuerdo a Huai-Hsien *et al* [11] el método fractal-multifractal utiliza funciones de interpolación fractal para transformar medidas multifractales a proyecciones derivadas, con el objetivo de representar la complejidad de patrones naturales más allá de las características estadísticas. A partir de los parámetros  $a_n, c_n, d_n, e_n, f_n$  genera de manera determinística una serie de patrones aparentemente aleatorios, en una o más dimensiones, preservando las características del conjunto de datos.

La gráfica  $G = \{x, f(x) | x \in [0, 1]\}$  de la función de interpolación fractal  $f: x \rightarrow y$  que pasa por  $N + 1$  puntos ordenados a lo largo de  $x, \{(x_n, y_n) | x_0 < \dots < x_N, n = 0, 1, \dots, N\}$  se define como un atractor determinístico único de  $N$  mapas afines  $W_n$  [110]:

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, \dots, N \quad (24)$$

donde los parámetros de escala verticales  $d_n$  satisfacen  $|d_n| < 1$ , y los otros parámetros se definen por medio de las condiciones iniciales:

$$w_n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$w_n \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (26)$$

De acuerdo a Cortis *et al* [77], las condiciones iniciales anteriores, conllevan a un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas que permiten encontrar los valores de los parámetros  $a_n, c_n, e_n, f_n$ , de forma que:

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0} \quad (27)$$

$$e_n = x_{n-1} - x_0 \cdot a_n \quad (28)$$

$$c_n = \frac{y_n - y_{n-1} - d_n(y_N - y_0)}{x_N - x_0} \quad (29)$$

$$f_n = y_{n-1} - c_n \cdot x_0 - d_n \cdot y_0 \quad (30)$$

La gráfica de función fractal  $f$ , y con dimensión fractal entre  $1 \leq D < 2$ , se obtiene mediante el procedimiento conocido como juego del caos [110].

## 2.7. Dinámica de Hurst-Kolmogorov

El método se basa en un proceso estocástico, caracterizado por propiedades invariantes de la distribución de probabilidad multifractal [33]. Este modelo disgrega un ruido fraccional Gaussiano mediante un proceso de cascada aditiva diádica, el cual es posteriormente transformado de manera exponencial para obtener la serie de tiempo. Esta serie de tiempo obtenida, se supone que tendrá una distribución log-normal [50,111].

De acuerdo a Koutsoyiannis *et al* [33] Si  $Z$  es una variable aleatoria de interés, y se asume que está definida en un espacio bidimensional (2D) denotado por variables continuas  $(x, y)$  o discretas  $(i, j)$  que definen un espacio del campo estocástico  $Z(x, y)$  o  $Z_{i,j}$ , éstas se pueden relacionar mediante:

$$Z_{i,j} := \frac{1}{\Delta^2} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \int_{(j-1)\Delta}^{j\Delta} Z(x, y) dx dy \quad (31)$$

donde  $\Delta$  se expresa como un intervalo fijo que representa una unidad de escala, utilizada en la conversión de representación continua a discreta de la variable de interés.

Debido a su simplicidad, se asume que el campo  $Z$  es estacionario e isotrópico, denotando su media como  $\mu = E[Z_{i,j}]$ , su autocovarianza como  $\gamma_{k,l} = Cov[Z_{i,j}, Z_{i+kj+l}]$  y su correlación como  $\rho_{k,l} = Corr[Z_{i,j}, Z_{i+kj+l}] = \gamma_{k,l}/\gamma_0$ , donde  $\gamma_0$  es la varianza. Además, se define el proceso promedio a escala espacial con un entero ( $k = 1, 2, \dots$ ) múltiplo de  $\Delta$ , de manera que:

$$Z_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{k^2} \sum_{m=(i-1)k+1}^{ik} \sum_{n=(j-1)k+1}^{jk} Z_{m,n} \quad (32)$$

denotando su autocovarianza como  $\gamma_{l,m}^{(k)}$ , su varianza como  $\gamma_0^k$  y su autocorrelación como  $\rho_{l,m}^k$ . Esta forma de representación implica que el superíndice 1 puede omitirse ( $Z_{i,j}^{(1)} \equiv Z_{i,j}$ ).

Un proceso de Hurst-Kolmogorov en 2D, puede definirse como un proceso estocástico, el cual para los índices  $i, j, m, n$  y cualquier escala  $k$  y  $l$ , posee la siguiente propiedad:

$$\left( Z_{i,j}^{(k)} - \mu \right) =_d \left( \frac{k}{l} \right)^{2H-2} \left( Z_{m,n}^{(l)} - \mu \right) \quad (33)$$

donde  $=_d$  significa que las dos variables aleatorias poseen la misma función de distribución conjunta de orden finito. El exponente  $H$  se conoce como el exponente de Hurst y toma valores entre 0 y 1. Este comportamiento Hurst-Kolmogorov es una representación de la evolución de los procesos naturales.

## 2.8. Flujo Integrado fraccional de 3 parámetros (basado en el Modelo Multifractal Universal)

La integración fraccional de orden  $H$  de un modelo multifractal universal, se conoce como el método de flujo integrado fraccional de tres parámetros (FIF) [34,112].

El modelo FIF se basa en el concepto de cascadas multiplicativas en el contexto de turbulencia, el cual fue desarrollado por Kolmogorov [113] y Mandelbrot [114]. De acuerdo a este modelo, la energía cinética proporcionada a un sistema a gran escala, es transferida por un proceso multiplicativo conservador a escalas cada vez más pequeñas y finalmente es disipada en forma de calor. Este tipo de proceso se puede modelar al (i) distribuir uniformemente una cantidad dada en un intervalo definido; (ii) dividir el intervalo en subintervalos; (iii) asignar a los subintervalos la cantidad original dada, multiplicada por una variable aleatoria que no dependa de la escala [115].

Cuando  $H$  es diferente de cero, el campo resultante, denominado como  $R_\lambda$ , no es estacionario; siendo  $H$  denominado como el parámetro de no estacionariedad.  $H$  es un tipo de exponente de Hurst que representa el grado de suavidad del proceso, la cual se incrementa con el valor de  $H$  [34]. Para los incrementos de campo se tiene que:

$$|\Delta R_\lambda| \approx \Phi_\lambda |\Delta \vec{x}|^H \quad (34)$$

donde  $\Delta R_\lambda(\vec{x}) = R_\lambda(\vec{x} + \Delta \vec{x}) - R_\lambda(\vec{x})$  y  $|\Delta \vec{x}| = L/\lambda$ , siendo  $\lambda$  la resolución del modelo.

Si los términos de la Ec. (34) se elevan a la potencia  $q$ , se obtiene la función de estructura de  $R$  para un orden  $q$  y se tiene que:

$$\langle |\Delta R_\lambda|^q \rangle \approx \lambda^{-\xi(q)} \quad (35)$$

donde  $\xi(q) = qH - k(q)$ , es llamado el exponente de la función de estructura.

## 2.9. Modelo de Higuchi

El método de Higuchi [116] determina la dimensión fractal de una serie de tiempo. De acuerdo a Kalauzi *et al* [31], la señal observada consiste en una secuencia de tiempo  $x(1), x(2), \dots, x(N)$ , y un número  $k$  de nuevas series autosimilares  $X_k^m$  se construyen de la siguiente manera:

$$X_k^m : x(m), x(m+k), x(m+2k), \dots \\ x(m + \text{int}[(N-m)/k]k) \quad (36)$$

donde  $m$  es el tiempo inicial, para un  $m = 1, 2, \dots, k$ ;  $k$  es el intervalo de tiempo, para un  $k = 2, \dots, k_{\text{máx}}$  y  $\text{int}(r)$  es la parte entera del número real  $r$ .

La longitud de las series  $X_k^m$  es definida como:

$$L_m(k) = \frac{1}{k} \left[ \left( \sum_{i=1}^{\text{int}[(N-m)/k]} |x(m+ik) - x(m+(i-1)k)| \right) \frac{N-1}{\text{int}[\frac{N-m}{k}]} \right] \quad (37)$$

$L_m(k)$  es promediada para todos los valores de  $m$ , y se obtiene el valor promedio de longitud de la serie  $L(k)$  para cada  $k = 2, \dots, k_{\text{máx}}$  de la siguiente manera:

$$L(k) = \frac{\sum_{m=1}^k L_m(k)}{k} \quad (38)$$

Finalmente se obtiene un conjunto de valores medios  $L(k)$  y la dimensión fractal se estima como la pendiente del mejor ajuste lineal de mínimos cuadrados correspondiente al gráfico  $\ln(L(k))$  vs  $\ln(l/k)$ , por lo tanto:

$$D = \frac{\ln(L(k))}{\frac{1}{k}} \quad (39)$$

donde  $D$  es la dimensión fractal obtenida mediante el método de Higuchi.

## 2.10. Dimensión de correlación fractal (FCD)

El método permite obtener una medida de las características de dimensionalidad del espacio ocupado por un conjunto de puntos aleatorios [96]; además se hace la consideración que la dimensión de correlación  $D_c$  se asemeja a la dimensión fractal  $D$  [36].

Para un conjunto de datos:

$$\{X_i\}_{i=1}^N \quad \text{con} \quad X_i \in R^n \quad (40)$$

Se considera la integral de correlación  $C(R)$  que cuenta el número de pares  $\{X_i, X_j\}$  tales que  $\|X_i - X_j\|$  sea más pequeño que un umbral  $R > 0$ , con  $\|g\|$  siendo la distancia euclidiana estándar en  $R^n$ . La integral de correlación  $C(R)$  se expresa de la siguiente manera:

$$C(R) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1; j \neq i}^N \Theta(R - \|X_i - X_j\|) \quad (41)$$

donde  $\Theta$  es la función de Heaviside y  $2/(N(N-1))$  es el factor de normalización, de manera que  $C(R)$  tienda a 1 cuando  $R$  tiende a infinito. Esto hace que si el conjunto es fractal,  $C(R)$  se comporte como una ley en potencia de la forma:

$$C(R) \propto R^{D_c} \quad (42)$$

esto es:

$$\log(C(R)) \propto D_c \log(R) \quad (43)$$

De donde se podrá obtener la dimensión de correlación fractal  $D_c$  mediante el coeficiente de regresión de la Ec. (43).



### 2.11. Estimación de la dimensión fractal a partir de diferencias consecutivas

De acuerdo a Kalauzi *et al* [31], se utiliza este método para calcular la dimensión fractal de una señal unidimensional, considerando los valores medios absolutos de orden  $n$  de diferencias consecutivas finitas para una señal  $y(t)$  con  $m_y^{(n)} = \text{media}(\text{abs}(y^{(n)}(t)))$ , se observa que los logaritmos para  $m_y^{(n)}$ ,  $n = 2, 3, \dots, n_{\text{máx}}$  son linealmente dependientes para  $n$ , con las pendientes estables y con  $Y$  intercepciones proporcionales a la dimensión fractal de la señal, entonces:

$$\log(m_y^{(n)}) = (\text{pendiente})n + Y_{\text{int}} \quad (44)$$

Para establecer una relación entre  $Y_{\text{int}}$  y la dimensión fractal de la señal, se utiliza la familia de funciones Weiersstrass, con parámetros de  $H(0 < H < 1)$  y  $\gamma(\gamma > 1)(n!)/(r!(n-r)!)$  de la siguiente manera:

$$W_H^\gamma(t) = \sum_i \gamma^{-iH} \cos(2\pi\gamma^i t) \quad (45)$$

Estas funciones tienen una dimensión fractal definida teóricamente,  $D = 2 - H$ . Ya que la dimensión fractal  $D$  es linealmente dependiente de  $Y_{\text{int}}$ , se establece:

$$D = A(n_{\text{máx}})Y_{\text{int}} + B(n_{\text{máx}}) \quad (46)$$

Los parámetros de regresión  $A(n_{\text{máx}})$  y  $B(n_{\text{máx}})$  se calculan para  $n_{\text{máx}}$ . El planteamiento anterior solo es aplicable para series monofractales.

### 2.12. Modelo de Superficie de interpolación Fractal Browniana

Mandelbrot [23] estableció que la dimensión fractal de un método fractal Browniano es invariante cuando se aplican transformaciones.

De acuerdo a Tao y Barros [35], para procesos que presentan autoafinidad, el exponente espectral  $\beta$ , la dimensión fractal  $D$ , y el exponente de Hurst  $H$ , son tres características intercambiables;  $D$  y  $H$  pueden ser obtenidas a partir del exponente espectral  $\beta$  para un campo de tres dimensiones, de la siguiente forma:

$$D = \frac{7 - \beta}{2} \quad (47)$$

$$H = \frac{\beta - 1}{2} \quad (48)$$

El exponente espectral, definido como la pendiente del espectro de potencia de Fourier en un gráfico log-log en 2D, describe la variabilidad de la serie como una función de longitud de onda y/o escala espacial; donde la amplitud de rugosidad y la potencia en la longitud de onda más corta, miden la varianza de la serie a la escala espacial correspondiente. El exponente de Hurst, el cual también se conoce como el índice de autoafinidad, mide la correlación de largo alcance. Si el

conjunto de interés presenta características de autoafinidad, entonces se puede igualar la pendiente espectral con el factor de rugosidad del conjunto. El modelo de superficie fractal Browniana, es dado por:

$$Z(u, v) = \frac{Z_b(u, v)}{k_r^{(\beta - \beta_b)/2}} \exp \left[ \frac{1}{2} \left( S_{r,1} - \frac{\beta + 1}{\beta_b + 1} S_{r,2} \right) \right] \quad (49)$$

donde  $Z(u, v)$ ,  $Z(u, v)_b$ ,  $\beta$ ,  $\beta_b$  son las transformadas de Fourier de las superficies de interpolación y del movimiento Browniano, así como las exponentes del espectro de potencia referenciados y Brownianos respectivamente;  $k_r$  es el número de onda radial;  $S_{r,1}$  y  $S_{r,2}$  son los factores de rugosidad de superficie original y del ruido Browniano.

### 2.13. Modelo de variación

De acuerdo a Dubuc *et al* [117], Breslin y Belward [27], el método de variación utiliza una cobertura de intervalos, en lugar de ventanas. Es decir, se calcula la oscilación para un conjunto de puntos que se encuentran a lo largo de la curva  $X(t)$ . La oscilación en un punto  $X(t_0)$  será:

$$v(X(t_0), \epsilon) = \max_{\tau \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)} X(\tau) - \min_{\tau \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)} X(\tau) \quad (50)$$

La ecuación anterior corresponde al espesor de cobertura;  $\epsilon$  representa la escala de medición de la oscilación, similar al tamaño de caja en el método de conteo de caja. Al disminuir este valor, también disminuye la cobertura. El área de cobertura se encuentra integrando  $v$ , se conoce como la variación de  $X$  y se denota como  $V(\epsilon)$ . Para encontrar la dimensión fractal se calcula el rango al cual el área  $V(\epsilon)$  tiende a 0, mientras que  $\epsilon$  tiende a 0. La pendiente del gráfico log-log de  $V(\epsilon)/\epsilon^2$  vs  $1/\epsilon^2$  es la dimensión fractal de la serie.

### 2.14. Ventajas y desventajas de los métodos fractales

A partir de la revisión de literatura realizada es evidente que existe una gran variedad de modelos que permiten estimar el exponente de Hurst y/o la dimensión fractal de una serie de tiempo. Sin embargo, existen métodos que presentan ventajas sobre otros; un factor importante al definir el método a utilizar, corresponde al número de parámetros de entrada; por lo tanto, entre mayor sea el número de parámetros, el modelo será más complejo.

Debido a que se requiere evaluar detalladamente características como las anteriormente mencionadas para seleccionar el método más adecuado a desarrollar; a continuación se presentan las ventajas, desventajas y parámetros de entrada para los métodos revisados previamente (Tabla I).

Basándose en la información presentada en la Tabla I, se han clasificado los métodos de acuerdo a su complejidad con base al número de parámetros de entrada que requieren en dos grupos:

TABLA I. Ventajas, desventajas y parámetros correspondientes a los modelos fractales que permiten estimar el exponente de Hurst y/o la dimensión fractal de una serie de precipitación y temperatura.

Método	No. De parámetros	Descripción de Parámetros	Ventajas	Desventajas
Rango rescalado (R/S)	2	$i$ = valor en el tiempo de la serie; $\tau$ = periodo de tiempo considerado	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Influenciado solamente por la persistencia a largo plazo, detecta ciclos no periódicos aún cuando estos tengan longitud mayor o igual al periodo de la muestra en estudio, además de ser un método sensible para detectar correlaciones a largo plazo en procesos aleatorios. Permite deducir que muchos fenómenos naturales no son procesos aleatorios independientes, pero tienen correlación a largo plazo significativa [37].</li> <li>• Es una herramienta útil para analizar registros empíricos en los cuales existe dependencia estadística [99].</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Debe considerarse un efecto al estudiar dependencia a largo plazo usando el método, el cual es: Correlación a corto plazo juega un papel importante cuando se analizan series de tiempo cortas [99].</li> </ul>
Conteo de caja	1	$\delta$ = Resolución de la medida de la ventana	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Es un método intuitivo y sencillo de aplicar, siendo aplicable a conjuntos en cualquier dimensión [27].</li> <li>• Es uno de los métodos más efectivos ya que permite obtener la dimensión fractal aún cuando no se poseen fórmulas numéricas o lograr determinar la pendiente de figuras irregulares. Es adaptable a muchas situaciones, ya que mientras que el objeto pueda contenerse en cajas se podrá encontrar la dimensión fractal [23].</li> </ul>	Si se pretende cubrir un conjunto utilizando ventanas bidimensionales, la dimensión fractal no puede exceder 2, debido a que la dimensión fractal estimada no puede exceder la dimensión de la ventana utilizada [23].
Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA)	3	$S$ = Longitud de los segmentos; $q$ = Orden de momento; $v$ = Número de segmentos obtenidos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No se ve influenciado por tendencias lineales que pueda presentar la serie. Logra detectar correlaciones de largo alcance en series de tiempo no estacionarias con ruido [103].</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Solamente puede determinar exponentes de Hurst generalizados positivos, volviéndose un poco impreciso para señales fuertemente anticorrelacionadas, cuando <math>h(q)</math> es cercano a 0. Cuando <math>h(q) \rightarrow 0</math>, se debe de integrar la serie antes de aplicar el MF-DFA [1].</li> <li>• El método continua considerando asunciones estacionarias sobre los estadísticos de las desviaciones restantes después de eliminar tendencias lineales o polinomiales [118].</li> </ul>
Análisis de Wavelet	3	$t$ = Parámetro de posición; $\lambda$ = parámetro de escala; $\psi(t)$ = Wavelet madre $W_n(s)$ = transformada Wavelet	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliza pocos parámetros. Los resultados son sencillos de interpretar [118,148].</li> <li>• De acuerdo con Velásquez <i>et al</i> [29] el método de Wavelet es apropiado para analizar series autoafines, donde la varianza no es constante al incrementar el tamaño de ventana.</li> <li>• No existe la necesidad de generar una cuadrícula sobre la señal, en contraste con el método de conteo de caja [107]</li> <li>• Este método es apropiado para series no estacionarias [119].</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No es sencillo interpretar las fluctuaciones del modelo [118].</li> </ul>

Método	No. De parámetros	Descripción de Parámetros	Ventajas	Desventajas
Espectro de potencia de Fourier	3	$(4\pi s)/(\omega_0 + \sqrt{2 + \omega_0^2}) =$ = Wavelet de Morlet $\sigma^2/N =$ Valor expectación $\beta =$ Potencia de la serie	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Es ideal para el análisis de superficies con autoafinidad y para fines de simulación [107].</li> <li>● Es una herramienta estándar para la investigación del comportamiento fractal de series geofísicas [106].</li> <li>● Es particularmente usado para el estudio de oscilaciones de una serie [108].</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Es solo útil en superficies que exhiben un espectro de potencia exponencial [107]</li> </ul>
Análisis de fluctuación sin tendencia (DFA)	1	$m =$ Longitud de los segmentos, $\hat{x} =$ polinomio de ajuste	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Ha sido aplicado de forma satisfactoria en el análisis de registros climáticos a largo plazo y secuencias de ADN [120].</li> <li>● Modelo ampliamente utilizado para detectar propiedades de escala con comportamiento fractal para series de tiempo no estacionarias.</li> <li>● Permite caracterizar las propiedades fractales sin ser influenciado por tendencias o la no estacionariedad de la serie [121].</li> <li>● Permite separar tendencias y correlaciones en series de tiempo para posteriormente analizar la persistencia de regímenes climáticos [122].</li> <li>● Detecta correlación a largo plazo en series de precipitación [56].</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Las fluctuaciones del método están definidas con respecto a desviaciones de la media cuadrática de regresiones polinómicas, lo cual es una limitante [118].</li> </ul>
Fractal-Multifractal	5	$d_n$ : Parámetro de escala vertical. $a_n, c_n, e_n$ y $f_n =$ Parámetros que dependen de las condiciones iniciales	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Permite determinar el atractor de la serie de tiempo [77].</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Para la realización de un análisis de series de tiempo, requiere proporcionarle un elevado número de parámetros, lo cual incrementa la complejidad del algoritmo al ser programado.</li> </ul>
Dinámica de Hurst-Kolmogorov	7	$i, j, m, n =$ Índices dependientes de los datos; $k, l =$ Factores de escala; $\Delta =$ intervalo fijo que expresa una unidad de la escala.	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Presenta la opción de ampliar su campo de estudio a dos dimensiones, facilitando la comprensión de una serie de tiempo [33].</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Para la realización de un análisis de series de tiempo, requiere proporcionarle un elevado número de parámetros, lo cual incrementa la complejidad del algoritmo al ser programado.</li> </ul>
Flujo integrado fraccional de 3 parámetros (FIF)	3	$\lambda =$ Resolución del modelo; $q =$ potencia considerada; $R =$ campo de análisis.	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Puede modelar las propiedades de invariancia de escala de una serie de tiempo [48,123].</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● No puede representar múltiples escalas temporales de la precipitación [123].</li> </ul>
Higuchi	2	$k =$ Número de series autosimilares generadas; $k_{m\acute{a}x} =$ Intervalo de tiempo máximo considerado	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Método rápido y confiable para determinar la correlación de series de tiempo, en comparación con otros métodos tales como la densidad espectral y el DFA, debido a algoritmo sencillo y con pocos parámetros [124].</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● El máximo grado de reducción (<math>k_{m\acute{a}x}</math>) se determina arbitrariamente por el investigador [124].</li> <li>● Al ser aplicado a imágenes, se presentan dificultades cuando la imagen posee una baja resolución [125].</li> </ul>

Método	No. De parámetros	Descripción de Parámetros	Ventajas	Desventajas
Dimensión de correlación fractal (FCD)	1	$R =$ Umbral definido	<ul style="list-style-type: none"> <li>Para estimar la dimensión de correlación se utiliza un sólo parámetro. Se considera <math>D_c \approx D_f</math> [126].</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No es un estimador de la dimensión fractal, sino de la dimensión de correlación.</li> </ul>
Estimación de la dimensión fractal a partir de diferencias consecutivas	2	$n =$ Orden de las diferencias consecutivas; $\gamma =$ Parámetro de la ecuación Weierstrass.	<ul style="list-style-type: none"> <li>No requiere determinar un valor de <math>k_{m\acute{a}x}</math>. Aunque requiere del valor de <math>n</math>, este siempre es igual o menor a 3 [31].</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se vuelve inapropiado para aplicarlo a perfiles de tendencia superior a la lineal [31].</li> </ul>
Modelo de Superficie de interpolación Fractal Browniana	3	$k_r, k_p =$ Número de onda radial; $S_{r,1}$ y $S_{r,2}$ Factores de rugosidad de la superficie original y la superficie de ruido Browniano respetivamente.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Puede ser modificado de múltiples maneras por calibración o postprocesamiento para mejorar su rendimiento para lugares específicos, tipos de tormenta y escalas [35].</li> <li>Aunque se requiere generar una distribución de superficie para determinar la superficie de interpolación media, se pueden crear campos usando una superficie de interpolación de forma separada [35].</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Solo puede ser aplicado a un rango definido de escalas espaciales donde los datos poseen autoafinidad. Las superficies escaladas no son las soluciones únicas, solamente una de las soluciones de un proceso aleatorio [35].</li> </ul>
Modelo de variación	1	$\epsilon =$ Escala a la cual se realiza la medición de la oscilación	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dubuc <i>et al</i> [117] afirman que se obtienen mejores resultados que el método de conteo de caja estándar, es más robusto y eficiente, debido a que no utiliza cubiertas, sino intervalos, obteniendo buenas aproximaciones de la dimensión fractal.</li> <li>Mide variaciones rápidas o súbitas a escalas pequeñas. Implica un rango finito de escalas para lograr estimar la pendiente de la variación en un gráfico log-log [127].</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Debe ser propuesto como modelo discreto, para posteriormente realizar un análisis de los efectos de muestreo y truncamiento de ancho de banda [127].</li> </ul>

a) Métodos con baja complejidad: Se incluyen aquellos métodos que requieren de un número relativamente bajo de parámetros de entrada (menor a 3) y por ende son sencillos de desarrollar. Sin embargo, algunos de los métodos presentan desventajas significativas (solo puede aplicarse a series con ciertas características (Estimación de la dimensión fractal a partir de diferencias consecutivas), sólo es un estimador de la dimensión fractal (dimensión de correlación fractal), debe ser propuesto como modelo discreto (Modelo de variación), etc.) lo cual limita su aplicación. Métodos que pueden asignarse a esta clasificación son: Rango rescalado, conteo de caja, análisis de fluctuación sin tendencia, método de Higuchi, dimensión de correlación fractal, estimación de la dimensión fractal a partir de diferencias consecutivas y modelo de variación.

b) Métodos con alta complejidad: Se incluyen aquellos métodos que requieren un número considerable de parámetros de entrada (mayor o igual a 3). A pesar de ser más complejos de desarrollar que métodos con menor número de parámetros, presentan ventajas significativas (no se ve influenciado por tendencias lineales (método de análisis multifractal de fluctuaciones

sin tendencia), son los más adecuados para series de tiempo con características específicas (análisis de Wavelet, espectro de potencia), determina el atractor de la serie (método fractal-multifractal), etc.). Métodos que se pueden asignar a esta clasificación son: análisis multifractal de fluctuaciones sin tendencia, análisis de Wavelet, espectro de potencia, método fractal-multifractal, dinámica de Hurst-Kolmogorov, flujo integrado fraccional de 3 parámetros y modelo de superficie de interpolación fractal Browniana.

Al desarrollar la clasificación anterior, se puede ampliar el panorama de los métodos que estiman la dimensión fractal. De acuerdo a las investigaciones consultadas, usualmente se utilizan métodos que presentan baja complejidad. El método más utilizado es el rango rescalado (R/S) a pesar de que presenta el inconveniente de tener que considerar los efectos de la correlación a corto plazo cuando se analizan series de tiempo cortas (Tabla I); lo cual es factible debido a que es sencillo desarrollarlo y estimar la dimensión fractal de un determinado conjunto o serie.

Referente a métodos con alta complejidad, el más utilizado es el análisis multifractal de fluctuaciones sin tendencia (MF-DFA), ya que aunque requiere de 3 parámetros (menor

a métodos como la dinámica de Hurst-Kolmogorov y método fractal-multifractal), minimiza los efectos de tendencias lineales, característica que métodos de baja complejidad no poseen y que puede influenciar los valores estimados de dimensión fractal o exponente de Hurst. Se puede decir que es el más recomendable por la capacidad que presenta al considerar un análisis multifractal.

En el caso de ambas clasificaciones, se presentan métodos que sólo fueron registrados una vez en las investigaciones consultadas. Esto puede deberse a que métodos tales como espectro de potencia, método fractal-multifractal y dinámica de Hurst-Kolmogorov no fueron desarrollados para ser empleados a series de precipitación y temperatura.

En cuanto a las similitudes, una de las más evidentes es que métodos como rango rescalado, conteo de caja, MF-DFA, DFA y método de Higuchi, requieren segmentar la serie considerada en intervalos o ventanas para estimar el exponente de Hurst. Esta característica puede generar cierta incertidumbre al momento de estimar el exponente de Hurst con varios métodos; ya que valores del exponente de Hurst obtenidos a partir de un menor número de intervalos o ventanas pueden ser menos precisos. Se recomienda obtener un valor de exponente de Hurst promedio cuando se consideren varios métodos en un análisis.

Así mismo, se presentan diferencias entre los métodos; algunos se desarrollan con base a una imagen o gráfico de la serie (conteo de caja, análisis de Wavelet, espectro de potencia, método de Higuchi, Modelo de Superficie de interpolación Fractal Browniana y modelo de variación), mientras que otros métodos únicamente requieren la serie de datos para estimar el exponente de Hurst (rango rescalado, MF-DFA, DFA, fractal-multifractal, dinámica de Hurst-Kolmogorov, FIF, FCD) y estimación de la dimensión fractal a partir de diferencias consecutivas. De manera que la selección del método depende del enfoque que desee desarrollarse.

Como puede observarse en la Tabla I, existe una gran variedad de métodos que permiten estimar el exponente de Hurst (y por ende la dimensión fractal); sin embargo, la elección del más adecuado para evaluar una serie de determinada variable es fundamental. Se recomienda realizar comparaciones entre los métodos, previo a la elección de alguno de ellos.

### 3. Aplicaciones

Los métodos basados en los fundamentos de la geometría fractal han sido aplicados al análisis de series de tiempo de precipitación y temperatura en diversas regiones del mundo. En esta sección se hace un inventario de las investigaciones que reportan la determinación del exponente de Hurst para series de precipitación y temperatura, así como un análisis de los resultados. Se ha utilizado la clasificación climática de Köppen [128] para establecer una posible relación entre los valores estimados de exponente de Hurst con las condiciones climáticas de cada una de las regiones analizadas. En las Tablas II y III, se reportan las características de las se-

ries estudiadas, métodos de análisis y valores estimados del exponente de Hurst y dimensión fractal.

A partir de las Tablas II y III, se procede a analizar el comportamiento del exponente de Hurst de series de precipitación y temperatura con respecto a la clasificación climática de Köppen. Las investigaciones de series de precipitación desarrolladas en regiones con clima tropical (A), tales como Tamil Nadu, India [129]; Benín [34]; Pastaza, Ecuador [31]; regiones de Etiopía [130]; Australia [131], Venezuela [37], Brasil [132]; y Queensland, Australia [27]; muestran que las series de precipitación tienden a presentar valores del exponente de Hurst entre 0.075 y 0.45, es decir son antipersistentes en el tiempo. De acuerdo a Malamud y Turcotte [69], esto significa que las series de precipitación que se registran en este tipo de clima, tienen alta probabilidad a presentar un incremento, seguido de un decremento y viceversa; además, una serie de tiempo antipersistente tendrá un comportamiento estacionario en el tiempo, debido a que los incrementos y decrementos se compensan entre sí, manteniendo los momentos estadísticos constantes e independientes del tiempo. De acuerdo a Rehman [119] esto indica una memoria a corto plazo, dado que se presenta poca dependencia de los valores con los anteriormente registrados. Sin embargo, no todas las investigaciones reportadas en condiciones climáticas de tipo tropical (A) para series de precipitación, estiman valores del exponente de Hurst menores a 0.5; tal es el caso de Venezuela [37], cuyo análisis reporta valores máximos de 0.7, lo que corresponde a series de precipitación persistentes. Lo anterior indica que la serie en análisis no es estacionaria en el tiempo, dado que un comportamiento de cambio (incremento o decremento) será seguido por un análogo, de manera que no se mantienen los momentos estadísticos en el tiempo. Además, existe un alto grado de ocurrencia de un evento registrado sobre los que se presenten en eventos futuros o presenta comportamientos con memoria a largo plazo [69]. También se puede establecer que se presenta una relación inversa entre el exponente de Hurst de las series y el valor de precipitación promedio anual (Tabla II). Por ejemplo; series con precipitaciones promedio anual entre 2300 a 3500 mm/año corresponden a valores del exponente de Hurst de 0.4 y 0.075 respectivamente; mientras que una serie con precipitación promedio anual de 644 mm/año, corresponde a un valor de exponente de Hurst de 0.7; por lo tanto se tiene que la precipitación promedio anual se constituye en un parámetro que define la persistencia y estacionariedad de la serie de tiempo en condiciones climáticas tropicales, de manera que a menor precipitación promedio anual, la serie tendrá más fuerza de persistencia y no será estacionaria en el tiempo. Las diferencias entre los valores del exponentes de Hurst en regiones climáticas similares puede ser atribuida a dos situaciones: i) los diversos métodos empleados en los análisis desarrollados, y, ii) las características de las series de precipitación analizadas. Por ejemplo, el análisis desarrollado en Venezuela [37], contempló series anuales, mientras que el resto de los análisis, se realizaron, a partir de series de

TABLA II. Compilado de investigaciones sobre el análisis de series de precipitación aplicando geometría fractal.

Referencia	Región	Periodo de tiempo analizado	Condiciones climáticas	Método utilizado	Exponente de Hurst	Dimensión fractal
Clima Tropical (A)						
T. Selvi, S. Selvaraj. <i>Universal Journal of Environmental Research and Technology</i> <b>1</b> [129]	Tamil Nadu, India	Precipitación del Monzón del Noreste de 1902-2008	(As): Tropical y estepario Precipitación: 1083 mm/año	Rango rescalado Hurst	0.21	1.78
S. Verrier <i>et al</i> , <i>Journal of Hydrology</i> <b>389</b> [34].	Djougou, Benin	Precipitación de la campaña de tormentas Africana (African monsoon multidisciplinary analysis campaign (AMMA))	(Aw): cálido y húmedo  Precipitación: 1039 mm/año	Fractionated flux (FIF). Modelo universal multifractal. Se usó un espectro pluviómetro (DBS) 1372 Mapas de radar 100 Mapas de radar DBS: Todos los datos DBS: 10 eventos de precipitación	0.21 0.4 0.55 0.62	1.79 1.6 1.45 1.38
A. Kalauzi <i>et al</i> , <i>Atmospheric Research</i> <b>93</b> [31]	Provincia de Pastaza, Ecuador	Precipitación Mensual acumulada con 380 datos	Pastaza: (Af): Clima tropical típico Precipitación: 3500 mm/año	Higuchi y diferencias consecutivas	0.075	1.925
A.T. Haile <i>et al</i> , <i>Journal of applied meteorology and climatology</i> <b>48</b> [130]	Río Nilo Azul, Etiopía	Precipitación horaria	(Aw): Clima tropical con variación. Usualmente más frío que otras regiones cercanas al Ecuador. Precipitación: 1200 mm/año	Conteo de caja	0.42 a 0.5	1.5 a 1.58
J.M. Gutiérrez, A. Galván y A.S. Cofiño, <i>Fractals</i> <b>14</b> [131].	Cairns, Australia	Precipitación mensual	(Am) Cálido templado Precipitación: 2300 mm/año	Conteo de caja	0.4	1.6
I.R. Amaro, J.R. Demey y R. Macchiavelli, <i>Interciencia</i> <b>29</b> [37]	Venezuela	Precipitación anual de 1921 a 2000	(As) La variedad climática es representada por las temporadas de lluvia y sequía. Precipitación: 644 mm/año	Rango rescalado Hurst	0.7	1.3
J.G.V. Miranda, <i>Theor. Appl. Climatol.</i> <b>77</b> [132]	Noreste de Brasil	Precipitación diarios	-Noreste de Brasil: (As) Subtropical, precipitación: 1450 mm/año	Rango rescalado Hurst	0.7	1.3
M.C. Breslin y J.A. Belward, <i>Math Comput Simulat</i> <b>48</b> [27]	Queensland, Australia	Precipitación mensual total de 52 estaciones (1200 valores)	(As) Escasez de lluvias y veranos calurosos al oeste. Monzón a clima templado en el extremo norte. Cálido a lo largo de la franja costera. Precipitación: 961 mm/año	Conteo de caja, Rango rescalado Hurst, Método de Variación, Comparación numérica de métodos	0.4 a 0.65	1.35 a 1.60

Referencia	Región	Periodo de tiempo analizado	Condiciones climáticas	Método utilizado	Exponente de Hurst	Dimensión fractal
<b>Clima Seco (B)</b>						
I. Peñate <i>et al.</i> , <i>Nonlin. Processes Geophys</i> <b>20</b> [133]	Islas Canarias	Precipitación anual de 22 años, de 1989-2010.	(BSh): subtropical oceánico, con temperaturas mitigadas todo el año por el mar y en verano por los vientos alisios. Precipitación: 900 mm/año	Conteo de caja	1.45	1.55
	Zacatecas, México				0.04	1.96
M.A. Velásquez. <i>American Meteorological Society</i> [29]	Agua Nueva		(BSk) La zona norte es		0.02	1.98
	Camacho		caracterizada por el		0.02	1.98
	Cañitas	Precipitación	clima seco desértico.		0.03	1.97
	Cedros	diaria	La zona centro tiene	Método de	0.05	1.95
	Coapas	de 1963 a 2003	climas semidesértico	Wavelet	0.1	1.9
	Concepción del Oro		y templado semidesértico		0.09	1.91
	Chalchihuites		Precipitación: 431 mm/año		0.15	1.85
	El platanito				0.12	1.88
A. Yuval y D.M. <i>Broday, Environ. Sci. Technol.</i> <b>44</b> [32]			(BWh) típico clima mediterráneo con veranos calurosos y secos, e inviernos fríos y lluviosos. Desértico cálido. Precipitación: 476 mm/año	Método de Wavelet	0.7	1.3
	Arabia Saudita		(BWh): Clima desértico con			
S. Rehman, <i>Chaos, Solitons and Fractals</i> <b>39</b> [119]	R/S Hurst		temperaturas		0.71	1.29
	Abha		extremadamente		0.63	1.37
	Al- Ahsa	Precipitación	calientes durante	Rango rescalado	0.67	1.33
	Al-Baha	diaria de 7 años	el día y bruscos	Hurst	0.6	1.4
	Makkah		descensos por la		0.59	1.41
	Al- Wajh		noche. Precipitación: 94.6 mm/año		0.66	1.34
G. Korvin, M. Boyd, y R. O'Dowd <i>Geophys. J. Int.</i> <b>100</b> [126]	Adelaide, Australia	Precipitación de la red de estaciones de Australia	(BSk) clima mediterráneo caluroso que por lo general significa que goza de un clima suave, con inviernos húmedos y veranos calurosos y secos Precipitación: 536 mm/año	Dimensión de correlación	0.6	1.4
<b>Clima Templado (C)</b>						
Zu-Guo <i>et al.</i> , <i>Physica A</i> <b>405</b> [134]	Hong Kong, China	Precipitación diaria desde 1960-2005	Cfa: El clima es templado y cálido. Hay precipitaciones durante todo el año. Precipitación promedio: 2152 mm/año	Método multifractal de fluctuación sin tendencia (MF-DFA)	0.58	1.42

Referencia	Región	Periodo de tiempo analizado	Condiciones climáticas	Método utilizado	Exponente de Hurst	Dimensión fractal
H. Huai-Hsien <i>et al</i> , <i>Journal of Hidrology</i> <b>496</b> [11]	Boston, Massachusetts, USA	Precipitación de tormenta en Boston	(Cfa) Entre el continental húmedo y subtropical húmedo.	Método Fractal- Multifractal (original)	0.56	1.44
			Veranos cálidos,	FM-Wire	0.52	1.48
			inviernos fríos.	FM-Leaf	0.3	1.7
			Precipitación: 1122 mm/año	FM-No Linear	0.43	1.57
				FM-Marginal	0.31	1.69
H. Ghanmi, Z. Bargaoui, y C. Mallet. <i>Hydrological Sciences</i> <i>Journal</i> <b>58</b> [135]	Túnez	Precipitación diaria de 1873 a 2009	(Csa) Clima es templado, con inviernos suaves, lluviosos, veranos calurosos y secos. Precipitación: 448 mm/año	Conteo de caja	0.9	1.1
A. López Lambraño Tesis de Doctorado UAQ [52].	Presa Centenario, Querétaro, México	Precipitación de 1957 a 2001. -Registro de 50 años -Para décadas con momento de orden 10, 100 ventanas 1951-1961			0.36	1.64
		1961-1971	(Csa) Clima semiárido	Análisis de	0.33	1.67
		1971-1981	y templado	fluctuación sin	0.37	1.63
		1981-1991	Precipitación:	tendencia multifractal	0.42	1.58
		1991-2001	550 mm/año	(MF-DFA)	0.47	1.53
		-Para décadas con momento de orden 6, 100 ventanas 1951-1961			0.39	1.61
		1961-1971			0.38	1.61
		1971-1981			0.37	1.63
		1981-1991			0.44	1.56
H. Huai-Hsien <i>et al</i> , <i>Fractals</i> <b>20</b> [136]	Iowa, Estados Unidos	Precipitación medida cada 2 minutos= 256 datos	(Cfa): Continental húmedo Precipitación: 1451 mm/año	Fractal- Multifractal	0.67	1.33
V. Capecchi <i>et al</i> , <i>Atmospheric and</i> <i>Oceanic Physics</i> , <b>1-6</b> [36]	Toscana, Italia Central	Precipitación diaria	(Cfa) Lluvioso y severo en el interior, con considerables fluctuaciones de temperatura Precipitación: 747 mm/año	Método de dimensión de correlación fractal (FCD)	0.25	1.85
D. Koutsoyiannis, A. Paschalis A. y N. Theodoratos, <i>Journal</i> <i>of Hydrology</i> <b>398</b> [33]	Océano Pacífico, norte de Nueva Zelanda	Precipitación horaria del 13 al 16 julio de 2005	(Cfb): El clima en todo el país es templado, principalmente oceánico. Precipitación: 640 mm/año	Hurst- Kolmogorov	0.99	1.01
S.P. Pérez <i>et al</i> , <i>Revista de</i> <i>Climatología</i> <b>9</b> [137]	La Pampa, Argentina	Precipitación Anual	(Csa): templado húmedo hacia el este y templado seco al oeste. Precipitación: 564 mm/año	Rango rescalado Hurst	0.94	1.06



Referencia	Región	Periodo de tiempo analizado	Condiciones climáticas	Método utilizado	Exponente de Hurst	Dimensión fractal
L.R. Salomao, J.R. Campanha y H.M. Gupta, Campanha y H.M. Gupta, <i>Theor. Appl. Climatol.</i> <b>95</b> [100]	Sao Paulo, Brasil	Precipitación diaria	(Csb): Subtropical con inviernos templados y veranos con temperaturas moderadamente altas Precipitación: 1450 mm/año	Rango rescalado Hurst	0.556	1.444
A. Barbulescu, C. Serban y C. Maftai, <i>Latest Trends on Computers</i> <b>2</b> [138]	Dobrudja, Rumanía Adamclisi Cernavoda	Precipitación anual de 10 series entre 1965 y 2005	(Cfb): El clima oscila entre templado y continental, según la región del país. Precipitación: 500 mm/año	Rango rescalado de Hurst	0.7207 0.9775 0.9738	1.2793 1.0225 1.0262
X. Zhou, N. Persaud y H. Wang, <i>Ecological Modelling</i> <b>182</b> [139]	Botsuana	Precipitaciones diarias	(Csa) Clima semiárido con lluvia muy escasa. Precipitación promedio anual: 457 mm/año	Rango rescalado Hurst	0.71	1.29
A. Mazzarella, y G. Tranfaglia <i>Theor. Appl. Climatol.</i> <b>65</b> [90]	Nápoles, Italia Ovindoli Villavallelonga Pontecorvo Letino Castelfranco in Miscano Vitulano Pontecasalduni S. Andrea del Pizzone	Precipitación de red de estaciones climatológicas de la zona, con datos históricos	(Csa) clima mediterráneo Precipitación: 894 mm/año	Conteo de caja	0.1598 0.1578 0.1532 0.1572 0.1511 0.1454 0.1446 0.1433	1.8402 1.8422 1.8468 1.8428 1.8489 1.8546 1.8554 1.8567
J.J. Oñate, <i>Theoretical &amp; Applied Climatology</i> <b>56</b> [39]	España Albacete Alicante	Precipitación anual de 1901-1989.	(Csa) clima mediterráneo, variaciones de temperatura Precipitación: 524 mm/año	Rango rescalado de Hurst	0.7 0.6	1.3 1.4
S. Lovejoy, y B. Mandelbrot <i>Tellus</i> <b>37A</b> [16]	Montreal, España	Precipitación de cada 5 minutos	(Cfb) Clima mediterráneo, variaciones de temperatura entre el litoral costero. Precipitación: 524 mm/año	Rango rescalado de Hurst	0.6	1.4
Clima continental (D)						
Szolgayova <i>et al</i> , <i>Journal of Hydrology</i> <b>519</b> [140]	Río Danube, Rumanía	Precipitación mensual desde 1901- 2006	Dfb: El clima es frío y templado. Hay precipitaciones durante todo el año en Ulm. Precipitación: 717 mm/año	Método de Wavelet	0.56	1.44
Domino <i>et al</i> , <i>Physica A</i> <b>413</b> [141]	Océano Báltico Kolobrzeg Swinoujscie	Precipitación de 5 tormentas extremas	Dfb: El clima es frío y templado. Hay precipitaciones durante todo el año en Ulm. Precipitación: 527 mm/año	Método multifractal de fluctuación sin tendencia (MF-DFA)	0.45 0.61	1.55 1.39
J. Lv <i>et al</i> , <i>Journal of Sustainable Development</i> <b>2</b> [142]	Hotan, China	Precipitación Media anual de 1954 a 2003	(Dwa): Clima continental desértico, templado. Precipitación: 645 mm/año	Análisis de fluctuación sin tendencia.	0.596	1.404

Referencia	Región	Periodo de tiempo analizado	Condiciones climáticas	Método utilizado	Exponente de Hurst	Dimensión fractal
K. Tao, y A. Barros. <i>Journal of Atmospheric and Oceanic Technology</i> <b>27</b> [35]	Región sur-centro de Oklahoma, Estados Unidos	Precipitación de tormentas convectivas entre mayo y septiembre del 2007.	(Dfb): región templada, con las precipitaciones típicas de un clima continental Precipitación: 1420 mm/año	Superficie fractal Browniana	0.43	1.57
Clima Frío (E)						
J.M. Gutiérrez, A. Galván y A.S. Cofiño, <i>Fractals</i> <b>14</b> [131]	Barrow, Alaska Davis, Antártica	Precipitación mensual	(ET) Ártico. Precipitación: 537 mm/año	Conteo de caja	0.61	1.39
					0.61	1.39

TABLA III. Compilado de investigaciones sobre el análisis de series de temperatura aplicando geometría fractal.

Referencia	Región	Periodo de tiempo analizado	Condiciones climáticas	Método utilizado	Exponente de Hurst	Dimensión fractal
Clima seco (B)						
A. Mianabadi, y Farid, <i>Alireza International Journal of Applied Environmental Sciences</i> <b>6</b> [101]	Mashad, Irán	Datos de temperaturas máximas y mínimas de 1992-2002	(BSk) Veranos moderados e inviernos muy fríos, Semiárido. Temp. Promedio: 21.1 °C/año	Conteo de caja	0.65	1.35
	Arabia Saudita		(BWh) Clima desértico con temperaturas extremadamente calientes durante el día y bruscos descensos por la noche,			
S. Rehman, <i>Chaos, Solitons and Fractals</i> <b>39</b> [119]	Abha, Al- Ahsa, Al- Baha, Makkah	Temperaturas diarias de 7 años	además de sus precipitaciones prácticamente nulas. También, por la influencia del clima subtropical, existen algunas variaciones en estos valores Temperatura promedio diaria: 26.6 °C	Rango rescalado Hurst	0.34 0.4 0.33 0.4	1.66 1.6 1.67 1.6
S. Herrera <i>et al</i> , XXX Ciclo de Seminarios de Posgrado e Investigación [143]	Nuevo León, México	Datos de temperatura mensual extrema máxima y mínima de 30 estaciones -Temperaturas máximas	(BSh) El clima de Nuevo León es en su mayor parte estepario semiseco y las lluvias son comunes entre mayo y septiembre. Temperatura promedio: 23 °C	Análisis de la densidad de espectro potencial de series de tiempo	0.201 a 0.6	1.4 a 1.709
Clima templado (C)						
A. Burgueño, X. Lanab, C. Serrab, y M. D. Martínez, <i>Physics Letters A</i> <b>378</b> [144]	Cataluña, España	Datos de temperaturas extremas máximas y mínimas de 1950 a 2004	(Cfb) Clima mediterráneo, templado en invierno y muy caluroso en verano; el interior tiene un clima continental mediterráneo, con inviernos fríos y veranos muy calurosos Temp. Promedio: 24.5 °C	Análisis de fluctuación sin tendencia multifractal (MF-DFA)	0.602	1.398

Referencia	Región	Periodo de tiempo analizado	Condiciones climáticas	Método utilizado	Exponente de Hurst	Dimensión fractal
A. López Lambrano, Tesis de Doctorado de Doctorado, UAQ [52]	Presa Centenario, Querétaro, México	Temperaturas diarias de 1957 a 2001	(Csa) Clima semiárido. Temperatura: 18°C	Análisis de fluctuación sin tendencia multifractal (MF-DFA)	0.44	1.56
Valdez-Cepeda, R., <i>et al. Fractals</i> <b>11</b> [30]	Guanajuato, México	Temperaturas mínimas mensuales de 1985 a 1997	(Csa) El clima semiseco corresponde en general a la zona del altiplano; el templado, a las partes medias y altas de las serranías y el semicálido Temp. Promedio: 26°C	Espectro de potencia	0.514	1.486
D. Koutsoyiannis, <i>Hydrological Sciences -Journal-des Sciences Hydrologiques</i> , <b>48</b> [145]	París, Francia	Temperatura por temporadas	(Cfb) Oceánico Semicontinental. Temperatura: 15.5°C	Rango rescalado de Hurst	0.79	1.21
Reljin, B., Reljin, I., y Jovanovic, G. IEEE [146]	Belgrado, Serbia	Temperaturas promedio mensuales de 1951-1998	(Cfa) Continental templado. Temp. Promedio: 12.5°C	Rango rescalado de Hurst	0.64	1.36
Clima continental (D)						
Szolgayova <i>et al. Journal of Hydrology</i> <b>519</b> [140]	Río Danube, Rumanía Hofkirchen Achleiten Kienstock Bratislava	Temperaturas mensuales desde 1901- 2006	Dfb: El clima es frío y templado. Hay precipitaciones durante todo el año en Ulm. Temperatura promedio: 8.7°C	Método de Wavelet	0.65 0.65 0.65 0.65	1.35 1.35 1.35 1.35
L. Bodri y V. Cermak, <i>Fractals</i> <b>13</b> [147]	Kamchatka, Rusia	Temperatura de 2 series de cada 5 segundos por 2 semanas(230,000 datos)	(Dfc) Clima continental. Temperatura promedio: -1°C	Rango rescalado Hurst	0.18 a 0.2	1.8 a 1.82
S. Ferguson y F. Messier, <i>Ecography</i> <b>19</b> [72]	Canadá Alert Eureka Resolute Clyde	Temperatura anuales de 29 a 34 años.	(Dfb) Los inviernos pueden ser duros en muchas regiones del país, especialmente en las provincias del interior y en las praderas, donde se experimenta un clima continental. Temperatura: 10°C	Rango rescalado de Hurst	0.802 0.94 0.715 0.951	1.198 1.06 1.285 1.049
L. Bodri, <i>Theor. Appl. Climatol.</i> <b>49</b> [65]	Hungría Baja	Temperaturas medias anuales de 1901 a 1991	(Dfb) Continental, con inviernos fríos, veranos cálidos, precipitaciones medias. Temperatura: 11.9°C	Rango rescalado Hurst	0.8	1.2

tiempo mensuales y diarias; esto implica que los valores de exponente de Hurst de series pueden verse influenciados por el método y la resolución temporal considerada.

De acuerdo a la Tabla III, las series de precipitación que se registran en clima seco (B), tales como: (Islas Cana-

rias [133], Zacatecas, México [29]; regiones de Israel [32] y Arabia Saudita [119]), tienden a ser antipersistentes, debido a que los valores del exponente de Hurst oscilan entre 0.02 y 0.45, como en el caso de las Islas Canarias y Zacatecas, México. Sin embargo, también se presentan series que tie-

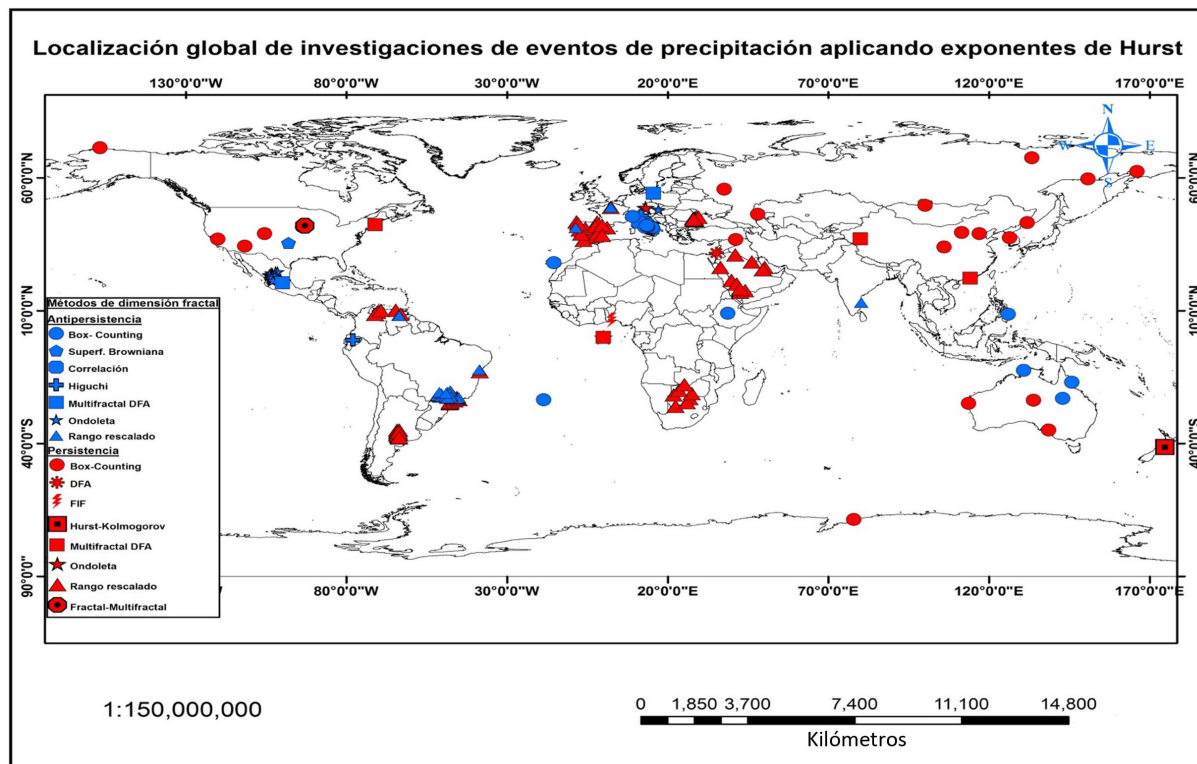


FIGURA 1. Localización global de investigaciones que estiman el exponente de Hurst en series de precipitación mediante la aplicación de diversos métodos.

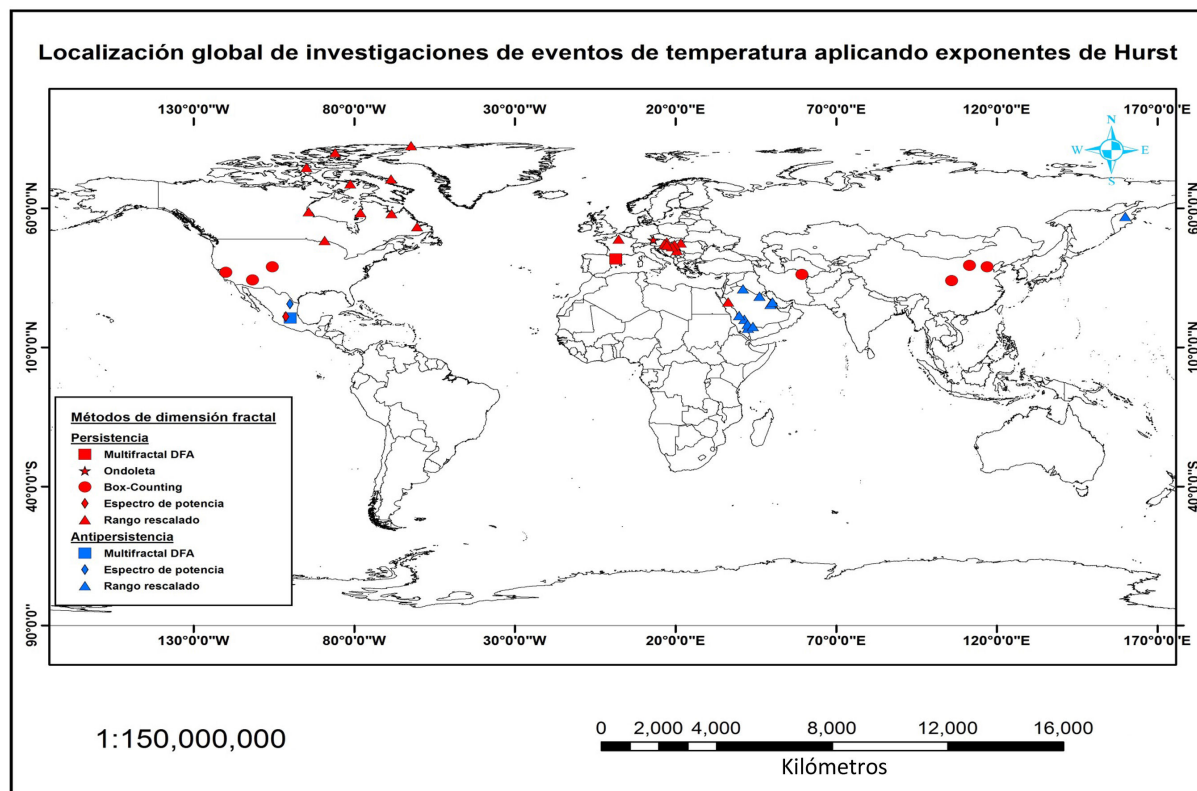


FIGURA 2. Localización global de investigaciones que estiman el exponente de Hurst en series de temperatura mediante la aplicación de diversos métodos.

nen un comportamiento persistente con valores del exponente de Hurst entre 0.6 y 0.7 (Israel, Arabia Saudita y Australia). Continuando el análisis en condiciones climáticas secas (B), se observa que a medida que disminuye la precipitación promedio anual, se incrementa el valor del exponente de Hurst de las series; por ejemplo, una serie de precipitación promedio anual de 94.6 mm, corresponde a un valor del exponente de Hurst de 0.71, mientras que una región con una precipitación promedio anual de 900 mm, presenta un valor de 0.45. También, se ha encontrado que la longitud del registro parece tener influencia en la estimación del exponente de Hurst; en series de tiempo con longitudes de registro menores, los valores que se estiman del exponente de Hurst aumentan.

En el caso de los estudios reportados en regiones con condiciones climáticas templadas (C), como en el caso de: Hong Kong, China [134], Massachusetts, Estados Unidos [11]; Túnez, Túnez [135]; Querétaro, México [52]; La Pampa, Argentina [137]; París, Francia [115]; Sao Paulo, Brasil [100]; Drobudja, Rumanía [138]; Madrid, España [131]; Nápoles, Italia [90]; regiones de Botsuana [139] y Montreal, España [16], registran comportamientos antipersistentes y persistentes; lo anterior puede estar relacionado con la precipitación promedio anual registrada, es decir, se presenta una relación inversa entre los valores del exponente de Hurst y la precipitación promedio anual de la región correspondiente. Por ejemplo, en Hong Kong, China se registra una precipitación promedio anual de 2152 mm y se tiene un valor del Hurst correspondiente a 0.58; así mismo en Túnez se registran 448 mm/año y se tiene un valor del exponente de Hurst correspondiente a 0.9, lo anterior podría considerarse como un indicador al momento de caracterizar la precipitación promedio anual de una región. Al tomar en consideración otros factores tales como el método utilizado y las características de la serie analizada, se ha encontrado que en las regiones con clima templado, el método más empleado en la estimación del exponente de Hurst, corresponde al rango rescalado; éste método arroja valores más elevados del exponente de Hurst al compararse con los valores estimados al emplearse otras metodologías, entre ellas, el fractal-multifractal o el MF-DFA. También, se presenta la tendencia a que la longitud del registro parece tener influencia en el valor estimado del exponente de Hurst.

Cuando se analizan las series de precipitación registradas en condiciones de clima continental (D), los valores estimados correspondientes al exponente de Hurst, demuestran que la precipitación tiene una tendencia persistente y se han empleado diversos métodos para el desarrollo de los análisis. Para la condición climática fría (E), también se reporta un comportamiento persistente con un valor del exponente de Hurst de 0.61; la escasez de datos, limita los análisis para dicha condición de clima y se recomienda continuar desarrollando este tipo de estudios.

Al analizar el comportamiento las series de precipitación a partir de la clasificación climática de Köppen [128], se realiza un análisis similar contemplando los reportes de las in-

vestigaciones que han empleado métodos fractales para el análisis de series de temperatura (Tabla III).

De acuerdo a la Tabla III, las series de temperatura analizadas en climas secos (B) (Mashad, Irán [101]; y Nuevo León, México [143]), presentan valores del exponente de Hurst entre 0.2 y 0.4, indicando antipersistencia y estacionariedad [69]. Además, al considerar la temperatura promedio anual, se presenta una relación inversa con respecto a los valores del exponente de Hurst. Con respecto a las características de las series analizadas, se consideran series diarias o mensuales; en este caso los valores del exponente de Hurst no difieren significativamente al considerarse distintas resoluciones temporales en el análisis, caso contrario al de la variable precipitación. En las regiones con clima templado (C), (Cataluña, España [144]; Querétaro, México [52]; Guanajuato, México [30]; París, Francia [145] y Belgrado, Serbia [146]) las series de temperatura presentan un comportamiento persistente y no estacionario en el tiempo, debido a que el valor del exponente de Hurst oscila entre 0.6 y 0.7; además no se define una relación entre la temperatura promedio anual y los valores del Hurst. En este tipo de clima las series con resolución temporal diaria, presentan los valores más bajos del exponente de Hurst (0.44) en comparación a los análisis que contemplan series mensuales, cuyos valores se encuentran en el rango de 0.6 a 0.8.

Con respecto a las series de temperatura registradas en la clasificación climática de tipo continental (D), y que comprende lugares tales como: Río Danube, Rumanía [140]; regiones de Canadá [72] y regiones de Hungría [65]; las series tienden a presentar comportamiento persistente y no estacionario en el tiempo, debido a que el valor del exponente de Hurst se encuentra entre 0.65 y 0.95, es decir, presentan memoria a largo plazo. En el caso de las series analizadas en la región de Kamchatka, Rusia [53], se obtiene un comportamiento antipersistente con valores del exponente de Hurst entre 0.18 y 0.20. Las series analizadas a partir de resoluciones temporales registradas cada 5 segundos, arrojaron los valores más bajos del exponente en estudio.

A partir de la información contenida en las Tablas II y III, se ha realizado una espacialización de las investigaciones que reportan análisis fractal para series de precipitación y temperatura (Fig. 1 y 2); así mismo se puede visualizar el método empleado para la estimación del exponente de Hurst y la tendencia en el comportamiento de la serie, lo anterior permite identificar las regiones que poseen información y las que no cuentan con ningún tipo de análisis.

De acuerdo a la Fig. 1, la mayoría de las investigaciones referentes a series de precipitación se concentran en Europa Central y Medio Oriente, seguidas por el sur de África y Sudamérica. La concentración de investigaciones en dichas regiones proporciona información relevante para evaluar el comportamiento de las series de precipitación a una escala global o planetaria, sin embargo desarrollar un análisis detallado se ve limitado por la escasez de información en otras regiones del mundo, principalmente en climas continentales y fríos; se recomienda desarrollar este tipo de análisis en las

regiones, tales como Groenlandia, Canadá, Rusia, Antártida, Norte de África, India y Centroamérica. En la Fig. 1, los símbolos rojos indican series de precipitación con persistencia en el tiempo (y no estacionariedad) y los azules indican antipersistencia (y estacionariedad); se puede notar que las series antipersistentes tienden a concentrarse en las zonas cercanas al Ecuador; que a su vez es la región en la que predominan las condiciones climatológicas de tipo tropicales (A). Al alejarse del Ecuador, comienzan a predominar las series de precipitación con tendencia persistente en el tiempo. Ahora bien, al inicio se planteó que existen indicios para afirmar que la precipitación promedio anual mantiene una relación con la fuerza de persistencia, sin embargo las tendencias en el comportamiento fractal de la serie pueden depender de la variabilidad climática producto de fluctuaciones como la oscilación decadal del Pacífico (PDO) y la oscilación del sur (ENSO).

Al analizar la Fig. 2, es evidente que se tiene una situación aún más crítica debido a la escasez y falta de información en el análisis fractal de series de temperatura a partir del exponente de Hurst; las investigaciones referenciadas, se localizan en Canadá, México, Medio Oriente y Europa Central. Las series antipersistentes tienden a predominar en regiones cercanas al Ecuador (símbolos azules). No se reportan resultados en las condiciones climáticas tipo (A) y (B).

#### 4. Conclusiones

El análisis de series de tiempo empleando los fundamentos de la geometría fractal, permiten caracterizar la estruc-

tura temporal y la ocurrencia de eventos de precipitación y temperatura; además, posee la ventaja que las variables aleatorias en mención, se pueden analizar en múltiples escalas y dimensiones. Los exponentes de Hurst representan una medición del grado de dependencia de las series en mención y pueden explicar el comportamiento espacio-temporal de dichas variables.

Los valores que se estiman del exponente de Hurst, y que permiten evaluar el comportamiento persistente o antipersistente de variables aleatorias como es el caso de la precipitación y temperatura, se encuentran correlacionados a las condiciones climáticas del área en estudio; la resolución temporal y longitud del registro también constituyen factores determinantes al momento de realizar un análisis de series temporales a partir del exponente de Hurst.

Se recomienda complementar al análisis de series de precipitación y temperatura, empleando la teoría multifractal, para así conceptualizar los posibles cambios de los momentos de la precipitación y temperatura con el tiempo.

Finalmente, el cambio climático y sus posibles consecuencias deben ser el origen minucioso de estudios, reflexiones y consideraciones de cambio de modelos de desarrollo; dado lo anterior, los resultados y las apreciaciones reportadas en el presente trabajo pueden ser relevantes para el análisis y comprensión de la dinámica del cambio climático, tomando como punto de partida la caracterización de la estructura temporal y la ocurrencia de la precipitación y la temperatura en diferentes escalas.

1. J.W. Kantelhardt *et al.*, *Physica A* **330** (2003) 240-245.
2. J. Xu, Y. Chen, W. Li, Z. Liu, J. Tang, C. Wei, *Theor Appl Climatol* (2015) DOI 10.1007/s00704-014-1364-z.
3. N. Brunsell, *J Hydrol* **385** (2010) 165-172.
4. A. Gires, I. Tchiguirinskaia, D. Schertzer, A. Schellart, A. Berne, y S. Lovejoy, *Atmos Res* **138** (2014) 125-138.
5. H. Millan, J. Rodriguez, B. Ghanbarian-Alavijeh, R. Biondi, y G. Llerena, *Atmos Res* **101** (2011) 879-892.
6. J. Pinel, S. Lovejoy, y D. Schertzer, *Atmos Res* **140-141** (2014) 95-114.
7. C.T. Hoang, I. Tchiguirinskaia, D. Schertzer, P. Arnaud, J. Lavabre, y S. Lovejoy, *Journal of Hydrology* **438-439** (2012) 39-51.
8. A. Akbari, y M. Friedel, *Environ Modell Softw* **52** (2014) 83-97.
9. R. Caballero, S. Jewson, y A. Brix, *Clim Res* **21** (2002) 127-140.
10. S. Nunes, L. Romani, A. Avila, C. Traina Jr, E.P.M. de Sousa, y A.J.M. Traina, *Journal of Information and Data Management* **2** (2011) 51-57.
11. H. Huai-Hsien, C.E. Puente, A. Cortis, y J.L. Fernández, *Journal of Hydrology* **496** (2013) 205-216.
12. G.G. Svanidze, *Water Resources Publications*, USA (1980) 847-848.
13. S. Lovejoy, D. Schertzer, y A.A. Tsonis, *Science* **235** (1987) 1036-1038.
14. R.H. Fluegeman, y R. Snow, *PAGEOPH* **131** (1989) 307-313.
15. J.C. Gallant, I.D. Moore, M.F. Hutchinson, y P. Gessler, *Math. Geol.* **26** (1994) 455-481.
16. S. Lovejoy, y B. Mandelbrot, *Tellus* **37A** (1984) 209-232.
17. S. Lovejoy, J. Pinel, y D. Schertzer, *Adv in Wat Resour* **45** (2012) 37-50.
18. H.E. Schepers, J.H.G.M. van Beek, J.B. Basingthwaight, *Eng. Med. Biol.* **11** (1992) 57-64.
19. A.M. Selvam, *Cornell University Library* (2010) 1-28.
20. B. Sivakumar, *Hydrolog Scis J* **45** (2000) 203-219.
21. V. Venugopal, E. Foufola-Georgiou, y V. Sapozhnikov, *Journal of Geophysical Research* **104** (1999) 31599-31610.
22. G. Rangarajan, y D. Sant Chaos, *Solitons and Fractals* **19** (2004) 285-291.
23. B.B. Mandelbrot, *Science* **156** (1967) 636-638.
24. B.B. Mandelbrot, *Annals of Economic and Social Measurement* **1** (1972) 259-290.

25. H.E. Hurst, *Trans. Am. Soc. Civil Eng* **116** (1951) 770-880.
26. H.E. Hurst, *Proc. Inst. Civ. Eng* **1** (1956) 516-543.
27. M.C. Breslin, y J.A. Belward, *Mathematics and Computers in Simulation* **48** (1999) 437-446.
28. S. Movahed, G. Jafari, F. Ghasemi, S. Rahvar, y M. Rahimi, *J. Stat Mech-Theory E* **P02003** (2006) 1-17.
29. M.A. Velásquez, G. Medina, I. Sánchez, K. Oleschko, J.A. Ruiz, y G. Korvin, *American Meteorological Society* **52** (2013) 2771-2780.
30. R. Valdez-Cepeda, D. Hernandez-Ramirez, B. Mendoza, J. Valdes-Galicia, y D. Maravilla, *Fractals* **11** (2003) 137-144.
31. A. Kalauzi, M. Cukic, H. Millan, S. Bonafoni, y R. Biondi, *Atmospheric Research* **93** (2009) 673-679.
32. Yuval, y D.M. Broday, *Environ. Sci. Technol.* **44** (2010) 4629-4634.
33. D. Koutsoyiannis, A. Paschalis, y N. Theodoratos, *Journal of Hydrology* **398** (2011) 91-100.
34. S. Verrier, L. de Montera, L. Barthès, y C. Mallet, *Journal of Hydrology* **389** (2010) 111-120.
35. K. Tao, y A. Barros, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* **27** (2010) 409-427.
36. V. Capecechi, A. Crisci, S. Melani, M. Morabito, y P. Politi, *Theor Appl Climatol* **107** (2011) 1-6.
37. I.R. Amaro, J.R. Demey, y R. Macchiavelli, *Interciencia* **29** (2004) 617-620.
38. J. Beran, *Monographs on Statistics and Probability* 61. Chapman & Hall, (New York 1994).
39. J.J. Oñate, *Theoretical and Applied Climatology* **56** (1997) 83-87.
40. O. Peters, C. Hertlein, y K. Christensen, *Phys Rev Lett* **88** (2002) 1-4.
41. D. Schertzer, I. Tchiguirinskaia, S. Lovejoy, P. Hubert, *Hydrological Sciences Journal-Journal des Sciences Hydrologiques* **55** (2010) 965-979.
42. D. Turcotte, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* **99** (1994) 377-389.
43. L.G. Lanza, y J. Gallant, *Encyclopedia of Hydrological Sciences* (2006) 123-133.
44. P. Hubert, y J.P. Carbonnel, *Non-Linear Variability in Geophysics* **3** (1990) 209-213.
45. S.R. Malinowski, M.Y. Leclerc, y D. Baumgardner, *Journal of the Atmospheric Science* **51** (1993) 397-413.
46. S. Lovejoy, y D. Schertzer, *Journal of Hydrology* **322** (2006) 59-88.
47. S. Lovejoy, y D. Schertzer, *Journal of Geophysical Research* **95** (1990) 2021-2034.
48. D. Schertzer, y S. Lovejoy, *Journal of Geophysical Research* **92** (1987) 9693-9714.
49. H.G. Hentschel, y I. Procaccia, *Physical Review A* **29** (1984) 1461-1470.
50. V. Lombardo, E. Volpi, y D. Koutsoyiannis, *Hydrological Sciences Journal* **57** (2012) 1052-1066.
51. A. Gires, I. Tchiguirinskaia, D. Schertzer, y S. Lovejoy, *Adv Water Resour* **45** (2012) 13-25.
52. A. López Lambraño, *Tesis de Doctorado en Fac. Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro* (2012).
53. L. Bodri y V. Cermak, *Global Planet Change* **14** (1997) 163-173.
54. L. Bodri, V. Cermak, y I.T. Kukkonen, *Global Planet Change* **29** (2001) 189-200.
55. V. Cermak, L. y L. Bodri, *Phys Earth Planet In* **126** (2001) 295-310.
56. Q. Zhang, J. Zhang, D. Yan, y Y. Wang, *Theor Appl Climatol* **117** (2014) 167-174.
57. B. Sirangelo, y E. Ferrari, *Theor Appl Climatol* **118** (2014) 203-209.
58. P. Ceccato, C. Vancutsem, y M. Temimi, *IGARSS* (2010) 178-180.
59. J.W. Hansen, S. Mason, L. Sun, y A. Tall, *Expl Agric* **47** (2011) 205-240.
60. D. Meng, H. Gong, X. Li, y D. Zhou, *20th International Conference on Geoinformatics* (2012) 1-6.
61. T. Crowley, *Science* **289** (2000) 270-276.
62. D.B. Liverman, y K.L. O'brien, *Global Environmental Change* **1** (1991) 351-364.
63. I. Bartos, y I.M. Janosi, *Nonlinear Proc Geoph.* **13** (2006) 571-576.
64. M. Maofei, Y. Boming, C. Jianchao, y L. Liang, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **52** (2009) 4823-4828.
65. L. Bodri, *Theor. Appl. Climatol.* **49** (1993) 53-57.
66. E. Koscielny-Bunde, H.E. Roman, A. Bunde, S. Havlin, y H. Schellnhuber, *Philos Mag B* **77** (1998) 1331-1340.
67. R. Monetti, S. Havlin, y A. Bunde, *Physica A* **320** (2003) 581-589.
68. G.E.P. Box, G.M. Jenkins, y G.C. Reinsel, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 3rd ed. Prentice-all, Englewood Cliffs, NJ (1994).
69. B.D. Malamud, y D.L. Turcotte, *Journal of Statistical Planning and Inference* **80** (1999) 173-196.
70. A. Kiraly, y I.M. Janosi, *Meteorol Atmos Phys* **88** (2005) 119-128.
71. L. Bodri, y V. Cermak, *Tectonophysics* **291** (1998) 251-261.
72. S. Ferguson y F. Messier, *Ecography* **19** (1996) 382-392.
73. V. Kovalenko, *Doklady Earth Sciences* **444** (2012) 782-786.
74. P. Hubert, *Hydrological Sciences* **46** (2001) 897-905.
75. A. Gires, I. Tchiguirinskaia, D. Schertzer, y S. Lovejoy, *Nonlin. Processes Geophys.* **20** (2013) 343-356.
76. R. Deidda, M. Grazia, y E. Piga, *Journal of Hydrology* **322** (2006) 2-13.
77. A. Cortis, C.E. Puente, y B. Sivakumar, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **23** (2009) 897-906.
78. L. Yonghe, Z. Wanchang, Z. Kexin, y P. Hongqin, *Theoretical and Applied Climatology* **107** (2012) 591-598.

79. A.P. Garcia-Marin, F.J. Jimenez-Hornero, y L. Ayuso-Muñoz, *Hydrological processes* **22** (2008) 2672-2688.
80. C. Svensson, J. Olsson, R. Berndtsson, *Water Resources Research* **32** (2010) 2463-2472.
81. G. Lin, y Z. Fu, *Physica A* **387** (2008) 573-579.
82. G. Calenda, E. Gorgucci, F. Napolitano, A. Novella, y E. Volpi, *Advances in Geosciences* **2** (2005) 293-299.
83. M.I.P. Lima, y J. Grasman, *Journal of Hydrology* **220** (1999) 1-11.
84. J. Royer, A. Biauou, F. Chauvin, D. Schertzer, y S. Lovejoy, *C.R. Geoscience* **340** (2008) 431-440.
85. J. Olsson, y J. Niemczynowicz, *Journal of Hydrology* **187** (1996) 29-43.
86. F.J. Jiménez-Hornero, A.P. García-Marín, y J.L. Ayuso, *Journal of Hydrologic Engineering* **13** (2008) 987-991.
87. G. Kiely y K. Ivanova, *Phys. Chem. Earth (B)* **24** (1999) 781-786.
88. E.M. Douglas, y A. Barros, *Journal of Hydrometeorology* **4** (2003) 1012-1024.
89. Y. Tessier, S. Lovejoy, y D. Schertzer, *Journal of Applied Meteorology* **33** (1994) 1572-1586.
90. A. Mazzarella, y G. Tranfaglia, *Theor. Appl. Climatol.* **65** (2000) 157-163.
91. Y. Ashkenazy, D. Baker, H. Gildor, S. Havlin, *Geophys Res Lett* **30** (2003) 1-4.
92. L. Guangxing, y F. Zuntao, *Physica A* **387** (2008) 573-579.
93. Y. Naiming, F. Zuntao, y M. Jiangyu, *Theor Appl Climatol.* **112** (2013) 673-682.
94. F. Schmitt, D. Schertzer, S. Lovejoy, y Y. Brunet, *Europhys. Lett.* **34** (1996) 195-200.
95. V.V. Kovalenko, y E.V. Gaidukova, *Doklady Earth Sciences* **439** (2011) 1183-1185.
96. X. Yang, X. Jin, Z. Du, y Y. Zhu, *Building and Environment* **46** (2011) 970-979.
97. B.B. Mandelbrot, J.W. Van Ness, *SIAM Rev* **10** (1968) 422-37.
98. R.F. Voss, *Random fractals: characterization and measurement. Scaling Phenomena in Disordered Systems*. Plenum Press, New York, (1985) 1-11.
99. O. Karner, *Geophysical research letters* **28** (2001) 3825-3826.
100. L.R. Salomao, J.R. Campanha, y H.M. Gupta, *Theor. Appl. Climatol.* **95** (2009) 83-89.
101. A. Mianabadi, y A. Farid, *Int J Appl Environ Sci* **6** (2011) 229-240.
102. K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and applications*. West Sussex, UD, Inglaterra. (John Wiley and sons 1990).
103. J. Gomez, y G. Poveda, *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales* **32** (2008) 483-502.
104. C. Peng *et al.*, *Physica A* **221** (1995) 180-192.
105. J. Olsson, *Atmospheric Research* **42** (1995) 53-65.
106. R. Lopes, y N. Betrouni, *Medical Image Analysis* **13** (2009) 634-649.
107. B. Sivakumar, *Hydrological processes* **15** (2001) 943-955.
108. A. Grossmann, y J. Morlet, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984) 723-736.
109. M. Blazquez, M. Anguiano, F. Saavedra, A. Lallena, y P. Carpena, *Rev. Fis. Med.* **10** (2009) 27-34.
110. M. Barnsley, *Fractals everywhere*. Academic Press, (New York 1988).
111. T.M. Over, *Modeling space-time rainfall at the mesoscale using random cascades*. Tesis (PhD), University of Colorado, Boulder, USA. (1995).
112. D. Schertzer, y S. Lovejoy, *Non-linear Variability in Geophysics*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands (1991) 41-82.
113. A.N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30** (1941) 299-303.
114. B. Mandelbrot, *J. Fluid Mech.* **62** (1974) 331-350.
115. L. Montera, L. Barthes, C. Mallet, y P. Gole, *Journal of hydro-meteorology* **10** (2009) 493- 506.
116. T. Higuchi, *Physica D* **31** (1988) 277-283.
117. B. Dubuc, J. Quiniou, C. Roques-Carmes, C. Tricot, y S. Zucker, *Physical Review A* **39** (1989) 1500-1512.
118. S. Lovejoy, D. Schertzer, *The Weather and Climate: Emergent Laws and Multifractal Cascades*. (Cambridge U. Press. 2013).
119. S. Rehman, Chaos, *Solitons and Fractals* **39** (2009) 499-509.
120. R. Weron, *Physica A* **312** (2002) 285-299.
121. N. Yuan, Z. Fu, H. Li, J. Mao, *Theor Appl Climatol* **109** (2012) 133-140.
122. M.L. Kurnaz, *Fractals* **12** (2004) 365-373.
123. N. Akrou, A. Chazottes, S. Verrier, L. Barthes, y C. Mallet, *1st Megha Tropiques Ground Validation* (2013).
124. G. Coyt, M. Diosdado, A. Balderas, J. Correa y F. Brown, *Rev. Mex. Fis. S* **59** (2013) 1-6.
125. H. Ahammer, *Higuchi Dimension of Digital Images*. PLOS one database. (2011). DOI: 10.1371/journal.pone.0024796
126. G. Korvin, M. Boyd, y R. O'Dowd, *J. Int.* **100** (1990) 535-539.
127. F. Berizzi, G. Betini, M. Martorella, M. Bertacca, *Transactions on Geoscience and Remote Sensing* **44** (2006) 2361-2373.
128. W. Köppen, *Petermanns Geogr. Mitt.* **64** (1918) 243-248.
129. T. Selvi, y S. Selvaraj, *Journal of Environmental Research and Technology* **1** (2011) 219-221.
130. A.T. Haile, T. Rientjes, A. Gieske, y M. Gebremichael, *Journal of applied meteorology and climatology* **48** (2008) 1696-1717.
131. J.M. Gutiérrez, A. Galván, y A.S. Cofiño, *Fractals* **14** (2006) 87-99.
132. J.G.V. Miranda, R.F.S. Andrade, A.B. Silva, C.S. Ferreira, A.P. Gonzalez, y J.L. Carrera, *Theor. Appl. Climatol.* **77** (2003) 113-121.
133. I. Peñate, J.M. Martín-González, G. Rodríguez, y A. Cianca, *Nonlin. Processes Geophys.* **20** (2013) 1079-1094.
134. Y. Zu-Guo, L. Yee, D. Yongqin, Z. Qiang, A. Vo, y Z. Yu, *Physica A* **405** (2014) 1-10.



135. H. Ghanmi, Z. Bargaoui y C. Mallet, *Hydrological Sciences Journal* **58** (2013) 483-497.
136. H. Huai-Hsien, C.E. Puente, A. Cortis, y B. Sivakumar, *Fractals* **20** (2012) 261-270.
137. S.P Pérez, E.M. Sierra, M.J. Massobrio, y F.R. Momo, *Revista de Climatología* **9** (2009) 25-32.
138. A. Barbulescu, C. Serban, y C. Maftai, *Latest Trends on Computers* **2** (2007) 590-595.
139. X. Zhou, N. Persaud, H. Wang, *Ecological Modelling* **182** (2005) 371-378.
140. E. Szolgayova, J. Parajka, G. Blöschl, y C. Bucher, *Journal of Hydrology* **519** (2014) 871-880.
141. K. Domino, T. Blachowicz y M. Ciupak, *Physica A* **413** (2014) 489-497.
142. J. Lv, S. Bing, y M. Shuhong, *Journal of Sustainable Development* **2** (2009) 182-185.
143. S. Herrera *et al.*, *XXX Ciclo de Seminarios de Posgrado e Investigación* (2009) 39-44.
144. A. Burgueño, X. Lana, C. Serra, y M.D. Martinez, *Phys Lett A* **378** (2014) 874-885.
145. D. Koutsoyiannis, *Hydrolog Sci J* **48** (2003) 3-24.
146. B. Reljin, I. Reljin, y G. Jovanovic, *International Symposium on Signals, Circuits and Systems* **1** (2003) 49-52.
147. L. Bodri y V. Cermak, *Fractals* **13** (2005) 299-310.
148. C. Torrence, y G.P. Compo, *Bulletin of the American Meteorological society* **79** (1998) 61-78.