

Lista 1 de Macroeconomia I - Parte 2

Fábio Nishida - PPGE/FEA-RP/USP

Julho, 2021

Conteúdo

1	The Nature of Dynamic Optimization	3
1.4	Alternative Approaches to Dynamic Optimization	3
1.4.1	[X]	3
1.4.2	[X]	4
1.4.3	[X]	5
1.4.4	[X]	6
2	The Fundamental Problem of the Calculus of Variations	8
2.0	[X] Definições, Proposições, Lemas e Observações	8
2.1	The Euler Equation	10
2.1.2	[X]	10
2.1.3	[X]	11
2.1.4	[X]	12
2.1.5	[X]	13
2.1.6	[X]	14
2.1.7	[X]	15
2.2	Some Special Cases	16
2.2.1	[X]	16
2.2.2	[X]	17
2.2.3	[X]	18
2.3	Two Generalizations of the Euler Equation	20
2.3.1	[X]	20
2.3.2	[X]	21
2.4	Dynamic Optimization of a Monopolist	22
2.4.1	[X]	22
2.4.2	[X]	23
2.5	Trading Off Inflation and Unemployment	24
2.5.1	[X]	24
2.5.2	[X]	26
2.5.3	[X]	27
3	Transversality Conditions for Variable-Endpoints Problems	29
3.0	[X] Definições, Proposições, Lemas e Observações	29
3.2	Specialized Transversality Conditions	30
3.2.1	[X]	30
3.2.2	[X]	31
3.2.3	[X]	32

3.3	Three Generalizations	33
3.3.1	[\boxtimes]	33
3.3.2	[\boxtimes]	34
3.4	The Optimal Adjustment of Labor Demand	36
3.4.1	[\boxtimes]	36
3.4.2	[\boxtimes]	38
3.4.3	[\boxtimes]	39

1 The Nature of Dynamic Optimization

1.4 Alternative Approaches to Dynamic Optimization

1.4.1 [☒]

From Fig. 1.6, find $V^*(D)$, $V^*(E)$, and $V^*(F)$. Determine the optimal paths DZ , EZ , and FZ .

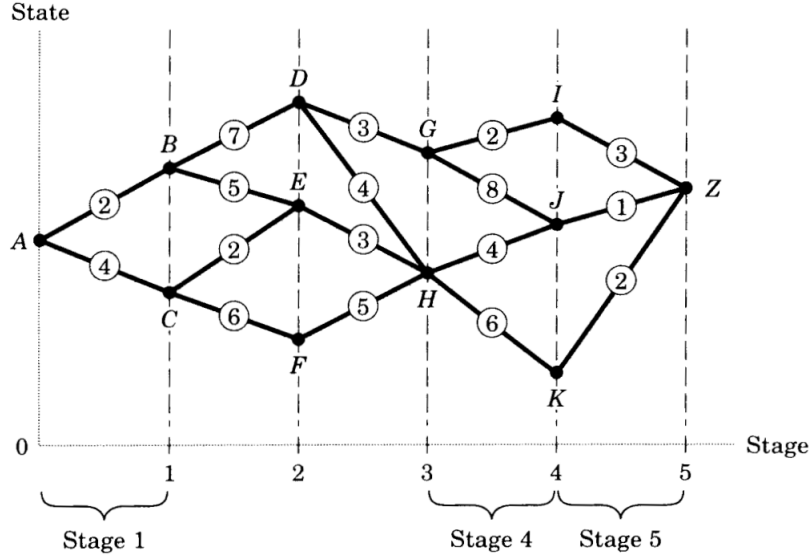


FIGURE 1.6

Considerando problema de minimização de valores, no estágio 5, temos:

$$V^*(I) = 3, \quad V^*(J) = 1 \quad \text{e} \quad V^*(K) = 2,$$

pois há apenas a possibilidade de ir ao ponto Z a partir destes 3 pontos. Agora, considerando o início no estágio 4, temos:

$$V^*(G) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } GI + V^*(I) = 2 + 3 = 5, \\ \text{arco } GJ + V^*(J) = 8 + 1 = 9 \end{array} \right\} = 5$$

$$V^*(H) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } HJ + V^*(J) = 4 + 1 = 5, \\ \text{arco } HK + V^*(K) = 6 + 2 = 8 \end{array} \right\} = 5.$$

Logo, a partir do estágio 3, segue que:

$$V^*(D) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } DG + V^*(G) = 3 + 5 = 8, \\ \text{arco } DH + V^*(H) = 4 + 5 = 9 \end{array} \right\} = 8,$$

$$V^*(E) = \text{arco } EH + V^*(H) = 3 + 5 = 8,$$

$$V^*(F) = \text{arco } FH + V^*(H) = 5 + 5 = 10$$

Portanto, as trajetórias ótimas de DZ , EZ e FZ são:

- **DZ:** $D \rightarrow G \rightarrow I \rightarrow Z$
- **EZ:** $E \rightarrow H \rightarrow J \rightarrow Z$
- **FZ:** $F \rightarrow H \rightarrow J \rightarrow Z$

■

1.4.2 [☒]

On the basis of the preceding problem, find $V^*(B)$ and $V^*(C)$. Determine the optimal paths BZ and CZ .

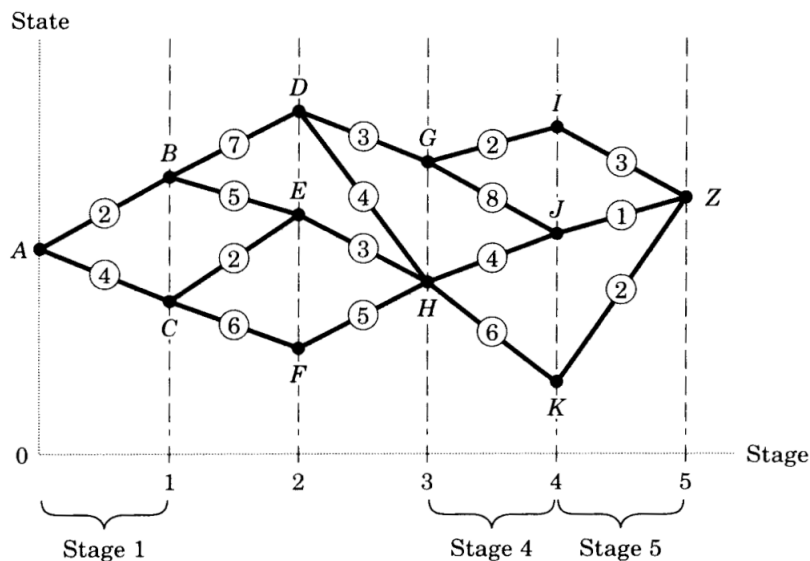


FIGURE 1.6

Do exercício anterior, temos:

$$\begin{aligned} V^*(D) &= 5, \\ V^*(E) &= 8, \\ V^*(F) &= 10 \end{aligned}$$

Calculando $V^*(B)$ e $V^*(C)$:

$$\begin{aligned} V^*(B) &= \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } BD + V^*(D) = 7 + 5 = 12, \\ \text{arco } BE + V^*(E) = 5 + 8 = 13 \end{array} \right\} = 12 \\ V^*(C) &= \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } CE + V^*(E) = 2 + 8 = 10, \\ \text{arco } CF + V^*(F) = 6 + 10 = 16 \end{array} \right\} = 10. \end{aligned}$$

Portanto, as trajetórias ótimas são:

- **BZ**: $B \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J \rightarrow Z$
- **CZ**: $C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J \rightarrow Z$

■

1.4.3 [☒]

Verify the statement in Sec. 1.1 that the minimum cost of production for the example in Fig. 1.6 is \$14, achieved on the path $ACEHJZ$.

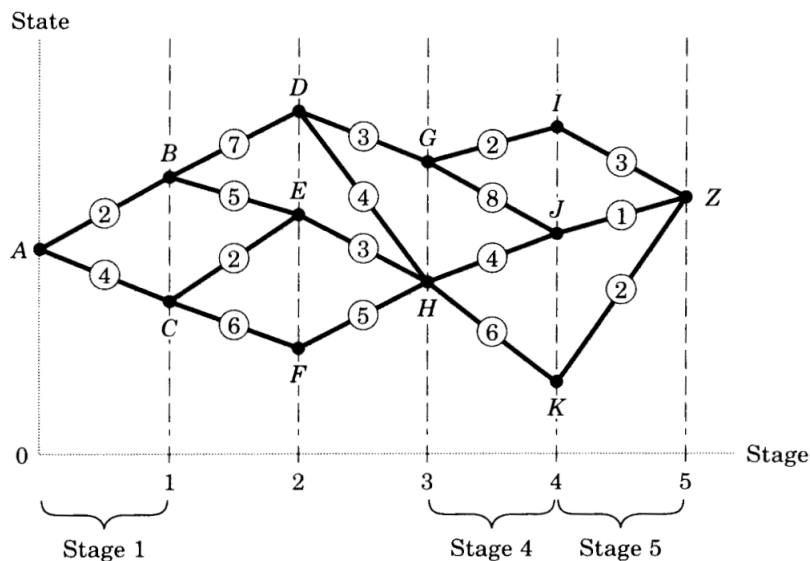


FIGURE 1.6

Do exercício anterior, temos:

$$V^*(B) = 14,$$

$$V^*(C) = 10.$$

Calculando $V^*(A)$, temos:

$$V^*(A) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } AB + V^*(B) = 2 + 13 = 15, \\ \text{arco } \text{AC} + V^*(C) = 4 + 10 = 14 \end{array} \right\} = 14.$$

E, portanto, a trajetória ótima é, de fato,

- **AZ:** $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J \rightarrow Z$

■

1.4.4 [X]

Suppose that the arc values in Fig. 1.6 are profit (rather than cost) figures. For every point i in the set $\{A, B, \dots, Z\}$ find:

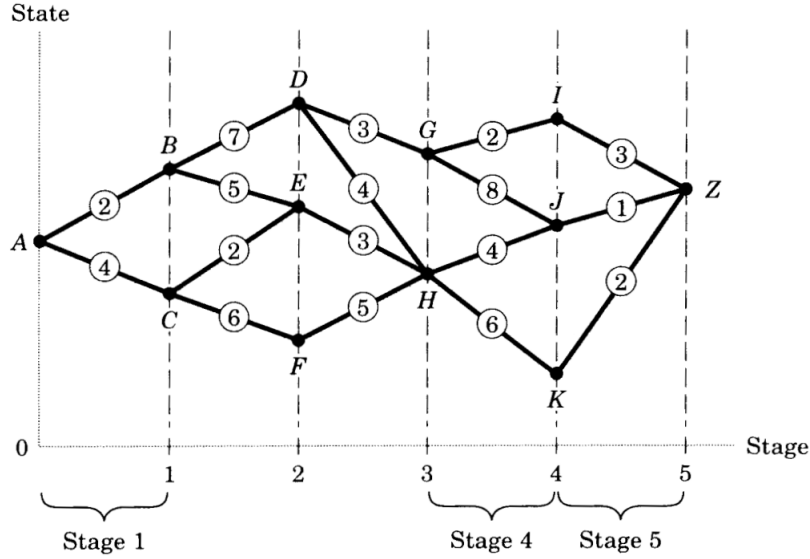


FIGURE 1.6

(a) the optimal (maximum-profit) value $V^*(i)$, and

Agora, faremos o mesmo procedimento dos exercícios 1 a 3, porém com maximização ao invés de minimização dos valores. No estágio 5, temos:

$$V^*(I) = 3, \quad V^*(J) = 1 \quad \text{e} \quad V^*(K) = 2,$$

pois há apenas a possibilidade de ir ao ponto Z a partir destes 3 pontos. Agora, considerando o início no estágio 4, temos:

$$V^*(G) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } GI + V^*(I) = 2 + 3 = 5, \\ \text{arco } GJ + V^*(J) = 8 + 1 = 9 \end{array} \right\} = 9$$

$$V^*(H) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } HJ + V^*(J) = 4 + 1 = 5, \\ \text{arco } HK + V^*(K) = 6 + 2 = 8 \end{array} \right\} = 8.$$

A partir do estágio 3, segue que:

$$V^*(D) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } DG + V^*(G) = 3 + 9 = 12, \\ \text{arco } DH + V^*(H) = 4 + 8 = 12 \end{array} \right\} = 12,$$

$$V^*(E) = \text{arco } EH + V^*(H) = 3 + 8 = 11,$$

$$V^*(F) = \text{arco } FH + V^*(H) = 5 + 8 = 13$$

Logo, no estágio 2,

$$V^*(B) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } BD + V^*(D) = 7 + 12 = 19, \\ \text{arco } BE + V^*(E) = 5 + 11 = 16 \end{array} \right\} = 19$$

$$V^*(C) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } CE + V^*(E) = 2 + 11 = 13, \\ \text{arco } CF + V^*(F) = 6 + 13 = 19 \end{array} \right\} = 19.$$

E, portanto,

$$V^*(A) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } AB + V^*(B) = 2 + 19 = 21, \\ \text{arco } AC + V^*(C) = 4 + 19 = 23 \end{array} \right\} = 23.$$

■

(b) the optimal path from i and Z .

As trajetórias ótimas de cada i até Z são:

- **IZ:** $I \rightarrow Z$
- **JZ:** $J \rightarrow Z$
- **KZ:** $K \rightarrow Z$
- **GZ:** $G \rightarrow J \rightarrow Z$
- **HZ:** $H \rightarrow K \rightarrow Z$
- **DZ:** $D \rightarrow G \rightarrow J \rightarrow Z$ ou $D \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow Z$
- **EZ:** $E \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow Z$
- **FZ:** $F \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow Z$
- **BZ:** $B \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow J \rightarrow Z$ ou $B \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow Z$
- **CZ:** $C \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow Z$
- **AZ:** $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow Z$.

■

2 The Fundamental Problem of the Calculus of Variations

2.0 [X] Definições, Proposições, Lemas e Observações

Regra de Leibniz (Chiang, 1999). Seja a integral definida

$$I(x) \equiv \int_a^b F(t, x) dt$$

em que assume-se que $F(t, x)$ tenha uma derivada contínua $F_x(t, x)$ no intervalo $[a, b]$. Então, o efeito da mudança em x na integral é dada pela regra de Leibniz:

$$\frac{dI}{dx} = \int_a^b F_x(t, x) dt. \quad (2.6)$$

Integral por Partes.

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du \quad (2.15)$$

Equação de Euler (Chiang, 1999).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_{y'} - F_y = 0 & \iff \\ F_{y'y'} \cdot y''(t) + F_{yy'} \cdot y'(t) + F_{ty'} - F_y = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Caso especial I (Chiang, 1999): $F = F(t, y')$. Neste caso especial, a função F é livre de y , implicando em $F_y = 0$. Então, a equação de Euler se reduz a $dF_{y'}/dt = 0$, com a solução

$$F_{y'} = \text{constante}. \quad (2.20)$$

Caso especial II (Chiang, 1999): $F = F(y, y')$. A função F é livre de t , implicando em $F_{ty'} = 0$. Então, a equação de Euler se simplifica em

$$F_{y'y'} \cdot y''(t) + F_{yy'} \cdot y'(t) - F_y = 0,$$

com a solução

$$F - y' \cdot F_{y'} = \text{constante}. \quad (2.21)$$

Caso especial III (Chiang, 1999): $F = F(y')$. Neste caso especial, a função F depende apenas de y' , então, a equação de Euler se reduz a

$$F_{y'y'} \cdot y''(t) = 0. \quad (2.24)$$

Caso especial IV (Chiang, 1999): $F = F(t, y)$. Neste caso especial, a função F é livre de y' , implicando em $F_{y'} = 0$. Então, a equação de Euler se reduz a

$$F_y = 0.$$

Caso com diversas variáveis de estado (Chiang, 1999). Com $n > 1$ variáveis de estado em um dado problema, a funcional se torna:

$$V[y_1, \dots, y_n] = \int_0^T F(t; y_1, \dots, y_n; y'_1, \dots, y'_n) dt \quad (2.26)$$

e haverá um par de condições inicial e terminal para cada variável de estado. Neste caso, teremos n equações de Euler:

$$F_{y_j} - \frac{d}{dt} F_{y'_j} = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.27)$$

Caso de derivadas de ordem superior (Chiang, 1999). Uma funcional com derivadas de ordem superior de $y(t)$ pode ser escrita como

$$V[y] = \int_0^T F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dt. \quad (2.29)$$

A função F , com uma variável de estado y e derivadas de y até a n -ésima ordem, pode ser transformada na forma com n variáveis de estado com suas derivadas de primeira ordem.

2.1 The Euler Equation

2.1.2 [☒]

Find the derivatives of the following definite integral with respect to x :

$$I = \int_a^b x^2 dt$$

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dx} &= \frac{d}{dx} \int_a^b x^4 dt \\ &= \int_a^b \frac{dx^4}{dx} dt && \text{(Regra de Leibniz)} \\ &= \int_a^b 4x^3 dt \\ &= [4x^3 t + c]_a^b \\ &= 4x^3(b - a).\end{aligned}$$

■

2.1.3 [☒]

Find the derivatives of the following definite integral with respect to x :

$$I = \int_a^b e^{-xt} dt$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= \frac{d}{dx} \int_a^b e^{-xt} dt \\ &= \int_a^b \frac{de^{-xt}}{dx} dt && \text{(Regra de Leibniz)} \\ &= \int_a^b e^{-xt}(-t) dt && \left(\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot \ln e \cdot f'(x) \right) \\ &= - \int_a^b t e^{-xt} dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Usando Integral por Partes, sabemos que

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \tag{2}$$

logo, se $u \equiv t$ e $dv \equiv e^{-xt}$, então

$$du = dt \quad \text{e} \quad v = -\frac{e^{-xt}}{x}.$$

De fato, derivando v em t , temos:

$$dv = \left(-\frac{e^{-xt}}{x} \right)' = -\frac{1}{x} e^{-xt}(-x) = e^{-xt}.$$

Portanto, usando (2) em (1), segue que

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= - \int_a^b t e^{-xt} dt = - \left\{ \left[t \left(-\frac{e^{-xt}}{x} \right) \right]_a^b - \int_a^b \left(-\frac{e^{-xt}}{x} \right) dt \right\} \\ &= \left[\frac{te^{-xt}}{x} \right]_a^b - \int_a^b \left(\frac{e^{-xt}}{x} \right) dt \\ &= \left[\frac{te^{-xt}}{x} - \frac{e^{-xt}}{x^2} \right]_a^b && \left(\frac{d}{dx} \frac{e^{-xt}}{x^2} = \frac{1}{x^2} e^{-xt}(-x) = \frac{e^{-xt}}{x} \right) \\ &= \left[\frac{txe^{-xt} - e^{-xt}}{x^2} \right]_a^b \\ &= \left[\frac{(tx - 1)e^{-xt}}{x^2} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{x^2} [(bx - 1)e^{-xb} - (ax - 1)e^{-ab}]. \end{aligned}$$

■

2.1.4 [☒]

Find the derivatives of the following definite integral with respect to x :

$$I = \int_0^{2x} e^t dt$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{2x} e^t dt &= \frac{d}{dx} [e^t]_0^{2x} \\ &= \frac{d}{dx} [e^{2x} - e^0] \\ &= 2e^{2x} \end{aligned}$$

■

2.1.5 [☒]

Find the derivatives of the following definite integral with respect to x :

$$I = \int_0^{2x} t e^x dt$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{2x} t e^x dt &= \frac{d}{dx} \left(e^x \int_0^{2x} t dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(e^x \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2x} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(e^x \left[\frac{(2x)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] \right) \\ &= \frac{d}{dx} (e^x 2x^2) \\ &= e^x 2x^2 + e^x 4x && \text{(regra do produto)} \\ &= 2xe^x(x+2) \end{aligned}$$

■

2.1.6 [☒]

Find the extremal, if any, of the following functional:

$$V[y] = \int_0^1 ty + 2y'^2 dt, \quad \text{com } y(0) = 1 \text{ e } y(1) = 2$$

Note que $F = ty + 2y'^2$, logo

$$F_y = t, \quad F_{y'} = 4y', \quad F_{y'y'} = 4, \quad F_{yy'} = 0 \quad \text{e} \quad F_{ty'} = 0.$$

Por definição, Equação de Euler é dada por:

$$F_{y'y'} \cdot y''(t) + F_{yy'} \cdot y'(t) + F_{ty'} - F_y = 0$$

Aplicando em nosso problema, segue:

$$4y''(t) + 0y'(t) + 0 - t = 0 \iff y''(t) = \frac{t}{4}.$$

Para obter $y'(t)$, integraremos $y''(t)$ em relação a t :

$$y'(t) = \int y''(t) dt = \int \frac{t}{4} dt = \frac{t^2}{8} + c_1$$

Para obter $y(t)$, integraremos $y'(t)$ em relação a t :

$$y(t) = \int y'(t) dt = \int \left(\frac{t^2}{8} + c_1 \right) dt = \frac{t^3}{24} + c_1 t + c_2.$$

Para obter os valores de c_1 e c_2 , usaremos as condições dadas:

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &= \frac{0^3}{24} + c_1 \cdot 0 + c_2 \iff c_2 = 1 \\ y(1) = 2 &= \frac{1^3}{24} + c_1 \cdot 1 + \underbrace{c_2}_1 \iff c_1 = \frac{23}{24} \end{aligned}$$

Portanto, a solução ótima (extremal) é:

$$y^*(t) = \frac{t^3}{24} + \frac{23}{24}t + 1.$$

■

2.1.7 [☒]

Find the extremal, if any, of the following functional:

$$V[y] = \int_0^1 tyy'dt, \quad \text{com } y(0) = 0 \text{ e } y(1) = 1$$

Note que $F = tyy'$, logo

$$F_y = y't, \quad F_{y'} = ty, \quad F_{y'y'} = 0, \quad F_{yy'} = t \quad \text{e} \quad F_{ty'} = y.$$

Por definição, Equação de Euler é dada por:

$$F_{y'y'} \cdot y''(t) + F_{yy'} \cdot y'(t) + F_{ty'} - F_y = 0$$

Aplicando em nosso problema, segue:

$$0y''(t) + ty'(t) + y(t) - ty'(t) = 0 \iff y(t) = 0.$$

Usando as condições dadas:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0 \neq 1 \end{aligned}$$

Portanto, as condições de contorno não são satisfeitas, o que implica na não-existência de solução ótima (extremal). ■

2.2 Some Special Cases

2.2.1 [☒]

Find the extremal of the following functional:

$$V[y] = \int_0^1 (t^2 + y'^2) dt, \quad \text{com } y(0) = 0 \text{ e } y(1) = 2$$

Note que $F(t, y') = t^2 + y'^2$, logo temos as seguintes derivadas

$$F_{y'} = 2y', \quad F_{y'y'} = 2, \quad F_{yy'} = 0, \quad F_{ty'} = 0, \quad F_y = 0 \quad (1)$$

Por se tratar de um integrando $F(t, y')$ (Caso especial I), segue que

$$F_{y'} = c_1 \quad (\text{constante}) \quad (2)$$

Logo, igualando $F_{y'}$ obtido em (1) e em (2), obtemos:

$$2y' = c_1 \iff y' = \frac{c_1}{2}$$

Integrando y' em relação a t , temos:

$$\int y' dt = \int \frac{c_1}{2} dt = \frac{c_1}{2} t + c_2 = y(t).$$

Usando as condições de contorno, segue que:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &= \frac{c_1}{2} \cdot 0 + c_2 \iff c_2 = 0 \\ y(1) = 2 &= \frac{c_1}{2} \cdot 1 + c_2 \iff c_1 = 4. \end{aligned}$$

Portanto, a solução ótima (extremal) é:

$$y^*(t) = 2t.$$

■

2.2.2 [☒]

Find the extremal of the following functional:

$$V[y] = \int_0^2 7y'^3 dt, \quad \text{com } y(0) = 9 \text{ e } y(2) = 11$$

Note que $F(y') = 7y'^3$ e suas derivadas são:

$$F_{y'} = 21y'^2 \quad \text{e} \quad F_{y'y'} = 42y' \quad (1)$$

Observe também que o integrando $F(y')$ segue o Caso especial III, logo

$$F_{y'y'} \cdot y''(t) = 0 \quad (2)$$

Substituindo $F_{y'y'} = 42y'$ em (2), obtemos:

$$42y' \cdot y'' = 0 \iff y' \cdot y'' = 0.$$

Se $y''(t) = 0$, então $y'(t) = c_1$ (constante). Logo, integrando $y'(t)$ em relação a t , segue que

$$\int y'(t) dt = \int c_1 dt = tc_1 + c_2 = y(t). \quad (c_2 \text{ constante})$$

Usando as condições de contorno:

$$\begin{aligned} y(0) = 9 &= 0 \cdot c_1 + c_2 \iff c_2 = 9 \\ y(2) = 11 &= 2 \cdot c_1 + \cancel{c_2}^9 \iff c_1 = 1 \end{aligned}$$

Se $y'(t) = 0$, então $y(t) = c_3$ (constante). Logo, este caso é incompatível com as condições dadas, pois

$$y(0) = c_3 = 9 \neq 11 = c_3 = y(2).$$

Portanto, segue, do caso $y''(t) = 0$, que a solução ótima (extremal) é

$$y^*(t) = t + 9.$$

■

2.2.3 [☒]

Find the extremal of the following functional:

$$V[y] = \int_0^1 \left(y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2 \right) dt, \quad \text{com } y(0) = 2 \text{ e } y(1) = 5$$

Note que $F(y, y') = y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2$, logo temos as seguintes derivadas

$$F_{y'} = y + 1 + y', \quad F_{y'y'} = 1, \quad F_{yy'} = 1, \quad F_{ty'} = 0, \quad F_y = 1 + y'$$

Por se tratar de um integrando $F(y, y')$ (Caso especial II), segue que

$$F - y'.F_{y'} = c \quad (\text{constante})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left(y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2 \right) - y'(y + 1 + y') &= c \\ y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2 - y'y + y' + y'^2 &= c \\ y - \frac{1}{2}y'^2 &= c \\ y'^2 &= 2(y - c) \\ y' &= [2(y - c)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $y' = dy/dt$, temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dy}{[2(y - c)]^{1/2}} \\ \int 1 dt &= \int [2(y - c)]^{-1/2} dy && (\text{integrando}) \\ t + c_2 &= \sqrt{2}\sqrt{y - c} + c_1 && \left(\frac{d}{dy} \sqrt{2}\sqrt{y - c} = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - c)^{-1/2} = [2(y - c)]^{-1/2} \right) \\ \frac{t + c_2 - c_1}{\sqrt{2}} &= \sqrt{y - c} \\ \frac{(t + c_2 - c_1)^2}{2} &= y - c \\ y^*(t) &= \frac{(t + c_2 - c_1)^2}{2} + c. \end{aligned}$$

Como c_1 e c_2 são constantes, definiremos a constante $k \equiv c_2 - c_1$. Substituindo k em $y^*(t)$, temos a solução geral:

$$\begin{aligned} y^*(t) &= \frac{(t + k)^2}{2} + c \\ &= \frac{t^2}{2} + tk + \frac{k^2}{2} + c \end{aligned} \tag{1}$$

A partir das condições de contorno, segue que

$$y^*(0) = 2 = \frac{0^2}{2} + 0.k + \frac{k^2}{2} + c \iff c = \frac{4 - k^2}{2} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} y^*(1) = 5 &= \frac{1^2}{2} + 1.k + \frac{k^2}{2} + c \\ &= \frac{1 + 2k + k^2}{2} + \frac{4 - k^2}{2} \iff \\ 10 &= 5 + 2k \iff k = 5/2 \end{aligned} \tag{3}$$

Portanto, a solução ótima, $y^*(t)$, é dada por:

$$y^*(t) = \frac{t^2}{2} + tk + \frac{k^2}{2} + \frac{4 - k^2}{2} \quad (\text{usando 2 em 1})$$

$$= \frac{t^2}{2} + tk + \frac{4}{2}$$

$$= \frac{t^2}{2} + \frac{5}{2}t + 2. \quad (\text{usando 3})$$

■

2.3 Two Generalizations of the Euler Equation

2.3.1 [☒]

Find the extremal of $V[y] = \int_0^1 (1 + y''^2)dt$, with $y(0) = 0$ and $y'(0) = y(1) = y'(1) = 1$.

Note que este é um Caso de derivadas de ordem superior. Defina $z \equiv y'$, então $z' = y''$, $z(0) = 1$ e $z(1) = 1$. Logo:

$$V[z] = \int_0^1 1 + z'^2 dt.$$

Note que $F = 1 + z'^2$ e temos as seguintes derivadas:

$$F_{z'} = 2z', \quad F_{zz'} = 2, \quad F_{zz''} = 0, \quad F_{tz'} = 0, \quad F_z = 0.$$

Por definição, Equação de Euler é dada por:

$$F_{z'z'} \cdot z''(t) + F_{zz'} \cdot z'(t) + F_{tz'} - F_z = 0$$

Neste problema, segue que:

$$2 \cdot z''(t) + 0 \cdot z'(t) + 0 - 0 = 0 \iff z''(t) = 0$$

Integrando $z''(t)$, temos

$$\int z''(t) dt = c_1 = z'(t).$$

E, integrando $z'(t)$, segue que

$$\int z'(t) dt = \int c_1 dt = c_1 t + c_2 = z(t).$$

Usando as condições de contorno, obtemos:

$$\begin{aligned} z(0) = 1 &= c_1 \cdot 0 + c_2 \iff c_2 = 1 \\ z(1) = 1 &= c_1 \cdot 1 + c_2 \iff c_1 = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$z^*(t) = 1 = y'(t)$$

Integrando $y'(t)$ em relação a t , temos

$$y^*(t) = t + c_3$$

Usando a condição inicial:

$$y(0) = 0 = 0 + c_3 \iff c_3 = 0.$$

Então, a solução ótima é dada por $y^*(t) = t$. ■

2.3.2 [☒]

Find the extremal of $V[y] = \int_a^b (y'^2 + z'^2 + y'z')dt$ (general solution only).

Note que este é um Caso com diversas variáveis de estado. Note que $F = y'^2 + z'^2 + y'z'$. Logo, temos as seguinte derivadas:

$$\begin{aligned} F_{y'} &= 2y' + z', & F_{y'y'} &= 2, & F_{yy'} &= 0, & F_{ty'} &= 0, & F_y &= 0, \\ F_{z'} &= 2z' + y', & F_{z'z'} &= 2, & F_{zz'} &= 0, & F_{tz'} &= 0, & F_z &= 0. \end{aligned}$$

No caso com $n = 2 > 1$ variáveis de estado, teremos 2 equações de Euler. Usando (2.27):

$$\begin{aligned} \text{para } y : \quad 0 &= \frac{d}{dt}F_{y'} - F_y = F_{y'y'} \cdot y''(t) + F_{yy'} \cdot y'(t) + F_{ty'} - F_y \\ &= 2 \cdot y''(t) + 0 \cdot y'(t) + 0 - 0 \iff y''(t) = 0 \\ \text{para } z : \quad 0 &= \frac{d}{dt}F_{z'} - F_z = F_{z'z'} \cdot z''(t) + F_{zz'} \cdot z'(t) + F_{tz'} - F_z \\ &= 2 \cdot z''(t) + 0 \cdot z'(t) + 0 - 0 \iff z''(t) = 0 \end{aligned}$$

Integrando $y''(t)$ em relação a t , segue que $y'(t) = c_1$ e, integrando novamente:

$$y^*(t) = c_1 t + c_2.$$

Integrando $z''(t)$ em relação a t , segue que $z'(t) = c_3$ e, integrando novamente:

$$z^*(t) = c_3 t + c_4.$$

■

2.4 Dynamic Optimization of a Monopolist

2.4.1 [☒]

If the monopolistic firm in the Evans model faces a static linear demand ($h = 0$), what price will the firm charge for profit maximization? Call that price P_s , and check that it has the correct algebraic sign. Then compare the values of P , and \bar{P} , and give the particular integral in (2.36) an economic interpretation.

Considerando demanda linear estática ($h = 0$), a função lucro (2.33) é dada por

$$\pi(P) = -b(1 + \alpha b)P^2 + (a + 2\alpha ab + \beta b)P - (\alpha a^2 + \beta a + \gamma). \quad (2.33')$$

Note que o lucro não está mais em função de P' . Logo, temos a seguinte derivadas:

$$F_{P'} = 0, \quad F_{P'P'} = 0, \quad F_{PP'} = 0, \quad F_{tP'} = 0, \quad F_P = -2b(1 + \alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b),$$

O objetivo do monopolista é

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \Pi[P] = \int_0^T \pi(P, P') dt \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} P(0) = P_0 & (P_0 \text{ dado}) \\ P(T) = P_T & (T, P_T \text{ dados}) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por definição, a equação de Euler é dada por:

$$\pi_{P'P'}.P''(t) + \pi_{PP'}.P'(t) + \pi_{tP'} - \pi_P = 0$$

Para este problema, segue que

$$\begin{aligned} 0.P''(t) + 0.P'(t) + 0 - [-2b(1 + \alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b)] &= 0 \\ 2b(1 + \alpha b)P - (a + 2\alpha ab + \beta b) &= 0 \\ P_S &= \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1 + \alpha b)}. \end{aligned}$$

Como $a, b, \alpha, \beta > 0$, então $P_S > 0$ e $P_S = \bar{P}$. Ou seja, sob demanda linear estática ($h = 0$), a solução do problema do monopolista é igual à solução com demanda não-estática. ■

2.4.2 [☒]

Verify that A_1 , and A_2 should indeed have the values shown in (2.37).

A solução geral do problema é dada por

$$P^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \bar{P} \quad (2.36)$$

e, a partir das condições de contorno, temos

$$P(0) = P_0 = A_1 e^{r \cdot 0} + A_2 e^{-r \cdot 0} + \bar{P} \iff A_1 = P_0 - A_2 - \bar{P} \quad (1)$$

$$P(T) = P_T = A_1 e^{rT} + A_2 e^{-rT} + \bar{P} \quad (2)$$

Substituindo A_1 de (1) em (2), segue que

$$\begin{aligned} P_T &= (P_0 - A_2 - \bar{P}) e^{rT} + A_2 e^{-rT} + \bar{P} \\ &= A_2 (e^{-rT} - e^{rT}) + P_0 e^{rT} + \bar{P} (1 - e^{rT}). \end{aligned}$$

Isolando A_2 , temos

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{P_T - P_0 e^{rT} - \bar{P} (1 - e^{rT})}{e^{-rT} - e^{rT}} \\ &= \frac{P_T - P_0 e^{rT} - \bar{P} + \bar{P} e^{rT}}{e^{-rT} - e^{rT}} \left(\frac{e^{-rT}}{e^{-rT}} \right) \\ &= \frac{P_T e^{-rT} - P_0 e^{rT-rT} - \bar{P} e^{-rT} + \bar{P} e^{rT-rT}}{e^{-rT-rT} - e^{rT-rT}} \\ &= \frac{P_T e^{-rT} - P_0 - \bar{P} e^{-rT} + \bar{P}}{e^{-2rT} - 1} \\ &= \frac{(P_T - \bar{P}) e^{-rT} - P_0 + \bar{P}}{e^{-2rT} - 1} \left(\frac{-1}{-1} \right) \\ &= \frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P}) e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1):

$$\begin{aligned} A_1 &= P_0 - \left(\frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P}) e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}} \right) - \bar{P} \\ &= \frac{P_0 (1 - e^{-2rT}) - [P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P}) e^{-rT}] - \bar{P} (1 - e^{-2rT})}{1 - e^{-2rT}} \\ &= \frac{P_0 - P_0 e^{-2rT} - P_0 + \bar{P} + P_T e^{-rT} - \bar{P} e^{-rT} - \bar{P} + \bar{P} e^{-2rT}}{1 - e^{-2rT}} \\ &= \frac{-P_0 e^{-2rT} + P_T e^{-rT} - \bar{P} e^{-rT} + \bar{P} e^{-2rT}}{1 - e^{-2rT}} \left(\frac{e^{2rT}}{e^{2rT}} \right) \\ &= \frac{-P_0 e^{-2rT+2rT} + P_T e^{-rT+2rT} - \bar{P} e^{-rT+2rT} + \bar{P} e^{-2rT+2rT}}{e^{2rT} - e^{-2rT+2rT}} \\ &= \frac{-P_0 + P_T e^{rT} - \bar{P} e^{rT} + \bar{P}}{e^{2rT} - 1} \left(\frac{-1}{-1} \right) \\ &= \frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P}) e^{rT}}{1 - e^{2rT}}. \end{aligned}$$

■

2.5 Trading Off Inflation and Unemployment

2.5.1 [X]

Verify the result in (2.46) by using Euler equation (2.18).

O problema do policymaker é dado por

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \Lambda[\pi] &= \int_0^T \lambda(\pi, \pi') e^{-\rho t} dt \\ \text{sujeito a } \begin{cases} \pi(0) = \pi_0 & (\pi_0 > 0 \text{ dado}) \\ \pi(T) = 0 & (T \text{ dado}) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.45)$$

em que $e^{-\rho t}$ é o termo que traz a perda social a valor presente.

O integrando de (2.45), $F \equiv \lambda(\pi, \pi') e^{-\rho t} = \left[\left(\frac{\pi'}{\beta j} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\pi'}{j} + \pi \right)^2 \right] e^{-\rho t}$, tem as primeiras derivadas:

$$\begin{aligned} F_\pi &= \left[2\alpha \left(\frac{\pi'}{j} + \pi \right) (1) \right] e^{-\rho t} = 2 \left(\frac{\alpha}{j} \pi' + \alpha \pi \right) e^{-\rho t} \\ F_{\pi'} &= \left[2 \left(\frac{\pi'}{\beta j} \right) \frac{1}{\beta j} + 2\alpha \left(\frac{\pi'}{j} + \pi \right) \frac{1}{j} \right] e^{-\rho t} = 2 \left(\frac{\pi'}{\beta^2 j^2} + \alpha \frac{\pi'}{j^2} + \alpha \frac{\pi}{j} \right) e^{-\rho t} \\ &= 2 \left(\frac{1 + \alpha \beta^2}{\beta^2 j^2} \pi' + \frac{\alpha}{j} \pi \right) e^{-\rho t} \end{aligned}$$

e com as segundas derivadas:

$$\begin{aligned} F_{\pi' \pi'} &= 2 \left(\frac{1 + \alpha \beta^2}{\beta^2 j^2} \right) e^{-\rho t} \\ F_{\pi \pi'} &= \frac{2\alpha}{j} e^{-\rho t} \\ F_{t \pi'} &= 2 \left(\frac{1 + \alpha \beta^2}{\beta^2 j^2} \pi' + \frac{\alpha}{j} \pi \right) e^{-\rho t} \cdot \ln e \cdot (-\rho) = -2\rho \left(\frac{1 + \alpha \beta^2}{\beta^2 j^2} \pi' + \frac{\alpha}{j} \pi \right) e^{-\rho t} \end{aligned}$$

Lembre-se que a Equação de Euler tem a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} F_{y'} - F_y = 0 \quad (2.18)$$

$$F_{y' y'} \cdot y''(t) + F_{y y'} \cdot y'(t) + F_{t y'} - F_y = 0 \quad (2.19)$$

Logo, substituindo as derivadas parciais na equação de Euler deste problema, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \left(\frac{1 + \alpha \beta^2}{\beta^2 j^2} \right) e^{-\rho t} \pi'' + \frac{2\alpha}{j} e^{-\rho t} \pi' - 2\rho \left(\frac{1 + \alpha \beta^2}{\beta^2 j^2} \pi' + \frac{\alpha}{j} \pi \right) e^{-\rho t} - 2 \left(\frac{\alpha}{j} \pi' + \alpha \pi \right) e^{-\rho t} \\ 0 &= 2 \left(\frac{1 + \alpha \beta^2}{\beta^2 j^2} \right) e^{-\rho t} \pi'' + \left[\frac{2\alpha}{j} - 2\rho \frac{1 + \alpha \beta^2}{\beta^2 j^2} - 2\frac{\alpha}{j} \right] e^{-\rho t} \pi' + \left[-2\rho \frac{\alpha}{j} - 2\alpha \right] e^{-\rho t} \pi \\ 0 &= \left(\frac{1 + \alpha \beta^2}{\beta^2 j^2} \right) \pi'' + \left[\frac{\alpha}{j} - \rho \frac{1 + \alpha \beta^2}{\beta^2 j^2} - \frac{\alpha}{j} \right] \pi' + \left[-\rho \frac{\alpha}{j} - \alpha \right] \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1 + \alpha\beta^2}{\beta^2 j^2} \right) \pi'' - \left(\rho \frac{1 + \alpha\beta^2}{\beta^2 j^2} \right) \pi' - \left(\frac{\alpha(\rho + j)}{j} \right) \pi \\
0 &= \left(\frac{1 + \alpha\beta^2}{\beta^2 j^2} \right) \left(\frac{\beta^2 j^2}{1 + \alpha\beta^2} \right) \pi'' - \left(\rho \frac{1 + \alpha\beta^2}{\beta^2 j^2} \right) \left(\frac{\beta^2 j^2}{1 + \alpha\beta^2} \right) \pi' - \left(\frac{\alpha(\rho + j)}{j} \right) \left(\frac{\beta^2 j^2}{1 + \alpha\beta^2} \right) \pi \\
0 &= \pi'' - \rho\pi' - \left(\frac{\alpha\beta^2 j(\rho + j)}{1 + \alpha\beta^2} \right) \pi \quad \Longleftrightarrow \quad \pi'' - \rho\pi' - \Omega\pi = 0,
\end{aligned} \tag{2.46}$$

como queríamos demonstrar. ■

2.5.2 [☒]

Let the objective functional in problem (2.45) be changed to

$$\int_0^T \frac{1}{2} \lambda(\pi, \pi') e^{-\rho t} dt.$$

(a) Do you think the solution of the problem will be different?

A funcional objetiva no problema é dada por

$$\Lambda[\pi] = \int_0^T \lambda(\pi, \pi') e^{-\rho t} dt, \quad (2.45)$$

e na forma alterada, temos

$$\int_0^T \frac{1}{2} \lambda(\pi, \pi') e^{-\rho t} dt.$$

Note que o valor $1/2$ não depende de t , portanto, pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2} \int_0^T \lambda(\pi, \pi') e^{-\rho t} dt = \frac{1}{2} \Lambda[\pi].$$

Logo, o problema de minimização independe de $1/2$ e, logo, a solução será a mesma. ■

(b) Can you think of any advantage in including a coefficient $\frac{1}{2}$ in the integrand?

No exercício anterior (2.5.1), obtivemos diversos termos multiplicados por 2, logo, a inclusão de $1/2$ no integrando poderia simplificar alguns cálculos sem alterar a solução do problema (como visto no item (a) deste exercício). ■

2.5.3 [☒]

Let the terminal condition in problem (2.45) be changed to

$$\pi(T) = \pi_T \quad (0 < \pi_T < \pi_0)$$

(a) What would be the values of A_1 and A_2 ?

O problema alterado do policymaker é dado por

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \Lambda[\pi] = \int_0^T \lambda(\pi, \pi') e^{-\rho t} dt \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} \pi(0) = \pi_0 & (\pi_0 > 0 \text{ dado}) \\ \pi(T) = \pi_T & (T \text{ dado, } 0 < \pi_T < \pi_0) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.45')$$

em que

$$\pi'' - \rho\pi' - \Omega\pi = 0, \quad (2.46)$$

Note que a mudança para $\pi(T) = \pi_T$ não altera a solução geral do problema de minimização:

$$\pi^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \pi^0 \quad (2.47)$$

em que

$$r_1, r_2 = \frac{1}{2} \left(\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\Omega} \right). \quad (\Omega \equiv \frac{\alpha\beta^2 j(\rho+j)}{1+\alpha\beta^2})$$

Como $\Omega > 0$, então $\rho = \sqrt{\rho^2} < \sqrt{\rho^2 + 4\Omega}$ e, portanto,

$$r_1 > 0 \quad \text{e} \quad r_2 < 0 \quad (2.48)$$

Usando as condições de contorno em (2.47), segue que:

$$\pi(0) = \pi_0 = A_1 + A_2 \iff A_1 = \pi_0 - A_2 \quad (1)$$

$$\pi(T) = \pi_T = A_1 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$\begin{aligned} (\pi_0 - A_2) e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} &= \pi_T \\ \pi_0 e^{r_1 T} - A_2 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} &= \pi_T \\ \pi_0 e^{r_1 T} + A_2 (e^{r_2 T} - e^{r_1 T}) &= \pi_T \\ A_2 &= \frac{\pi_T - \pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_2 T} - e^{r_1 T}}. \end{aligned}$$

Substituindo A_2 em (1), obtemos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \pi_0 - \left(\frac{\pi_T - \pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_2 T} - e^{r_1 T}} \right) \\ &= \frac{\pi_0 (e^{r_2 T} - e^{r_1 T}) - \pi_T + \pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_2 T} - e^{r_1 T}} \\ &= \frac{\pi_0 e^{r_2 T} - \pi_T}{e^{r_2 T} - e^{r_1 T}}. \end{aligned}$$

(b) Can you unambiguously evaluate the signs of A_1 and A_2 ?

Como $0 < \pi_T < \pi_0$, $r_1 > 0$, $r_2 < 0$ e $T > 0$, então

$$r_1 T > 0 \quad \text{e} \quad r_2 T < 0,$$

e

$$e^{r_1 T} > 0 \quad \text{e} \quad e^{r_2 T} > 0.$$

Note que, quando T cresce, $r_2 T$ se torna um número cada vez mais negativo e, portanto, $e^{r_2 T} \rightarrow 0$. Já, quando $T \rightarrow 0$, temos que $e^{r_2 T} \rightarrow 1$. Logo,

$$0 < e^{r_1 T} < 1.$$

Agora, observe que, quando T aumenta, $r_1 T$ e $e^{r_1 T}$ também aumentam. Quando $T \rightarrow 0$, temos que $r_1 T \rightarrow 0$ e, logo, $e^{r_1 T} \rightarrow 1$. Portanto,

$$e^{r_1 T} > 1.$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} e^{r_1 T} - e^{r_2 T} &> 0, \quad \text{e} \\ \pi_0 e^{r_1 T} - \pi_T &> 0. \end{aligned} \quad (\text{pois } 0 < \pi_T < \pi_0 < \pi_0 e^{r_1 T})$$

Logo,

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\overbrace{\pi_0 e^{r_1 T} - \pi_T}^{>0}}{\underbrace{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}}_{>0}} > 0 \\ A_1 &= \frac{\overbrace{\pi_T - \pi_0 e^{r_2 T}}^{?}}{\underbrace{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}}_{>0}} \left\{ \begin{array}{ll} > 0, & \text{se } \pi_T / \pi_0 > e^{r_2 T}; \\ = 0, & \text{se } \pi_T / \pi_0 = e^{r_2 T}; \\ < 0, & \text{se } \pi_T / \pi_0 < e^{r_2 T}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Portanto, conseguimos apenas avaliar o sinal de A_1 , enquanto o sinal de A_2 depende da relação entre π_T / π_0 e $e^{r_2 T}$. ■

3 Transversality Conditions for Variable-Endpoints Problems

3.0 [☒] Definições, Proposições, Lemas e Observações

Condição de Transversalidade - TVC (Chiang, 1999).

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T} \cdot \Delta T + [F_{y'}]_{t=T} \cdot \Delta y_T = 0 \quad (3.9)$$

Linha Terminal Vertical (Chiang, 1999). Envolve T fixo (logo, $\Delta T = 0$) e δy_t é arbitrário. Portanto, a condição de transversalidade (3.9) se reduz a

$$[F_{y'}]_{t=T} = 0. \quad (3.10)$$

Linha Horizontal Vertical (Chiang, 1999). Envolve y_T fixo (logo, $\Delta y_T = 0$) e ΔT é arbitrário. Portanto, a condição de transversalidade (3.9) se reduz a

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T} = 0. \quad (3.11)$$

Curva Terminal (Chiang, 1999). Com uma curva terminal $y_t = \phi(T)$, temos que y_T e T não são fixos e $\Delta y_T = \phi' \Delta T$. Portanto, a condição de transversalidade (3.9) se reduz a

$$[F + (\phi' y')F_{y'}]_{t=T} = 0. \quad (3.12)$$

Linha Terminal Vertical Truncada (Chiang, 1999). Quando a linha vertical terminal é truncada, em que há um nível mínimo de y permitido (y_{min}), a solução ótima pode ocorrer quando $y_T^* > y_{min}$ ou $y_T^* = y_{min}$. A condição de transversalidade é dada por:

$$[F_{y'}]_{t=T} \leq 0 \quad y_T^* \geq y_{min} \quad (y_T^* - y_{min}) [F_{y'}]_{t=T} = 0 \quad (3.17 - \text{p/ max } V)$$

$$[F_{y'}]_{t=T} \geq 0 \quad y_T^* \geq y_{min} \quad (y_T^* - y_{min}) [F_{y'}]_{t=T} = 0 \quad (3.17' - \text{p/ min } V)$$

Linha Terminal Vertical Truncada (Chiang, 1999). Quando a linha horizontal terminal é truncada, em que há um tempo máximo permitido (T_{max}), a solução ótima pode ocorrer quando $T^* < T$ ou $T^* = T$. A condição de transversalidade é dada por:

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T} \geq 0 \quad T^* \leq T_{max} \quad (T^* - T_{max}) [F - y'F_{y'}]_{t=T} = 0 \quad (3.18 - \text{p/ max } V)$$

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T} \leq 0 \quad T^* \leq T_{max} \quad (T^* - T_{max}) [F - y'F_{y'}]_{t=T} = 0 \quad (3.18' - \text{p/ max } V)$$

3.2 Specialized Transversality Conditions

3.2.1 [☒]

For the functional $V[y] = \int_0^T (t^2 + y'^2)dt$, the general solution to the Euler equation is $y^*(t) = c_1 t + c_2$ (see Exercise 2.2, Prob. 1).

(a) Find the extremal if the initial condition is $y(0) = 4$ and the terminal condition is $T = 2$, y_T free.

Note que se trata de um caso de linha terminal vertical, com $T = 2$ e y_T livre. Como T fixo, logo $\Delta T = 0$.

Por definição, a condição de transversalidade (TVC) é dada por:

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T} \cdot \Delta T + [F_{y'}]_{t=T} \cdot \Delta y_T = 0 \quad (3.9)$$

Como $\Delta T = 0$ e y_T é livre, então a TVC se reduz a

$$[F_{y'}]_{t=T} = 0. \quad (3.10)$$

Da funcional $V[y]$, temos $F = t^2 + y'^2$, logo

$$F_{y'} = 2y'. \quad (2)$$

De (3.10) e (2), em $t = T = 2$, temos:

$$[2y']_{t=2} = 0 \iff 2y' = 0 \iff y' = 0. \quad (3)$$

Do enunciado, temos que $y^*(t) = c_1 t + c_2$, então, derivando em t ,

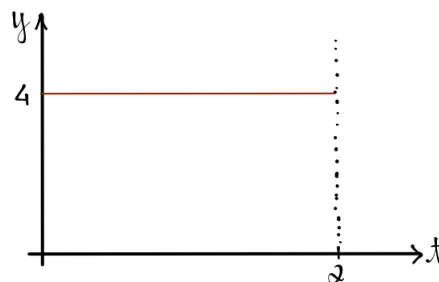
$$(y^*)' = c_1 \stackrel{(3)}{\iff} c_1 = 0.$$

Logo, $y^* = c_2$ e, como sabemos que $y(0) = 4$, segue que $c_2 = 4$ e, portanto,

$$y^* = 4.$$

■

(b) Sketch a diagram showing the initial point, the terminal point, and the extremal.



3.2.2 [☒]

How will the answer to the preceding problem change, if the terminal condition is altered to: $T = 2$, $y_T \geq 3$?

No exercícios anterior, encontramos $y^* = 4, \forall t$. Logo, no estágio terminal $T = 2$, temos

$$y(T = 2) = 4,$$

que respeita $y_{min} = 3$, já que $y_T = 4 \geq 3 = y_{min}$. ■

3.2.3 [☒]

Let the terminal condition in Prob. 1 be changed to: $y_T = 5$, T free.

(a) Find the new extremal. What is the optimal terminal time T^* ?

Neste caso, temos linha horizontal terminal com T livre e y_T fixo. Por definição, a TVC é dada por:

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T} \cdot \Delta T + [F_{y'}]_{t=T} \cdot \Delta y_T = 0 \quad (3.9)$$

Como $\Delta y_T = 0$ e T é livre, então a TVC se reduz a

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T} = 0. \quad (1)$$

Relembre que a funcional do problema é

$$V[y] = \int_0^T (t^2 + y'^2) dt,$$

em que $F = t^2 + y'^2$ e $F_{y'} = 2y'$. Aplicando F e $F_{y'}$ em (1) temos

$$\begin{aligned} (T^2 + y'^2) - y' (2y') &= 0 \\ T^2 + y'^2 - 2y'^2 &= 0 \\ T^2 - y'^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Do exercício 1, temos

$$y^*(t) = c_1 t + c_2 \implies y' = c_1. \quad (3)$$

Usando (3) em (2):

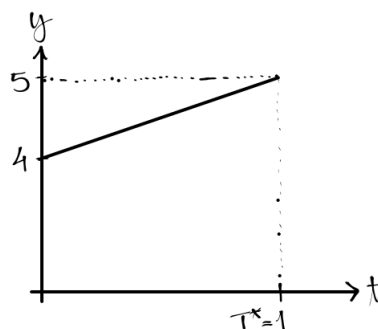
$$T^2 - c_1^2 = 0 \iff T = c_1.$$

Usando as condições de contorno, segue

$$\begin{aligned} y(0) = 4 &= c_1 \cdot 0 + c_2 \iff c_2 = 4 \\ y(T) = 5 &= c_1 \cdot T + c_2 \iff c_1^2 = 1 \iff c_1 = 1 = T^*. \end{aligned} \quad (T > 0)$$

■

(b) Sketch a diagram showing the initial point, the terminal line, and the extremal.



3.3 Three Generalizations

3.3.1 [☒]

For the functional $V[y] = \int_0^T (y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2)$, the general solution of the Euler equation is $y^*(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1t + c_2$ (see Exercise 2.2, Prob. 3). If we have a vertical initial line at $t = 0$ and a vertical terminal line at $t = 1$, write out the transversality conditions, and use them to definitize the constants in the general solution.

Note que temos um problema com estágios inicial ($t_0 = 0$) e final ($T = 1$) fixos, e com estados inicial e terminal variáveis:

$$\Delta t_0 = 0 \quad \text{e} \quad \Delta T = 0, \quad y_{t_0}, y_T \text{ livres.}$$

Da funcional, temos

$$F = y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2 \implies F_{y'} = y + 1 + y', \quad (1)$$

e, da solução geral,

$$y^*(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1t + c_2 \implies y'(t) = t + c_1. \quad (2)$$

Por definição, a condição de transversalidade (TVC) é dada por:

$$[F - y'F_{y'}]_t \cdot \Delta T + [F_{y'}]_t \cdot \Delta y_T = 0 \quad (3.9)$$

Como apenas os estágios inicial e terminal são fixos, e os estados são livres, precisamos utilizar 2 TVC's: uma para $t_0 = 0$ e outra para $T = 1$. Lembrando que $\delta t_0 = \Delta T = 0$, as condições de transversalidade se reduzem a:

$$[F_{y'}]_{t=t_0} = 0 \quad (A1)$$

$$[F_{y'}]_{t=T} = 0 \quad (B1)$$

Usando t_0 e $T = 1$ em (2), segue que

$$y(0) = c_2 \quad \text{e} \quad y'(0) = c_1 \quad (A2)$$

$$y(1) = \frac{1}{2} + c_1 + c_2 \quad \text{e} \quad y'(1) = 1 + c_1 \quad (B2)$$

Usando (A2) e (B2) em $F_{y'}$, segue que:

$$\text{para } t_0 : \quad c_1 + c_2 + 1 = 0 \iff c_2 = -1 - c_1 \quad (A3)$$

$$\text{para } T : \quad (1 + c_1) + \left(\frac{1}{2} + c_1 + c_2 \right) + 1 = 0 \quad (B3)$$

Substituindo c_2 de (A3) na expressão (B3), temos

$$1 + c_1 + \frac{1}{2} + c_1 + (-1 - c_1) + 1 = 0 \iff c_1 = -\frac{3}{2},$$

logo,

$$c_2 = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a solução geral é dada por:

$$y^*(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}.$$

■

3.3.2 [☒]

Let the vertical initial line in the preceding problem be truncated with the restriction $y^*(0) \geq 1$, but keep the terminal line unchanged.

(a) Is the original solution still acceptable? Why?

Não, pois a solução anterior assume $y^*(0) = 1/2$, o que contradiz a restrição, pois

$$y^*(0) = 1/2 \not\geq 1 = y_{min}.$$

(b) Find the new extremal.

No estado terminal, T continua fixo e y_T livre, logo a TVC é a mesma:

$$[F_{y'}]_{t=T} = 0 \quad (B1)$$

Para t_0 , agora temos y_{t_0} truncado, ou seja, $y_{t_0}^* \geq y_{min}$. Logo, a TVC é dada por:

$$[F_{y'}]_{t=t_0} \geq 0 \quad y_{t_0}^* \geq y_{min} \quad (y_{t_0}^* - y_{min}) [F_{y'}]_{t=t_0} = 0 \quad (A1)$$

Note que, da funcional, temos

$$F = y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2 \implies F_{y'} = y + 1 + y', \quad (1)$$

e, da solução geral,

$$y^*(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1t + c_2 \implies y'(t) = t + c_1. \quad (2)$$

Assim, usando t_0 e $T = 1$ em (2), segue que

$$y(0) = c_2 \quad e \quad y'(0) = c_1 \quad (A2)$$

$$y(0) = \frac{1}{2} + c_1 + c_2 \quad e \quad y'(1) = 1 + c_1 \quad (B2)$$

Aplicando (B2) em (1), segue para $T = 1$:

$$(1 + c_1) + \left(\frac{1}{2} + c_1 + c_2\right) + 1 = 0 \iff c_2 = -\frac{5}{2} - 2c_1 \quad (B3)$$

Note que, para satisfazer a TVC no estágio inicial (A1), temos que

$$[F_{y'}]_{t=t_0} = 0 \quad (A3)$$

$$\text{ou} \quad y_{t_0}^* - y_{min} = 0. \quad (A4)$$

Verificando $[F_{y'}]_{t=t_0} = 0$: (igual do exercício anterior.) Usando (A2) em (1), temos:

$$c_2 + 1 + c_1 = 0 \implies c_1 = -1 - c_2 \quad (A3.1)$$

Substituindo (A3.1) em (B3), segue que

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{5}{2} - 2(-1 - c_2) \\ -c_2 &= -\frac{5}{2} + 2 \\ c_2 &= \frac{1}{2} \implies y^*(0) = c_2 = \frac{1}{2} \not\geq 1 \end{aligned}$$

Portanto, não satisfaz a TVC em (A1). Então, precisamos verificar o outro caso.

Verificando $y_{t_0}^* - y_{min} = 0 \iff y^*(0) = y_{min} = 1$: De (A2), segue que

$$y^*(0) = y_{min} = 1 = c_2 \iff c_2 = 1 \quad (\text{A4.1})$$

Logo, aplicando (A4.1) em (B3):

$$1 = -\frac{5}{2} - c_1 \iff c_2 = -\frac{7}{2} \quad (\text{A4.2})$$

Portanto, usando (A4.1) e (A4.1) na solução geral (2), obtemos:

$$y^*(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{7}{2}t + 1.$$

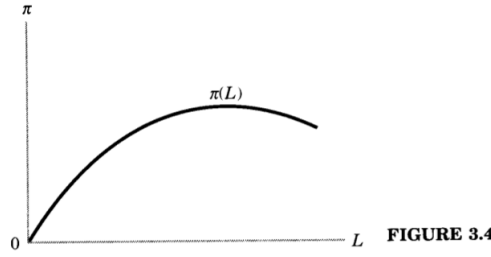
Note que vale $y^*(0) = 1 \geq 1 = y_{min}$. ■

3.4 The Optimal Adjustment of Labor Demand

3.4.1 [☒]

(a) From the two transversality conditions (3.34) and (3.35), deduce the location of the optimal terminal state L_T^* with reference to Fig. 3.4.

Seja a função lucro, $\pi(L)$, com $\pi''(L) < 0$, como na Figura 3.4:



O problema de maximização é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } \Pi[L] &= \int_0^T [\pi(L) - bL'^2 - k]^{\rho t} dt + \frac{1}{\rho} \pi(L_T) e^{-\rho T} \\ \text{sujeito a } \begin{cases} P(0) = L_0 & (L_0 \text{ dado}) \\ P(T) = L_T & (L_T > L_0 \text{ livre}, T \text{ livre}) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Temos a seguinte equação de Euler:

$$L'' - \rho L' + \frac{\pi'(L)}{2b} = 0. \quad (3.33)$$

Como ambos L_T e T são livres, precisamos satisfazer ambas condições de transversalidade em $t = T$:

- $[F_{L'}]_{t=T} = 0$, ou seja,

$$L' - \frac{\pi'(L)}{2\rho b} = 0. \quad (3.34)$$

- $[F - L'F_{L'}]_{t=T} = 0$, ou seja,

$$L'^2 = \frac{k}{b} \iff L' = \sqrt{\frac{k}{b}}. \quad (3.35)$$

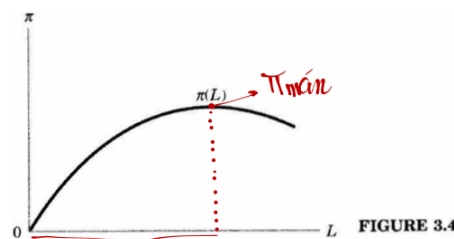
Substituindo (3.35) em (3.34), temos:

$$\sqrt{\frac{k}{b}} - \frac{\pi'(L_T)}{2\rho b} = 0 \iff \pi'(L_T) = 2\rho b \sqrt{\frac{k}{b}} = 2\rho \sqrt{kb}$$

Como, por suposição do problema, $\rho, b > 0$ e $k > 0$ quando $L' \neq 0$, então

$$\pi'(L_T^*) = 2\rho \sqrt{kb} > 0.$$

Portanto, L_T^* deve estar localizado na parte crescente da curva $\pi(L)$, ou seja, 'q esquerda do ponto máximo da Figura 3.4. ■



o onde L_T^ deve estar localizado*

(b) How would an increase in p affect the location of L_T^* ? How would an increase in b or k affect L_T^* ?

Como ρ, k e b afetam positivamente $\pi'(L_T^*)$, aumentos nestas variáveis faz com que L_T^* diminua, já que os pontos com menores L (mais à esquerda do π_{max} – ver figura 3.4) possuem maiores inclinações. ■

(c) Interpret the economic meaning of your result in (b).

Note que a função custo de ajuste no fator de trabalho, L , é dada por

$$C(L') = bL^2 + k, \quad (3.29)$$

na qual temos que aumentos em b e em k elevam o custo de ajuste em L , o que faz com que o lucro líquido e o trabalho diminuam.

Já um aumento em ρ , a taxa de desconto, dá maior peso para o lucro em períodos mais próximos do presente. Assim, o tomador de decisão tenderá a aumentar menos os custos com fator de trabalho que, diminuindo o trabalho e o lucro líquido. ■

3.4.2 [☒]

In the preceding problem, let the profit function be

$$\pi(L) = 2mL - nL^2 \quad (0 < n < m)$$

(a) Find the value of L_T^* .

Do problema (como visto no exercício anterior), temos, em $t = T$,

$$L' - \frac{\pi'(L)}{2\rho b} = 0. \quad (3.34)$$

e

$$L'^2 = \frac{k}{b} \iff L' = \sqrt{\frac{k}{b}}, \quad (3.35)$$

logo,

$$\pi'(L_T) = 2\rho\sqrt{bk}. \quad (1)$$

Do enunciado, para $t = T$, segue que

$$\begin{aligned} \pi(L) &= 2mL - nL^2 & (0 < n < m) \\ \implies \pi'(L) &= 2m - 2nL & (2) \end{aligned}$$

Aplicando (1) em (2), obtemos

$$2\rho\sqrt{bk} = 2m - 2nL_T \iff L_T^* = \frac{m - \rho\sqrt{bk}}{n}.$$

■

(b) At what L value does π reach a peak?

Para que π atinja um ponto máximo, precisamos:

$$\pi'(L) = 0 \quad \text{e} \quad \pi''(L) < 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \pi'(L) = 2m - 2nL = 0 & \iff L = \frac{m}{n} \\ \pi''(L) = -2n < 0 & \iff n > 0. \end{aligned}$$

Portanto, π atinge ponto máximo quando $L = \frac{m}{n}$, com $n > 0$.

■

(c) In light of (b), what can you say about the location of L_T^* in relation to the $\pi(L)$ curve?

Como $\rho, b, k > 0$, então

$$\begin{aligned} L_T^* &= \frac{m - \rho\sqrt{bk}}{n} < L_{max} = \frac{m}{n}, & (\text{dado } m - \rho\sqrt{bk} < m) \\ \pi'(L_T^*) &= 2m - 2n \left(\frac{m - \rho\sqrt{bk}}{n} \right) = 2m - 2m + 2\rho\sqrt{bk} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, L_T^* está à esquerda de L_{max} , ou seja, na parte em que $\pi'(L) > 0$ (crescente). ■

3.4.3 [☒]

(a) From the transversality condition (3.35), deduce the location of the optimal terminal time T^* with reference to a graph of the solution path $L^*(t)$.

Do problema, temos a TVC, em $t = T$:

$$L'^2 = \frac{k}{b} \iff L' = \sqrt{\frac{k}{b}}, \quad (3.35)$$

em que consideramos a raiz quadrada positiva, porque L deve crescer entre L_0 e L_T . (?) ■

(b) How would an increase in k affect the location of T^* ? How would an increase in b affect T^* ?

Integrando L' em relação a T , temos

$$\int L' dT = \int \sqrt{\frac{k}{b}} dT = T \sqrt{\frac{k}{b}} + c = L^*(T), \quad c \text{ constante.}$$

Em $t = T$, temos

$$L^*(T^*) = T^* \sqrt{\frac{k}{b}} + c \iff T^* = (L^* - c) \sqrt{\frac{b}{k}}.$$

Portanto, um aumento em k diminui ambos $\sqrt{b/k}$ e T^* . Um aumento em b aumenta ambos $\sqrt{b/k}$ e T^* . Isto tem sentido econômico, pois, da expressão do custo

$$C(L') = bL'^2 + k,$$

notamos que k corresponde ao custo fixo. Então, quanto maior for o k , maior será o custo $C(L')$ e, portanto, menor a firma em contratar trabalho e menor o T^* .

Por outro lado, b é um custo de ajustamento de L . Como a firma não conhece o número de períodos t , então a firma pode reduzir o custo de ajustamento elevando o T^* . ■

Referências

Chiang, A. (1999). *Elements of Dynamic Optimization*. Waveland Press.