Sistemas Complejos 2

Redes complejas: 1. Elementos de Teoría de Gráficas

Dr. Felipe Contreras / UACM

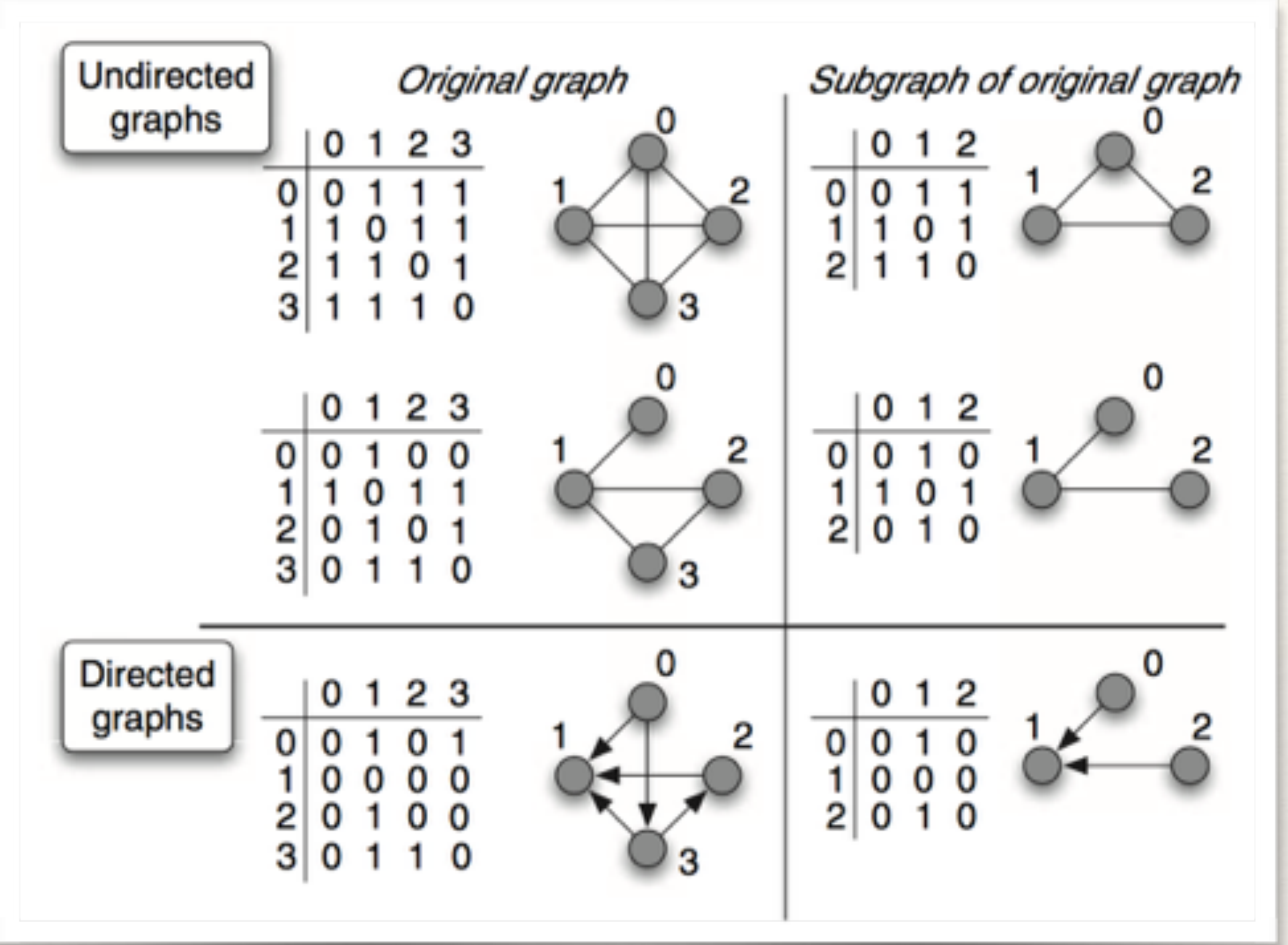
Gráficas

- Se estudian desde el s.XVIII, con Euler y los puentes de Königsberg
- Es un campo muy activo de las matemáticas puras
- También es un área muy aplicada. Su aplicación a los sistemas complejos se le llama *redes*
- Aquí se han usado de diversas maneras, en especial, estadísticas. Aunque como herramienta, no la restringiremos a eso.

Definiciones

- Una *gráfica* $G=(V, E)$ consiste del conjunto V de n elementos llamados *nodos*, y el conjunto E de m parejas de nodos, llamadas *aristas*.
- Si la pareja (v_1, v_2) es un elemento de E, entonces los nodos v_1 y v_2 se dice que son *adyacentes* o *vecinos* uno del otro.
- Si nos interesa que $(v_1,v_2) \neq (v_2,v_1)$, entonces se dice que las aristas y G son *dirigidas*.
- G se puede representar como una *matriz de adyacencia* donde las entradas son

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si existe la arista } (v_i,v_j) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



- En general (*gráfica simple*), no se permite que v sea vecino de sí mismo
- ¿Hasta cuántas aristas *no dirigidas* puede tener una gráfica con n nodos?

- Una *subgráfica* $G'=(V', E')$ de G es tal que $V' \subseteq V$ y $E'=\{(v_1', v_2') : v_1', v_2'$ son nodos de $V'\}$
- Si el número de aristas $|E| \sim |V|^{\alpha}$, entonces G se llama *rala* o *escasa* si $\alpha < 1$, y se llama *densa* si $\alpha = 1$
- G también se puede representar como *lista de adyacencia*. Es decir, como la lista donde el elemento l_i es a su vez la lista de nodos $[v_1, v_2, \ldots]$ adyacentes a v_i.
- Si G es rala, o sea m es pequeña, comparada con el tamaño de su matriz de adyacencia, que es n^2; dicha matriz consiste en su mayoría de ceros; por lo que computacionalmente es más conveniente representar G como lista de adyacencia.
    - ¿de qué tamaño es una lista de adyacencia?

- Una *cadena* entre dos nodos *a* y *b* de G, es una subgráfica, cuyo conjunto de aristas es $E' = \{(a_i, a_{i+1}) \in E\ i=1, 2, \ldots, r : a_1 = a, a_{r+1} = b$ y $a_i \neq a_j$, para toda $j \neq i\}$. Al valor r se le llama la *longitud* de la cadena.
- Se dice que G es *conexa* si para todo par de nodos, se puede encontrar una cadena entre ellos, de lo contrario se dice que G es *disconexa*.
- Un subconjunto S' del conjunto S es *maximal* bajo p, si cumple la propiedad p pero $S' \cup \{e\}$ no cumple la propiedad p, para toda $e \in S$.
- Una *componente conexa* $G' = (V', E')$ es una subgráfica de G, si V' y E' son maximales bajo la propiedad de que G' sea conexa.
- Así G se puede descomponer en un número finito de componentes conexas.

  - ¿Cuál es la componente más grande de una gráfica conexa?

- De entre las cadenas entre los nodos *a* y *b*, la de menor longitud, aunque puedan haber varias, se llama *la ruta mas corta*, y su longitud es llamada la distancia de *a* a *b*. Se escribe $d(a,b)$.
- Se define $d(a,b)=\infty$ si *a* y *b* están en diferentes componentes conexas.
- A la máxima distancia d_G entre cuales quiera dos nodos de una gráfica *G* se le llama *diámetro*.
  - ¿Cuánto es el diámetro de una gráfica disconexa?
  - $d(a,b)=d(b,a)$ si la gráfica es no dirigida. ¿Puedes dar un contra-ejemplo para cuando la gráfica es dirigida? ¿y conexa?

- La *excentricidad* $ec(v)$ del nodo v es la máxima distancia $d(v,x)$, para todo nodo $x \neq v$.
- El *radio* de una gráfica rad_G es la mínima excentricidad entre sus nodos.
- La *distancia o longitud promedio se define como* $\langle l \rangle = [n(n-1)]^{-1} Sum_{a,b}(d(a,b))$
- Si G' es la componente más grande y $|G'| = \Omega(n)$, a G' se le llama *componente gigante*.

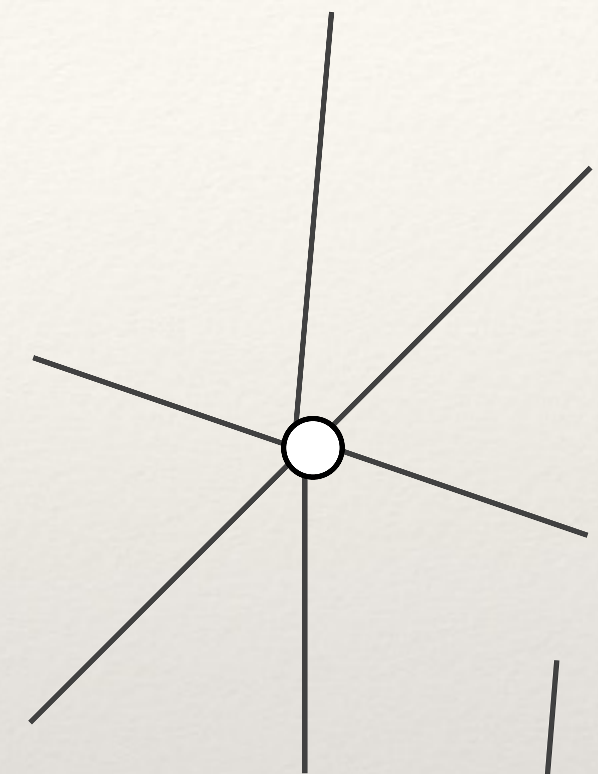
  - demostrar $\text{rad}_G \leq d_G \leq 2\text{rad}_G$

Medidas de centralidad

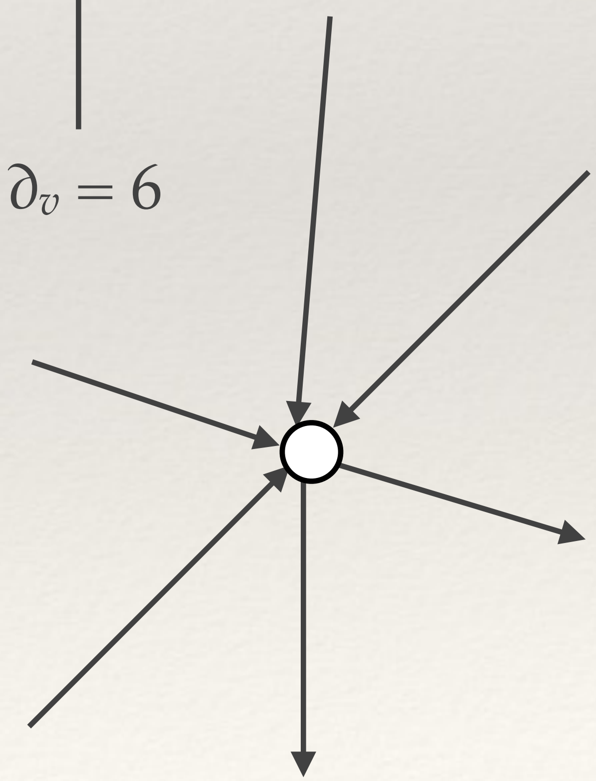
- El *grado* ∂_v del nodo v, es el número de aristas en las que participa. $\partial_v = |\{v \in e : e \in E\}|$

- Si G es dirigida, se distinguen los grados *exterior* ∂^{out}_v e *interior* ∂^{in}_v, como el número de aristas que tienen a v como su primer o segundo elemento, respectivamente. Es decir: $\partial^{in}_v = |\{(a,v) \in E\}|$ y $\partial^{out}_v = |\{(v,a) \in E\}|$

- Se tiene que: $\partial_v = \partial^{in}_v + \partial^{out}_v$



$\partial_v = 6$



$\partial^{in}_v = 4$, $\partial^{out}_v = 2$

- La *centralidad de cercanía* (*closeness*) es el promedio de las distancias de un nodo a los demás:
$g_v = [Sum_{a \neq v} d(a,v)]^{-1}$
- Es más grande cuanto más distancias más cortas tenga con los demás nodos.
- La *centralidad de intermediación* (*betweenness*) dá el promedio de rutas más cortas que pasan por un nodo dado: Si $s_{a,b}$ es el número de rutas más cortas de *a* a *b* y $s_{a,b}(v)$ son aquellas que además pasan por *v*, entonces:
$b_v = Sum(s_{a,b}(v))/Sum(s_{a,b}),\ a \neq v \neq b$

Agrupamiento