概率统计公式-2

- 第五单元 正态分布
  - 定义和密度函数

正态分布	密度函数
$X \sim N(0,1)$	$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x\in R$
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in R$

  - 性质

$X \sim N(0,1)$	(1) $\Phi(0)=\frac{1}{2}$; (2) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$. (3) $P(a<X\le b)=\Phi(b)-\Phi(a)$
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	(1) $F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (2) $P(a<X\le b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

  - 线性性质

设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，当$b\neq 0$时，有

$$Y=a+bX\sim N(a+b\mu,b^2\sigma^2).$$

- 第六单元 极限定理
  - 切比雪夫不等式
  - 独立同分布大数律
  - 林德伯格-列维中心极限定理
  - 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理
- 第七单元 数理统计基础
  - 三大分布
    - χ2分布
      - 定义：X~N(0,1)，∑(Xi)2 ~ χ2(n)

- $\gamma(n/2,1/2)$
- 可加性
- $E\chi^2=n$, $D\chi^2=2n$

- t分布
  - 定义：$X\sim N(0,1), Y\sim\chi^2(n)$, $X/\sqrt{(Y/n)}\sim t(n)$
  - $n>1$，$EX=1$
  - n充分大，$X/\sqrt{(Y/n)}\sim N(0,1)$
- F分布
  - $X\sim\chi^2(n), Y\sim\chi^2(m)$，则$(X/n)/(Y/m)\sim F(n,m)$
  - $1/F\sim F(m,n)$
  - $X\sim t(n)$,则$X^2\sim F(1,n)$
- *分位点*
- 统计量
- 抽样分布定理
  - 正态总体
  - 任何总体

- 第八单元 估计
  - 点估计
    - 矩估计
      - 一个未知参数估计
      - 两个未知参数估计
    - *极大似然估计*
      - 方程有解
      - 方程无解
  - 估计量的评选标准
  - 区间估计
    - 一个正态总体下的区间估计

假设X服从$N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$来自总体X的一个样本。

1. 已知$\sigma^2=\sigma_0^2$，求总体均值μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right).$$

2. σ^2未知，求总体均值μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

3. μ未知时，求总体方差σ^2的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

- 两个正态总体下的区间估计

设有两个正态总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。$X_1,$ $X_2,\cdots,X_{n_1}$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$是分别来自X和Y的两个独立样本。

1. σ_1^2和σ_2^2都已知，求总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\bar{X}-\bar{Y}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

2. σ_1^2和σ_2^2都未知，但$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，求$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

3. $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$都未知，求总体方差比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2F_{1-\frac{\alpha}{2}}},\frac{S_1^2}{S_2^2F_{\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

- 第九单元
  - 一个正态总体下，假设检验拒绝域

1/2. σ^2已知/未知时，μ的检验

给定显著性水平α，在σ^2已知和σ^2未知两种情况下关于H_0的拒绝域如下表所示

H_0	H_1	σ^2已知	σ^2未知
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert U\rvert>u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert t\rvert>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\mu=\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$U>u_{1-\alpha}$	$t>t_{1-\alpha}(n-1)$
$\mu=\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$U<-u_{1-\alpha}$	$t<-t_{1-\alpha}(n-1)$

注意：在各种备择假设下，拒绝域的方向与备择假设的方向一致。

3. μ未知时，σ^2的检验

当原假设为$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$，且$H_0$成立时，由抽样分布定理7.4，可知检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

对给定的显著性水平α，下表给出了各种备择假设下检验的拒绝域。这种检验叫做χ^2检验。

H_0	H_1	显著性水平α下关于H_0的拒绝域
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$或$\chi^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi^2_{\alpha}(n-1)$

- 两个正态总体下，假设检验拒绝域

1/2. σ_1^2, σ_2^2已知/σ_1^2, σ_2^2未知，但$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时，$\mu_1=\mu_2$的检验

在显著性水平α的条件下，H_0的拒绝域

H_0	H_1	σ_1^2, σ_2^2已知	σ_1^2, σ_2^2未知，$\sigma_1^2=\sigma_2^2$
$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert U \rvert > u_{1-\alpha/2}$	$\lvert T \rvert > t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$
$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$U > u_{1-\alpha}$	$T > t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$
$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$U < -u_{1-\alpha}$	$T < -t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$

注意：在各种备择假设下，拒绝域的方向与备择假设的方向一致。

3. μ_1, μ_2未知，求总体方差$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$的假设检验

当原假设为H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$成立时，由抽样分布定理可以得到此时的检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}\text{服从}F(n_1-1, n_2-1).$$

因此，这种假设检验叫F检验。

在显著性水平α的条件下，两正态总体方差检验H_0的拒绝域

H_0	H_1	H_0的拒绝域
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或$F > F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F > F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F < F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)$