The Political Business Cycle

Alpha C. Chiang (1999) - Seção 7.6

Apresentação por Fábio Nishida

Julho, 2021

7.6 The Political Business Cycle

Modelo de Nordhaus

- Modelo introduzido por William Nordhaus (1975)[a]
- Em uma democracia, como forma de impedir a vitória de um partido político rival, o partido incumbente pode ser encorajado a usar políticas econômicas que resultem em determinadas taxas de desemprego (U) e de inflação (p) dentro de um período eleitoral.
- Ao longo de sucessivos períodos eleitorais, pode ser visto um padrão manifestado por uma série de ciclos econômicos.

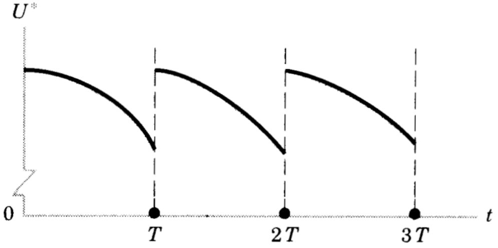

FIGURE 7.7

[a]William D. Nordhaus, "The Political Business Cycle", *Review of Economic Studies*, April 1975.

Função Votos e Trade-off de Phillips (1/2)

- A reação dos eleitores aos valores de U e p possa ser incorporada na *função voto*

$$v = v(U, p) \qquad (v_U < 0, v_p < 0), \tag{7.58}$$

em que v é a medida do poder de obtenção de votos do partido incumbente.

- Na Fig. 7.6, podemos ver 3 curvas de *isovoto*, sendo que a mais alta corresponde a um menor poder de voto. Note que há trade-off entre desemprego U e inflação p.

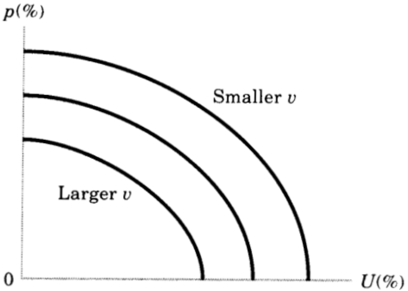

FIGURE 7.6

Função Votos e Trade-off de Phillips (2/2)

- A inflação p e o desemprego U estão ligados pela relação de Phillips com expectativas

$$p = \phi(U) + a\pi, \qquad (\phi' < 0,\ 0 < a \leq 1) \tag{7.59}$$

em que π é a expectativa de inflação, que é formada adaptativamente de acordo com a equação diferencial

$$\dot{\pi} = b(p - \pi). \qquad (b > 0) \tag{7.60}$$

- Quais são as variáveis de controle e de estado?
  - π é a variável de estado, pois deve ter uma equação de movimento (7.60)
  - U é a variável de controle, mas implicitamente supõe que o governo consegue implementar a taxa de desemprego desejada em qualquer período.
  - p é definido a partir do par π e U.

O Problema de Controle Ótimo (1/3)

- Um partido vence a eleição no período $t = 0$ e a eleição se dá T anos depois.
- Em cada tempo no intervalo $[0, T]$, temos um par U e p que determinam v.
- Eleitores têm memória curta e são influenciados mais pelos eventos mais próximos de T.

- O problema de controle ótimo do partido incumbente é

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^T v(U,p)e^{rt}dt, \quad \text{sujeito a} \begin{cases} p = \phi(U) + a\pi \\ \dot{\pi} = b(p - \pi) \\ \pi(0) = \pi_0, \quad \pi(T) \text{ livre} \quad (\pi_0, T \text{ dados}) \end{cases}$$

- Note que temos e^{rt} ao invés de $e^{-\rho t}$, já que se valoriza mais v's de períodos mais próximos de T.

O Problema de Controle Ótimo (2/3)

- Nordhaus assume as seguinte formas das funções:

$$v(U,p) = -U^2 - hp \qquad (h > 0) \tag{7.62}$$
$$p = (j - kU) + a\pi \qquad (j, k > 0,\ 0 < a \leq 1) \tag{7.63}$$

- Vamos "sumir" com a variável p das expressões. Usando (7.63) em (7.62), obtemos

$$\begin{aligned} v(U) &= -U^2 - h\left[(j - kU) + a\pi\right] \\ &= -U^2 - hj + hkU - ha\pi \end{aligned}$$

e substituindo (7.63) na equação de movimento de estado, $\dot{\pi}$,

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= b[(j - kU) + a\pi - \pi] \\ &= b[(j - kU) - (1 - a)\pi] \end{aligned}$$

O Problema de Controle Ótimo (3/3)

- Logo, o problema pode ser reescrito como

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^T (-U^2 - hj + hkU - ha\pi)e^{rt}\,dt, \tag{7.64}$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} \dot{\pi} = b[(j - kU) - (1 - a)\pi] \\ \pi(0) = \pi_0, \quad \pi(T) \text{ livre} \quad (\pi_0, T \text{ dados}) \end{cases}$$

- Portanto, a Hamiltoniana, H, é dada por

$$H = (-U^2 - hj + hkU - ha\pi)e^{rt} + \lambda b[(j - kU) - (1 - a)\pi] \tag{7.65}$$

Maximizando a Hamiltoniana

- Maximizando H em relação á variável de controle U, temos

$$\frac{\partial H}{\partial U} = (-2U + hk)e^{rt} - \lambda bk = 0$$

$$2Ue^{rt} = hke^{rt} - \lambda bk$$

$$Ue^{rt-rt} = \frac{1}{2}\left(hke^{rt-rt} - \lambda bke^{-rt}\right)$$

$$U(t) = \frac{1}{2}k\left(h - \lambda be^{-rt}\right) \tag{7.66}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial U^2} = -2e^{rt} < 0 \implies \text{ponto de máximo}$$

A Trajetória de Coestado Ótima (1/5)

- Precisamos agora encontrar a trajetória de $\lambda(t)$ a partir equação de movimento

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \pi} = hae^{rt} + \lambda b(1-a)$$

que pode ser reescrita como

$$\dot{\lambda} - b(1-a)\lambda = hae^{rt}.$$

- Note que está é uma equação diferencial de 1ª ordem com um coeficiente constante e um termo variável em t.

A Trajetória de Coestado Ótima (2/5)

- Precisamos agora encontrar a trajetória de $\lambda(t)$ a partir equação de movimento

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \pi} = hae^{rt} + \lambda b(1-a) \iff \dot{\lambda} - b(1-a)\lambda = hae^{rt}$$

- Note que está é uma equação diferencial de 1ª ordem com um coeficiente constante e um termo variável.

- A função complementar, calculada a partir do caso homogêneo, é

$$\lambda_c = Ae^{b(1-a)t}$$

- A integral particular tem a forma (Chiang & Wainwright, 2005, pp. 485)

$$\bar{y} = \int we^{\int udt} dt \left(e^{-\int u(t)dt}\right)$$

A Trajetória de Coestado Ótima (3/5)

- Neste problema:

$$\bar{y} = \bar{\lambda}, \quad w(t) = hae^{rt}, \quad u(t) = -b(1-a) \quad \text{e} \quad \int u(t)dt = -b(1-a)t + c$$

logo, a integral particular é dada por

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda} &= \int hae^{rt}e^{-b(1-a)t+c}dt\left(\frac{1}{e^{-b(1-a)t+c}}\right) = ha\int e^{(r-b+ab)t}.e^{c}dt\left(\frac{1}{e^{(-b+ab)t}}.\frac{1}{e^{c}}\right)\\
&= ha\left(\frac{1}{r-b+ab}e^{(r-b+ab)t}\right)\frac{1}{e^{(-b+ab)t}} = \frac{ha}{r-b+ab}e^{rt}e^{(-b+ab)t}\frac{1}{e^{(-b+ab)t}}\\
&= \frac{ha}{r-b+ab}e^{rt} = \frac{ha}{B}e^{rt} \qquad [B \equiv r-b+ab]
\end{aligned}$$

Forma alternativa de cálculo da integral particular:

- Como o termo da equação diferencial, hae^{rt}, possui e^{rt}, supomos que a integral particular tenha a forma

$$\bar{\lambda} = Ce^{rt} \qquad (C \text{ constante})$$

- Logo, a sua derivada é dada por $\dot{\bar{\lambda}} = rCe^{rt}$
- A partir da equação diferencial, obtemos o valor de C

$$\dot{\lambda} - b(1-a)\lambda = hae^{rt} \iff rCe^{rt} - b(1-a)Ce^{rt} = hae^{rt}$$
$$C(r - b + ab)e^{rt} = hae^{rt} \iff C = \frac{ha}{r - b + ab}$$

- Portanto, temos que

$$\bar{\lambda} = \frac{ha}{r - b + ab}e^{rt} = \frac{ha}{B}e^{rt} \qquad [B \equiv r - b + ab]$$

A Trajetória de Coestado Ótima (5/5)

- Logo, a solução geral para λ é dada por:

$$\lambda(t) = \lambda_c + \bar{\lambda} = Ae^{b(1-a)t} + \frac{ha}{B}e^{rt} \tag{7.67}$$

- Queremos encontrar o valor de A. Para isto, usaremos a condição de transversalidade para o problema de linha terminal vertical $\lambda(T) = 0$.

$$\lambda(T) = Ae^{b(1-a)T} + \frac{ha}{B}e^{rT} = 0$$

$$A = -\frac{ha}{B}e^{rT-b(1-a)T} = -\frac{ha}{B}e^{BT} \qquad (B \equiv r - b + ab)$$

- Logo, a solução geral por ser reescrita como

$$\lambda^*(t) = \left(-\frac{ha}{B}e^{BT}\right)e^{b(1-a)t} + \frac{ha}{B}e^{rt} = \frac{ha}{B}\left[e^{rt} - e^{BT+b(1-a)t}\right] \tag{7.67'}$$

A Trajetória de Controle Ótimo (1/4)

- Encontraremos a trajetória de controle ótimo aplicando (7.67') em (7.66)

$$
\begin{aligned}
U^*(t) &= \frac{1}{2}k\left(h - \frac{ha}{B}\left[e^{rt} - e^{BT+b(1-a)t}\right]be^{-rt}\right) \\
&= \frac{1}{2}k\left(\frac{h(r-b+ab)}{B} - \frac{hab}{B}\left[e^{rt-rt} - e^{BT+b(1-a)t-rt}\right]\right) && (B \equiv r-b+ab) \\
&= \frac{1}{2}k\left(\frac{h(r-b+ab)}{B} - \frac{hab}{B}\left[1 - e^{BT-(r-b+ab)t}\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}k\left[\frac{h(r-b+\cancel{ab})}{B} - \frac{ha\cancel{b}}{\cancel{B}} + \frac{hab}{B}e^{BT-Bt}\right] && (B \equiv r-b+ab) \\
&= \frac{kh}{2B}\left[(r-b) + abe^{B(T-t)}\right] && (7.68)
\end{aligned}
$$

A Trajetória de Controle Ótimo (2/4)

- Note que U^* é uma função decrescente em t:

$$\frac{dU^*}{dt} = \frac{kh}{2B} abe^{B(T-t)}(-B) = -\frac{1}{2} khbae^{B(T-t)} < 0, \tag{7.69}$$

  pois $k, h, b, a > 0$, assim como o exponencial (independente do sinal de B).
- Logo, a política econômica que maximiza o poder de voto é definir um alto desemprego em $t = 0$, diminuindo ao longo de $[0, T]$.
- De fato, usando (7.68), podemos calcular os níveis de desemprego em $t = 0$ e $t = T$:

$$U^*(0) = \frac{kh}{2B}\left[(r-b) + abe^{BT}\right]$$
$$U^*(T) = \frac{kh}{2B}\left[(r-b) + ab\right] = \frac{kh}{2(r-b+ab)}\left[r - b + ab\right] = \frac{kh}{2}$$

A Trajetória de Controle Ótimo (3/4)

- Note que o nível de desemprego terminal, $kh/2$, é positivo.
- Como sabemos que $U^*(t)$ é decrescente em t, segue que todos níveis de desemprego em $t \in [0, T]$ devem ser positivos.
- Como $U^*(t)$ é um percentual, para ter algum significado econômico, talvez seja necessário incluir uma restrição $U_{max} < 1$, tal que $U(t) \in [0, U_{max}], \forall t \in [0, T]$.
- A trajetória de desemprego ótima típica, $U^*(t)$, é a ilustrada pela Fig. 7.7

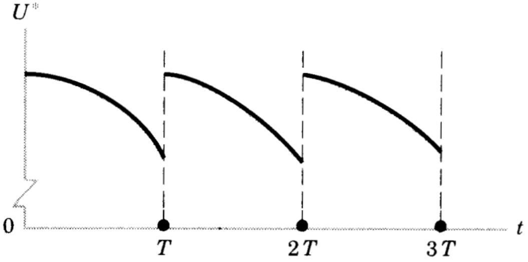

FIGURE 7.7

A Trajetória de Controle Ótimo (4/4)

- No entanto, a curvatura de $U^*(t)$ não é necessariamente côncava. De fato, diferenciando (7.69) por t, obtemos

$$\frac{d^2 U^*}{dt^2} = \frac{1}{2} Bkhbae^{B(T-t)} \gtreqless 0 \qquad [\text{dependendo de } B \gtreqless 0] \tag{7.70}$$

- Para a ilustração, assumiu-se

$$r = 0,03, \qquad b = 0,30, \qquad \text{e} \qquad a = 0,70$$

tal que

$$B = r - b + ab = -0,06 \implies \text{trajetória de } U^*(t) \text{ côncava}$$