

*Sistemas Complejos 2*

---

# Redes complejas:

## 1. Elementos de Teoría de Gráficas

---

Dr. Felipe Contreras / UACM

---

# Gráficas

---

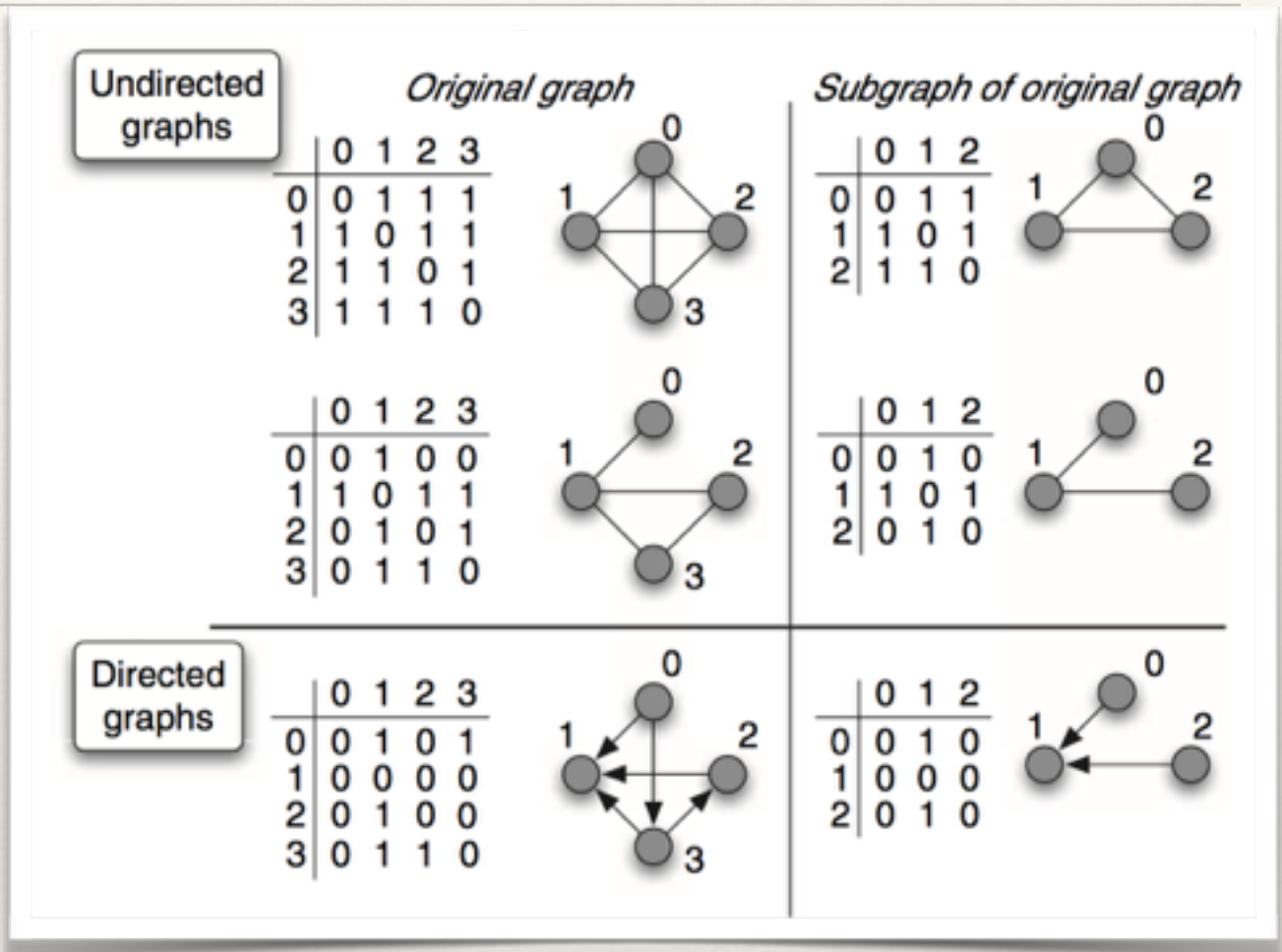
- ❖ Se estudian desde el s.XVIII, con Euler y los puentes de Königsberg
- ❖ Es un campo muy activo de las matemáticas puras
- ❖ También es un área muy aplicada. Su aplicación a los sistemas complejos se le llama *redes*
- ❖ Aquí se han usado de diversas maneras, en especial, estadísticas. Aunque como herramienta, no la restringiremos a eso.



# Definiciones

- ❖ Una gráfica  $G=(V, E)$  consiste del conjunto  $V$  de  $n$  elementos llamados *nodos* (o *vértices*), y el conjunto  $E$  de  $m$  parejas de nodos, llamadas *aristas*.
- ❖ Si la pareja  $(v_1, v_2)$  es un elemento de  $E$ , entonces los nodos  $v_1$  y  $v_2$  se dice que son *adyacentes* o *vecinos* uno del otro.
- ❖ Si nos interesa que  $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$ , entonces se dice que las aristas y  $G$  son *dirigidas*.
- ❖  $G$  se puede representar como una *matriz de adyacencia* donde las entradas son

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si existe la arista } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



- ❖ En general (*gráfica simple*), no se permite que  $v$  sea vecino de sí mismo
- ❖ ¿Hasta cuántas aristas *no dirigidas* puede tener una gráfica con  $n$  nodos?
- ❖ En España (y algunos mexicanos que no son del área) a las gráficas le llaman *gráfos*.

- ❖ Una *subgráfica*  $G'=(V', E')$  de  $G$  es tal que  $V' \subseteq V$  y  $E'=\{(v_1', v_2') : v_1', v_2' \text{ son nodos de } V'\}$
- ❖ Si el número de aristas  $|E| \sim |V|^\alpha$ , entonces  $G$  se llama *rala* o *escasa* si  $\alpha < 1$ , y se llama *densa* si  $\alpha = 1$
- ❖  $G$  también se puede representar como *lista de adyacencia*. Es decir, como la lista donde el elemento  $l_i$  es a su vez la lista de nodos  $[v_1, v_2, \dots]$  adyacentes a  $v_i$ .
- ❖ Si  $G$  es rala, o sea  $m$  es pequeña, comparada con el tamaño de su matriz de adyacencia, que es  $n^2$ ; dicha matriz consiste en su mayoría de ceros; por lo que computacionalmente es más conveniente representar  $G$  como lista de adyacencia.
  - ❖ ¿de qué tamaño es una lista de adyacencia?



- ❖ Una *cadena* entre dos nodos  $a$  y  $b$  de  $G$ , es una subgráfica, cuyos nodos son  $V'=\{a_i, i=1,2,\dots,r+1 : a_1 = a, a_{r+1}=b\}$  y cuyas aristas son  $E'=\{(a_i, a_{i+1}) \in E, i=1, 2, \dots, r \}$ . Al valor  $r$  se le llama la *longitud* de la cadena. (nota: al ser un conjunto,  $V'$  no tiene elementos repetidos)
- ❖ Se dice que  $G$  es *conexa* si para todo par de nodos, se puede encontrar una cadena entre ellos, de lo contrario se dice que  $G$  es *disconexa*.
- ❖ Un subconjunto  $S'$  del conjunto  $S$  es *maximal* bajo la propiedad  $p$ , si cumple  $p$ , pero  $S' \cup \{e\}$  no cumple  $p$ , para cualquier  $e \in S$ .
- ❖ Una *componente conexa*  $G'=(V', E')$  es una subgráfica de  $G$ , si  $V'$  y  $E'$  son maximales bajo la propiedad de que  $G'$  sea conexa.
- ❖ Así la *descomposición conexa* de  $G$  es la lista que consiste de sus componentes conexas.

❖ ¿Cuál es la componente más grande de una gráfica conexa?

- ❖ De entre las cadenas entre los nodos  $a$  y  $b$ , la de menor longitud, aunque puedan haber varias, se llama *la ruta más corta*, y su longitud es llamada la distancia de  $a$  a  $b$ . Se escribe  $d(a,b)$ .
- ❖ Se define  $d(a,b)=\infty$  si  $a$  y  $b$  están en diferentes componentes conexas.
- ❖ A la máxima distancia  $d_G$  entre cuales quiera dos nodos de una gráfica  $G$  se le llama *diámetro*.
- ❖ ¿Cuánto es el diámetro de una gráfica desconexa?
- ❖  $d(a,b)=d(b,a)$  si la gráfica es no dirigida. ¿Puedes dar un contra-ejemplo para cuando la gráfica es dirigida? ¿y conexa?



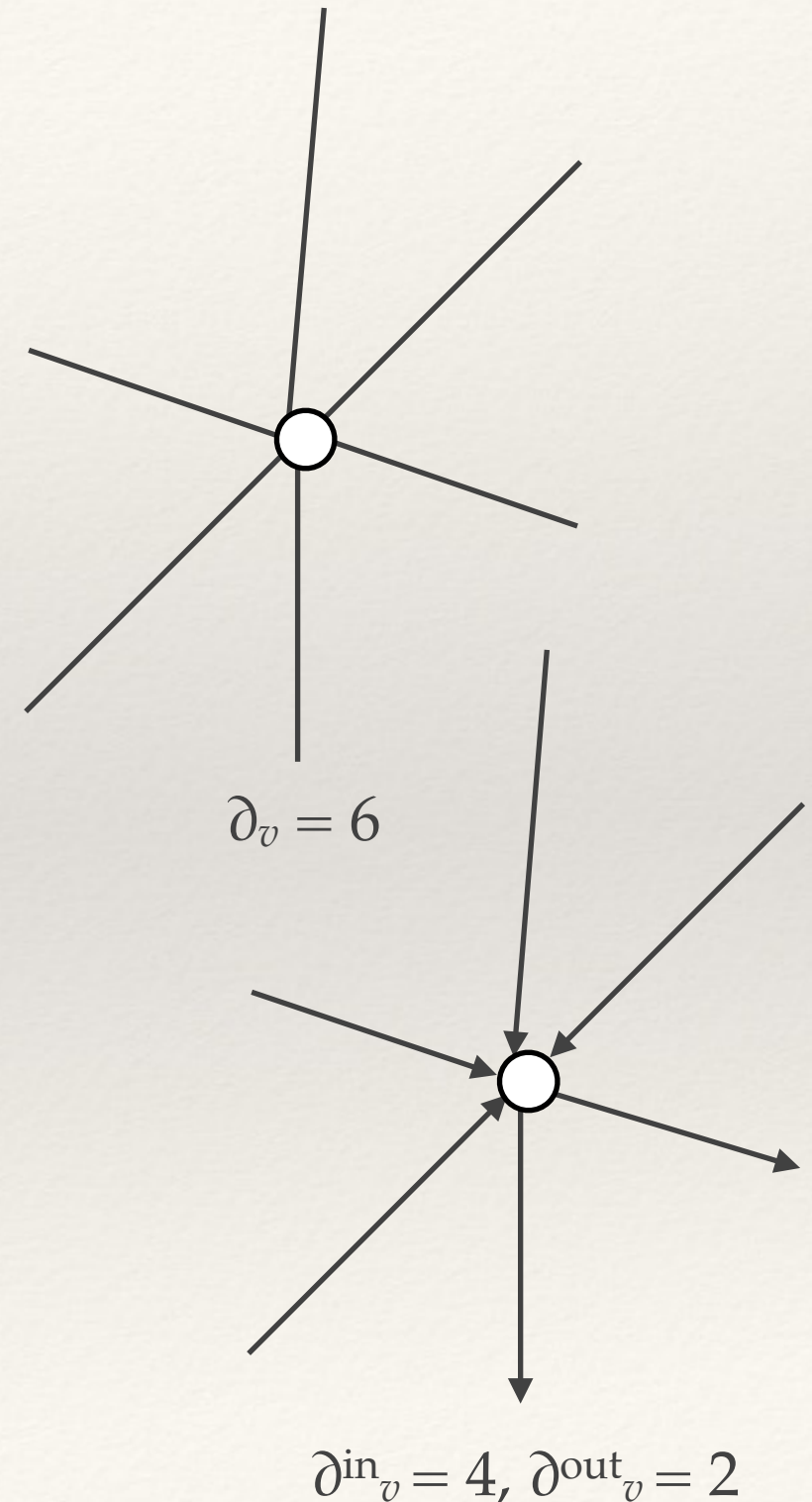
- ❖ La *excentricidad*  $ec(v)$  del nodo  $v$  es la máxima distancia  $d(v,x)$ , para todo nodo  $x \neq v$ .
- ❖ El *radio* de una gráfica  $rad_G$  es la mínima excentricidad entre sus nodos.
- ❖ La *distancia o longitud promedio* se define como  

$$\langle l \rangle = \text{Sum}_{a,b} \{d(a,b)\} [n(n-1)]^{-1}$$
- ❖ Si  $G'$  es la componente más grande y  $|G'| = \Omega(n)$ , a  $G'$  se le llama *componente gigante*.

❖ demostrar  $rad_G \leq d_G \leq 2rad_G$

# Medidas de centralidad

- ❖ El *grado*  $\partial_v$  del nodo  $v$ , es el número de aristas en las que participa.  
 $\partial_v = |\{v \in e : e \in E\}|$
- ❖ Si  $G$  es dirigida, se distinguen los grados *exterior*  $\partial_v^{\text{out}}$  e *interior*  $\partial_v^{\text{in}}$ , como el número de aristas que tienen a  $v$  como su primer o segundo elemento, respectivamente. Es decir:  
 $\partial_v^{\text{in}} = |\{(a, v) \in E\}|$  y  $\partial_v^{\text{out}} = |\{(v, a) \in E\}|$
- ❖ Se observa que:  $\partial_v = \partial_v^{\text{in}} + \partial_v^{\text{out}}$





- ❖ La *centralidad de cercanía* (*closeness*) es el promedio de las distancias de un nodo a los demás:

$$g_v = [Sum_{a \neq v} \{d(a, v)\}]^{-1}$$

- ❖ Es más grande cuanto más distancias más cortas tenga con los demás nodos.

- ❖ La *centralidad de intermediación* (*betweenness*) da el promedio de rutas más cortas que pasan por un nodo dado: Si  $s_{a,b}$  es el número de rutas más cortas de  $a$  a  $b$  y  $s_{a,b}(v)$  son aquellas que además pasan por  $v$ , entonces:

$$b_v = Sum_{a \neq v \neq b} \{s_{a,b}(v)\} / Sum_{a \neq b} \{s_{a,b}\}$$

---

# Agrupamiento

---

- ❖ Una *gráfica completa* es aquella en la que hay una arista entre cada par de nodos (par ordenado de nodos, en caso de ser dirigida)
- ❖ Un *clan* (*clique*) en una gráfica no dirigida  $G$ , es una subgráfica completa de  $G$ . Es decir, un conjunto de sus nodos que están todos conectados entre sí.
- ❖ Las redes naturales tienden a formar clanes.
- ❖ El *coeficiente de agrupamiento*, mide el porcentaje de los vecinos de  $v$  que forman clanes con él, es decir, triángulos. Dicho de otra forma, es el porcentaje de los vecinos de  $v$  que son vecinos entre sí:  
$$C(v) = e_v[\partial_v(\partial_v-1)/2]^{-1}, e_v = \text{número de vecinos de } v \text{ conectados entre sí}$$
- ❖ El *coeficiente de agrupamiento promedio* se define como  $\langle C \rangle = \text{Sum}_v\{C(v)\}n^{-1}$ 
  - ❖ ¿Cuántas aristas tiene una gráfica completa?
  - ❖ ¿Qué valores pueden tomar: grado, centralidades de cercanía y de intermediación y el coeficiente de agrupamiento (promedio)? Dé ejemplos.