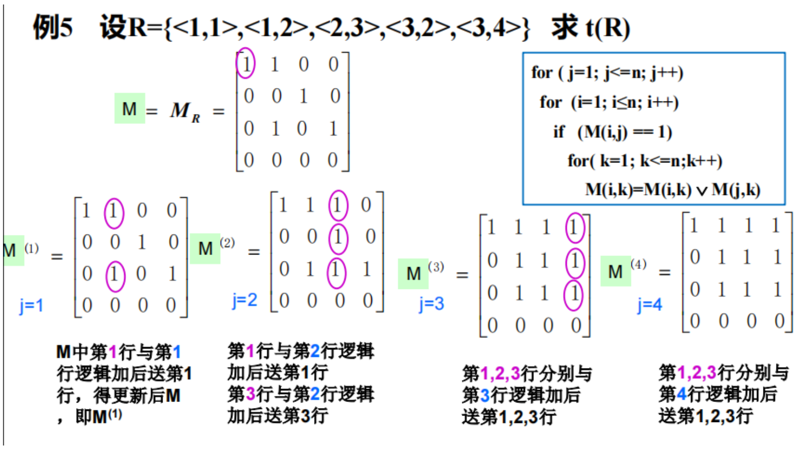
# 离散数学期末4：考前必背精炼

- ## 集合与关系
  - 个数
    - a到b关系数量，函数数量
    - a上得关系数量，函数梳理，置换数量，等价关系数
    - n个变元，解释数，公式数，极小项和极大项和
  - 二元关系
    - 闭包
      - **Warshall算法求传递闭包?**




        - 对于每个1(aij)，把第i行和第j行逻辑加，送回第i行
  - 函数
    - 判断AB等不等势
    - 判断是不是可数集
      - 和N等势，基数相等
      - Z，Q，NxN以及他们的无限子集和并集
    - 判断是不是无限集
      - 不和Nm等势
      - 存在N到X的单射
      - 可数集一定是无限集
- ## 图论
  - **图的范围**
    - 无向简单 m ≤ n*(n-1)/2 完全图取等
    - 有向简单 m ≤ n*(n-1) 完全图取等
    - 无向完全二部图Kn1,n2 m=n1*n2

- 图的矩阵表示
  - **求任意两点之间距离?**
    - A^k的aij表示结点i到j长度为k的道路数目
    - 使aij^k>0的最小k值，为两点间距离
  - **判断是否有回路?**
    - 有r+s回路，aij^r>0且aji^s>0
  - **判定两点是否可达？/构造可达矩阵P**
    - 算A的各个次方，但只保留1（与运算）
    - 把他们都加在一起，依旧只保留1（或运算）
  - **用可达矩阵构造强分图？求无向图的连通分支数?**
    - P和P转置布尔交（对角线置1，其余位置与运算）
    - 每行元素非0结点在一个强分图中
  - **关联矩阵的秩？求有向图的连通分支数?**
    - n阶弱连通无环有向图，关联矩阵M的秩为 n-1
    - k支n阶的无环有向图，关联矩阵M的秩为 n-k
- 平面图&欧拉&哈密尔顿******
  - **判定平面图?**
    - 必要条件
      - **k=1**
        - **n-m+f = 2**
        - **m ≤ 3n-6**
          - 任何连通平面图中，至少存在1个度不超过5的结点
        - **m ≤ (g/g-2)*(n-2)**
      - **k>1**
        - **n - m + f = k+1**
        - **m ≤ 3n-3(k+1)**
    - 充要条件
      - 任何子图不与 K5或K3,3及其细分图同构。
  - **其他证明题结论**
    - 欧拉定理：任何图，点度和=2m，奇度结点个数必为偶数
    - 平面图面度和=2m
    - 简单平面图(m>1)任何面的度至少为3
    - Kn(n≥5) 和 K3,n(n≥3) 都非平面图
    - 平面图的子/母图是平面图
    - 简单图g≥3，二部图g≥4

- 欧拉图&哈密尔顿图
  - 判定欧拉图
    - 无向图
      - **是否是欧拉图?**
        - 写度序列，全是偶数
      - **是否有欧拉道路?**
        - 奇度结点0个/2个（道路两端点
      - **非欧拉怎么设计回路（无权图）？**
        - 添加重复边，变成欧拉图
    - 有向图
      - **弱连通图是否欧拉图?**
        - 写入度序列和出度序列，完全一样
      - **弱连通图是否有欧拉道路?**
        - 除了两个结点（出度和入读差1，起点出度大终点入度大）外，其他度序列完全一样
  - 在欧拉图中构造欧拉回路-Fleury算法
    - 任意选起点，尽量不走桥
  - 中国邮递员问题（构造无向有权图中走过每条边的最短闭道路）

    1.至少包含每条边 2.权值最小
    - 1. 判断是否为欧拉图
    - 2. 不是欧拉图，有几个奇数点，设为2k，解出k
    - 3. 写出这些奇度结点相互之间的所有最短路径（共有C(2,2k)条）

      v1v2(3)

      v1v2v3(5)

      v1v7v5(4)

      ...
    - 4. 列成k列，同一行需要覆盖所有奇度结点，选出其中和最小的一组复制
    - 5. 构造欧拉回路-Fleury算法

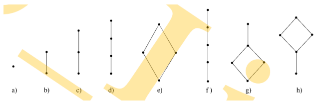
      任意选起点，尽量不走桥
  - 哈密尔顿图/道路的判定?
    - 必要条件证否
      - 删点子图的分支数 ≤ 删的点的个数，就不是哈密尔顿图 ——先试试删度数高的点
      - $\sum(i=3,n)$ (i-2)(fi(1) - fi(2)) = 0 ——奇偶数

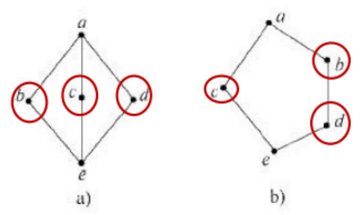
        fi(1)表示含在哈密顿圈内部的i度面的个数
    - 充分条件证是
      - 简单图任意结点有deg(u)+deg(v) ≥ n-1，则有哈密尔顿**道路**

                    - n≥3的简单图任意结点有deg(u)+deg(v) ≥ n，则是哈密尔顿图
                - 充要条件（图的闭包）
                    - 存在deg(u)+deg(v) ≥ n的话就把uv连起来，直到找不到。一个简单图是哈密顿图当且仅当其闭包是哈密尔顿图。
                - ⊠(⊠ ≥ 2) 阶竞赛图中一定存在哈密尔顿路
                - ⊠(⊠ ≥ 3) 阶简单图 ⊠ 的闭包 ⊠ (⊠) **是完全图**，则 ⊠ 是哈密尔顿图.
- ## 代数系统
    - ### 群和半群****
        - 判定半群、含幺半群及群
            - 半群【闭、结】
            - 含幺半群【闭、结、幺】
            - 群【闭、结、幺、逆】

            > 0的存在决定很多不是群，满足消去律
        - 判定子半群&子群
            - 子半群
                - 非空子集，运算封闭
            - 含幺子半群
                - 含幺，运算封闭
            - 子群
                - 含幺（且相同），运算封闭，每元可逆
                - 充要条件：任意a,b∈S有a*b^-1∈S
        - 幂等元&零元&可逆元
            - 有限半群，必有幂等元
            - 含幺半群至少有一个幂等元、一个可逆元——幺元
            - 群有且仅有一个幂等元（幺元），阶>1的群没有零元
        - 判定同态和同构，以及性质
            - 判定是不是同态/同构
                - 同态(映射)：先运算再映射=先映射再运算
            - 性质
                - 若同态，前者<X,*>有的性质，后者<f(X),o>都有，反之不然
                - 若满同态映射，前者<X,*>是半群/群，后者<Y,o>也是半群/群
                - 若同构，前者<X,*>有的性质&是半群/群，后者<Y,o>都有&是半群/群，反之亦然
        - 生成元
            - a和k满足互质的a [a]是<Zk,O+>的生成元
    - ### 格与布尔代数*

- **判定是不是格?**
  - 【判定1-充要】<L,∩,∪>，∩,∪都满足**交换、结合、幂等、吸收**
  - 【判定2-必要：先转为哈斯图】**有限**偏序集，**<L,≤>具有最大元和最小元**
- **判断是否为分配格?**
  - 4格元素以下的格是分配格

    
  - 5格元素的格就这两个不是

    
    
  - 6格及以上，是分配格当且仅当没有任何子格和他们同构
- **判定有补分配格（布尔格）？**
  - 有补分配格中每元补唯一
  - n个原子则|B|=2^n
- 判定是不是同态同构、保序
  - a≤b 则 f(a)是f(b)子集，则保序
  - 若是格同态映射，则为保序**映射**，反之**不然**
  - 若是格同构映射，则为保序**双射**，反之**亦然**
- 判定是不是子格
  - 非空子集，是格
  - 非空子集，运算封闭