离散数学期末1：代数系统

- 第14章代数系统****
  - 二元运算性质
    - 封闭
    - 交换
    - 结合
    - 幂等
    - 分配
    - 吸收

      若“*”、“·”满足交换律，且 $a\cdot(a*b)=a$ 且 $a*(a\cdot b)=a$，则称运算“*”与“·”满足吸收律。
  - 二元代数系统

    <集合,集合上若干封闭运算>
    - 判定能否组成二元系统
      - 集合非空，运算封闭
    - 特异元
      - 幺元，存在则唯一
      - 零元，存在则唯一
      - 幂等元
      - 可逆元，若*满足结合律，则唯一逆元
      - 补元
      - 最大元
      - 最小元
- 第15章 群和半群****
  - 广群、半群、含幺半群及群
    - 广群【闭】
    - 半群【闭、结】
    - 含幺半群【闭、结、幺】
    - 群【闭、结、幺、逆】

      0的存在决定很多不是群
      - 有且仅有一个幂等元（幺元）
      - 阶>1的群没有零元
      - 消去率

        - 典型群
            - 剩余类加群

              Z_k={[0]，[1]，[2]，…，[k-1]}

              [i]⊕[j]=[(i+j)%k]，i,j ∈{0,1,..,k-1}

              [i]⊗[j]=[(ij)%k]

                - 幺元是[0]
                - 每元的逆元是[k-i]
            - n次对称群/n阶置换群

              集合是A上全体置换构成的集合，运算是复合运算
            - 除掉[0]的剩余类半群当k是素数时是群

              剩余类乘半群（[0]无逆元）。
            - <Z,+><R,+><R-{0},*><Zk, O+><Z11-{0},O*>
- 子半群
    - 子半群
        - 半群的非空子集，*在子集上封闭
    - 含幺子半群
        - 半群的幺元也在子集中，*在子集上封闭
- 子群
    - 定义
        - 群的非空子集，*在子集上封闭、含幺、每元可逆
    - 定理
        - 子群的幺元与群的幺元相同
        - 群的非空子集，则是子群的充要条件是：任意a,b∈S有a*b^-1∈S
    - 分类
        - 平凡子群（一定有）
            - 幺元子群
            - 群自身
        - 真子群（不一定有）
- 元素的周期与循环群
    - 生成子群（集合变为集合任一元素的...,-2,-1,0,1,2,..n次方，运算不变）

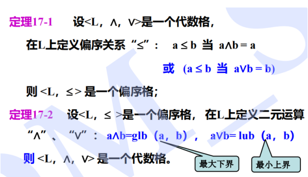
      ➢ 定理15-5 设<G，*>是群，对任意的a∈G，令S = {a^n|n∈Z}，则 称<S，*>为<G，*>的由单元素a生成的子群，记为<(a), *>。
    - 元素的周期
        - 对于群中任意元素，使a^n = e的最小正整数n为元素a的周期（定义）
        - 有限群周期都是有限数，最大为|G|
        - 无限群周期可能是有限数，也可能是∞

      - 若群中任一元素周期为n
        - 则a^m = e 当且仅当 n|m
        - a^i=a^j当且仅当n|(i-j)
        - 由a生成的子群<(a),*>阶为n，即(a)={e,a,a^2,a^3,....,a^(n-1)}
    - 循环群
      - 定义/判定
        - 群中存在(a)=G的a，则群为循环群，a是生成元，G中所有生成元构成生成集
        - 有限群中存在周期为|G|的a，则群是循环群，a是生成元
      - 例子
        - <Z,+>无限循环群，生成集{1,-1}
        - <Z6,O+>有限循环群，生成集{[1][5]}
        - a和k满足互质的a [a]是<Zk,O+>的生成元

          <Z15,O+>生成集为{[1],[2],[4],[7],[8],[11],[13],[14]}
  - ~~交换群(Abel群)~~
  - 同态与同构
- 第17章 格与布尔代数*

  只考不到5分
  - 格的定义与性质
    - 定义一：代数格<L,∩,U>，∩,U都满足**交换、结合、幂等、吸收**【判定1】
    - 定义二：偏序集<L,≤>的任意元素都有最大下界和最小上界，则为偏序格。若L是有限集，则<L,≤>为有限格。
      - **有限**偏序集<L,≤>是格的必要条件，**为<L,≤>具有最大元和最小元【判定2：先转为哈斯图】**

        当有元素的最小上界（最大下界）不唯一的情况，就不是格。
      - 全序集一定是格
    - **二者完全等价**

      定理17-1　设<L，∧，∨>是一个代数格，
      在L上定义偏序关系“≤”：　a ≤ b 当 a∧b = a
      或 (a ≤ b 当 a∨b = b)
      则 <L，≤> 是一个偏序格；
      定理17-2　设<L，≤ >是一个偏序格，在L上定义二元运算
      “∧”、“∨”：a∧b=glb（a，b），a∨b= lub（a，b）
      则 <L，∧，∨> 是一个代数格。
      最大下界
      最小上界
    - 典型的格
      - 幂集格（任意X,Y都有XUY=lub(X,Y)，X∩Y=glb(X,Y)）
      - 命题逻辑系统<{0,1},xiqu,hequ>
      - 正因子格<Dk,|>,Dk为k的正因子集，对应的代数格<Dk,$(glb),#(lub)>
  - 子格
    - 子格：代数系统<L,∩,U>，S是L的非空子集，运算封闭

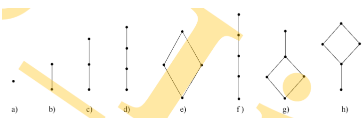
    - 非空子集，<S,≤>是格，则是子格
- 对偶格

  2个偏序格，偏序关系互逆，互为对偶格
  - 典型的对偶格
    - ex整除关系和对偶关系
  - 对偶公式
    - E是格中的公式，把E中的最小元(0)和最大元(1)互换，运算也互换位置，得到新公式E*是E的对偶公式

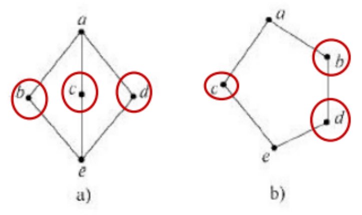
      $E = x \wedge (y \wedge z \vee 0) \vee (x \wedge z) \vee 1$

      $E^{*} = x \vee (y \vee z \wedge 1) \wedge (x \vee z) \wedge 0$
  - 对偶原理
    - 设X和Y是格的两个公式，X*和Y*是对应的对偶公式，若X=Y则X*=Y*
  - 定理
    - X和Y是格的两个公式，若X≤Y，则Y*≤X*
- 格同态同构&保序定理
  - 代数运算角度定义
    - 先运算再映射=先映射再运算
  - 偏序角度定义
    - f:L1->L2，任意的L1中的a和b都有：a≤b则f(a) 是f(b)子集，则f是保序映射，f双射时为保序双射
  - 含二个运算的2个格，
    - 若是格同态映射，则为保序**映射**，反之**不然**
    - 若是格同构映射，则为保序**双射**，反之**亦然**
- **分配格**
  - 分配格

    两个运算互相之间满足分配率
    - 典型分配格
      - 幂集格<2^A,∩，∪>，命题逻辑格<M,xi,he>,全序格
    - 性质
      - 消去律
      - 分配率
  - **判断是否为分配格?**
    - 4格元素以下的格是分配格

        - 5格元素的格就这两个不是

        - 6格及以上，是分配格当且仅当没有任何子格和他们同构
- **有界格**
    - 格存在a对任意x有$a\le x$(或$x\le a$)则a是格的最小元(最大元)，分别记为0(1)
    - 有最大元&最小元的格为有界格
    - 有限格一定是有界格，有界不一定有限
- **有补格**
    - 定义：有界格里$a\wedge b=0$且$a\vee b=1$，则ab互为补元 $\sim a=b$。任意元素都有补元则有补格。
- **有补分配格（布尔格）**
    - 有补分配格中每元补唯一
    - 典型
        - 布尔表达式
        - 幂集格，命题逻辑格
- 布尔代数
    - 定义
    - 典型有限布尔代数
        - 幂集格，命题逻辑格
    - 布尔代数的原子
        - 直接盖住最小元
        - 幂集代数有|A|个原子，即A所有单元素子集
        - **布尔代数有n个原子则$|B|=2^n$【判断有补分配格】**
    - 布尔代数同构
        - 条件：相同的原子数
        - 一定存在双射f：A→B使得两个相等且$f(\sim x)=\sim f(x)$