



Clase 8: Distribución Exponencial. Relación entre las distribuciones Exponencial y Poisson. Distribución Lognormal

Profesora: Olga Alexandra Bustos Giraldo

Escuela de Estadística

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

oabustos@unal.edu.co



Distribución Continua: Exponencial

Sea X una v.a continua. Diremos que X tiene una distribución *Exponencial*, con parámetro $\lambda > 0$, si la f.d.p. para X es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

Por notación se escribe $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.



Distribución Exponencial

Si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, entonces:

- La esperanza y la varianza de X están dadas por:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{y} \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- La f.d.a. de X es:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$



Distribución Exponencial

La distribución exponencial se emplea con bastante frecuencia con objeto de modelar problemas de tiempo-falla y como modelo en problemas de líneas de espera. La familia de distribuciones exponenciales son muy utilizadas en disciplinas tales como Ingeniería y Ciencias.



Ejemplo Exponencial

Sea X el tiempo entre las detecciones de una partícula rara por un contador Geiger. Supóngase que este tiempo tiene una distribución exponencial con un tiempo medio de 1.4 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de detectar una partícula durante el lapso de 30 segundos desde que se enciende el contador?

Solución

X = Tiempo entre detecciones en minutos. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

Como $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 1.4$, entonces $\lambda = \frac{1}{1.4}$. De esta manera la f.d.p. de X está dada por: $f(x) = \frac{1}{1.4}e^{-(x/1.4)}$, $x \geq 0$.

Se pide calcular la probabilidad durante el lapso de 30 segundos (0.5 minutos, se debe tener las mismas unidades de tiempo de λ desde que se enciende el contador.

$$P(X < 0.5) = \int_0^{0.5} \frac{1}{1.4} e^{-(x/1.4)} dx = 1 - e^{-(0.5/1.4)} = 0.300327 .$$

O usando la f.d.a. de X :

$$P(X < 0.5) = P(X \leq 0.5) = F(0.5) = 1 - e^{-(0.5/1.4)} = 0.300327 .$$

En R: `pexp(0.5,1/1.4)`



Ejemplo Exponencial

Suponga que transcurren 3 minutos sin que el contador detecte partícula alguna. ¿Cuál es la probabilidad de detectar una partícula en los 30 segundos siguientes?

$$\begin{aligned}P(X < 3.5 | X > 3.0) &= \frac{P(3 < X < 3.5)}{P(X > 3)} \\&= \frac{(1 - e^{-(3.5/1.4)}) - (1 - e^{-(3/1.4)})}{1 - (1 - e^{-(3/1.4)})} \\&= 1 - \frac{e^{-(3.5/1.4)}}{e^{-(3/1.4)}} \\&= 1 - e^{-(0.5/1.4)} = 0.300327 = F(0.5).\end{aligned}$$



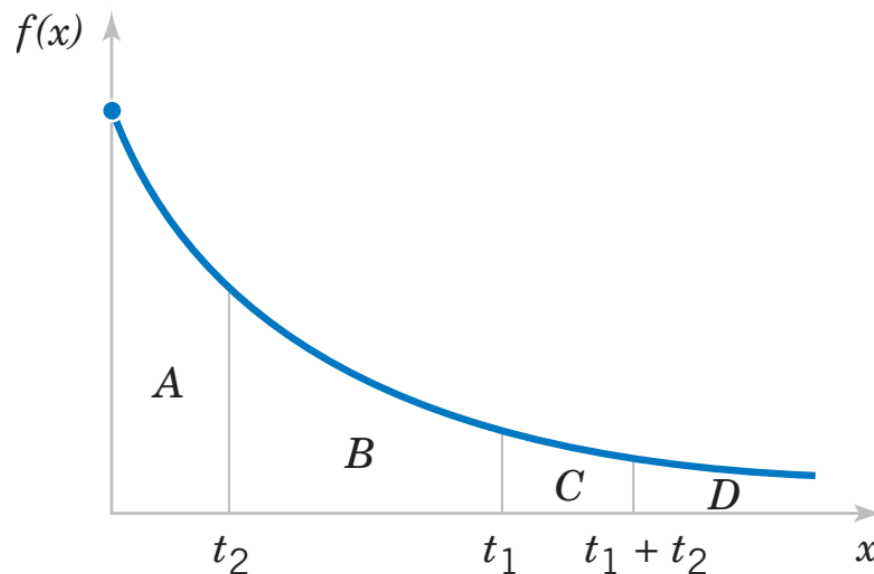
Distribución Exponencial

Propiedad de pérdida o carencia de memoria

Suponga que X es una variable aleatoria tal que $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Sean t_1 y t_2 reales positivos. Entonces:

$$P(X \leq t_1 + t_2 | X \geq t_1) = P(X \leq t_2)$$

$$P(X \geq t_1 + t_2 | X \geq t_1) = P(X \geq t_2)$$





Distribución Exponencial

Relación entre la Distribución Exponencial y el proceso de Poisson

Suponga que el número de ocurrencias de un evento en un intervalo de tiempo de longitud t , tiene una distribución de Poisson con parámetro α y que el número de ocurrencias en intervalos que no se traslapan son independientes entre sí. Entonces, la distribución del tiempo transcurrido entre la presentación de 2 ocurrencias del evento sucesivos es exponencial con parámetro $\lambda = \alpha$. en otras palabras, Suponga que $X \sim P(\lambda)$, donde λ es el número promedio de ocurrencias por unidad de tiempo. Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo entre ocurrencias de este proceso Poisson, entonces $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.



Ejemplo Exponencial

El tiempo entre arribos (llegadas) de los taxis a un cruce muy concurrido tiene una distribución exponencial con media 10 minutos (entre llegadas).

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que esté en el cruce tenga que esperar mas de una hora por un taxi?
- b) Suponga que una persona ya esperó una hora, ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un taxi en los siguientes 10 minutos?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen 2 taxis en una hora?



Ejemplo Exponencial

Solución

- a) X : el tiempo transcurrido en minutos entre la llegada de los taxis. Así, $X \sim \text{Exp}(0.1)$

$$P(X > 60) = 1 - \int_0^{60} 0.1 e^{-0.1x} dx = 1 - (-e^{-0.1x} \Big|_0^{60})$$

$$P(X > 60) = 1 - (1 - e^{-6}) = e^{-6} \approx 0.0025 .$$

b) $P(X \leq 70 | X \geq 60) = P(X \leq 10) = \int_0^{10} 0.1 e^{-0.1x} dx$

$$P(X \leq 70 | X \geq 60) = (-e^{-0.1x} \Big|_0^{10}) = 1 - e^{-1} = 1 - 0.3679 = 0.6321 .$$

- c) Sea Y : el # de taxis que llegan en 1 hora. $Y \sim P(\lambda)$. Si en promedio por cada 10 minutos llega 1 taxi en 60 minutos cuantos llegan

$$\begin{array}{ll} 10 \text{ minutos} & \longrightarrow 1 \\ 60 \text{ minutos} & \longrightarrow \lambda = ? \end{array} \Rightarrow \lambda = 6 \quad P(Y = 2) = \frac{e^{-6} 6^2}{2!} \approx 0.04461$$



Ejemplo Exponencial

El tiempo que transcurre entre las llamadas que recibe una oficina tiene una distribución exponencial con una media de 10 minutos.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de tres llamadas en un lapso de media hora?
- b) Determine el valor de x de modo tal que la probabilidad de no recibir llamada alguna en el intervalo $[0, x]$ horas sea 0.01



Ejemplo Exponencial

Solución

a) Sea X : Tiempo entre llamadas. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $E[X] = 10$ minutos.

Sea Y : número de llamadas que llegan en 30 minutos. $y = 0, 1, 2, \dots$. Así, $Y \sim P(\lambda^*)$, con λ^* : número promedio de llamadas en 30 minutos. Como el tiempo promedio para recibir una llamada es 10 min, así:

$$\begin{array}{ll} 10 \text{ minuto} & \longrightarrow 1 \\ 30 \text{ minutos} & \longrightarrow \lambda^* = ? \Rightarrow \lambda^* = 3 \end{array}$$

Es decir, $Y \sim P(3)$. Luego,

$$P(Y > 3) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - \sum_{y=0}^3 \frac{e^{-3} 3^y}{y!} = 1 - 0.647 = 0.353.$$



Ejemplo Exponencial

b) Sea Y : número de llamadas que llegan en x horas. $Y \sim P(\lambda_2)$.

$$\begin{array}{ll} 10 \text{ minuto} & \longrightarrow 1 \\ 60x \text{ minutos} & \longrightarrow \lambda_2 = ? \Rightarrow \lambda_2 = 6x \end{array} \cdot$$

Así, $Y \sim P(6x)$. Finalmente

$$P(Y = 0) = 0.01 \Leftrightarrow \frac{(6x)^0 e^{-6x}}{0!} = 0.01$$

$$\Leftrightarrow -6x = \ln(0.01)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(0.01)}{-6} = 0.7675 ,$$

aproximadamente 46.05 min.



Ejemplo Exponencial

El tiempo de duración de un chip para computadora es una v.a exponencial con media de 20000 horas. Dado que el chip ya funcionó adecuadamente durante 15000 horas ¿Cuál es la probabilidad de que dure mas de 1000 horas mas?

Solución

Sea X : Tiempo de duración del chip.

Se sabe que $X \sim \text{Exp}(\frac{1}{20000})$. Entonces

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20000} e^{-\frac{x}{20000}} & , x \geq 0 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} .$$



Ejemplo Exponencial

Se pide,

$$P(X > 15000 + 1000 | X > 15000) .$$

Como una v.a exponencial tiene la propiedad de falta de memoria, la probabilidad pedida es equivalente a calcular,

$$\begin{aligned} P(X > 1000) &= \int_{1000}^{+\infty} \frac{1}{20000} e^{-\frac{x}{20000}} dx \\ &= 0.9512 \end{aligned}$$



Distribución continua: Lognormal

Sea X una v.a tal que el $\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces decimos que $X \sim \text{lognormal}(\mu^*, \sigma^{2*})$ la f.d.p. de X es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x \sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^2}} ; \quad x > 0 .$$

El valor esperado y la varianza de X son:

$$E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{y} \quad \text{Var}[X] = e^{2\mu + \sigma^2} * (e^{\sigma^2} - 1)$$

μ y σ^2 **NO** son la media y varianza de X , son la media y varianza de $\ln(X)$.



Distribución Lognormal

El cálculo de probabilidades con una f.d.p. Lognormal es algo complicado. Pero debido al hecho de que el logaritmo natural de un v.a Lognormal es una v.a normal, el cálculo de probabilidades lo realizaremos así, por ejemplo:

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P(\ln X \leq \ln a) = P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln a - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{\ln a - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\ln a - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Así, la f.d.a. de X es de la forma

$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right); \quad \forall x > 0.$$



Ejemplo Lognormal

Un artículo científico sugiere que la concentración de SO_2 sobre cierto bosque tiene una distribución Lognormal con $\mu = 1.9$ y $\sigma = 0.9$.

- a) Si X : es la concentración de SO_2 en este bosque. Calcule la concentración media de SO_2 y la desviación estándar para X ?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración de SO_2 sea a lo sumo 10? ¿Esté entre 5 y 10?
- c) Calcule la mediana para X .



Ejemplo Lognormal

Solución

a)

$$E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = e^{1.9 + \frac{0.9^2}{2}} = e^{2.305} = 10.024 .$$

$$Var[X] = e^{2\mu + \sigma^2} * (e^{\sigma^2} - 1) = e^{2(1.9) + 0.9^2} * (e^{0.9^2} - 1) = 125.395 .$$

$$\sigma_x = 11.19$$

b)

$$P(X \leq 10) = P(\ln X \leq \ln 10) = P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln 10 - 1.9}{0.9}\right) = P(Z \leq 0.45) = 0.6736$$

En R: pnorm(0.45). Estandarizando
plnorm(10,1.9,0.9). Sin estandarizar



Ejemplo Lognormal

$$\begin{aligned} P(5 < X < 10) &= P\left(\frac{\ln 5 - 1.9}{0.9} \leq Z \leq \frac{\ln 10 - 1.9}{0.9}\right) = P(-0.32 \leq Z \leq 0.45) \\ &= \Phi(0.45) - \Phi(-0.32) = 0.2991 \end{aligned}$$

En R: `pnorm(0.45)-pnorm(-0.32)`. Estandarizando.

`plnorm(10,1.9,0.9)-plnorm(5,1.9,0.9)`. Sin estandarizar.



Ejemplo Lognormal

c) Hallemos el valor de \tilde{x} (mediana), tal que $P(X \leq \tilde{x}) = 0.5$.

$$P(X \leq \tilde{x}) = 0.5 \Leftrightarrow P(\ln X \leq \ln \tilde{x}) = 0.5$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln \tilde{x} - 1.9}{0.9}\right) = 0.5 \Leftrightarrow P(Z \leq z) = 0.5,$$

donde $z = \frac{\ln \tilde{x} - 1.9}{0.9}$. Así, $z = 0$, con lo que se obtiene $\ln(\tilde{x}) = 1.9$, lo que equivale a que $\tilde{x} = e^{1.9} = 6.686$.

En R: `qlnorm(0.5,1.9,0.9)`. Sin estandarizar.



Ejercicios propuestos

1. El tiempo que transcurre entre las llamadas a una empresa de artículos para plomería tiene una distribución exponencial con un tiempo promedio entre llamadas de 15 minutos.
 - a) ¿cuál es la probabilidad de que no haya llamadas en un lapso de 30 minutos?
 - b) ¿cuál es la probabilidad de recibir al menos una llamada en un intervalo de 10 minutos?
 - c) ¿cuál es la probabilidad de recibir la primera llamada entre cinco y 10 minutos después de haber abierto la empresa?
 - d) Calcule la dimensión de un intervalo de tiempo, de modo tal que la probabilidad de recibir al menos una llamada en ese lapso sea 0.90.



Ejercicios propuestos

2. El tiempo de vida de los reguladores de voltaje de los automóviles tiene una distribución exponencial con un tiempo de vida medio de seis años. Una persona compra un automóvil que tiene una antigüedad de seis años, con un regulador en funcionamiento, y planea tenerlo por espacio de seis años.

¿cuál es la probabilidad de que el regulador de voltaje falle en ese lapso de seis años?



Ejercicios propuestos

3. El tiempo entre llegadas de mensajes electrónicos a una computadora tiene una distribución exponencial con media de dos horas.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la computadora no reciba mensajes en un periodo de dos horas?
 - b) Si la computadora no ha recibido ningún mensaje en las últimas cuatro horas, ¿cuál es la probabilidad de recibir un mensaje en las dos horas siguientes?



Ejercicios propuestos

4. Si la variable aleatoria X tiene una distribución exponencial con media θ , calcule lo siguiente:

a) $P(X > \theta)$

b) $P(X > 2\theta)$

c) $P(X > 3\theta)$