1

List 4:

1) Forma Matricial do sistema estrutural:

$$\underset{N\times M}{Y}\ \underset{M\times M}{\Gamma} + \underset{N\times K}{X}\ \underset{K\times M}{B} = \underset{N\times M}{E}$$

$$(y_1\ y_2\ y_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & 1 & 0 \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & 1 \end{bmatrix} + (x_1\ x_2\ x_3)\begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{12} & \beta_{23} & 0 \end{bmatrix} = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)$$

Hipóteses
$$\begin{cases} |\Gamma| \neq 0 \\ \text{RANK}(X) = 3 \\ E(\varepsilon \mid X) = 0 \\ E(\varepsilon\varepsilon' \mid X) \text{ positive-definida} \end{cases}$$

$$M = 3 \Rightarrow M-1 = 2$$

condições de ordem: Eq (1): 1 restrição de exclusão; 3 endógenas $3-1=2 \Rightarrow$ ~~exatamente~~ sub-identificada

Eq (2): 1 restrições de exclusão; 2 endógenas $\Rightarrow$ exatamente identificada

Eq (3): 2 restrições de exclusão; 2 endógenas $\Rightarrow$ sobre-identificada

Condições de posto: $\Delta = \begin{bmatrix} \Gamma \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & 1 & 0 \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & 1 \\ \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{12} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & 0 \end{bmatrix}$ $\quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$R_2 \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & 1 & 0 \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & 1 \\ \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{12} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{22} & \beta_{12} \\ (\gamma_{12}+\beta_{11}+\beta_{13}) & (1+\beta_{23}) & (0) \end{bmatrix}$$

Posto $(R_2 \Delta) = 2$

$\Rightarrow$ Eq (2) é exatamente identificada

$$R_3 \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & 1 & 0 \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & 1 \\ \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{12} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{22} & \beta_{12} \\ 1+\beta_{11} & 0 & \gamma_{31} \end{bmatrix}$$

posto $(R_3 \Delta) = 2 \Rightarrow$ sobre-identificada

2) a) Eq (1) apenas (visto em sala)

b) $E(\varepsilon_2 | \varepsilon_1) = 0 \Rightarrow cov(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = 0$

~~Equação~~ Forma reduzida: $y_1 = a_0 + a_1 x_1 + u_1$; $a_0 = 0$

$y_2 = b_0 + b_1 x_1 + u_2$; $b_0 = 0$

$a_1 = \dfrac{\gamma_{12}\beta_{21}}{1-\gamma_{21}\gamma_{12}}$ $\quad b_1 = \dfrac{\beta_{21}}{1-\gamma_{21}\gamma_{12}}$ $\quad u_1 = \dfrac{\varepsilon_1 + \gamma_{12}\varepsilon_2}{1-\gamma_{12}\gamma_{21}}$ $\quad u_2 = \dfrac{\varepsilon_2 + \gamma_{21}\varepsilon_1}{1-\gamma_{12}\gamma_{21}}$

$\hat{\gamma}_{12} = \dfrac{\hat{a}_1}{\hat{b}_1}$

② $s_{v_1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum \hat{v}_1^2 \approx \sigma_{v_1}^2$; $s_{v_2}^2 \approx \sigma_{v_2}^2$

$\sigma_{v_1}^2 = \dfrac{\sigma_1^2 + \rho_{12}^2\sigma_2^2}{(1-\rho_{12}\rho_{21})^2}$ $\quad \sigma_{v_2}^2 = \dfrac{\sigma_2^2 + \rho_{21}^2\sigma_1^2}{(1-\rho_{12}\rho_{21})^2}$

$\sigma_{v_1 v_2} = cov(v_1, v_2) = \dfrac{1}{(1-\rho_{12}\rho_{21})^2}\left(\rho_{21}\sigma_1^2 + \rho_{12}\sigma_2^2\right)$

$\Rightarrow$ Resolver sistema
$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{v_1}^2 = \dfrac{\sigma_1^2 + \hat{\rho}_{12}^2\sigma_2^2}{(1-\hat{\rho}_{12}\rho_{21})^2} \\ \hat{\sigma}_{v_2}^2 = \dfrac{\sigma_2^2 + \rho_{21}^2\sigma_1^2}{(1-\hat{\rho}_{12}\rho_{21})^2} \\ \hat{\sigma}_{v_1 v_2} = \dfrac{\rho_{21}\sigma_1^2 + \hat{\rho}_{12}\sigma_2^2}{(1-\hat{\rho}_{12}\rho_{21})^2} \end{cases}$$
p/ $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2$ e $\hat{\rho}_{21}$

$\Rightarrow$ Resolver $\hat{\beta}_{21} = (1-\hat{\rho}_{12}\hat{\rho}_{21})\hat{\delta}_1$

3) a) Ambas as equações são identificadas

eq 1: Ordem $\rightarrow$ 1 exclusão, 2 endógenas $(2-1=1)$

posto: $(0\ 0\ 0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{pmatrix} = (0\ \beta_2) \rightarrow$ posto $= 1 = M-1$

eq 2: análogo

ordem $\rightarrow$ 1 exclusão p/ 2 endógenas

posto: $R\Delta = (\alpha_2\ 0)$

b) Se $\alpha_2 = 0$ a condição de posto da eq 2 fica $R\Delta = (0\ 0)$
c/ posto $= 0$ (sub-identificada)

Na forma reduzida $p = \tilde{\pi}_{10} + \tilde{\pi}_{11} y + \tilde{\pi}_{12} w + \varepsilon_p$

$$\tilde{\pi}_{10} = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1}; \quad \tilde{\pi}_{11} = \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}; \quad \tilde{\pi}_{12} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$q = \tilde{\pi}_{00} + \tilde{\pi}_{01} y + \tilde{\pi}_{02} w + \varepsilon_q$$

$$\tilde{\pi}_{00} = \frac{\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1}; \quad \tilde{\pi}_{01} = -\frac{\alpha_1 \beta_2}{\beta_1 - \alpha_1}; \quad \tilde{\pi}_{02} = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\beta_1 - \alpha_1}$$

Se $\alpha_2 = 0 \Rightarrow \tilde{\pi}_{02} = \tilde{\pi}_{12} = 0$

p/ $\theta = \begin{bmatrix} \tilde{\pi}_{00} & \tilde{\pi}_{10} \\ \tilde{\pi}_{01} & \tilde{\pi}_{11} \\ \tilde{\pi}_{02} & \tilde{\pi}_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow H_0: R\theta = r$ onde $R = (0\ 0\ 1)$
$r' = (0\ 0)$

Teste de wald: $(R\hat{\beta} - r)' [var(R\hat{\beta})]^{-1} (R\hat{\beta} - r) \sim \chi^2_{(2)}$

$$w = (\hat{\tilde{\pi}}_{02}\ \hat{\tilde{\pi}}_{12})' \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^2_{02} & \hat{\sigma}_{0212} \\ \hat{\sigma}_{0212} & \hat{\sigma}_{12} \end{bmatrix}^{-1} (\hat{\tilde{\pi}}_{02}\ \hat{\tilde{\pi}}_{12}) \sim \chi^2_{(2)}$$

Obs: este é um teste assintótico. Em amostras finitas pode-se recorrer a um teste F

c) A identificação está na restrição de exclusão (teórica) não no sinal de α_2. Se a hipótese teórica de que y é bom instrumento para p na eq 1 estiver errada, de nada adianta o sinal de $\hat{\alpha}_2$ ser positivo. Além disso, se y for instrumento fraco para p e a amostra for pequena, é possível que o sinal de $\hat{\alpha}_1$ seja inclusive negativo por erro amostral.

4) a) $\frac{\partial E(\cdot)}{\partial x_1} = \beta_1 + \beta_3 x_2 \Rightarrow E\left(\frac{\partial E(\cdot)}{\partial x_1}\right) = \beta_1 + \beta_3 \mu_2$

$\frac{\partial E(\cdot)}{\partial x_2} = \beta_2 + \beta_3 x_1 + 2\beta_4 x_2 \Rightarrow E\left(\frac{\partial E(\cdot)}{\partial x_2}\right) = \beta_2 + \beta_3 \mu_1 + 2\beta_4 \mu_2$

b) $E(y|x_1, x_2) = \beta_0 + (\alpha_1 - \beta_3 \mu_2) x_1 + (\alpha_2 - \beta_3 \mu_1 - 2\beta_4 \mu_2) x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \beta_4 x_2$

$= \beta_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_3 [-\mu_2 x_1 - \mu_1 x_2 + x_1 x_2] + \beta_4 [x_2^2 - 2\mu_2 x_2]$

c) (i) conhecendo os μ's, você pode construir novas variáveis
$z_1 = -\mu_2 x_1 - \mu_1 x_2 + x_1 x_2$
$z_2 = x_2^2 - 2\mu_2 x_2$

(ii) regredir $y = \beta_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_3 z_1 + \beta_4 z_2 + \varepsilon$

Caso não conheça os μ's não posso fazer o passo (i)

5) a) Na lista anterior (e em sala), vimos que $\hat{b}_2$ pode ser obtido por MQO através (i) de em primeiro lugar regredir Y_1 vs $\hat{U}$ e Y_2 vs $\hat{U}$, e posteriormente (ii) regredir o resíduo da primeira regressão contra o resíduo da segunda.

Da lista passada (exercício 3b), temos que

$$\hat{b}_2 = (Y_2' M_{\hat{v}} Y_2)^{-1} Y_2' M_{\hat{v}} Y_1$$

; onde $M_{\hat{v}} = I - P_{\hat{v}}$ projeta no núcleo de $\hat{v}$

O núcleo de $\hat{v}$ tem como propriedade ser exatamente ortogonal a z, de modo que $M_{\hat{v}} = P_z$

$$\Rightarrow \hat{b}_2 = (Y_2' P_z Y_2)^{-1} Y_2' P_z Y_1 = \hat{b}_2^{VI}$$

④ b) Como $y_2 \not\perp \varepsilon$, os parâmetros estimados são viesados e inconsistentes, de modo que as premissas para a testagem não são válidas e portanto o teste também não. Para que pudéssemos fazer tal teste, seria necessário ~~xx~~ $y_2, z \perp \varepsilon$, mas nesse caso não precisaríamos de VI.

Caso $cov(z, y_2) = 0$, a inclusão ou não de y_2 na regressão manteria $\hat{b}_1$ consistente, e o teste $\hat{b}_1 = 0$ seria pertinente p/ $cov(z, \varepsilon) = 0$ (exercício 2 da lista anterior). Como não sabemos a priori se $cov(z, y_2) = 0$ (aliás caso em que z não seria bom instrumento), o teste é inválido.

6)
$$y_1 = b_0 + b_1 z + b_2 y_2^* + u + v$$
$$\varepsilon = \cancel{xx}\, y_2 - y_2^*$$

~~modelo verdadeiro~~: $y = b_0 + b_1 z + b_2 (y_2 - \varepsilon) + \frac{1}{a_1}\left[q - a_0 - \omega\right] + v$

$$= \left(b_0 - \frac{a_0}{a_1}\right) + b_1 z + b_2 y_2 + \frac{1}{a_1} q + \underbrace{\left[v - \frac{\omega}{a_1} - b_2 \varepsilon\right]}_{\varepsilon}$$

$\rightarrow y_2 \not\perp \cancel{u}\overset{\text{e possivelmente } \omega}{\varepsilon}$; $q \not\perp \omega$

- Preciso de ao menos 2 instrumentos p/ y_2, q; satisfazendo as condições de ordem e posto
- Seja $\beta = \begin{bmatrix} b_0 - \frac{a_0}{a_1} \\ b_1 \\ b_2 \\ a_1^{-1} \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ 1 & z & y_2 & q \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$; $Z = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ 1 & z & z_1 & z_2 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$

(5) $P_Z = Z(Z'Z)^{-1}Z'$

$\Rightarrow \hat{\beta}^{VI} = (X'P_Z X)^{-1} X' P_Z Y$

obs

↳ INTERCEPTO ESTRUTURAL NÃO-IDENTIFICADO

7) a) Momentos: $E(u) = 0 = E(uz)$

$$E(uz) = 0 \Rightarrow \hat{E}(\hat{u}z) = 0 = \frac{1}{N}\sum(y - \hat{a} - \hat{b}x)z$$

$$z \text{ binário}: 0 = \frac{1}{N}\left[\cancel{\sum_{z=0}(y-\hat{a}-\hat{b}x)z}^{\,0} + \sum_{z=1}(y-\hat{a}-\hat{b}x)\right]$$

MULTIPLICANDO AMBOS OS LADOS POR $\frac{N}{N_1}$ (N_1 = #observações p/ $z=1$)

$$\frac{1}{N_1}\sum_{z=1} y - \hat{a} - \hat{b}x = 0 = \frac{1}{N_1}\sum_{z=1}\hat{u} \quad \left(\text{LOGO} \sum_{z=1}\hat{u} = 0\right)$$

$$\bar{y}^{(z=1)} - \hat{a} - \hat{b}\,\bar{x}^{(z=1)} = 0$$

$$E(u) = 0 \Rightarrow \frac{1}{N}\sum\hat{u} = 0 = \frac{1}{N}\left[\sum_{z=0}\hat{u} + \cancel{\sum_{z=1}\hat{u}}^{\,0}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{z=0}\hat{u} = 0$$

multiplicando ambos os lados por $\frac{N}{N_0}$: $\frac{1}{N_0}\sum_{z=0}\hat{u} = \frac{1}{N_0}\sum_{z=0} y - \hat{a} - \hat{b}x = 0$

$$\Rightarrow \bar{y}^{(z=0)} - \hat{a} - \hat{b}\,\bar{x}^{(z=0)} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{y}^{(z=1)} - \bar{y}^{(z=0)} = \hat{b}\left[\bar{x}^{(z=1)} - \bar{x}^{(z=0)}\right]$$

$$\Rightarrow \hat{b} = \frac{\bar{y}^{(z=1)} - \bar{y}^{(z=0)}}{\bar{x}^{(z=1)} - \bar{x}^{(z=0)}}$$

b) • Se X é binário, então $\bar{X}$ é a proporção de $X=1$, e estima $Pr(X=1)=p$

• Em nosso caso: $$\hat{b}^{VI} = \frac{\hat{E}(Y|Z=1) - \hat{E}(Y|Z=0)}{\hat{Pr}(X=1|Z=1) - \hat{Pr}(X=1|Z=0)}$$

O modelo fica $Y = a + bX + \varepsilon$

onde $E(Y|X=1) = a+b$

$E(Y|X=0) = a$

$b = E(Y|X=1) - E(Y|X=0)$ é interpretável

como o efeito médio de tratamento (ATE, na jargão de avaliação de impacto)

c) MQO

$$\hat{b} = \frac{\sum(x-\bar{x}^{(\omega)})(y-\bar{y}^{(\omega)})}{\sum(x-\bar{x}^{(\omega)})^2} = \frac{\sum_{\omega=\omega_+}(x-\bar{x}^{(\omega)})(y-\bar{y}^{(\omega)}) + \sum_{\omega=\omega_-}(x-\bar{x}^{(\omega)})(y-\bar{y}^{(\omega)})}{\sum(x-\bar{x}^{(\omega)})^2}$$

$$= \frac{\sum_{\omega=\omega_+}(x-\bar{x}^{(\omega)})^2}{\sum(x-\bar{x}^{(\omega)})^2}\hat{b}_+ + \frac{\sum_{\omega=\omega_-}(x-\bar{x}^{(\omega)})^2}{\sum(x-\bar{x}^{(\omega)})^2}\hat{b}_-$$

$$= \frac{\frac{1}{N_+}\sum_{\omega=\omega_+}(x-\bar{x}^{(\omega)})^2}{\frac{1}{N}\sum(x-\bar{x}^{(\omega)})^2}\hat{\varepsilon}\hat{b}_+ + \frac{\frac{1}{N_-}\sum_{\omega=\omega_-}(x-\bar{x}^{(\omega)})^2}{\frac{1}{N}\sum(x-\bar{x}^{(\omega)})^2}(1-\hat{\varepsilon})\hat{b}_-$$

$$= \frac{\hat{Var}(X|\omega=\omega_-)}{E[Var(X|\omega)]}\hat{\varepsilon}\hat{b}_+ + \frac{\hat{Var}(X|\omega=\omega_-)}{E[Var(X|\omega)]}(1-\hat{\varepsilon})\hat{b}_-$$

VI: $\hat{b} = cov(x, z$

(6)

8) $y = a + bx + \varepsilon$

$$\frac{y}{x} = b + a\left(\frac{1}{x}\right) + e$$

$$\hookrightarrow \frac{y}{x} \Big| x \sim N\left(\beta + \alpha\left(\frac{1}{x}\right) ; \sigma^2\right)$$

$$\hat{\alpha}^{MQG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}_i - \bar{\tilde{y}})(\tilde{x}_i - \bar{\tilde{x}})}{\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i - \bar{\tilde{x}})^2} \quad ; \text{onde } \tilde{y}_i = \frac{y_i}{x_i}$$

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{x_i}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}^{MQG} = 1{,}2184$$

$$\hat{\beta} = \bar{\tilde{y}} - \hat{\alpha}\bar{\tilde{x}} = 1{,}6493$$

9) O exercício mostra uma situação onde

Y	X
Y_1	1
Y_2	2
Y_3	3

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

MQG é BLUE (pois Σ é conhecida)

$$\Rightarrow \hat{\theta} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1} X'\Sigma^{-1} Y$$

$$= \left(\frac{49}{24}\right)^{-1} \left[\frac{y_1}{4} + \frac{y_2}{3} , \frac{3y_3}{8}\right]$$

10) a) A loteria S nesse caso foi violada como experimento aleatorizado, mas continua sendo verdade que $cov(S, \varepsilon) = 0$

$cov(S, B) > 0$

Nosso modelo empírico é $Y = a + bS + \varepsilon$; onde

$Y = \#$ calorias

$$\Rightarrow \boxed{\hat{b} = \frac{\widehat{cov}(Y, S)}{\widehat{cov}(B, S)}}$$

fornece a resposta do experimento.

7

Santander UNIVERSIDADES

10) b) O problema aqui é que não sabemos, no grupo de controle, quais seriam os indivíduos que satisfariam os critérios subjetivos do conselho do departamento. Se soubéssemos, poderíamos comparar apenas as médias dos grupos de tratamento que satisfizessem (ou não) este critério, e obter, a partir da loteria S,

efeito da bolsa sobre os "queridinhos" $E[Y \mid S=1, C=1] - E[Y \mid S=0, C=1]$

efeito da bolsa sobre os "rejeitados" $\leftarrow E[Y \mid S=1, C=0] - E[Y \mid S=0, C=0]$

Se por exemplo o departamento gostar mais dos magrinhos ou dos gordinhos, teremos B correlacionado com E. Ainda assim, S é um bom instrumento para B.