

Lista Prática 4

Exercício 1. Neste exercício, usaremos a base de dados *meap00_01*, do pacote *wooldridge*, cujas observações são escolas de Michigan. Queremos estimar o seguinte modelo:

$$\text{math4} = \beta_0 + \beta_1 \text{lunch} + \beta_2 \text{lenroll} + \beta_3 \text{lexppp} + \varepsilon \quad (1.1)$$

em que

- *math4*: percentual de alunos de 4^o ano com nível de matemática satisfatório
 - *lunch*: percentual de estudantes elegíveis ao programa de auxílio para almoço
 - *lenroll*: log de matrículas escolares
 - *lexppp*: log de gastos por estudante
- a) Estime por MQO com erros padrão usuais e robustos à heterocedasticidade por White (1980). Obtenha a matriz de variâncias-covariâncias do estimador robusta “na mão”, ou seja, não use funções que façam os cálculos para você (como `vcovHC(..., "HC0")` ou outras)¹. As estimativas e os erros padrão são distintos? Justifique.
- b) Faça o teste de White para heterocedasticidade. Quais são os modelos restrito e irrestrito utilizados no teste F? Analise o resultado do teste a partir estatística obtida.
- c) Faça a regressão de $g_i \equiv \log(\hat{\varepsilon}_i^2)$ em função dos valores preditos $\widehat{\text{math4}}$ e $\widehat{\text{math4}}^2$, obtidos pelo modelo do item (a). Calcule os pesos $w_i = 1/\exp(\hat{g}_i)$ para estimar o modelo (1.1) por MQGF. Há diferenças em relação aos resultados obtidos por MQO?
- d) Davidson e MacKinnon (1999, pág. 264) afirmam que é possível iterar o procedimento de MQGF. Para isto usam-se as estimativas obtidas no item (c) para calcular novos pesos $w_i = 1/\exp(\hat{g}_i)$ e novas estimativas, e isso pode ser repetido iteradamente. Faça iterações do procedimento de MQGF enquanto a seguinte condição for verdadeira:

$$\max\{\hat{\beta}^{it+1} - \hat{\beta}^{it}\} > 1 \times 10^{-15},$$

em que *it* é o número de uma iteração.

Informe quantas iterações foram necessárias para a convergência e compare os quatro modelos estimados (MQO, MQO com erros padrão robustos, MQGF, e MQGF com iteração) usando a função *stargazer()* do pacote de mesmo nome. Há algum modelo melhor para analisar o efeito de gastos (*lexppp*) em *math4*? Explique.

¹Além de obter os resíduos por meio da função `residuals()` sobre o objeto de regressão gerado por `lm()`, é possível obter a matriz **X** usando `model.matrix()` no mesmo objeto.

Resposta:

- a) A estimação robusta à heterocedasticidades resulta em erros padrão maiores do que estimado por MQO.

```

1 ## MQO
2 reg.ols = lm(math4 ~ lunch + lenroll + lexppp, meap00_01)
3
4 ## MQO com erros padrão robustos
5 # calculando matriz de vcov robusta
6 ehat = resid(reg.ols)
7 X = model.matrix(reg.ols)
8 Sigma = diag(ehat^2)
9 bread = solve(t(X) %*% X)
10 meat = t(X) %*% Sigma %*% X
11 vcov_robust = bread %*% meat %*% bread
12 vcov_robust
13
14 reg.ols.rob = coeftest(reg.ols, vcov=vcov_robust)
15 # reg.ols.rob = coeftest(reg.ols, vcov=sandwich::vcovHC(reg.ols,"HCO"))
16
17 # Comparando resultados
18 stargazer::stargazer(reg.ols, reg.ols.rob, type="text")

```

Dependent variable:		
	math4	
	OLS	coefficient
		test
	(1)	(2)
lunch	-0.449*** (0.015)	-0.449*** (0.017)
lenroll	-5.399*** (0.940)	-5.399*** (1.130)
lexppp	3.525* (2.098)	3.525 (2.351)
Constant	91.932*** (19.962)	91.932*** (23.060)
Observations	1,692	
R2	0.373	
Adjusted R2	0.372	
Residual Std. Error	15.302 (df = 1688)	
F Statistic	334.567*** (df = 3; 1688)	
Note: *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01		

- b) Precisamos estimar o seguinte modelo:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \alpha + \gamma \widehat{\text{math4}}_i + \delta \widehat{\text{math4}}_i^2 + e$$

O teste de White compara este modelo acima (irrestrito - *ur*) com o modelo sem nenhuma variável explicativa (restrito - *r*) que, portanto, possui $R_r^2 = 0$. A hipótese de que ambos

modelos são estatisticamente distintos pode ser testado pela seguinte estatística F :

$$F = \frac{R_{ur}^2 - R_r^2}{(1 - R_{ur}^2)} \frac{N - K - 1}{2}$$

No R, basta usar a função `summary()` no objeto da regressão do modelo estimado:

```
1 ehat = resid(reg.ols)
2 yhat = fitted(reg.ols)
3 reg.resid = lm(ehat^2 ~ yhat + I(yhat^2))
4 summary(reg.resid)
```

```
1              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
2 (Intercept) 1664.12793   315.21438    5.279 1.46e-07 ***
3 yhat        -28.29903    9.21685   -3.070 0.00217 **
4 I(yhat^2)      0.11553    0.06591    1.753 0.07982 .
5 ---
6 Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1
7
8 F-statistic: 132.7 on 2 and 1689 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

A estatística $F = 132.7$ é uma forte evidência contra a hipótese nula (homocedasticidade).

c) Encontraremos os valores preditos, \hat{g}_i , do seguinte modelo:

$$g_i \equiv \log(\hat{\varepsilon}_i^2) = \gamma_0 + \gamma_1 \widehat{\text{math4}}_i + \gamma_2 \widehat{\text{math4}}_i^2 + u$$

```
1 reg.aux = lm(log(ehat^2) ~ yhat + I(yhat^2))
2 head(fitted(reg.aux))
```

```
1          1          2          3          4          5          6
2 4.138865 3.194563 3.476371 3.698343 3.739361 3.746300
```

Agora, calcularemos os pesos $w_i = 1/\exp(\hat{g}_i)$ para utilizá-los na estimação por MQGF:

```
1 w = 1 / exp(fitted(reg.aux))
2 reg.fgls = lm(math4 ~ lunch + lenroll + lexppp, meap00_01, weights=w)
3
4 # Comparativo
5 stargazer::stargazer(reg.ols, reg.ols.rob, reg.fgls, type="text")
```

	Dependent variable:		
	math4 OLS	coefficient test	math4 OLS
	(1)	(2)	(3)
lunch	-0.449*** (0.015)	-0.449*** (0.017)	-0.450*** (0.014)
lenroll	-5.399*** (0.940)	-5.399*** (1.130)	-2.819*** (0.875)
lexppp	3.525* (2.098)	3.525 (2.351)	6.438*** (1.706)
Constant	91.932*** (19.962)	91.932*** (23.060)	51.896*** (16.859)

20			
21			
22	Observations	1,692	1,692
23	R2	0.373	0.371
24	Adjusted R2	0.372	0.370
25	Residual Std. Error (df = 1688)	15.302	1.876
26	F Statistic (df = 3; 1688)	334.567***	331.527***
27			
28	Note:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01	

- d) Foram necessárias 122 iterações para convergência. O resultado do MQGF com iterações foi parecido com o MQGF padrão, sendo que os erros padrão robustos foram um pouco menores.

```

1 bhat.ini = coef(reg.fgls)
2 diff_bhat = max(bhat.ini)
3 reg.fgls.it = reg.fgls
4 it=0
5
6 while (diff_bhat > 1e-15) {
7   ehat.it = resid(reg.fgls.it) # novos resíduos
8   yhat.it = fitted(reg.fgls.it) # novos valores preditos
9   reg.aux.it = lm(log(ehat.it^2) ~ yhat.it + I(yhat.it^2)) # nova reg auxiliar
10  w.it = 1 / exp(fitted(reg.aux.it)) # novos pesos
11  reg.fgls.it = lm(math4 ~ lunch + lenroll + lexppp, meap00_01, weights=w.it)
12  bhat.it = coef(reg.fgls.it) # novas estimativas
13  diff_bhat = max(bhat.it - bhat.ini) # máximo das diferenças de estimativas
14  bhat.ini = bhat.it # atualização de valor inicial das estimativas
15  it=it+1 # atualização da iteração
16 }
17
18 print(paste0("número de iterações: ", it)) # número de iterações
19 stargazer::stargazer(reg.ols, reg.ols.rob, reg.fgls, reg.fgls.it, type="text")

```

1 [1] número de iterações: 122

2

3

4

5

6

7

8

9

10 lunch

11

12

13 lenroll

14

15

16 lexppp

17

18

19 Constant

20

21

22

23 Observations

24 R2

25 Adjusted R2

26 Residual Std. Error (df = 1688)

27 F Statistic (df = 3; 1688)

28

29 Note:

Dependent variable:

math4

OLS

coefficient

test

math4

OLS

(1)

(2)

(3)

(4)

−0.449***

(0.015)

−0.449***

(0.017)

−0.450***

(0.014)

−0.453***

(0.015)

−5.399***

(0.940)

−5.399***

(1.130)

−2.819***

(0.875)

−2.758***

(0.845)

3.525*

(2.098)

3.525

(2.351)

6.438***

(1.706)

6.213***

(1.652)

91.932***

(19.962)

91.932***

(23.060)

51.896***

(16.859)

53.487***

(16.326)

1,692

0.373

0.372

15.302

334.567***

1,692

0.371

0.370

1.876

331.527***

1,692

0.367

0.366

1.894

326.558***

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

De modo geral, os resultados de MQGF geraram estimativas maiores para `lenroll` e `lexppp`, inclusive sendo mais eficientes (menores erros padrão). No entanto, deve-se ter cuidado, pois o MQGF pode gerar estimativas viesadas quando a matriz de pesos (\mathbf{W}) e, conseqüentemente, a matriz de variâncias-covariâncias dos erros (Σ) estiverem mal especificadas (por outro lado, o MQO gera estimativas não-viesadas/consistentes, embora ineficientes). No entanto, na subseção “Why Feasible GLS Works”, Davidson e MacKinnon (1999, pág. 262) dão uma intuição da prova de que, sob condições de regularidade, o estimador de MQGF é consistente e assintoticamente equivalente ao estimador de MQG, o qual é não-viesado/consistente e eficiente na presença de heterocedasticidade.

□

Exercício 2. Neste exercício, usaremos a base de dados de Angrist e Evans (1998) que contém quase 32 mil observações de mulheres negras ou hispânicas, todas casadas e com pelo menos dois filhos. Para carregá-la no R, use:

```
1 data(labsup, package="wooldridge")
```

Queremos saber como o número de crianças (*kids*) afeta as horas trabalhadas por semana (*hours*). Há suspeita de que *kids* seja um regressor endógeno e, portanto, utilizaremos variáveis instrumentais para gerar variação exógena que permita identificar o efeito do n^o de crianças sobre *hours*.

a) Estime a equação por MQO com erros padrão robustos para heterocedasticidade:

$$hours = \beta_0 + \beta_1 kids + \beta_2 nonmomi + \beta_3 educ + \beta_4 age + \beta_5 agesq + \beta_6 black + \beta_7 hispan + \varepsilon$$

- *kids*: n^o de crianças
- *nonmomi*: renda familiar que não é da mãe
- *educ*: anos de educação
- *age*: idade
- *agesq*: idade ao quadrado
- *black*: dummy negra
- *hispan*: dummy hispânica

b) Um dos instrumentos propostos por Angrist e Evans é a variável dummy *samesex*, que possui valor 1 quando os dois primeiros filhos são do mesmo sexo, e 0 caso contrário. Exponha argumentos (favoráveis ou contrários) para que *samesex* esteja relacionado a *kids*, e que não afete diretamente as horas trabalhadas (*hours*).

c) Faça o teste de instrumento fraco no primeiro estágio da regressão. O quão estatisticamente significativa é a variável *samesex* em relação a *kids*?

d) Use *samesex* como instrumento de *kids*. Estime o modelo estrutural do item (a) pelo estimador VI por meio da função *ivreg()* e analiticamente ("na mão"). Compare os resultados MQO e VI usando a função *stargazer()* do pacote de mesmo nome.

- e) Avalie a potencial endogeneidade de *kids* por meio do Teste de (Durbin-Wu-)Hausman. Analise o seu resultado, explicitando a hipótese nula testada.
- c') Deste item em diante, considere como um segundo instrumento para *kids* a variável *multi2nd*, que é uma dummy indicando que os dois primeiros filhos são gêmeos. Faça o teste de instrumentos fracos no primeiro estágio da regressão. O quão conjuntamente significantes são as variáveis *samesex* e *multi2nd* em relação a *kids*?
- d') Use *samesex* e *multi2nd* como instrumentos de *kids* e estime o modelo estrutural do item (a) pelo estimador MQ2E por meio da função *ivreg()* e analiticamente ("na mão"). Compare os resultados MQO, VI e MQ2E usando a função *stargazer()*.
- e') Avalie a potencial endogeneidade de *kids* por meio do Teste de (Durbin-Wu-)Hausman, porém agora comparando $\hat{\beta}^{MQO}$ e $\hat{\beta}^{MQ2E}$. Analise o seu resultado, explicitando a hipótese nula testada.
- f) Faça o teste de sobreidentificação de Sargan e analise o resultado, explicitando sua hipótese nula.

Resposta:

```
a) # Pacotes para inferência robusta com heterocedasticidade
2 library(lmtest)
3 library(sandwich)
4
5 # MQO
6 reg.ols = lm(hours ~ kids + nonmomi + educ + age + agesq + black + hispan,
7               data=labsup)
8
9 # MQO com erros padrão robustos
10 reg.ols.rob = coeftest(reg.ols, vcov=vcovHC(reg.ols, "HCO"))
11 round(reg.ols.rob, 3)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
1 (Intercept)	-10.447	6.588	-1.586	0.113
2 kids	-2.326	0.116	-20.137	<2e-16 ***
3 nonmomi	-0.058	0.005	-10.808	<2e-16 ***
4 educ	0.586	0.037	15.634	<2e-16 ***
5 age	2.049	0.448	4.570	<2e-16 ***
6 agesq	-0.028	0.008	-3.602	<2e-16 ***
7 black	1.058	1.351	0.784	0.433
8 hispan	-5.114	1.351	-3.784	<2e-16 ***

10 ———

11 Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

- b) A ideia é que, caso os pais tenham dois primeiros filhos(as) do mesmo sexo, então é mais provável que o casal tenha mais algum filho. Logo, acredita-se que *samesex* seja positivamente correlacionado com *kids*. Por outro lado, é possível argumentar que *samesex* possa afetar diretamente as horas trabalhadas, pois crianças/adolescentes de diferentes sexos podem não compartilhar roupas e brinquedos, demandando mais recursos financeiros e, conseqüentemente, mais horas trabalhadas pela mãe.

c) Vamos fazer o teste a partir do modelo de primeiro estágio:

$$kids = \gamma_0 + \gamma_1 samesex + \gamma_2 nonmomi + \gamma_3 educ + \gamma_4 age + \gamma_5 agesq + \gamma_6 black + \gamma_7 hispan + \varepsilon$$

```
1 reg.1st = lm(kids ~ samesex + nonmomi + educ + age + agesq + black + hispan,
2             data=labsup)
3 round(coefest(reg.1st), 3)
```

```
1             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
2 (Intercept)    2.010      0.321   6.263 <2e-16 ***
3 samesex         0.070      0.010   6.847 <2e-16 ***
4 nonmomi        -0.003      0.000 -10.591 <2e-16 ***
5 educ           -0.085      0.002 -49.506 <2e-16 ***
6 age             0.059      0.022   2.694  0.007 **
7 agesq           0.000      0.000   0.005  0.996
8 black           0.013      0.066   0.195  0.845
9 hispan         -0.042      0.066  -0.643  0.520
10
11 Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Para verificar sua significância, só precisamos ver a estatística t ou p-valor da estimativa de $samesex$, $\hat{\gamma}_1$, que é significativa a 0,1%, ou seja, rejeitamos a hipótese nula de que é um instrumento fraco ($\gamma_1 = 0$). Alternativamente, seria possível realizar esse teste por meio de estatística F (comparando um modelo irrestrito e outro modelo restrito).

d) $\hat{\beta}^{VI} = (Z'X)^{-1}Z'y$, $V(\hat{\beta}^{VI}) = \hat{\sigma}^2(X'P_ZX)^{-1}$ e $\hat{\sigma}^2 = (\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon})/(N - K - 1)$

```
1 ## Estimação via ivreg()
2 library(ivreg)
3 reg.iv = ivreg(hours ~ kids + nonmomi + educ + age + agesq + black + hispan |
4               samesex + nonmomi + educ + age + agesq + black + hispan,
5               data=labsup)
6
7 stargazer::stargazer(reg.ols.rob, reg.iv, type="text", digits=3)
```

```
1
2
3               Dependent variable:
4
5               coefficient      hours
6               test            instrumental
7               (1)              variable
8               (2)
9 kids               -2.326***      -4.879
10                  (0.116)          (3.013)
11
12 nonmomi            -0.058***      -0.065***
13                  (0.005)          (0.010)
14
15 educ               0.586***        0.368
16                  (0.037)          (0.260)
17
18 age               2.049***        2.201***
19                  (0.448)          (0.486)
20
21 agesq             -0.028***      -0.028***
22                  (0.008)          (0.008)
23
24 black              1.058           1.095
25                  (1.351)          (1.361)
26
27 hispan            -5.114***      -5.218***
```

28		(1.351)	(1.368)
29			
30	Constant	-10.447	-5.254
31		(6.588)	(9.024)
32			
33	<hr/>		
34	Observations		31,857
35	R2		0.058
36	Adjusted R2		0.058
37	Residual Std. Error	18.924	(df = 31849)
38	<hr/>		
39	Note:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01	

A estimação por VI fez o erro padrão de kids (e de educ) “explodir”, tornando sua estimativa estatisticamente não-significante. Agora, estimando analiticamente:

```

1 ## Estimação analítica
2 y = as.matrix(labsup[, "hours"])
3 X = as.matrix(cbind(1, labsup[, c("kids", "nonmomi", "educ", "age",
4   "agesq", "black", "hispan")]))
5 Z = as.matrix(cbind(1, labsup[, c("samesex", "nonmomi", "educ", "age",
6   "agesq", "black", "hispan")]))
7 Pz = Z %*% solve(t(Z) %*% Z) %*% t(Z)
8
9 N = nrow(X)
10 K = ncol(X) - 1
11
12 bhat.iv = solve(t(Z) %*% X) %*% t(Z) %*% y
13 yhat = X %*% bhat.iv
14 ehat = y - yhat
15
16 sig2hat = as.numeric( t(ehat) %*% ehat / (N-K-1) )
17 Vbhat = sig2hat * solve(t(X) %*% Pz %*% X)
18
19 se = sqrt(diag(Vbhat))
20 t = bhat.iv / se
21 p = 2 * pt(-abs(t), N-K-1)
22
23 round(data.frame(bhat.iv, se, t, p), 3)

```

	bhat.iv	se	t	p	
1					
2	1	-5.254	9.024	-0.582	0.560
3	kids	-4.879	3.013	-1.619	0.105
4	nonmomi	-0.065	0.010	-6.511	0.000
5	educ	0.368	0.260	1.417	0.156
6	age	2.201	0.486	4.531	0.000
7	agesq	-0.028	0.008	-3.577	0.000
8	black	1.095	1.361	0.805	0.421
9	hispan	-5.218	1.368	-3.815	0.000

- e) O teste de Hausman pode ser feito via estatística de Wald, que avalia a hipótese nula de que as estimativas MQO e VI são estatisticamente iguais:

$$w = (\hat{\beta}^{VI} - \hat{\beta}^{MQO})' \left[V(\hat{\beta}^{VI}) - V(\hat{\beta}^{MQO}) \right]^{-1} (\hat{\beta}^{VI} - \hat{\beta}^{MQO}) \sim \chi_J^2$$

em que $J = 1$ regressor endógeno neste caso.

```

1 bhat.ols = coef(reg.ols)
2 bhat.iv = coef(reg.iv)

```



```

3 Vbhat.ols = vcov(reg.ols)
4 Vbhat.iv = vcov(reg.iv)
5
6 contrast = bhat.iv - bhat.ols
7 w = t(contrast) %*% solve(Vbhat.iv - Vbhat.ols) %*% contrast
8 w
9 1 - pchisq(abs(w), 1)

```

```

1 [1,] 0.7188145
2 [1,] 0.3965331

```

Como o p-valor é igual a 0,39, não rejeitamos a hipótese nula de que o regressor `kids` seja exógeno.

c') Vamos fazer o teste a partir do modelo de primeiro estágio:

$$kids = \gamma_0 + \gamma_1 \text{samesex} + \gamma_2 \text{multi2nd} + \gamma_3 \text{nonmomi} + \gamma_4 \text{educ} + \gamma_5 \text{age} + \gamma_6 \text{agesq} + \gamma_7 \text{black} + \gamma_8 \text{hispan} + \varepsilon$$

e testar a seguinte hipótese nula conjunta:

$$H_0 : \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uma das formas de fazer esse teste é por meio da estatística F:

$$F = \frac{R_{ur}^2 - R_r^2}{(1 - R_{ur}^2)} \frac{N - K - 1}{2},$$

que compara o modelo acima com o restrito:

$$kids = \gamma_0 + \tilde{\gamma}_3 \text{nonmomi} + \tilde{\gamma}_4 \text{educ} + \tilde{\gamma}_5 \text{age} + \tilde{\gamma}_6 \text{agesq} + \tilde{\gamma}_7 \text{black} + \tilde{\gamma}_8 \text{hispan} + \varepsilon$$

```

1 reg.1st = lm(kids ~ samesex + multi2nd +
2             nonmomi + educ + age + agesq + black + hispan,
3             data=labsup)
4 reg.1st.r = lm(kids ~ nonmomi + educ + age + agesq + black + hispan,
5               data=labsup)
6 r2ur = summary(reg.1st)$r.squared
7 r2r = summary(reg.1st.r)$r.squared
8
9 F = (r2ur - r2r) / (1 - r2ur) * (N-K-1) / 2
10 1 - pf(F, 2, N-K-1)

```

```
1 [1] 0
```

Rejeitamos a hipótese nula de que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, ou seja, não há indícios de que os instrumentos, de forma conjunta, sejam fracos.

d') $\hat{\beta}^{MQ2E} = (X'P_ZX)^{-1}X'P_Zy$, $V(\hat{\beta}^{MQ2E}) = \hat{\sigma}^2(X'P_ZX)^{-1}$ e $\hat{\sigma}^2 = (\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon})/(N - K - 1)$

```

1 reg.2sls = ivreg(hours ~
2                 kids + nonmomi + educ + age + agesq + black + hispan |
3                 samesex + multi2nd + nonmomi + educ + age + agesq + black + hispan,
4                 data=labsup)
5
6 stargazer::stargazer(reg.ols.rob, reg.iv, reg.2sls, type="text", digits=3)

```

	Dependent variable:		
		hours	
	coefficient	instrumental	
	test	variable	
	(1)	(2)	(3)
kids	-2.326*** (0.116)	-4.879 (3.013)	-2.986** (1.333)
nonmomi	-0.058*** (0.005)	-0.065*** (0.010)	-0.060*** (0.007)
educ	0.586*** (0.037)	0.368 (0.260)	0.530*** (0.119)
age	2.049*** (0.448)	2.201*** (0.486)	2.088*** (0.455)
agesq	-0.028*** (0.008)	-0.028*** (0.008)	-0.028*** (0.008)
black	1.058 (1.351)	1.095 (1.361)	1.068 (1.351)
hispan	-5.114*** (1.351)	-5.218*** (1.368)	-5.141*** (1.354)
Constant	-10.447 (6.588)	-5.254 (9.024)	-9.104 (7.112)
Observations		31,857	31,857
R2		0.058	0.072
Adjusted R2		0.058	0.072
Residual Std. Error (df = 31849)		18.924	18.789
Note:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01		

A estimativa de kids diminuiu, mas o erro padrão diminuiu consideravelmente. Agora, analiticamente:

```

1 ## Estimação analítica
2 Z = as.matrix(cbind(1, labsup[,c("samesex", "multi2nd", "nonmomi", "educ",
3                                "age", "agesq", "black", "hispan")]))
4 Pz = Z %*% solve(t(Z) %*% Z) %*% t(Z)
5
6 bhat.2sls = solve(t(X) %*% Pz %*% X) %*% t(X) %*% Pz %*% y
7 yhat = X %*% bhat.2sls
8 ehat = y - yhat
9
10 sig2hat = as.numeric( t(ehat) %*% ehat / (N-K-1) )
11 Vbhat = sig2hat * solve(t(X) %*% Pz %*% X)
12
13 se = sqrt(diag(Vbhat))
14 t = bhat.2sls / se
15 p = 2 * pt(-abs(t), N-K-1)
16
17 round(data.frame(bhat.2sls, se, t, p), 3)

```

	bhat.2sls	se	t	p
1	-9.104	7.112	-1.280	0.201
3 kids	-2.986	1.333	-2.241	0.025

```

4 nonmomi      -0.060  0.007  -9.127  0.000
5 educ         0.530  0.119   4.446  0.000
6 age          2.088  0.455   4.588  0.000
7 agesq       -0.028  0.008  -3.600  0.000
8 black        1.068  1.351   0.791  0.429
9 hispan      -5.141  1.354  -3.798  0.000

```

e') O teste de Hausman pode ser feito via estatística de Wald, que avalia a hipótese nula de que as estimativas MQO e MQ2E são estatisticamente iguais:

$$w = (\hat{\beta}^{MQ2E} - \hat{\beta}^{MQO})' \left[V(\hat{\beta}^{MQ2E}) - V(\hat{\beta}^{MQO}) \right]^{-1} (\hat{\beta}^{MQ2E} - \hat{\beta}^{MQO}) \sim \chi_J^2$$

em que $J = 1$ regressor endógeno neste caso.

```

1 bhat.2sls = coef(reg.2sls)
2 Vbhat.2sls = vcov(reg.2sls)
3
4 contrast = bhat.2sls - bhat.ols
5 w = t(contrast) %*% solve(Vbhat.2sls - Vbhat.ols) %*% contrast
6 1 - pchisq(abs(w), 1)

1 [1,] 0.6189672

```

Com p-valor é igual a 0,62, tornou-se ainda mais fraca a evidência de que o regressor seja endógeno. Note que, mesmo mais eficientes em relação ao modelo exatamente identificado (IV), as estimativas MQ2E são bastante parecidas com MQO, e o teste de Hausman testa exatamente a significância estatística da diferença entre MQ2E e MQO (vetor de contrastes).

f) O teste de sobreidentificação pode ser feito a partir da estatística de Sargan:

$$SARG = NR_{resid}^2 \sim \chi_{(L-J)}^2$$

```

1 L = 2 # núm. instrumentos
2 J = 1 # núm. regressores endógenos
3
4 # Estimação nos resíduos
5 reg.resid = lm(resid(reg.2sls) ~ samesex + multi2nd + nonmomi + educ +
6               age + agesq + black + hispan, data=labsup)
7 round(coeftest(reg.r2resid), 3)

```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
1 (Intercept)	0.061	6.575	0.009	0.993
2 samesex	-0.133	0.211	-0.632	0.527
3 multi2nd	0.358	1.136	0.315	0.753
4 nonmomi	0.000	0.005	0.004	0.997
5 educ	0.000	0.035	0.000	1.000
6 age	0.000	0.448	0.000	1.000
7 agesq	0.000	0.008	0.000	1.000
8 black	0.002	1.351	0.001	0.999
9 hispan	0.004	1.353	0.003	0.998

Note que, pelas estatísticas t da regressão nos resíduos, já podemos ver que, individualmente, ambos instrumentos não possuem correlação estatisticamente significativa com o termo de erro. Basta verificar isto conjuntamente:

```
1 # Estatística SARG
2 r2resid = summary(reg$resid)$r.squared
3 sarg = N * r2resid # sempre positivo
4 1 - pchisq(sarg, df=L-J) # p-valor
```

```
1 [1] 0.4797525
```

Não rejeitamos os hipótese nula de que os instrumentos são exógenos em relação ao termo de erro.

□