

离散数学期末3：图论*****

- 第10章 图的概念

- 10.1 图

- 图的定义

- 图

- (n,m) 图

- 阶

- 邻接点和边

- 相关联：边和线

- 无向图

边集是无序数对

- 无向简单图

没有平行边，没有环

- $m \leq n(n-1)/2$

- 无向多重图

可以有平行边，无环

- 无向伪图/无向广义图

有平行边有环

- 基图

代替平行边，去掉环后的无向多重图/广义图

- 点度的概念

- 无向图 $d_G(u)$

与 u 关联的边的条数，

- 简写为 $d(u)$

- >最大点度和最小点度

分别记为 Δ_G 和 δ_G ,简写为 Δ 和 δ .

- 每个环在计算度时算作两条

- 有向图 出度 $d^+_G(u)$ 、入度 $d^-_G(u)$ 、度 $d_G(u) = d^+_G(u) + d^-_G(u)$

- >最大出/入度和最小出/入度

分别记为 $\Delta^+ / \delta^+ \Delta^- / \delta^-$

- 奇（偶）度结点

- 有向图

边集是有序数对，由 u （始点）指向 v （终点）的有向线段， e 是 u 的出边，是 v 的入边

- 有向简单图

没有平行边，没有环

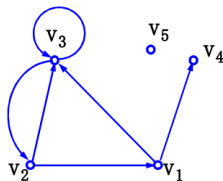
- $m \leq n(n-1)$
- 有向多重图
(有平行边)，无环
- 有向伪图/有向广义图
有平行边有环
- 基图
去掉边的方向的无向图 (可以有平行边和环)

握手定理 (欧拉定理)

- (n,m) 图有 $\sum d(u) = 2m$
- 特别对有向图, $\sum d^+(u) = m$, $\sum d^-(u) = m$
- 任何图中, 奇度结点个数必为偶数

度序列的概念

- $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ 为 G 的度序列。



度序列为 $(3, 3, 5, 1, 0)$ 。

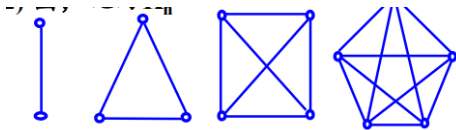
- 依据欧拉定理可确定一个序列是否可以图化
任何图中, 奇度结点个数必为偶数

正则图: 与度有关的图

- k 度正则图
- 零图 (0度正则图)
 - 平凡图
- K_n 是 $n-1$ 度正则图

完全图

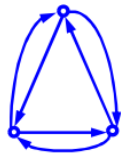
- 无向完全图



任意两个顶点均互相连接的简单无向图

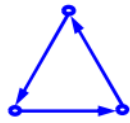
- n 阶无向完全图
 - $(n, n(n-1)/2)$ 图, 记为 K_n
 - K_n 是 $n-1$ 度正则图

- 有向完全图



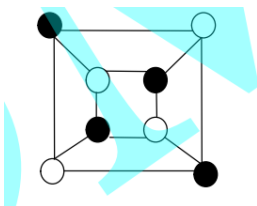
任意两个结点 uv 之间都有有向边 (u,v) (v,u) 的简单有向图

- **边数 $n(n-1)$**
- 竞赛图



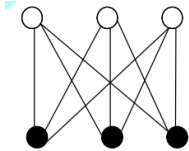
每对 uv 之间有且仅有一条有向边的简单有向图

- 二部图



结点集 V 可以划分成两个不相交子集 X 和 Y ，使得边集 E 中每条边的一个关联结点在 X 中，另一个关联结点在 Y 中

- 无向完全二部图 **$K_{n1,n2}$**



- 设 $|X|=n1$ ， $|Y|=n2$ 。如果 X 中的每个结点与 Y 中的全部结点都邻接
- $m=n1*n2$
- 边集 $X \times Y$

- 子图

若 $V1 \subset V$ ，且 $E1 \subset E$ ，则称 H 是 G 的子图，记为 $H \subset G$

- 真子图
- 平凡子图

$V1=V$ 且 $E1=E$ 或 $E1=\emptyset$

- 生成子图

点没少， $V1=V$

- 构造子图的几种方法

- 删点子图
 - | 删除结点子集和关联的所有边
- 删边子图
 - | 删除边子集

- 生成子图

- 点诱导子图 $G(S) = (S, E')$

S 是 V 的子集, S 中的点所构成的边, 且这些边在原图中有

- 边诱导子图 $G(T) = (V', T)$

T 是 E 的边集, T 中的边和他们关联的所有结点

- 补图

- 图的同构



两个图的边一一对应

- 必要条件

- 结点数目相同

- 边数相同

- 同度结点相同

- 10.2 道路与回路

- 道路

- 点边点边点边...

- n 阶图中最短道路长度 $\leq n-1$

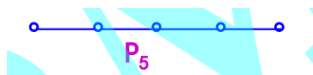
- 闭道路

- 简单道路

- 回路

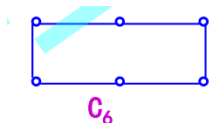
- 基本道路

- 道路图



- 能以基本开道路表示, $P_n, (n, n-1)$ 图

- 圈



- 10.3 图的连通性

- 连通性

- 有道路, 就是连通的。u 连通 u

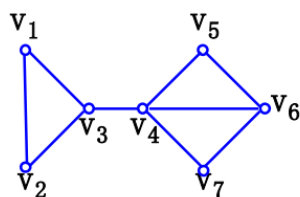
- 无向图 $G=(V, E)$ 中连通关系是 V 上的等价关系, 可以决定 V 上的一个分划, V_i 是一个等价类

- 任意两个结点 uv 连通当且仅当 uv 同属于一个分化块

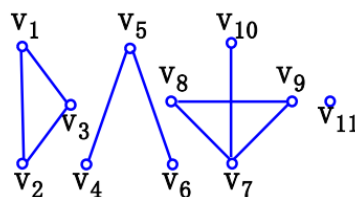
- 不同分划内的点绝不连通
- 点诱导子图是**G**的极大连通子图，称作**G**的支（连通分量）
- 图**G**的总支数为 $\omega(G)$

• 连通图

- $k=1$ ，只含一个支的无向图



连通图， $\omega(G_1)=1$ 。



非连通图， $\omega(G_2)=4$ 。

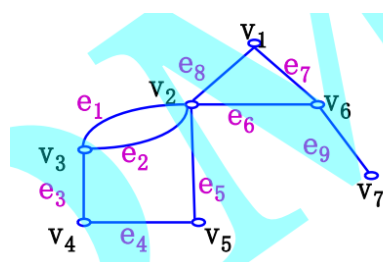
- 无向完全图 K_n 是连通图，而节点数大于1的零图都是非连通图

• 结点间的距离

- 不连通的距离为 ∞
- 性质
 - 非负性
 - 对称性
 - 两边之和大于第三边

• 点割集&割点

- $\omega(G)=1$ 的无向连通图中

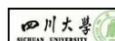


删除割点可将G分离为多支

点割集： $\{v_2\}$ 、 $\{v_6\}$ 、 $\{v_3, v_5\}$ 、 $\{v_2, v_4\}$ 、 $\{v_2, v_3, v_5\}$...;

基本割集： $\{v_3, v_5\}$ 、 $\{v_2\}$ 、 $\{v_6\}$ 。

割点： v_2 、 v_6



- 存在一个 $\omega>1$ 的删点子图，这个点集是一个点割集
- 如果点割集是极小点割集（删除这个点割集中任何一个结点，则无法将G分离为多支），则为基本点割集
- 删除割点可以将G分离为多支
- K_n 没有点割集，连通性最好
- 如何找割点？
 - 非平凡连通图中， v 为割点的充要条件是存在 u 和 w 使 u 到 w 每条路都包含 v

• 边割集&割边

- 如何找割边？
 - 非平凡连通图中， e 为割边的充要条件是 e 不包含于任何圈中
- 非连通图不具有连通性，点割集和边割集定义无效

- 点连通度 $\kappa(G)$

使无向连通图 G 分离为多支，或单连通子图所需删掉的最少节点数

- $\kappa(G) = \min\{|V'|\}$, V' 是基本点割集
- $\kappa(K_n) = n-1$
- 非连通图&单结点图的点连通度为0
- 若 $\kappa(G) \geq k$, 则 G 为 k -连通图
 - 非平凡连通图都是1-连通的

- 边连通度 λ

将 G 分离为多支所需删掉的最少边数

- $\lambda(G) = \min\{|E'|\}$
- $\lambda(K_n) = n-1$
- 非连通图&单结点图的边连通度为0
- 若 $\lambda(G) \geq k$, 则 G 为 k -边连通图
 - 非平凡连通图都是1-边连通的

- 定理: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

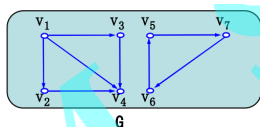
- 若 G 是 k -连通图, 则 G 必是 k -边连通图, 反之不然

- 有向图结点的可达关系

存在 u 到 v 的道路则可达, 记作 $u \rightarrow v$; 规定 $u \rightarrow u$

- 有向图结点之间的可达关系具有自反性和传递性 $rt(E)$
- 可达关系没有对称性, 不是等价关系

- 有向图的连通性



强分图: $G(\{v_1\})$, $G(\{v_2\})$, $G(\{v_3\})$, $G(\{v_4\})$ 和 $G(\{v_5, v_6, v_7\})$;

单向分图: $G(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$, $G(\{v_1, v_3, v_4\})$ 和 $G(\{v_5, v_6, v_7\})$;

弱分图: $G(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ 和 $G(\{v_5, v_6, v_7\})$ 。

- 强连通图

任何一对结点相互可达

- 强分图

G 的子图 G' 是极大强连通的, 若 G' 中在增加任何点/边, 则 G' 不再是强连通的

- 一个有向图 G 是强连通图当且仅当 G 中有一条包含所有节点的有向闭道路

- 单向连通图

任何一对结点之间至少有一个结点到另一个结点是可达的

- 单向分图

G 的子图 G' 是极大单向连通的

- 弱连通图

G 的基图是连通的

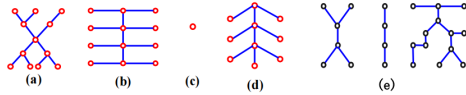
- 弱分图

G的子图G'是极大弱连通的

- 在简单有向图中，每个结点位于且仅位于一个强分图中

- 树

- 定义



- ✓ (a)、(b)、(c)、(d) 是树
- ✓ (e) 是林，包括3棵树
- ✓ (c)是平凡图，称之为平凡树，其结点的度为 0。

- 连通但不含圈的无向图

- 树叶

- 枝点或内点

- 平凡树K1

- 既无叶子也无内点
- 任何非平凡树，没有度为0的结点

- 林

- 不含圈的至少有两个连通分支的无向图
- 林的每个连通分支都是树

- 性质

- 非平凡树(n,m)有以下等价性质

- T连通无圈
- T和每对结点之间有且仅有一条道路
- T无圈且 $m=n-1$
- T连通且 $m=n-1$
- T连通，任意删除一边后不再连通，即每条边都是割边，边连通度为1
- T无圈，但在T中任何二结点之间增加一条新边后有且仅有一个圈

- 非平凡树(n,m)至少有两片树叶

- $n>2$ 的T必有内点，割点

- 10.4 图的矩阵表示

- 邻接矩阵

研究关于道路的问题

- 画前需要编号

- 性质

- 零图的邻接矩阵？全为0
- 单位阵对应的图？只有环

- 简单图没有环，主对角线全为0
- 用于判断图同构
 - 初等行列变换后互相转化
- 有向图的邻接矩阵和道路的关系
 - A^k 的 a_{ij} 表示结点 i 到 j 长度为 k 的道路数目
 - 使 $a_{ij}^k > 0$ 的最小 k 值，为两点间距离
 - 不可达， $a_{ij}^k = 0$ 恒成立
 - 有 $r+s$ 回路， $a_{ij}^r > 0$ 且 $a_{ji}^s > 0$
- 可达矩阵 P 的算法
 - 算 A 的各个次方，但只保留1（和运算）
 - 把他们都加在一起，依旧只保留1（或运算）
- 由 P 构造强分图的方法
 - P 和 P 转置布尔交（对角线置1，其余位置与运算）
 - 每行元素非0结点在一个强分图中
- 关联矩阵

用于研究有关子图的问题，1是出边，-1是入边。

 - 性质
 - 根据1和-1个数得到点的出入度
 - 每列刚好有一个1和一个-1
 - 孤立结点的行全是0
 - 同一个图的不同关联矩阵初等行列变换等价
 - 关联矩阵的秩
 - 设 G 是 n 阶弱连通无环有向图，其关联矩阵是 M ，则 M 的秩为 $n-1$ 。
 - 支数为 k ，阶数为 n 的无环有向图，关联矩阵的秩为 $n-k$

• 第12章 平面图

画在一个平面上没有任何交叉点

- 结论
 - 平面图的子/母图是平面图
 - 判定平面图只需要判定基图是否为平面图
 - $K_n (n \geq 5)$ 和 $K_{3,n} (n \geq 3)$ 都非平面图
 - 简单平面图($m > 1$)任何面的度至少为3。
 - 在一个平面图中，所有面的度之和等于 $2m$
 - 平面图有且仅有一个无限面
 - 不是割边的边一定是2个面的公共边
 - 有公共边的两个面互称为相邻面。

- 必要条件

- $n-m+f=2$

- $n-m+f=k+1$

- $m \leq 3n-6$

- 任何连通平面图中，至少存在1个度不超过5的结点

- $m \leq (g/g-2) \cdot (n-2)$

- ps: 围长g

- 一个图包含的最短圈的长度

- 任何简单图的围长大于等于3

- 任何二部图的围长大于等于4

- 充要条件

- 库拉托夫斯基定理：它的任何子图 不与 K_5 或 $K_{3,3}$ 及其细分图同构。

- 细分图：在图G的任意边uv上新增加有限个二度结点

- 第13章 欧拉图与哈密顿图

- 欧拉图

- 经过所有边

- 判定欧拉图

- 无向图

- 是否是欧拉图？

- 写度序列，全是偶数

- 是否有欧拉道路？

- 奇度结点0个/2个（道路两 endpoint

- 非欧拉怎么设计回路（无权图）？

- 添加重复边，变成欧拉图

- 有向图

- 弱连通图是否欧拉图？

- 写入度序列和出度序列，完全一样

- 弱连通图是否有欧拉道路？

- 除了两个结点（出度和入读差1，起点出度大终点入度大）外，其他度序列完全一样

- 在欧拉图中构造欧拉回路-Fleury算法

- 任意选起点，尽量不走桥

- 中国邮递员问题（构造无向有权图中走过每条边的最短闭道路）

- 1.至少包含每条边 2.权值最小

- 1.判断是否为欧拉图

- 2.不是欧拉图，有几个奇数点，设为 $2k$ ，解出 k

- 3. 写出这些奇度结点相互之间的所有最短路径（共有 $C(2, 2k)$ 条）

$v_1v_2(3)$

$v_1v_2v_3(5)$

$v_1v_7v_5(4)$

...

- 4. 列成 k 列，同一行需要覆盖所有奇度结点，选出其中和最小的一组复制
- 5. 构造欧拉回路

任意选起点，尽量不走桥

• 哈密尔顿图*****2+2+1

经过所有点

- 必要条件证否

- 1. 删点子图的分支数 \leq 删的点的个数，就不是哈密尔顿图——先试试删度数高的点

- 2. $\sum_{i=3}^n (i-2)(f_i(1) - f_i(2)) = 0$ ——奇偶数

$f_i(1)$ 表示含在哈密顿圈内部的 i 度面的个数

- 充分条件证是

- 3. 简单图任意结点有 $\deg(u) + \deg(v) \geq n-1$ ，则有哈密尔顿道路

- 4. $n \geq 3$ 的简单图任意结点有 $\deg(u) + \deg(v) \geq n-1$ ，则是哈密尔顿图

- 充要条件（图的闭包）

- 存在 $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ 的话就把 uv 连起来，直到找不到。5. 一个简单图是哈密顿图当且仅当其闭包是哈密尔顿图。

- 旅行商问题TSP（构造无向有权完全图中走过每个点的最短闭道路）