Clase 6: Distribución Poisson. Aproximación Poisson de la Binomial. Distribución Uniforme

Profesora: Olga Alexandra Bustos Giraldo

Escuela de Estadística

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

oabustos@unal.edu.co

Experimento Poisson

Considere los siguientes experimentos o eventos que cumplen con las características de un proceso Poisson.

1. El número de errores tipográficos por página.
2. El número de llamadas telefónicas a una central por minuto.
3. El número de accidentes en un cruce por hora.
4. El número de huecos en una carretera por kilométro.

Experimento Poisson

Proceso de Poisson:

El experimento aleatorio consiste en contar el número de veces que ocurre cierto evento de interés en un intervalo de tiempo o espacio (o en una región específica), el cual es independiente del número de ocurrencias del evento en cualquier otro intervalo o región disjunto.

Distribución Discreta Poisson

Sea X una variable aleatoria que representa el número de ocurrencias de un evento que se presentan en una unidad de tiempo o región. Se dice entonces que la variable aleatoria X tiene una distribución de Poisson, se escribe $X \sim P(\lambda)$, con función masa de probabilidad, $f.m.p$:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots; \ \lambda > 0$$

El parámetro de la distribución Poisson es λ, que corresponde al número promedio de ocurrencias del evento aleatorio por unidad de tiempo o espacio.

Distribución Poisson

Si $X \sim P(\lambda)$, entonces:

$$E[X] = \lambda \qquad \text{y} \qquad V[X] = \lambda\,.$$

Teorema de aproximación de la Binomial a la Poisson

Sea $X \sim bin(n, p)$, con n grande y p pequeño, entonces

$X \sim P(\lambda)$, donde $\lambda = n\,p$.

En la práctica se necesita que: $n \geq 100,\ p \leq 0.01 \quad y \quad np \leq 20$.

Ejemplo Poisson

Suponga que a una central telefónica llegan en promedio 10 llamadas por minuto.

a) ¿Cuál es la probabilidad que en el siguiente minuto lleguen al menos 2 llamadas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente minuto lleguen exactamente 15 llamadas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de tener que esperar más de un minuto para la siguiente llamada?

Ejemplo Poisson

Solución

Sea X: # llamadas que llegan a la central por minuto.

Se tiene que $X \sim P(10)$. Con $f.m.p$:

$$p(x) = \frac{e^{-10}10^x}{x!} \; ; \quad x = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots .$$

a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - p(0) - p(1) = 0.9995$.

En R: 1-ppois(1,10)

b) $P(X = 15) = p(15) = \dfrac{e^{-10}10^{15}}{15!} = 0.034718$.

En R: dpois(15,10)

c) $P(X=0)=p(0)=e^{-10}=0.0000454$. Probabilidad de que no hayan llamadas y se tenga que esperar mas de un minuto.

En R: dpois(0,10)

Ejemplo Poisson

Estudios recientes han mostrado que la probabilidad de morir a causa de cierto medicamento contra la gripe es 0.00002. Si se administra dicho medicamento a 100000 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que no más (como máximo) de dos personas mueran?

Solución

Sea X: # de personas que mueren a causa del medicamento de las 100000.
$X \sim bin(100000\ ,\ 0.00002)$. Se pide calcular $P(X \leq 2)$.
Usando la distribución binomial se tiene que:

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{100000}{x} 0.00002^{x}\,(0.99998)^{100000-x} = 0.676676\ .$$

Ejemplo Poisson

Como $n = 100000 \geq 100$, $p = 0.00002 < 0.01$ y $np = 2 \leq 20$, entonces

$X \approx P(\lambda)$ con $\lambda = np = 2 \quad \Rightarrow$

$$P(X \leq 2) \approx \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-2}\, 2^{x}}{x!} = \frac{5}{e^{2}} = 0.67668\,.$$

En R: ppois(2,2)

La aproximación es excelente, se tiene un error inferior a 5×10^{-6}.

Ejemplo Poisson

El número de baches en una sección de una carretera puede modelarse con una Poisson con una media de 2 baches por milla. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya baches que reparar en un tramo de 5 millas?

Solución

Sea X : número de baches en una sección de una milla.
Se tiene que $X \sim P(\lambda = 2)$, para $x = 0, 1, 2, \cdots$
Sea Y : número de baches en una sección de cinco millas. $Y \sim P(\lambda_1)$, para $y = 0, 1, 2, 3, \cdots$

Usando una regla de tres se tiene:

1 milla $\longrightarrow$ $\lambda = 2$
5 millas $\longrightarrow$ $\lambda_1 = ?$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 10$

Así $Y \sim P(10)$.

$$P(Y = 0) = \frac{e^{-10} 10^0}{0!} = 0.0000454 \, .$$

Ejemplo Poisson

Una secretaria comete en promedio 2 errores por página en la transcripción de un manuscrito.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una página determinada cometa menos de tres errores?

b) Si se examinan 15 páginas del manuscrito ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren al menos cinco páginas con menos de tres errores? Asuma independencia.

c) Y ¿Cuál es la probabilidad de que se tengan que examinar exactamente 10 páginas, hasta encontrar la primera con menos de tres errores?

Ejemplo Poisson

Solución

(Preste especial atención a las variables aleatorias)

a) Sea X : número de errores por página.
Entonces $X \sim P(2)$, con $x = 0, 1, 2, \cdots$
$P(X < 3) = P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-2}\, 2^x}{x\,!} = 0.676$.

b) Sea Y : número de páginas con menos de tres errores en las 15 seleccionadas.
Claramente $Y \sim bin(15,\ p)$, con $y = 0, 1, 2, \cdots, 15$. p representa la probabilidad de *éxito*. El éxito es cuando se encuentre una página con menos de tres errores y $p = P(X < 3) = 0.676$.

Ejemplo Poisson

Luego, $Y \sim b(15, 0.676)$. Así, la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 5) &= 1 - P(Y \leq 4) \\ &= 1 - \sum_{y=0}^{4} \binom{15}{y} (0.676)^y (1 - 0.676)^{15-y} = 0.99861 \,. \end{aligned}$$

O sea que es muy posible que se de este evento.

c) Sea Z : número de páginas a revisar hasta encontrar la primera con menos de tres errores. Observe que se tiene la repetición de eventos Bernoulli independientes con probabilidad de éxito $p = 0.676$. La probabilidad pedida es:

$$P(Z = 10) = (1 - 0.676)^9 (0.676) = 0.00000266 \,.$$

Distribución Continua: Uniforme

Una v.a X está distribuida uniformemente sobre el intervalo $(a\ ,\ b)$, la cual denotaremos $X \sim U(a,b)$. La función de densidad de probabilidad, $f.d.p.$ es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; \quad a < x < b \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Distribución Uniforme

Si $X \sim U(a, b)$, entonces

$$E[X] = \frac{a + b}{2} \quad \text{y} \quad V[X] = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

La f.d.a. para X está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < a \\ \dfrac{x - a}{b - a} & ; \quad a \leq x \leq b \\ 1 & ; \quad x > b \end{cases}.$$

Ejemplo Uniforme

La longitud en mm de una bisagra para puertas es una v.a X, distribuida uniformemente en el intervalo $(74.6\,,\,75.4)$.

a) Calcule $P\,(X < 74.8)$

b) ¿Qué proporción de bisagras miden más de $75.0\;mm$?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la bisagra mida menos de $74.9\;mm$?

Solución Ejemplo Uniforme

La f.d.p. para la variable aleatoria X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1.25 & ; \quad 74.6 < x < 75.4 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta manera se tiene que:

a) $P(X < 74.8) = \int_{74.6}^{74.8} 1.25\, dx = 1.25\,(74.8 - 74.6) = 0.25$.

<u>En R:</u> punif(74.8,74.6,75.4)

b) $P(X > 75) = \int_{75}^{75.4} 1.25\, dx = 1.25\,(75.4 - 75) = 0.5$.

<u>En R:</u> punif(75, 74.6,75.4, lower.tail = F)

c) $P(X < 74.9) = 1.25\,(74.9 - 74.6) = 0.375$.

En R: punif(74.9,74.6,75.4)

Ejemplo Uniforme

El tiempo de ida y vuelta de unos camiones que transportan concreto hacia una construcción en una carretera es una v.a distribuida uniformemente en el intervalo de 50 a 70 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración del viaje sea mayor a 65 minutos si cada camión tarda más de 55 minutos en el recorrido?

Solución
Sea X: Duración del viaje (en minutos).
Se sabe que $X \sim U\,(50, 70)$. Se pide hallar:

$$\begin{aligned}
P\,(X \geq 65 \,|\, X \geq 55) &= \frac{P\,(X \geq 65 \wedge X \geq 55)}{P\,(X \geq 55)} \\
&= \frac{P\,(X \geq 65)}{P\,(X \geq 55)} \\
&= \frac{\int_{65}^{70} \left(\frac{1}{20}\right) dx}{\int_{55}^{70} \left(\frac{1}{20}\right) dx} = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Ejercicio Poisson

Ejercicio

El número de componentes que fallan antes de 100 horas de operación es una v.a. Poisson, en promedio fallan 8 componentes en 100 horas,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que falle un componente antes de 25 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que falle al menos un componente antes de 125 horas?