

Sistemas Complejos 2

Redes complejas:

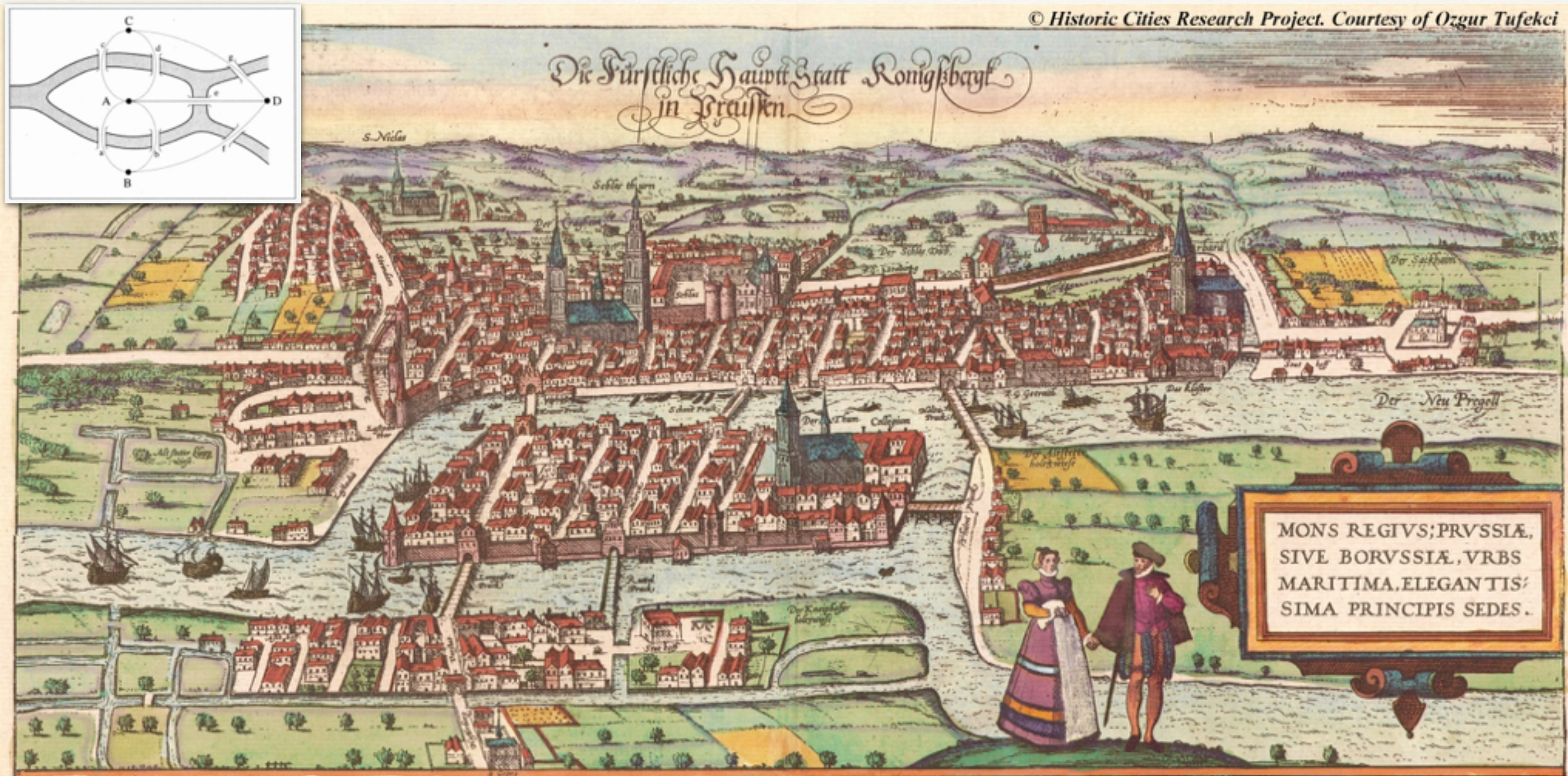
1. Elementos de Teoría de Gráficas

Dr. Felipe Contreras / UACM

Gráficas

- ❖ Se estudian desde el s.XVIII, con Euler y los puentes de Königsberg
- ❖ Es un campo muy activo de las matemáticas puras
- ❖ También es un área muy aplicada. Su aplicación a los sistemas complejos se le llama *redes*
- ❖ Aquí se han usado de diversas maneras, en especial, estadísticas. Aunque como herramienta, no la restringiremos a eso.

Königsberg y sus puentes

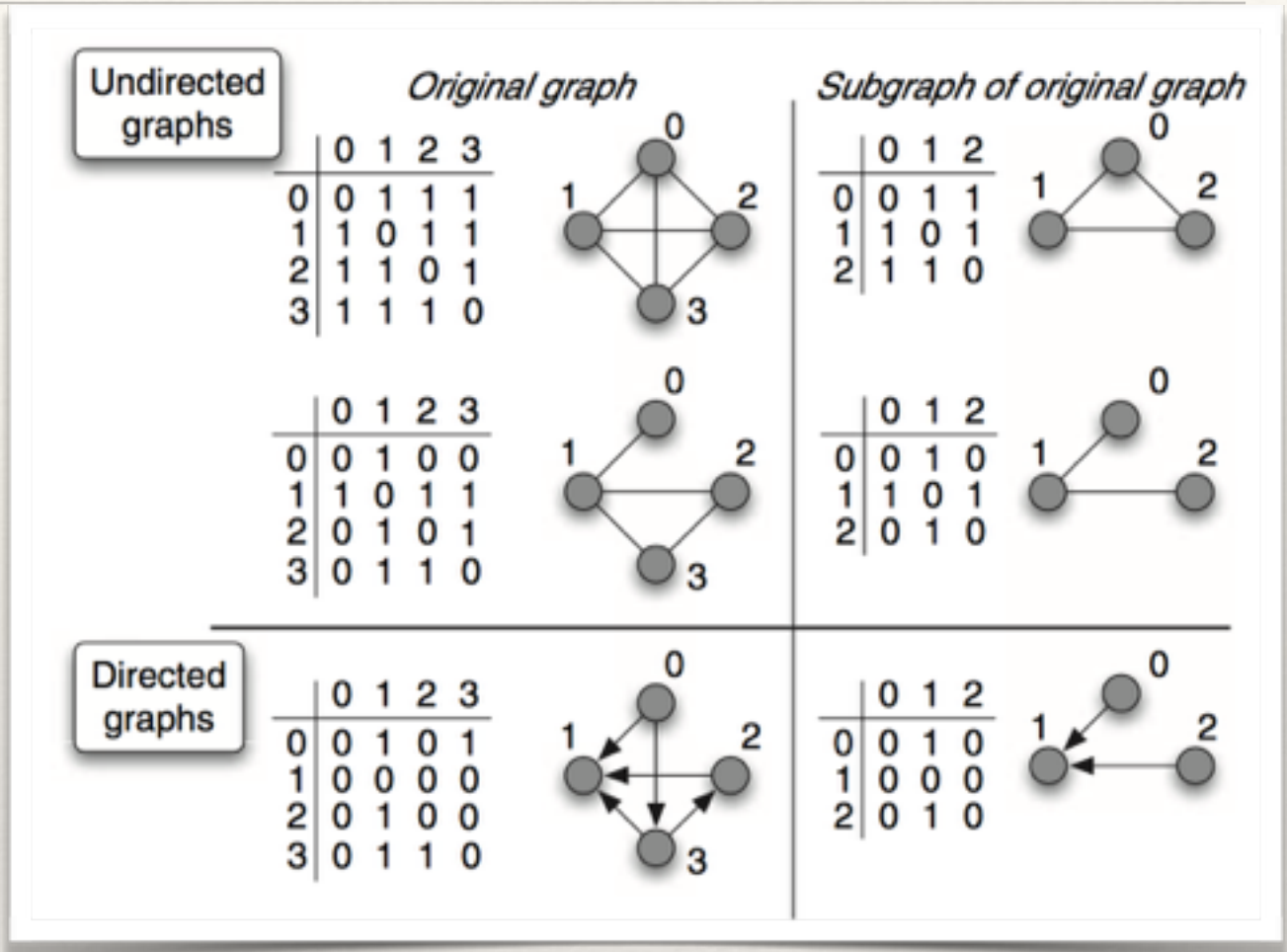


Problema: recorrer los 7 puentes exactamente una vez

Definiciones

- ❖ Una gráfica $G=(V, E)$ consiste del conjunto V de n elementos llamados *nodos* (o *vértices*), y el conjunto E de m parejas de nodos, llamadas *aristas*.
- ❖ Si la pareja (v_1, v_2) es un elemento de E , entonces los nodos v_1 y v_2 se dice que son *adyacentes* o *vecinos* uno del otro.
- ❖ Si nos interesa que $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$, entonces se dice que las aristas y G son *dirigidas*. A G también se le llama *digráfica*.
- ❖ G se puede representar como una *matriz de adyacencia* donde las entradas son

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si existe la arista } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



- ❖ En general (*gráfica simple*), no se permite que v sea vecino de sí mismo ni que entre dos nodos haya mas de una arista
- ❖ ¿Hasta cuántas aristas *no dirigidas* puede tener una gráfica con n nodos?
- ❖ En España (y algunos mexicanos profanos) a las gráficas le llaman *grafos*.

- ❖ Una *subgráfica* $G'=(V', E')$ de G es tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ y si (v_1', v_2') es arista de G' , entonces v_1', v_2' son nodos de V'
- ❖ Si el número de aristas se parece al número de vértices a la alfa, se escribe: $|E| \sim |V|^\alpha$, entonces G se llama *rala* o *escasa* si $\alpha < 2$, y se llama *densa* si $|E| \sim |V|^2$.
- ❖ G también se puede representar como *lista de adyacencia*. Es decir, como la lista donde el elemento l_i es a su vez la lista de nodos $[v_1, v_2, \dots]$ adyacentes a v_i .
- ❖ Si G es rala, o sea m es pequeña, comparada con el tamaño de su matriz de adyacencia, que es n^2 ; dicha matriz consiste en su mayoría de ceros; por lo que computacionalmente es más conveniente representar G como lista de adyacencia.
 - ❖ ¿de qué tamaño es una lista de adyacencia?

- ❖ Una *cadena* entre dos nodos a y b de G , es una subgráfica, cuyos nodos son $V' = \{a_i, i=1, 2, \dots, r+1 : a_1 = a, a_{r+1} = b\}$ y cuyas aristas son $E' = \{(a_i, a_{i+1}) \in E, i=1, 2, \dots, r\}$. Al valor r se le llama la *longitud* de la cadena. (nota: al ser un conjunto, V' no tiene elementos repetidos)
- ❖ Se dice que G es *conexa* si para todo par de nodos, se puede encontrar una cadena entre ellos, de lo contrario se dice que G es *disconexa*.
- ❖ Un subconjunto S' del conjunto S es *maximal* bajo la propiedad p , si cumple p , pero $S' \cup \{e\}$ no cumple p , para cualquier $e \in S$.
- ❖ Una *componente conexa* $G' = (V', E')$ es una subgráfica de G , si V' y E' son maximales bajo la propiedad de que G' sea conexa.
- ❖ Así la *descomposición conexa* de G es la lista que consiste de sus componentes conexas.

❖ ¿Cuál es la componente más grande de una gráfica conexa?

- ❖ De entre las cadenas entre los nodos a y b , la de menor longitud, aunque puedan haber varias, se llama *la ruta más corta*, y su longitud es llamada la distancia de a a b . Se escribe $d(a,b)$.
- ❖ Si a y b están en diferentes componentes conexas, se define $d(a,b)=\infty$.
- ❖ A la máxima distancia d_G entre cuales quiera dos nodos de una gráfica G se le llama *diámetro*.
- ❖ ¿Cuánto es el diámetro de una gráfica desconexa?
- ❖ $d(a,b)=d(b,a)$ si la gráfica es no dirigida. ¿Puedes dar un contra-ejemplo para cuando la gráfica es dirigida? ¿y si además es conexa?

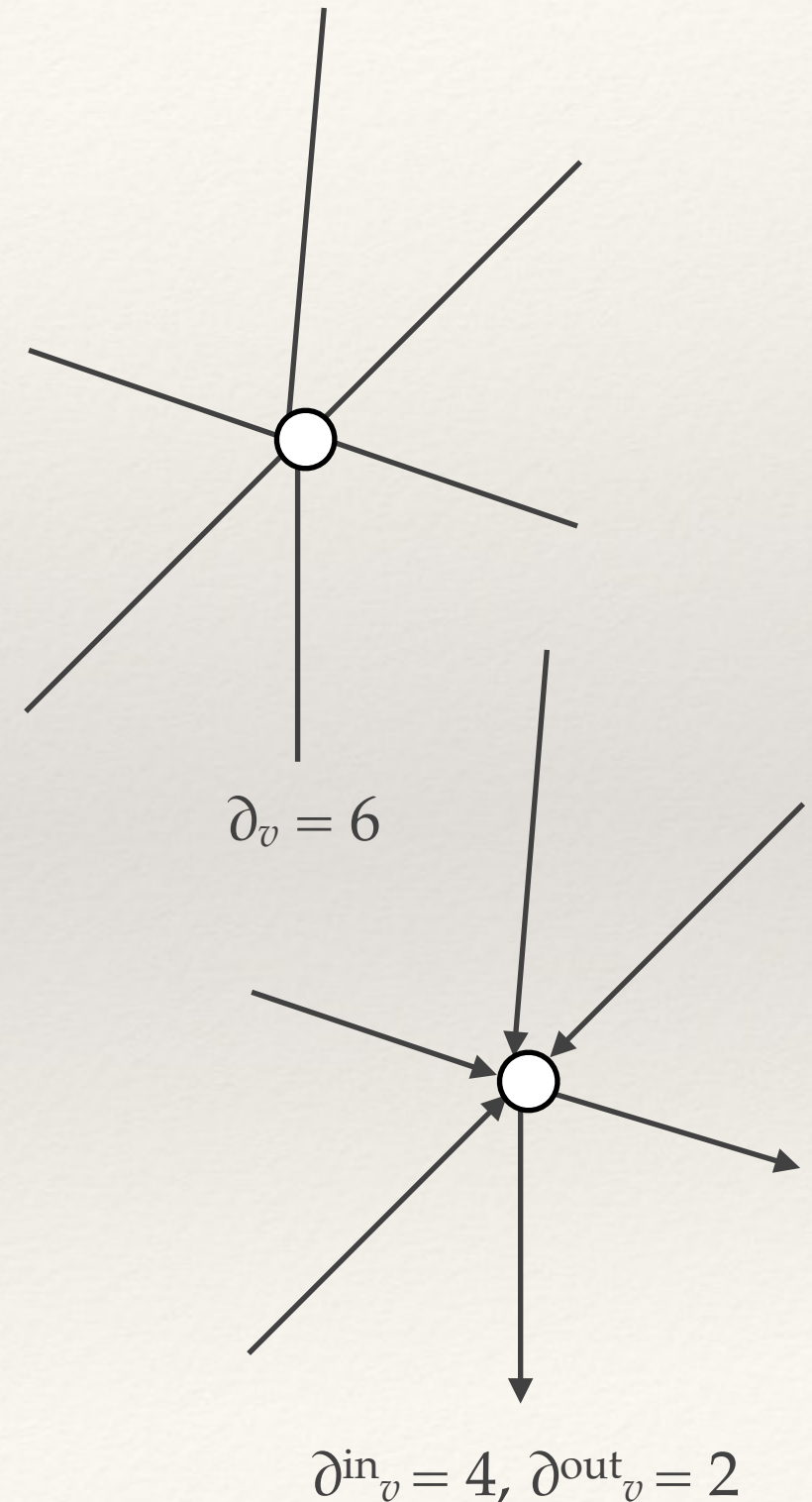
- ❖ La *excentricidad* $ec(v)$ del nodo v es la máxima distancia $d(v,x)$, para todo nodo $x \neq v$.
- ❖ El *radio* de una gráfica rad_G es la mínima excentricidad entre sus nodos.
- ❖ La *distancia o longitud promedio* se define como

$$\langle l \rangle = \sum_{a,b} \{d(a,b)\} [n(n-1)]^{-1}$$
- ❖ Si G' es la componente más grande y $|G'| = \Omega(n)$, a G' se le llama *componente gigante*.

❖ demostrar $rad_G \leq d_G \leq 2rad_G$

Medidas de centralidad

- ❖ El *grado* ∂_v del nodo v , es el número de aristas en las que participa.
 $\partial_v = |\{v \in e : e \in E\}|$
- ❖ Si G es dirigida, se distinguen los grados *exterior* ∂_v^{out} e *interior* ∂_v^{in} , como el número de aristas que tienen a v como su primer o segundo elemento, respectivamente. Es decir:
 $\partial_v^{\text{in}} = |\{(a, v) \in E\}|$ y $\partial_v^{\text{out}} = |\{(v, a) \in E\}|$
- ❖ Se observa que: $\partial_v = \partial_v^{\text{in}} + \partial_v^{\text{out}}$



- ❖ La *centralidad de cercanía* (*closeness*) es el promedio de las distancias de un nodo a los demás:

$$g_v = [\sum_{a \neq v} \{d(a, v)\}]^{-1}$$

- ❖ Es más grande cuanto más distancias más cortas tenga con los demás nodos.

- ❖ La *centralidad de intermediación* (*betweenness*) da el promedio de rutas más cortas que pasan por un nodo dado: Si $s_{a,b}$ es el número de rutas más cortas de a a b y $s_{a,b}(v)$ son aquellas que **además** pasan por v , entonces:

$$b_v = \sum_{a \neq v \neq b} \{s_{a,b}(v)\} / \sum_{a \neq b} \{s_{a,b}\}$$

Agrupamiento

- ❖ Una *gráfica completa* es aquella en la que hay una arista entre cada par de nodos (par ordenado de nodos, en caso de ser dirigida)
- ❖ Un *clan* (*clique*) en una gráfica no dirigida G , es una subgráfica completa de G . Es decir, un conjunto de sus nodos que están todos conectados entre sí.
- ❖ Las redes “naturales” tienden a formar clanes.
- ❖ El *coeficiente de agrupamiento*, mide el porcentaje de los vecinos de v que forman clanes con él, es decir, triángulos. Dicho de otra forma, es el porcentaje de los vecinos de v que son vecinos entre sí:
$$C(v) = e_v[\partial_v(\partial_v-1)/2]^{-1}, e_v = \text{número de vecinos de } v \text{ conectados entre sí}$$
- ❖ El *coeficiente de agrupamiento promedio* se define como $\langle C \rangle = \sum_v \{C(v)\} n^{-1}$
 - ❖ ¿Cuántas aristas tiene una gráfica completa?
 - ❖ ¿Qué valores pueden tomar: grado, centralidades de cercanía y de intermediación y el coeficiente de agrupamiento (promedio)? Dé ejemplos.