# Análisis de algoritmos

Parte 2: Crecimiento de funciones

# Notación asintótica

- En este tema veremos algunos conjuntos de funciones con las que se suele representar la forma de crecimiento asintótico de un algoritmo

- Practicaremos su uso y calcularemos unas pocas de sus relaciones, pero sobre todo, veremos su significado gráfico

# ¿Qué es un conjunto?

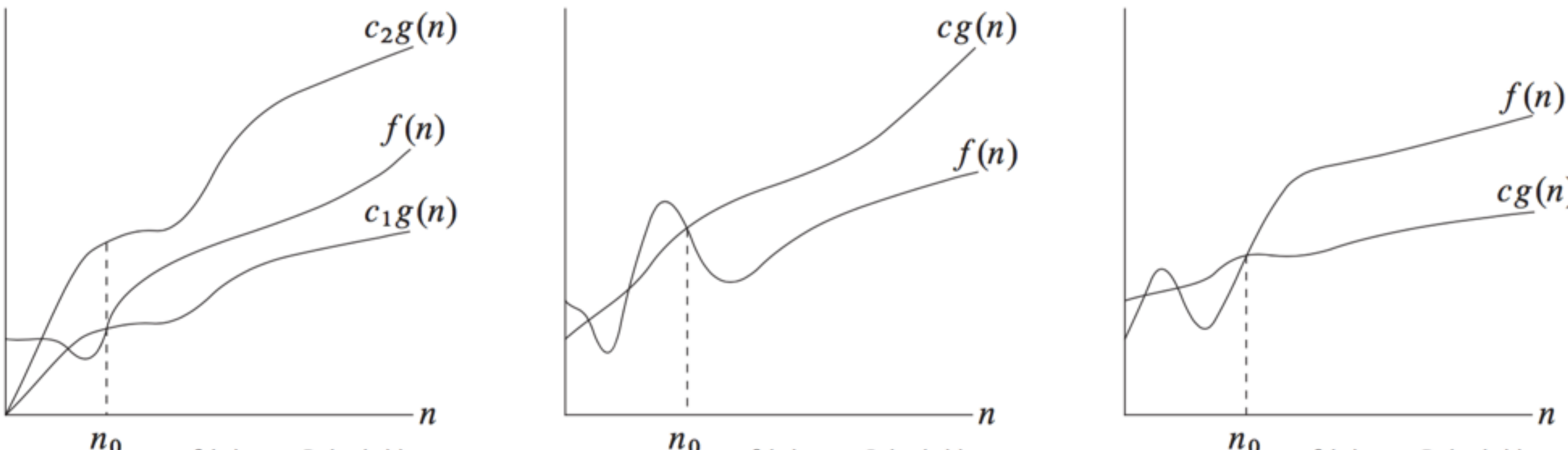
- Colección de elementos u objetos
- Con el nombre del conjunto en común
- No se admiten elementos repetidos

# Algunos conjuntos de funciones

- Rectas: $\{Ax+B: A,B\in\mathbb{R}\}$
- Parábolas: $\{Ax^2+Bx+C: A,B,C\in\mathbb{R}\}$
- Exponenciales: $\{Ae^{Bx}: A,B\in\mathbb{R}\}$
- Logaritmos: $\{A\ln(Bx): A\in\mathbb{R}, B\in\mathbb{R}^+\}$
- Áreas de triángulos con la misma base: $\{bx/2: b\in\mathbb{R}^+\}$

- $O(g(n))=\{f(n):$ existe $n_0>0$ y $c>0$, tal que $0<=f(n)<=cg(n)$ para toda $n>=n_0\}$
- $\Omega(g(n))=\{f(n):$ existe $n_0>0$ y $c>0$, tal que $0<=cg(n)<=f(n)$ para toda $n>=n_0\}$
- $\Theta(g(n))=\{f(n):$ existe $c_1>0, c_2>0, n_0>0,$ tal que $0<=c_1g(n)<=f(n)<=c_2g(n)$ para toda $n>=n_0\}$

# gráficamente




$f(n) = \Theta(g(n))$ $f(n) = O(g(n))$ $f(n) = \Omega(g(n))$

- El análisis asintótico se refiere a ver el comportamiento de las funciones para valores del parámetro `n` grandes

- Este análisis marca la tendencia de la función, o sea, lo que se puede esperar de ella

- Es el factor **más importante** y en general, **el más útil para analizar un algoritmo**, sin embargo no es el único y a veces las constantes que se “desprecian” son demasiado significativas para no considerarlas.

- Sin embargo, es más o menos fácil identificar cuando estas constantes van a ser significativas.

# Abusando de la notación

¿Cómo denotamos una función que está en estos conjuntos?

$\mathtt{f(n)} \in O(\mathtt{g(n)})$ se escribe $\mathtt{f(n)} = O(\mathtt{g(n)})$

$\mathtt{f(n)} \in \Omega(\mathtt{g(n)})$ se escribe $\mathtt{f(n)} = \Omega(\mathtt{g(n)})$

$\mathtt{f(n)} \in \Theta(\mathtt{g(n)})$ se escribe $\mathtt{f(n)} = \Theta(\mathtt{g(n)})$

# El "orden" de una función

- Toda función se puede escribir $f(x)=O(f(x))$
- En efecto, si $f(x)>=0$, tenemos que para $c=1$ y $n_0=1$ tenemos:

$$0<=f(x)<=cf(x)$$

- De manera similar $f(x)=\Omega(f(x))$ y $f(x)=\Theta(f(x))$

- Así, si
$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$$
- entonces
$$\frac{1}{2}x + 3 = O(\frac{1}{2}x + 3)$$
- pero la importancia de esta notación asintótica es su poder para simplificar la notación de funciones

- Por ejemplo, podemos también escribir
$$\frac{1}{2}x + 3 = O(x)$$
- lo que demostraremos a continuación…

- Por definición, si queremos demostrar

$$\frac{1}{2}x + 3 = O(x)$$

- entonces tenemos que mostrar que existen

$$c > 0, n_0 > 0$$

- tal que

$$0 \leq f(x) \leq cg(x)$$

- donde

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3, g(x) = x$$

- Así tenemos

$$0 \leq \frac{1}{2}x + 3 \leq cx$$

- De la desigualdad derecha tenemos

$$\frac{1}{2}x + 3 \leq cx$$

- pasamos las $x$ del lado mayor y lo demás del lado menor:

$$3 \leq cx - \frac{1}{2}x$$

- factorizamos $x$

$$3 \leq (c - \tfrac{1}{2})x$$

- lo del paréntesis no puede ser cero ni negativo (pues el producto no podría ser mayor que 3), para poder dividir por lo de la izquierda, así escogemos un valor $c > \frac{1}{2}$ por ejemplo $c = 1$, así:

$$x \geq \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

- Con lo que el valor para $n_0$ se escoge

$$n_0 = 6$$

- con lo que demostramos que efectivamente

$$\frac{1}{2}x + 3 = O(x)$$

- De la misma manera podemos demostrar que

$$\frac{1}{2}x + 3 = \Omega(x)$$

- así, queremos demostrar que existen

$$c > 0, n_0 > 0$$

- tales que

$$0 \leq cx \leq \frac{1}{2}x + 3$$

- Con la desigualdad derecha observamos que

$$\begin{aligned} cx &\leq \frac{1}{2}x + 3, \\ -3 &\leq \frac{1}{2}x - cx, \\ -3 &\leq (\frac{1}{2} - c)x \end{aligned}$$

- Lo del paréntesis no puede ser cero ni negativo, o al pasar dividiendo, la $x$ estará del lado menor, y queremos que esté del lado mayor. Además la $c$ debe ser positiva, así $0<c<1/2$, tomemos $c=1/4$.

- Con lo que tenemos que $x \geq \frac{-3}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{-3}{\frac{1}{4}} = -12$
- Si $n_0 = 1$, el primer positivo mayor que -12, todo lo anterior se cumplirá para $x \geq n_0$
- con lo que efectivamente $\frac{1}{2}x + 3 = \Omega(x)$
- Con estas dos pruebas y el siguiente teorema tendremos que $\frac{1}{2}x + 3 = \Theta(x)$
- En efecto, el **Teorema 1** relaciona $O$, $\Omega$ y $\Theta$

$$f(n) = O(g(n)), f(n) = \Omega(g(n)) \iff f(n) = \Theta(g(n))$$

- Probemos primero que
$$f(n) = O(g(n)), f(n) = \Omega(g(n)) \implies f(n) = \Theta(g(n))$$
- Así sabemos que existen constantes
$$n_0 > 0, m_0 > 0, c_1 > 0, c_2 > 0$$
- tales que
$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n)$$
- y
$$0 \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$
- tomemos
$$k_0 = \max\{n_0, m_0\}$$
- con lo que para toda $x > k_0$ se tiene
$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

$\square$

- Probemos ahora que $f(n) = \Theta(g(n)) \implies f(n) = O(g(n)), f(n) = \Omega(g(n))$
- así, sabemos que existen
$$n_0 > 0, c_1 > 0, c_2 > 0$$
- tales que para toda $x > n_0$ se tiene
$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$
- para toda $n > n_0$, por lo que

- de la 1a y 2a desigualdad (desde la izquierda) tenemos que
$$f(n) = \Omega(g(n))$$

- para de la 1a y la 3a desigualdad tenemos que
$$f(n) = O(g(n))$$

❒

- Antes de ver más ejemplos y resultados, veamos la interpretación de estos conjuntos de funciones, en adelante simplemente las llamaremos “notación asintótica” en lo que se ha visto hasta ahora de la complejidad espacio-temporal de algoritmos, en particular veremos los ejemplos de inserción y mezclas.

# Complejidad temporal del algoritmo de inserción

- En el algoritmo de ordenamiento por inserción vemos que tiene el ciclo (que empieza en la línea 1) que controla la variable `j` y dentro tiene un ciclo (que empieza en la línea 4), que controla la variable `i`.

- La variable `j` toma valores desde `1` hasta `len(A)-1`, por lo que produce `n-1` iteraciones.

- A su vez, el ciclo de la variable `i` produce entre `1` y `j-1` iteraciones.

- El mejor caso (la lista está ordenada) es cuando el ciclo de `i` produce `1` iteración por cada iteración de `j`, o sea `n-1` **iteraciones en total.**

- Mientras que en el peor caso es cuando se  producen `j-1` iteraciones por cada iteración de `j`.

- Como la cantidad total de iteraciones se puede calcular con la suma de los enteros desde `1` hasta `n-1`, esta cuenta nos da `(n-2)(n-1)/2` **iteraciones en total** en el peor caso (cuando la lista está ordenada al revés).

```
inserción(A):
Para j de 1 a len(A)-1
    pivote = A[j] # carta a acomodar
    i = j - 1 # posición a la izquierda del pivote
    Mientras i >= 0 y A[i] > pivote
        A[i+1] = A[i]
        i = i - 1
    A[i + 1] = pivote
```

- Así, podemos escribir las funciones para los casos mejor y peor de esta forma:
  $f_{mejor}(n) = n\text{-}1$
  $f_{peor}(n) = n(n\text{-}1)/2=(n^2\text{-}n)/2$

- Ej. Ver que $f_{mejor}(n)=\Theta(n)$ y $f_{peor}(n)=\Theta(n^2)$

- Para la mayoría de los algoritmos se prefiere hablar de una sóla complejidad temporal, en este caso la peor. Sin embargo en este caso, no podríamos decir que $\Theta(n^2)$ es lo que inserción se va a tardar para **todas las entradas posibles** (si el arreglo está ordenado, esto sería $\Theta(n)$)

- Sin embargo, con estas notaciones, podemos decir que inserción se tarda entre $\Omega(n)$ y $O(n^2)$. Es decir, existen entradas para las cuales se tarda $n$ y otras para las cuales se tarda $n^2$

- Así, $\Omega$ nos dice la **cota inferior**, o el tiempo en el **mejor caso**, mientras que $O$ nos dice la **cota superior**, o el tiempo en el **peor caso**. Como $O$ nos dice el tiempo en el peor caso, por lo general ese es el que se suele decir que cubre este algoritmo.

Demostrar que $n^3 \neq \Theta(n^2)$ :

- Supongamos que si existe $c_1>0$, $c_2>0$ y $n_0>0$ tales que $0 \leq c_1n^2 \leq n^3 \leq c_2n^2$, para toda $n>n_0$
- Dividiendo entre $n^2$ en la 3a desigualdad tenemos que $n \leq c_2$
- Pero como $c_2$ es constante, esto claramente no puede ser cierto para toda $n > n_0$

❒

# Para cotas menos justas existen…

- $o(g(n))=\{f(n):$ para toda $c>0$, existe $n_0>0$ tal que $0<=f(n)<cg(n)$ para toda $n>=n_0\}$

- $\omega(g(n))=\{f(n):$ para toda $c>0$, existe $n_0>0$ y, tal que $0<=cg(n)<f(n)$ para toda $n>=n_0\}$

- En $o(g(n))$, todo múltiplo de $g(n)$ será eventualmente más grande que $f(n)$, de manera que se separan cada vez mas conforme $n$ crece. Dicho de otra forma, $f(n)$ se vuelve insignificante respecto a $g(n)$ para valores grandes de $n$.

- Por ejemplo, demostrar que $n=o(n^2)$:

- Hay que mostrar que para toda $c>0$, existe una $n_0>0$ tales que $0 \leq n < cn^2$, para toda $n>n_0$

- Sea $c>0$, y dividamos la 2a desigualdad entre $cn$, resultando $1/c < n$

- Por lo que si tomamos $n_0=1/c$, obtendremos lo que buscamos.

❐

- Antes vimos que $n^2=O(n^2)$, de hecho esta es una cota justa, y escribiamos $n^2=\Theta(n^2)$, ahora veamos que $n^2 \neq o(n^2)$ :

- Mostraremos que existe $c>0$, tal que no existe $n_0 > 0$ tal que $0 \leq n^2 < cn^2$, para toda $n > n_0$

- Dividamos la segunda desigualdad por $n^2$, resultando $1<c$, así si tomamos $c$ menor que 1, por ejemplo 1/2, nunca $n^2$ será menor que $n^2/2$, por lo que no puede existir tal $n_0>0$

❐

# Propiedades

**Transitivity:**

$$
\begin{array}{llll}
f(n) = \Theta(g(n)) & \text{and} \;\; g(n) = \Theta(h(n)) & \text{imply} & f(n) = \Theta(h(n)) \,, \\
f(n) = O(g(n)) & \text{and} \;\; g(n) = O(h(n)) & \text{imply} & f(n) = O(h(n)) \,, \\
f(n) = \Omega(g(n)) & \text{and} \;\; g(n) = \Omega(h(n)) & \text{imply} & f(n) = \Omega(h(n)) \,, \\
f(n) = o(g(n)) & \text{and} \;\; g(n) = o(h(n)) & \text{imply} & f(n) = o(h(n)) \,, \\
f(n) = \omega(g(n)) & \text{and} \;\; g(n) = \omega(h(n)) & \text{imply} & f(n) = \omega(h(n)) \,.
\end{array}
$$

**Reflexivity:**

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \Theta(f(n)) \,, \\
f(n) &= O(f(n)) \,, \\
f(n) &= \Omega(f(n)) \,.
\end{aligned}
$$

# Propiedades

**Symmetry:**

$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ if and only if } g(n) = \Theta(f(n)) .$$

**Transpose symmetry:**

$$\begin{aligned} f(n) &= O(g(n)) \quad \text{if and only if} \quad g(n) = \Omega(f(n)) , \\ f(n) &= o(g(n)) \quad \text{if and only if} \quad g(n) = \omega(f(n)) . \end{aligned}$$

# Propiedades

$$
\begin{array}{lll}
f(n) = O(g(n)) & \text{is like} & a \le b \,, \\
f(n) = \Omega(g(n)) & \text{is like} & a \ge b \,, \\
f(n) = \Theta(g(n)) & \text{is like} & a = b \,, \\
f(n) = o(g(n)) & \text{is like} & a < b \,, \\
f(n) = \omega(g(n)) & \text{is like} & a > b \,.
\end{array}
$$

We say that $f(n)$ is ***asymptotically smaller*** than $g(n)$ if $f(n) = o(g(n))$, and $f(n)$ is ***asymptotically larger*** than $g(n)$ if $f(n) = \omega(g(n))$.