四川大学期中考试试题（闭卷）

(2024 — 2025 学年第 1 学期)　A 卷

课程号: 201018030　课序号:　课程名称: **概率统计（理工）**　任课教师:　成绩:

适用专业年级: 2023 级等　学生人数:　印题份数:　学号:　姓名:

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订)》，郑重承诺：

1. 已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
2. 不带手机进入考场；
3. 考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名:

注. 本试卷不允许使用计算器.

一、 填空题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 投掷 3 枚均匀骰子. 则 P(至少有两枚骰子点数相同) $=\underline{\ 4/9\ }$.
2. 实值随机变量 X, Y, Z 独立且分布相同. 如果 $P(XYZ=0)=7/8$, 那么, $P(X=0)=\underline{\ 1/2\ }$.
3. 若事件 $A\subset B\subset C$, $P(A|B)=P(B|C)=1/2$, 则 $P(A|C)=\underline{\ 1/4\ }$.
4. 单位圆盘 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ 内等可能选取一点, 用 R 表示该点到原点的距离, 则 $E(R)=\underline{\ 2/3\ }$.
5. 某个银行有两个柜台开放. 当丙走进银行时, 发现两个柜台的工作人员正分别接待甲和乙. 丙被告知, 一旦处理完甲或者乙的事情, 就开始接待他. 假设每位顾客的服务时间都服从参数为 λ 的指数分布. 那么, 在三人中, 丙的事情最后被处理完的概率是 $\underline{\ 1/2\ }$.
6. 若 X, Y, Z 独立且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布. 则, $E(\frac{X}{X+Y+Z})=\underline{\ 1/3\ }$.

二、 解答题 (6 小题, 共 82 分)

1. (13 分) 假设一个坛子里有两枚手感相同的不均匀硬币. 硬币 α 正面朝上的概率是 1/3, 反面朝上的概率是 2/3. 硬币 β 正面朝上的概率是 2/3, 反面朝上的概率是 1/3. 现从中随机取出一枚硬币, 连续抛掷两次. 那么, 在两次抛掷结果都是正面朝上的条件下, 取出的硬币是硬币 α 的后验概率是多少?

   解. 用 A 表示当初取出的硬币是硬币 α. 用 B 表示两次的抛掷结果都是正面. 所求为 $P(A|B)$. (2 分) 那么, $P(A)=P(\overline{A})=1/2$. (2 分)

$P(B|A) = 1/3 \times 1/3 = 1/9$, $P(B|A^c) = 2/3 \times 2/3 = 4/9$. (4 分) 利用贝叶斯后验概率公式, 我们得到

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})} \text{ (3 分)} = \frac{1}{5} \text{ (2 分)}.$$

2. (12 分) 假设 X 服从参数是 p_1 的几何分布, Y 服从参数是 p_2 的几何分布, 并且 X 和 Y 独立. 求 $Z = \min(X, Y)$ 的概率分布列.

解. 注意到 X 和 Y 的取值范围是全体正整数. 所以, $Z = \min(X, Y)$ 的取值范围也是全体正整数. (2 分) 对于 $n \geq 1$, 我们有

$$\begin{aligned} P(Z \geq n) &= P(\min(X, Y) \geq n) \\ &= P(X \geq n, Y \geq n) \text{ (2 分)} \\ &\overset{\text{独立性}}{=} P(X \geq n)P(Y \geq n) \text{ (2 分)} \\ &= (1-p_1)^{n-1}(1-p_2)^{n-1} \\ &= (1-r)^{n-1}, \end{aligned}$$

其中, $r = 1 - (1-p_1)(1-p_2)$. (2 分) 所以, 我们有

$$P(Z = n) = P(Z \geq n) - P(Z \geq n+1) = r(1-r)^{n-1}. \text{ (4 分)}$$

3. (15 分) 假设随机变量 X 和 Y 独立, 都服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布. 令 $Z = X - Y$.

(a) 求 $-Y$ 的密度函数.

(b) 求 Z 的密度函数 $f_Z(z)$.

(c) 求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$.

解.

(a) $W = -Y$ 服从 $U(-1, 0)$, 其密度函数为 $f_W(w) = 1_{(-1,0)}(w)$. (5 分)

(b) 利用卷积公式, 我们有

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_W(z-x)\,\mathrm{d}x \text{ (3 分)} \\ &= \begin{cases} z+1, & -1 < z < 0, \\ 1-z, & 0 \leq z < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad \text{(2 分)} \end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)\,\mathrm{d}t \text{ (3 分)} \\
&= \begin{cases} 0, & z<-1, \\ (1+z)^2/2, & -1\le z<0, \\ 1-(1-z)^2/2, & 0\le z<1, \\ 1, & z\ge 1. \end{cases} \text{ (2 分)}
\end{aligned}
$$

4. (20 分) 假设 (X, Y) 服从单位圆盘 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ 上的均匀分布.

(a) 写出 (X, Y) 的联合密度函数 $f(x, y)$.

(b) 计算 X 和 Y 各自的边缘密度函数.

(c) 判断 X 和 Y 是否独立, 并说明理由.

(d) 计算条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$.

(e) 求条件概率 $P(|X| \le 1/2 | Y = 0)$.

解.

(a) 根据均匀分布的定义, 我们有

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} 1_D(x, y). \text{ (4 分)}$$

(b) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ (1 分) $= 1_{(-1,1)}(x) \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$. (1 分) 类似的, 可以求得 $f_Y(y) = 1_{(-1,1)}(y)\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$. (2 分)

(c) 因为 $f(x, y) \ne f_X(x) f_Y(y)$, 所以, X 和 Y 并不独立. (4 分)

(d) 对于 $-1 < y < 1$, 我们有

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \text{ (2 分)} \\
&= 1_{(-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2})}(x) \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}. \text{ (2 分)}
\end{aligned}
$$

(e) 注意到 $f_{X|Y}(x|0) = 1_{(-1,1)}(x)/2$. (1 分) 所以, 我们有

$$
\begin{aligned}
P(|X| \le 1/2 | Y = 0) &= P(X \in [-1/2, 1/2] | Y = 0) \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} f_{X|Y}(x|0)\,\mathrm{d}x \text{ (2 分)} = 1/2. \text{ (1 分)}
\end{aligned}
$$

5. (10 分) 假设 X 服从参数是 1 的泊松分布, 且 $Y = |X - 1|$.

(a) 求 Y 的期望 $E(Y)$.

(b) 求 Y 的方差 $D(Y)$.

解.

(a) 根据泊松分布的定义, 我们有 $P(X=k)=\frac{1}{k!}e^{-1}$. (2 分) 根据佚名统计学家公式, 我们有

$$E(Y)=E(|X-1|)=\sum_{k=0}^{\infty}|k-1|P(X=k)\ (2\text{ 分})=2e^{-1}.\ (1\text{ 分})$$

(b) 由于 X 服从参数为 1 的泊松分布, 所以, $E(X)=D(X)=1$. (1 分) 我们有 $E(Y^2)=E(|X-1|^2)=E(X^2)-2E(X)+1=D(X)+(E(X)-1)^2$ (2 分) $=1$ (1 分). 最后, 我们有 $D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=1-4e^{-2}$. (1 分)

6. (12 分) 设二元随机变量 (X,Y) 在区域

$$D=\{(x,y):0<x<1,x^2<y\le\sqrt{x}\}$$

上服从均匀分布. 令 $Z=\begin{cases}1, & X\le Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

(a) 写出 (X,Y) 的概率密度函数.

(b) 问 X 与 Z 是否独立? 并说明理由.

(c) 求 $W=X+Z$ 的密度函数 $f_W(w)$.

解.

(a) 注意到 $|D|=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,\mathrm{d}x=1/3$. (2 分) 所以, $f(x,y)=3\times 1_D(x,y)$. (2 分)

(b) X 和 Z 不独立, 因为利用对称性, $P(Z=1)=1/2$, 而 $P(Z=1|X=1/4)=P(X\le Y|X=1/4)=P(Y\ge 1/4|X=1/4)=\frac{\sqrt{1/4}-1/4}{\sqrt{1/4}-(1/4)^2}=4/7\ne P(Z=1)$. (4 分)

(c) 注意到 W 的取值范围是 $(0,2)$. (1 分) 对于 $w\in(0,1)$,

$$\begin{aligned}F_W(w)&=P(W\le w)\\&=P(X+Z\le w)\\&=P(Z=0,X\le w)\\&=P(Y<X\le w)\\&=\int_{0<y<x<w}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=3w^2/2-w^3.\end{aligned}$$

对于 $w \in [1,2]$,

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \le w) \\ &= P(X + Z \le w) \\ &= P(Z = 0, X \le w) + P(Z = 1, X \le w - 1) \\ &= P(Y < X) + P(X \le Y, X \le w - 1) \\ &= 1/2 + \int_{x \le y, x \le w-1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 1/2 + 2(w-1)^{3/2} - 3(w-1)^2/2. \text{ (2 分)} \end{aligned}$$

所以, 对于 $w \notin (0,2)$, $f_W(w) = 0$; 对于 $w \in (0,1)$, $f_W(w) = F'_W(w) = 3w(1-w)$; 对于 $w \in [1,2)$, $f_W(w) = F'_W(w) = 3[\sqrt{w-1} - (w-1)]$. (1 分)