Clase 9: Distribuciones de probabilidad conjuntas (discretas y continuas), marginales y condicionales

Profesora: Olga Alexandra Bustos Giraldo

Escuela de Estadística

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

oabustos@unal.edu.co

Ilustración de una distribución bivariada discreta

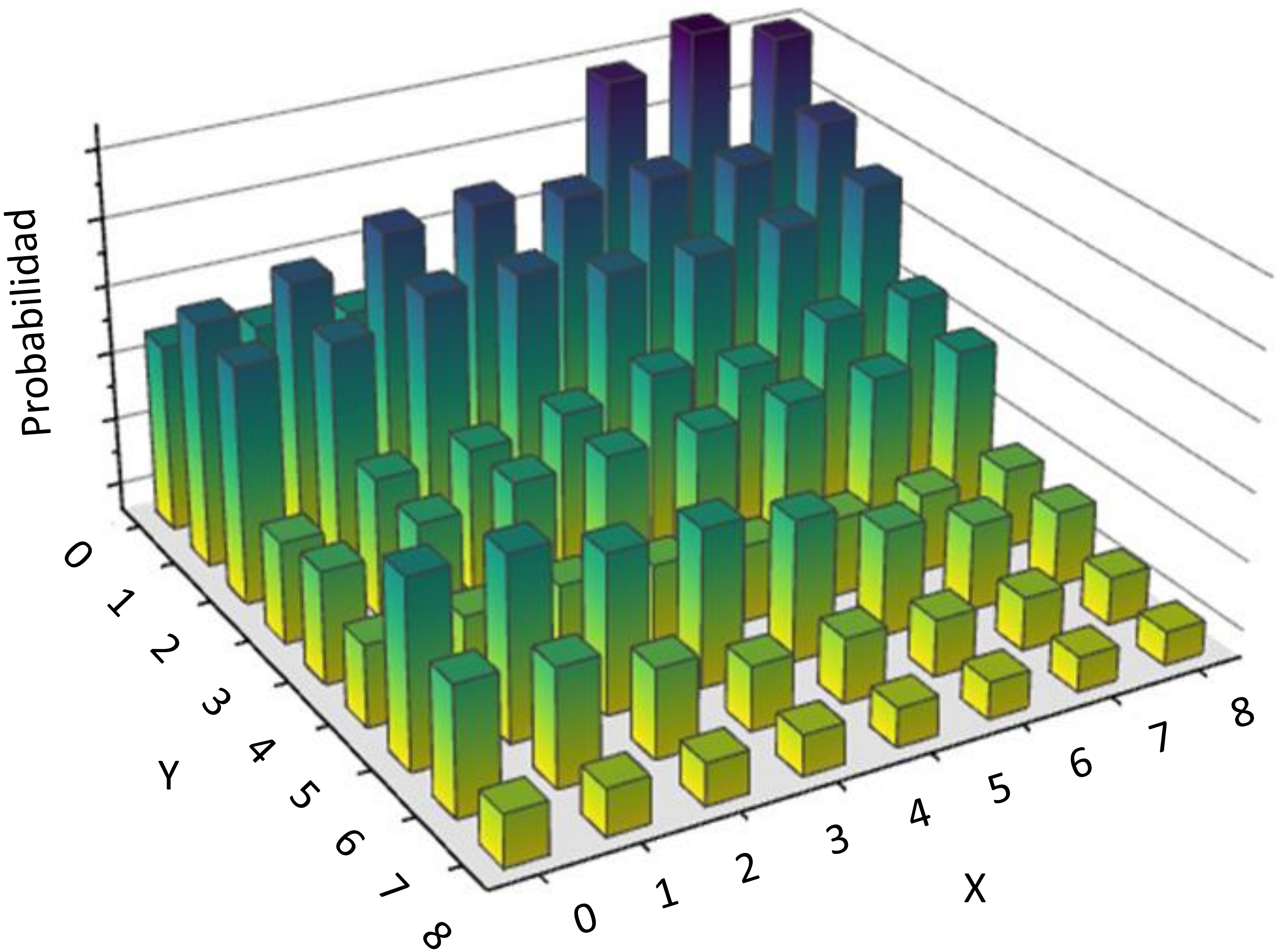
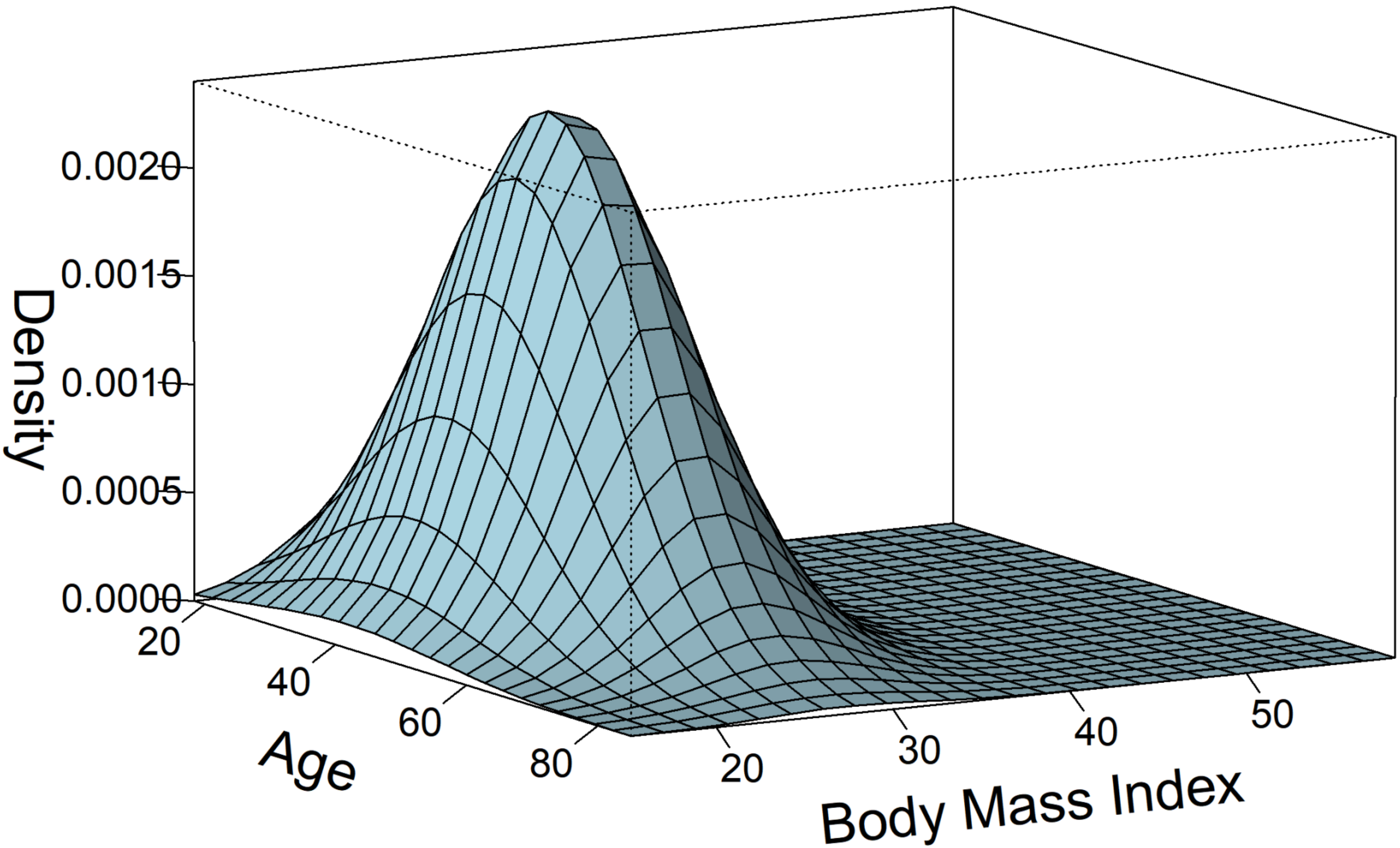


Ilustración de una distribución bivariada continua



Distribuciones Bivariadas

Muchos de los fenómenos que usualmente estudiamos, involucran diferentes y diversos factores, los cuales son identificados por medio de variables. El comportamiento de estos fenómenos se rige por el comportamiento conjunto de las variables involucradas.

Si X e Y son variables aleatorias, la distribución que rige el comportamiento conjunto de ambas variables es llamada DISTRIBUCIÓN BIVARIADA o BIVARIABLE. Si se tienen más de dos variables se le llama MULTIVARIABLE.

Distribuciones Bivariadas Discretas

Sean X e Y variables aleatorias discretas definidas en un espacio muestral S y sea $\mathcal{A}$ el espacio de las variables (X, Y). La distribución de probabilidad conjunta de X e Y (la f.m.p. conjunta), la cual denotamos $p(x\ ,\ y)$, se define como:

$$p(x, y) \ := \ P(X = x, Y = y) \quad , \quad \forall (x, y) \ \in \ \mathcal{A} \ \subseteq \ \mathbb{R}^2$$

Para que p(x,y) sea f.m.p.c debe satisfacer:

1. $p(x, y) \ \geq \ 0 \quad \forall\,(x, y) \ \in \ \mathcal{A}$
2. $\sum\limits_x \sum\limits_y p(x, y) = \sum\limits_{(x, y) \in \mathcal{A}} p(x, y) \ = \ 1$
3. Si $A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad P\left((X\,,Y) \ \in \ A\right) \ = \sum\limits_{(x\,,\,y) \in A} p(x, y)$

Ejemplo Bivariadas

Sean X e Y dos v.a.s discretas con f.m.p. conjunta dada por:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	0	1	0	1
$p(x\,,\,y)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

Calcule

a. $P(X \leq 1\,,\,Y \leq 1)$

b. $P(X > 1\,,\,Y < 2)$

c. $P(X = 0\,|\,Y = 1)$

Ejemplo Bivariadas

Solución

a. Sea $A = \{(x,y) \mid x \leq 1, y \leq 1\}$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 1, Y \leq 1) &= P((X, Y) \in A) \\
&= \sum_{(x,y) \in A} p(x, y) = \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} p(x, y) \\
&= p(0, 0) + p(0, 1) + p(1, 0) + p(1, 1) = \frac{11}{18}
\end{aligned}
$$

Ejemplo Bivariadas

b. Sea $B = \{(x\,,\,y)\,/\,x > 1\,,\,y < 2\}$.

$$P(X > 1\,,Y < 2) = P((X\,,\,Y) \in B) = \sum_{x=2}^{2}\sum_{y=0}^{1} p\,(x\,,\,y)$$

$$= p\,(2\,,\,0) + p\,(2\,,\,1) = \frac{7}{18}$$

c.

$$P\,(X = 0\,|\,Y = 1) = \frac{P\,(X = 0\,,\,Y = 1)}{P\,(Y = 1)}$$

$$= \frac{p\,(0\,,\,1)}{p\,(0\,,\,1) + p\,(1\,,\,1) + p\,(2\,,\,1)}$$

$$= \frac{3\,/\,18}{3\,/\,18 + 3\,/\,18 + 1\,/\,18} = \frac{3}{7}$$

Variables aletorias Continuas

Sean X e Y variables aleatorias continuas definidas en $\mathcal{A}$ (espacio de las variables), diremos que $f(x,y)$ es una función de densidad de probabilidad conjunta (f.d.p.c), si satisface que:

Variables aletorias Continuas

Propiedades

1.
$$f(x\,,\,y)\;\geq\;0.\quad\forall\,(x\,,y)\in\mathbb{R}^{\,2}$$

2.
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx\;=\;1\;.$$

3. Si $B\;\subseteq\;\mathbb{R}^{\,2}\quad\Rightarrow$
$$P\,((X\,,Y)\;\in\;B)\;=\;\iint_{B} f(x,y)\,dy\,dx$$

Ejemplo Bivariadas

Sean X, Y v.a. continuas con f.d.p. conjunta dada por:

$$f(x,y) = c(x+y) \quad ; \quad 0 < x < 3 \quad , \quad x < y < x+2 \quad .$$

a. Halle el valor de c, para que f sea una f.d.p. conjunta

b. Calcule $P(X < 1, Y < 2)$.

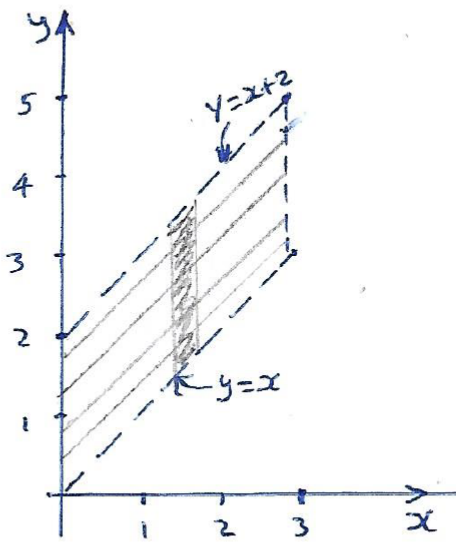
c. Calcule $P(1 < X < 2)$.

d. Calcule $P(X < 2 | Y > 2)$.

Ejemplo Bivariadas

Solución

a. Para hallar el valor de c, se debe dibujar la región de integración así:



$$\int_0^3 \int_x^{x+2} c(x+y)\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow c \int_0^3 \left(xy + \frac{y^2}{2} \Big|_x^{x+2} \right. dx = 1$$

Ejemplo Bivariadas

$$c\int_0^3 \left[x(x+2)+\frac{(x+2)^2}{2}-x^2-\frac{x^2}{2}\right]dx=1 \Leftrightarrow c\int_0^3 \left[x^2+2x+\frac{x^2+4x+4}{2}-\frac{3x^2}{2}\right]dx=1$$

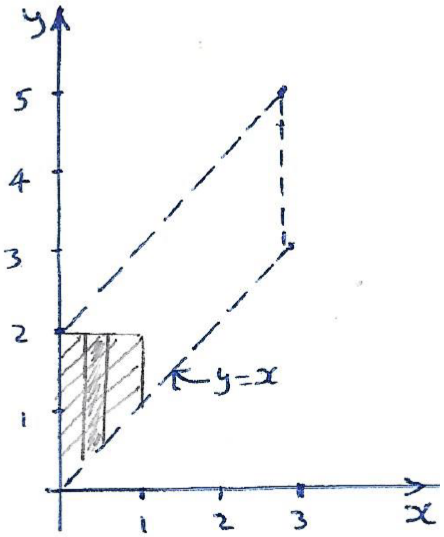
$$\Leftrightarrow c\int_0^3 (4\,x\,+\,2)\,dx=1 \quad \Leftrightarrow c\ \left(2x^2+2x\Big|_0^3=1 \Leftrightarrow \quad 24\,c=1\right.$$

Luego, $c=\frac{1}{24}$, con esto

$$f(x,y)\ =\frac{x+y}{24} \quad ; \quad 0<x<3 \quad , \quad x<y<x+2 \quad .$$

Ejemplo Bivariadas

b. Para hallar $P(X<1, Y<2)$, se debe dibujar la región de integración así:



$$P(X<1, Y<2) = \int_0^1 \int_x^2 \frac{1}{24}(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{24}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right|_x^2 dx\,.$$

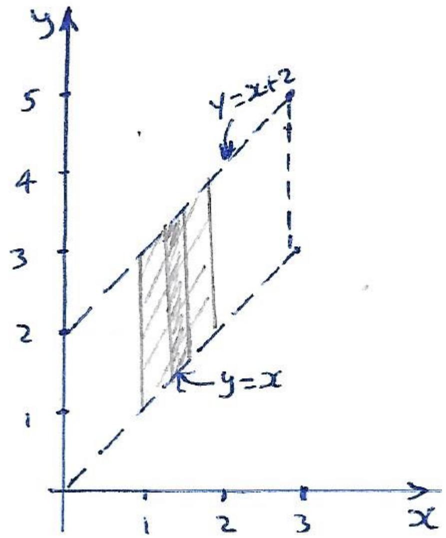
Ejemplo Bivariadas

$$P\,(X < 1\,,\,Y < 2) = \int_0^1 \frac{1}{24}\left(2x + 2 - x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{24}\left(2x + 2 - \frac{3x^2}{2}\right) dx\,.$$

$$P\,(X < 1\,,\,Y < 2) = \frac{1}{24}\left(x^2 + 2x - \frac{x^3}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{24}\left(1 + 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{48}\,.$$

Ejemplo Bivariadas

c. Para hallar $P(1 < X < 2)$, se debe dibujar la región de integración así:

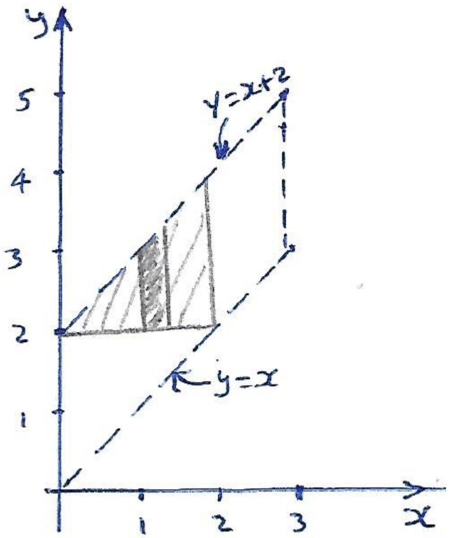


$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \int_x^{x+2} \frac{x+y}{24} dy dx = \frac{1}{24} \int_1^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right|_x^{x+2} dx$$

$$P(1 < X < 2) = \frac{1}{24} \int_1^2 (4x+2)\, dx \; = \; \frac{1}{24} \left[2x^2 + 2x \right|_1^2 = \frac{1}{3}\,.$$

Ejemplo Bivariadas

d. Para hallar $P\left(X < 2 \,|\, Y > 2\right)$, se debe dibujar la región de integración así:



Ejemplo Bivariadas

$$P(X<2|Y>2)=\frac{P(X<2,Y>2)}{P(Y>2)}$$

$$=\frac{\int_0^2\int_2^{x+2}\frac{1}{24}(x+y)\,dy\,dx}{1-P(Y\leq 2)}$$

$$=\frac{1/3}{1-\int_0^2\int_x^2\frac{1}{24}(x+y)\,dy\,dx}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{2}{5}$$

Marginales y Condicionales

Sean X e Y variables aleatorias (Discretas o Continuas).

La *Distribución Marginal de X*, está dada por:

$$p_X(x) = \sum_y p(x,y) \quad , \quad \text{Caso Discreto .}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad , \quad \text{Caso Continuo .}$$

Analógamente se define la *Distribución Marginal de Y* como:

$$p_Y(y) = \sum_x p(x,y) \quad , \quad \text{Caso Discreto .}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \quad , \quad \text{Caso Continuo .}$$

Marginales y Condicionales

La *Distribución Condicional* de "Y dado $X = x$" la cual se denotará: $p_{Y\,|\,x}(y), f_{Y\,|\,x}(y)$, y se define como:

$$p_{Y\,|\,x}(y) = \frac{p\,(x\,,\,y)}{p_X(x)} \quad , \quad p_X(x) > 0\,.$$

$$p_{X\,|\,y}(x) = \frac{p\,(x\,,\,y)}{p_Y(y)} \quad , \quad p_Y(y) > 0\,.$$

$$f_{Y\,|\,x}(y) = \frac{f\,(x\,,\,y)}{f_X(x)} \quad , \quad f_X(x) > 0\,.$$

$$f_{X\,|\,y}(x) = \frac{f\,(x\,,\,y)}{f_Y(y)} \quad , \quad f_Y(y) > 0\,.$$

De lo anterior se deduce que:

$$\boxed{f\,(x\,,\,y) = f_X(x)\,f_{Y\,|\,x}(y) \;=\; f_Y(y)\,f_{X\,|\,y}(x)}$$

Ejemplo Marginales y Condicionales

Sean X e Y variables aleatorias discretas con f.m.p. conjunta dada por:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	0	1	0	1
$p(x,y)$	$1/18$	$3/18$	$4/18$	$3/18$	$6/18$	$1/18$

Halle $p_X(x)$, $p_Y(y)$, $p_{Y\,|\,x}(y)$

Ejemplo Marginales y Condicionales

Solución

		Y		
	$p(x,y)$	0	1	$p_X(x)$
X	0	$1/18$	$3/18$	$4/18$
	1	$4/18$	$3/18$	$7/18$
	2	$6/18$	$1/18$	$7/18$
	$p_Y(y)$	$11/18$	$7/18$	1

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^{1} p(x,y) = p(x,0) + p(x,1) \quad ; \quad \text{para } x = 0, 1, 2\,.$$

x	0	1	2
$p_X(x)$	$4/18$	$7/18$	$7/18$

$$p_Y(y) \;=\; \sum_{x=0}^{2} p\,(x\,,\,y) \;=\; p\,(0\,,\,y) + p\,(1\,,\,y) + p\,(2\,,\,y) \quad ; \quad \text{para } y = 0,\,1\;.$$

y	0	1
$p_Y(y)$	$11/18$	$7/18$

Ejemplo Marginales y Condicionales

La distribución condicional de Y dado x, se obtiene como:

$$p_{Y\,|\,x}(y) = \frac{p\,(x\,,\,y)}{p_X\,(x)} \quad ; \quad \text{para} \quad y = 0,1$$

Por ejemplo, para $x = 0$ se tiene que:

$$p_{Y\,|\,0}(y) = \frac{p\,(0\,,\,y)}{p_X\,(0)} = \frac{p\,(0\,,\,y)}{\frac{4}{18}} \quad ; \quad \text{para} \quad y = 0,1\ .$$

La distribución resultante se muestra en la siguiente tabla.

y	0	1
$p_{Y\,\|\,0}(y)$	$1/4$	$3/4$

Ejemplo Marginales y Condicionales

De manera análoga se hayan las distribuciones condicionales de Y dado $x = 1$ y $x = 2$.

Estas se muestran a continuación.

y	0	1	y	0	1
$p_{Y\,|\,1}(y)$	$4/7$	$3/7$	$p_{Y\,|\,2}(y)$	$6/7$	$1/7$

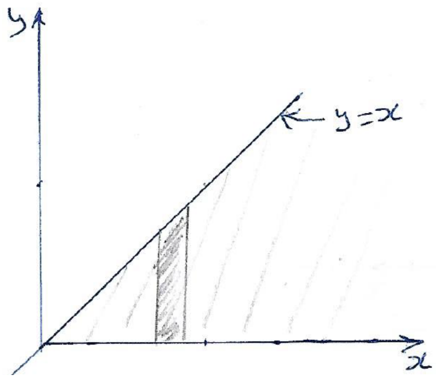
Ejemplo Marginales y Condicionales

Sean X e Y variables aleatorias continuas con f.d.p conjunta dada por:

$$f(x,y) = e^{-x} \quad ; \quad 0 \le y < x \,.$$

Calcule las distribuciones marginales y las condicionales.

Solución



$$f_X(x) = \int_0^x e^{-x} dy = \left(y e^{-x} \right|_0^x = x\, e^{-x} \quad , \quad x > 0 \,.$$

Ejemplo Marginales y Condicionales

$$f_Y(y) = \int_y^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left(-e^{-x}\right|_y^{\infty} = e^{-y} \quad , \quad y > 0\,.$$

$$f_{Y\,|\,x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-x}}{x\,e^{-x}} = \frac{1}{x} \quad ; \quad 0 < y < x\,.$$

$$f_{X\,|\,y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-x}}{e^{-y}} = e^{-(x-y)} \quad ; \quad x > y\,.$$

Variables Independientes

Definición

Sean X e Y variables aleatorias, diremos que X e Y son *Estadísticamente Independientes* (E.I.), si:

$$f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad , \quad \forall (x, y) \in \mathcal{A} \, .$$

$$p(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y) \quad , \quad \forall (x, y) \in \mathcal{A} \, .$$

Si existe un par (x, y), para el cual la igualdad no es cierta, diremos que X e Y son *Estadísticamente Dependientes*.

Ejemplo Variables Independientes

Sean X e Y variables aleatorias discretas con f.m.p. conjunta dada por:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	0	1	0	1
$p(x,y)$	$1/18$	$3/18$	$4/18$	$3/18$	$6/18$	$1/18$

¿Son X e Y estadísticamente independientes?

Ejemplo Variables Independientes

Solución

Las distribuciones marginales para X e Y son, respectivamente:

x	0	1	2	y	0	1
$p_X(x)$	$4/18$	$7/18$	$7/18$	$p_Y(y)$	$11/18$	$7/18$

Observe que:

$$p(0,0) = \frac{1}{18} \quad , \quad p_X(0) = \frac{4}{18} \quad \text{y} \quad p_Y(0) = \frac{11}{18} \, .$$

Con lo cual se muestra que $p(0,0) \neq p_X(0)\, p_Y(0)$ y por lo tanto, X e Y no son E.I.

Ejemplo Variables Independientes

Sean X y Y variables aleatorias continuas con f.d.p. conjunta dada por:

$$f(x,y) = 4x(1-y) \quad ; \quad 0 < x < 1 \,,\, 0 < y < 1 \,.$$

Verifique que X e Y son v.a. estadísticamente independientes

Solución

$$f_X(x) = \int_0^1 4x(1-y)dy = 4x\left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 4x\left(\frac{1}{2}\right) = 2x, \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 4x(1-y)dx = 2x^2(1-y)\Big|_0^1 = 2(1-y), \quad 0 < y < 1$$

$$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad ; \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,$$

es decir, X y Y son E.I.

Ejercicio

Sean X y Y variables aleatorias continuas con f.d.p. conjunta dada por:

$$f(x,y) = 24xy \quad ; \quad 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1,\ x + y \leq 1$$

hallar las marginales para X e Y, $\quad f_{X|Y=\frac{1}{2}}(x), \quad f_{Y|X=\frac{1}{2}}(y)$