Lista 1

Exercício 1. *Suponha que X seja uma variável aleatória contínua com densidade*

$$f(x) = \begin{cases} cx^3 & \text{para } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Qual precisa ser o valor de c para que $f(x)$ seja uma densidade?

b) Qual a probabilidade de que $1 \leq X \leq 2$?

Resposta:

a) (Ver DeGroot Definition 3.2.2 e Example 3.2.3, pg. 104-105) Para toda p.d.f., é preciso que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Como $1 \leq x \leq 3$ neste exemplo, temos que

$$\int_1^3 cx^3 dx = c\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^3 = c\left(\frac{81}{4}c - \frac{1}{4}\right) = 20c \quad = 1.$$

Logo, $c = 1/20$.

b) (Ver DeGroot Example 3.2.4, pg. 105)

$$Pr(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 cx^3 dx = \int_1^2 \frac{x^3}{20} dx \qquad (\text{c} = 1/20)$$
$$= \left[\frac{x^4}{80}\right]_1^2 = \frac{16}{80} - \frac{1}{80} = \frac{3}{16}.$$

□

Exercício 2. *Suponha que 5% dos motoristas não tenham seguro. De cada 30 motoristas selecionados aleatoriamente, qual a probabilidade de que não mais do que 1 esteja sem seguro?*

Resposta:

$$Pr(30 \text{ c/ seguro ou } 29 \text{ c/ seguro}) = 0,95^{30} + 30(0,95^{29}.0,05^1) = 0,5535421$$

□

Exercício 3. *Suponha que o resultado de um estudante em uma prova de matemática seja um número entre 0 e 1. Analogamente, seu resultado em uma prova de português, Y, é também um número entre 0 e 1. Suponha que a distribuição conjunta de X e Y seja:*

$$f(x,y) = \frac{2}{5}(2x + 3y) \quad : \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$$

a) Mostre que $f(\cdot,\cdot)$ é uma densidade conjunta apropriada

b) Encontre $Pr(X \leq 0,5$ e $Y \leq 0,5)$

c) Encontre a distribuição marginal de X e sua esperança

d) Qual a probabilidade de que $Y \leq 0,5$ dado que $X \leq 0,5$?

e) X e Y são independentes? Explique

Resposta:

a) (Ver DeGroot Theorem 3.4.3 e Example 3.4.7, pg. 121-122) Para toda p.d.f. bivariada, é preciso que $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$. Como $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)dxdy &= \int_0^1 \left[\frac{2}{5}x^2 + \frac{6}{5}yx\right]_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{2}{5} + \frac{6}{5}y\right)dy \\
&= \left[\frac{2}{5}y + \frac{3}{5}y^2\right]_0^1 \quad = 1.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{0,5}\int_0^{0,5} \frac{2}{5}(2x+3y)dxdy &= \int_0^{0,5} \left[\frac{2}{5}x^2 + \frac{6}{5}yx\right]_0^{0,5} dy \\
&= \int_0^{0,5} \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{5}y\right)dy \\
&= \left[\frac{1}{10}y + \frac{3}{10}y^2\right]_0^{0,5} \\
&= \frac{1}{20} + \frac{3}{40} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

c) (Ver DeGroot Theorem 3.5.2 e Example 3.5.3, pg. 132-133)

$$\begin{aligned}
f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy &= \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)dy \\
&= \left[\frac{2}{5}\left(2xy + \frac{3}{2}y^2\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{5}\left(2x + \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

(Ver DeGroot Definition 4.1.3 e Example 4.1.6, pg. 209)

$$\begin{aligned}
E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx &= \int_0^1 x\frac{2}{5}\left(2x+\frac{3}{2}\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{4}{5}x^2+\frac{3}{5}x\right)dx \\
&= \left[\frac{4}{15}x^3+\frac{3}{10}x^2\right]_0^1 \\
&= \frac{17}{30}
\end{aligned}$$

d) (Ver DeGroot Equação 3.6.1, pg. 142)

$$Pr(Y \leq 0,5|X \leq 0,5) = \frac{Pr(Y \leq 0,5 \text{ e } X \leq 0,5)}{Pr(X \leq 0,5)} \stackrel{(b)}{=} \frac{1/8}{Pr(X \leq 0,5)}$$

Vamos achar $Pr(X \leq 0,5)$:

$$\begin{aligned}
Pr(X \leq 0,5) &= \int_0^{0,5} f(x)\ dx = \int_0^{0,5} \frac{2}{5}\left(2x+\frac{3}{2}\right)\ dx \\
&= \left[\frac{2}{5}x^2+\frac{3}{5}x\right]_0^{0,5} = \frac{1}{10}+\frac{3}{10} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$Pr(Y \leq 0,5|X \leq 0,5) = \frac{1/8}{2/5} = \frac{5}{16}$$

e) X e Y são independentes se $f(y|x) = f(y)$

$$\begin{aligned}
f(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{2/5(2x+3y)}{4/5x+3/5} = \frac{2(2x+3y)}{4x+3} \\
f(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)dx \\
&= \left[\frac{2}{5}x^2+\frac{6}{5}yx\right]_0^1 = \frac{2}{5}+\frac{6}{5}y
\end{aligned}$$

Como $f(y|x) \neq f(y)$, X e Y não são independentes.

□

Exercício 4. *Suponha que uma ação seja comercializada apenas esporadicamente. Você está em $t=0$, e o preço da ação é $P(0)$. Seja N o número de vezes que a ação será comercializada no intervalo $[0,T]$, e suponha que N siga uma distribuição de Poisson com parâmetro λ. A cada par de períodos, o preço da ação varia em Δ_t, de modo que*

$$P(t) = P(t-1)(1+\Delta_t)$$

Suponha que $(1+\Delta_t)$ seja log-normal, isto é, que $\ln(1+\Delta_t) \sim N(\mu,\sigma^2)$

a) Seja o retorno composto da ação no intervalo $[0,T]: R = {}^1\!/_T\,[\ln P(T) - \ln P(0)]$. *Encontre uma expressão para* R *em termos de* N *e* Δ_t.

b) Considere a decomposição da variância:

$$V(Y) = V[E(Y|X)] + E[V(Y|X)]$$

Use esta expressão para encontrar $V(R)$ *em termos dos parâmetros* (λ, μ, σ^2)

c) O que ocorre com a variância de R *se a intensidade de comercialização,* λ, *cresce?*

Resposta:

a) Note que:

$$\begin{aligned} P(t) &= P(t-1)(1+\Delta_t) \\ &= P(t-2)(1+\Delta_{t-1})(1+\Delta_t) \\ &\vdots \\ &= P(0)(1+\Delta_1)...(1+\Delta_{t-1})(1+\Delta_t) \end{aligned}$$

Tomando ln dos dois lados:

$$\begin{aligned} \ln P(t) &= \ln[P(0)(1+\Delta_1)...(1+\Delta_{t-1})(1+\Delta_t)] \\ &= \ln P(0) + \ln(1+\Delta_1) + ... + \ln(1+\Delta_{t-1}) + \ln(1+\Delta_t) \\ &= \ln P(0) + \sum_{s=1}^{N} \ln(1+\Delta_s) \end{aligned}$$

Substituindo $P(t=T)$ na função de retorno, segue que:

$$R(T) = \frac{1}{T}\left[\ln P(0) + \sum_{s=1}^{N} \ln(1+\Delta_s) - \ln P(0)\right] = \frac{1}{T}\sum_{s=1}^{N} \ln(1+\Delta_s)$$

b) Note que $E(R|N) = \frac{N}{T}\mu$ e $V(R|N) = N\frac{\sigma^2}{T^2}$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} V[E(R|N)] &= \frac{\mu^2}{T^2}V(N) = \frac{\mu^2}{T^2}\lambda \\ E[V(R|N)] &= E\left(\frac{\sigma^2}{T^2}N\right) = \frac{\sigma^2}{T^2}\lambda \end{aligned}$$

Portanto, $V(R)$ é dado por

$$V(R) = V[E(R|N)] + E[V(R|N)] = \frac{\mu^2}{T^2}\lambda + \frac{\sigma^2}{T^2}\lambda = \frac{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}{T^2}$$

c) $V(R)$ é crescente em λ.

□

Exercício 5. *Sejam X e Y variáveis aleatórias cuja distribuição conjunta é dada por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & se\ 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

Calcule a densidade de $Z = X + Y$.

<u>*Resposta*</u>:
Sejam $z_1 = x + y$ e $z_2 = x$, então $x = z_2$ e $y = z_1 - z_2$.

$$J = \det \begin{bmatrix} {\partial x}/{\partial z_1} & {\partial x}/{\partial z_2} \\ {\partial y}/{\partial z_1} & {\partial y}/{\partial z_2} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -1$$

Logo,

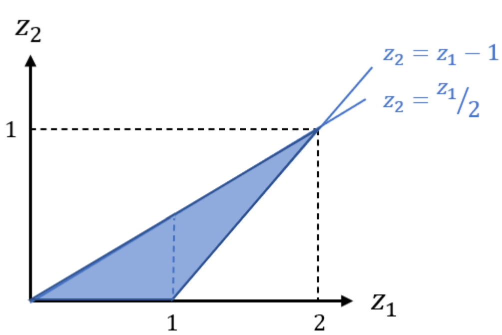
$$|J| = |-1| = 1$$

Transformando as variáveis, temos que

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= f(x,y).|J| \\ &= 2(x+y).1 \\ &= 2z_1 && (x = z_2 \text{ e } y = z_1 - z_2) \end{aligned}$$

Como $0 \le x \le y \le 1$, $x = z_2$ e $y = z_1 - z_2$, então:

$$\begin{cases} 0 \le z_2 \le z_1 - z_2 \le 1 \\ 0 \le z_2 \le 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z_2 \le 2z_2 \le z_1 \le 1 + z_2 \\ 0 \le z_2 \le 1 \end{cases}$$



Para $0 \le z_1 \le 1$:

$$\int_0^{z_1/2} 2z_1\ dz_2 = [2z_1 z_2]_0^{z_1/2} = z_1^2$$

Para $1 < z_1 \le 2$:

$$\int_{z_1-1}^{z_1/2} 2z_1\ dz_2 = [2z_1 z_2]_{z_1-1}^{z_1/2} = z_1^2 - 2(z_1^2 - z_1) = 2z_1 - z_1^2$$

Portanto,

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & 0 \le z \le 1 \\ 2z - z^2 & 1 < z \le 2 \end{cases}$$

□

Exercício 6. *Sejam X e Y variáveis aleatórias com $E[X] = 2$, $V[X] = 4$, $E[Y] = 1$ e $V[Y] = 2$. Encontre:*

a) $E[3X + 2Y]$

b) $V[3X + 2Y]$, *supondo X independente de Y*

c) O valor máximo possível para $Cov(X, Y)$

Resposta:

a) $E[3X + 2Y] = E[3X] = E[2Y] = 3E[X] + 2E[Y] = 8$

b)

$$\begin{aligned} V[3X + 2Y] &= 9V(X) + 12Cov(X, Y) + 4V(Y) \\ &= 9V(X) + 4V(Y) \qquad (X \perp\!\!\!\perp Y \implies Cov(X, Y) = 0) \\ &= 9.4 + 4.2 = 44 \end{aligned}$$

c) Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$[Cov(X, Y)]^2 \leq V[X].V[Y], \tag{4.6.9}$$

portanto, o seu maior valor se dá quando

$$[Cov(X, Y)]^2 = 4.2 \iff Cov(X, Y) = 2\sqrt{2}$$

□

Exercício 7. *Suponha que $f(x, y) = 2x$ para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.*

1. *Encontre $E(X)$ e $E(Y)$*
2. *Encontre $V(X)$ e $V(Y)$*
3. *Encontre $Corr(X, Y)$*
4. *Encontre a expressão para $E[X|Y]$*

Resposta:

a) (Ver DeGroot Example 4.1.16, pg. 215)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)\ dx\ dy = \int_0^1\int_0^1 2x^2\ dx\ dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{2}{3}\ dy = \left[\frac{2}{3}y\right]_0^1 = \frac{2}{3} \\ E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)\ dx\ dy = \int_0^1\int_0^1 2xy\ dx\ dy \\ &= \int_0^1 \left[yx^2\right]_0^1 dy = \int_0^1 y\ dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) (Ver DeGroot Theorem 4.3.1, pg. 227)

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1\int_0^1 2x^3\ dx\ dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1\ dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\ dy \\
&= \left[\frac{1}{2}y\right]_0^1 = \frac{1}{2} \\
E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1\int_0^1 2y^2 x\ dx\ dy \\
&= \int_0^1 \left[y^2x^2\right]_0^1\ dy = \int_0^1 y^2\ dy \\
&= \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \\
V(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

c) (Ver DeGroot Theorem 4.6.1 e Definition 4.6.2, pg. 249)

$$
\begin{aligned}
E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1\int_0^1 2x^2y\ dx\ dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{2}{3}x^3y\right]_0^1\ dy = \int_0^1 \frac{2}{3}y\ dy \\
&= \left[\frac{1}{3}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Então,

$$
Cov(X,Y) = E[XY] - E[X].E[Y] = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = 0
$$

Logo,

$$
\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V[X].V[Y]}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{1}{18}.\frac{1}{12}}} = 0
$$

Obs: $f(x)$ só depende de X e $f(y)$ é uniforme e não depende de X. Logo, $X \perp\!\!\!\perp Y$.

d) (Ver DeGroot Definition 4.7.1, pg. 256)

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx = \int_0^1 2x\ dx \\ &= \left[x^2\right]_0^1 = 1 \qquad\qquad (f(y) \text{ é uniforme}) \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{2x}{1} = 2x$$

E, portanto,

$$\begin{aligned} E(X|Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y)\ dy = \int_0^1 2x^2\ dy \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} \quad = E(X), \text{ pois } X \perp\!\!\!\perp Y \end{aligned}$$

□

Exercício 8. *Considere a seguinte sequência de resultados em arremessos de (2) lances livres de Larry Bird durante a temporada 1980-81 da NBA*

		2º lançamento		
		Acerto	**Erro**	**Total**
1º lançamento	**Acerto**	251	34	285
	Erro	48	5	53
	Total	299	39	338

Você encontra evidência para a hipótese de que o resultado do primeiro arremesso afeta a chance de que o jogador acerte o segundo arremesso? Justifique

Resposta: Não há evidência para a hipótese de que o resultado do primeiro arremesso afeta a chance de que o jogador acerte o segundo arremesso, pois vemos uma evidência contrária, pois:

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 &= \hat{Pr}[\text{Acerto } 2^{\underline{o}} = 1|\text{Acerto } 1^{\underline{o}} = 1] = \frac{251}{285} = 88,07\% \\ \hat{P}_2 &= \hat{Pr}[\text{Acerto } 2^{\underline{o}} = 1|\text{Acerto } 1^{\underline{o}} = 0] = \frac{48}{53} = 90,56\% \end{aligned}$$

Note que $H_0 : \hat{P}_1 > \hat{P}_2$ já não parece promissor, já que nessa amostra $\hat{P}_1 < \hat{P}_2$. No entanto, sugere-se fazer um teste mais rigoroso. □

Exercício 9. *Sejam X e Y V.A.s. Sejam ainda $X^* = g(X)$ e $Y^* = h(Y)$.*

a) Mostre que, se Y e X forem independentes, então X^* e Y^* são independentes

b) Mostre que, se $E[Y|X] = K$, então $E[Y|X^*] = K$.

Resposta:

a)
- Se $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ forem diferenciáveis e monotônicas, a resposta é trivial (simples aplicação do teorema de transformação de variáveis). Para o caso geral, ver seção 6.4 de Neil Weiss (2005) – A Course in Probability.
- WikiProof: Sejam A e B subconjunto dos números reais, $\mathbb{R}$. Denotem $g^{-1}[A]$ e $h^{-1}[B]$ como preimagens de A e B sob $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$, respectivamente. Aplicando a definição de variáveis aleatórias independentes:

$$\begin{aligned} Pr(g(X) \in A,\ h(Y) \in B) &= Pr(X \in g^{-1}[A],\ Y \in h^{-1}[B]) \\ &\qquad \text{(Def. Pré-imagem de subconjunto sob mapeamento)} \\ &= Pr(X \in g^{-1}[A]).Pr(Y \in h^{-1}[B]) \\ &\qquad \text{(Def. Variáveis Aleatórias Independentes)} \\ &= Pr(g(X) \in A).Pr(h(Y) \in B) \\ &\qquad \text{(Def. Pré-imagem de subconjunto sob mapeamento)} \end{aligned}$$

  Então, $g(X)$ e $h(Y)$ são variáveis aleatórias independentes.
- Casella & Berger (2001), Theorem 4.2.10
- DeGroot Note, pg. 140: Sejam X e Y são independentes e sejam $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ funções arbitrárias. Para todo t, o evento $\{X^* = g(X) \leq t\}$ sempre pode ser escrito como $\{X \in A\}$, tal que $A = \{x : X^* \leq t\}$. Similarmente, $\{Y^* = h(Y) \leq u\}$ pode ser escrito como $\{Y \in B\}$, tal que $B = \{y : Y^* \leq u\}$. Então, a equação

$$Pr(X \leq x \text{ e } Y \leq y) = Pr(X \leq x).Pr(Y \leq y) \tag{3.5.6}$$

  para $X^* = g(X)$ e $Y^* = h(Y)$ seguem da equação

$$Pr(X \in A \text{ e } Y \in B) = Pr(X \in A).Pr(Y \in B) \tag{3.5.5}$$

  para X e Y.

b) Considere inicialmente um valor específico $x^* \in X^*$:

$$E[Y|X^* = x^*] = \int y f(y|X^* = x^*) dy$$

Seja o conjunto $S^* \subseteq supp(X) = \{x : x^* = g(x)\}$:

$$\begin{aligned} E[Y|X^* = x^*] &= E[Y|x \in S^*] \\ &= \int y f(y|x \in S^*) dy \\ &= \int y f(y) dy = E(Y) = K \end{aligned}$$

□

Exercício 10. *Considere $Y = X^2$. Suponha ainda que a densidade de X seja dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < -1 \\ \frac{1}{2}, & se\ -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x}, & se\ x > 0 \end{cases}$$

a) Mostre que $f(x)$ é uma densidade de probabilidade apropriada para x.

b) Derive as funções de distribuição e de densidade de probabilidade para Y.

Resposta:

a) Avaliaremos se $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\ dx = \left[\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$$
$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-x}\ dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}\right]_{0}^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

b) A c.d.f. de Y é

$$\begin{aligned} Pr(Y \leq y) &= Pr(X^2 \leq y) \\ &= Pr(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

Temos 2 casos: $y > 1$ e $y \leq 1$

- Para $y > 1$ e $x > 1$ (pois o suporte de x é $(-1, \infty)$, logo, $x^2 > 1 \iff x > 1$):

$$\begin{aligned} Pr(Y < y) = F(y) &= F_X(\sqrt{y}) + F_X(0) - F_X(0) - \cancelto{0}{F_X(-\sqrt{y})} \\ &= F_X(0) + (F_X(\sqrt{y}) - F_X(0)) \\ &= \frac{1}{2} + \int_{0}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}e^{-x}\ dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\sqrt{y}}\right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2} \end{aligned}$$

- Para $y \leq 1$:

$$\begin{aligned} F(y) &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \\ &= [F_X(\sqrt{y}) - F_X(0)] + [F_X(0) - F_X(\sqrt{y})] \\ &= \int_{0}^{\sqrt{y}} \frac{e^{-x}}{2}\ dx + \int_{-\sqrt{y}}^{0} \frac{1}{2}\ dx \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\sqrt{y}}\right) + \frac{\sqrt{y}}{2} \end{aligned}$$

Logo,

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \begin{cases} 0, & \text{para } y < 0 \\ \frac{1+e^{-\sqrt{y}}}{4\sqrt{y}} & \text{para } 0 \leq y < 1 \\ \frac{e^{-\sqrt{y}}}{4\sqrt{y}} & \text{para } y \geq 1 \end{cases}$$

□

Exercício 11. *Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes e com distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$. Encontre a densidade de $Z = \max\{X,Y\}$.*

Resposta: (Ver DeGroot Example 3.9.6, pg. 180) Sejam G_Z a c.d.f. e g_Z a p.d.f. de $Z = \max\{X,Y\}$. Para todo $z \in [0,1]$, temos

$$\begin{aligned} G_Z &= Pr(Z \leq z) = Pr(X \leq z, Y \leq z) \\ &= Pr(X \leq z).Pr(Y \leq z) && (X \perp\!\!\!\perp Y) \\ &= F(z).F(z) = [F(z)]^2 && (X, Y \text{ mesma c.d.f.}) \end{aligned}$$

Como X e Y possuem distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$, então $F(Z) = z$ e, logo,

$$G_Z = [F(z)]^2 = z^2 \implies g_Z = 2z.$$

□

Exercício 12. *Suponha que X, Y e Z sejam variáveis aleatórias i.i.d. (independente e identicamente distribuídas), com densidade dada por $f(t) = 6t^5$, para $0 < t < 1$ (e 0 em caso contrário); e para $t = X, Y, Z$. Encontre a distribuição de $W = \max\{X,Y,Z\}$.*

Resposta: (Ver DeGroot Example 3.9.6, pg. 180) Seja G_W a c.d.f. e g_W a p.d.f. de $W = \max\{X,Y,Z\}$. Para todo $w \in [0,1]$, temos

$$\begin{aligned} G_W &= Pr(W \leq w) = Pr(X \leq w, Y \leq w, Z \leq w) \\ &= Pr(X \leq w).Pr(Y \leq w).Pr(Z \leq w) && (X \perp\!\!\!\perp Y \perp\!\!\!\perp Z) \\ &= F(w).F(w).F(w) = [F(w)]^3 && (X, Y, Z \text{ mesma c.d.f.}) \end{aligned}$$

Logo,

$$g_W = \frac{dG_W}{dw} = 3.\left[F(w)\right]^2.f(w), \qquad \forall w \in (0,1)$$

Como a p.d.f. é $f(w) = 6w^5$, então

$$F(w) = \int_0^1 f(w)\ dw = \int_0^1 6w^5\ dw = \left[w^6\right]_0^1 = 1$$

Portanto, substituindo $F(w)$ e $f(w)$, segue

$$\begin{aligned} G_W &= 1^3 = 1 \\ g_W &= 3.1^2.6w^5 = 18w^5 \end{aligned}$$

□

Exercício 13. *Sejam X e Y i.i.d., com densidade $e^{-t} : t \geq 0$. Encontre a densidade de $Z = Y/X$.*

<u>*Resposta*</u>: Sejam $z_1 = y/x$ e $z_2 = x$, então $y = z_1 z_2$. Então, calculando o módulo do Jacobiano, temos:

$$|J| = \left|\det\begin{bmatrix} \partial x/\partial z_1 & \partial x/\partial z_2 \\ \partial y/\partial z_1 & \partial y/\partial z_2 \end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}\right| = |-z_2| = z_2$$

Logo, a densidade $f(z_1, z_2)$ é dada por

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= f(x, y).|J|_{(x,y)=[x(z_1,z_2);y(z_1,z_2)]} \\ &= e^{-x}e^{-y}x\Big|_{(x,y)=[x(z_1,z_2);y(z_1,z_2)]} && (X \perp\!\!\!\perp Y \implies f(x,y) = f(x).f(y)) \\ &= z_2 e^{-z_2} e^{-z_1 z_2} = z_2 e^{-z_2(1+z_1)} \end{aligned}$$

Então, a densidade de $Z = Y/X$ é

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \int_0^\infty f(z_1, z_2) dz_2 \\ &= \int_0^\infty z_2 e^{-z_2(1+z_1)} z_2 dz_2 \\ &= \left[-\frac{e^{-z_2(z_1+1)}(z_2 z_1 + z_2 + 1)}{(z_1+1)^2}\right]_0^\infty && \text{(ver Wolfram)} \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{(z_1+1)^2}\right) = \frac{1}{(z_1+1)^2} \end{aligned}$$

□

Exercício 14. *A densidade conjunta de X_1 e X_2 é $f(x_1, x_2) = 2e^{-x_1}e^{-x_2}$, para $0 < x_1 < x_2 < \infty$; e 0 em caso contrário. Considere $Y_1 = 2X_1$ e $Y_2 = X_2 - X_1$.*

a) *Qual a distribuição conjunta de Y_1, Y_2?*

b) *Mostre que Y_1, Y_2 são independentes.*

<u>*Resposta*</u>:

a) Sejam $y_1 = 2x_1$ e $y_2 = x_2 - x_1$, então $x_1 = \frac{y_1}{2}$ e $x_2 = y_2 + \frac{y_1}{2}$. Calculando o módulo do Jacobiano, temos:

$$|J| = \left|\det\begin{bmatrix} \partial x_1/\partial y_1 & \partial x_1/\partial y_2 \\ \partial x_2/\partial y_1 & \partial x_2/\partial y_2 \end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}$$

Logo, a densidade $f(y_1, y_2)$ é dada por

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= f(x_1, x_2).|J|_{(x_1,x_2)=[x_1(y_1,y_2);y_2(x_1,x_2)]} \\ &= 2e^{-x_1}e^{-x_2}.\frac{1}{2}\Big|_{(x_1,x_2)=[x_1(y_1,y_2);y_2(x_1,x_2)]} \\ &= e^{-\frac{y_1}{2}} e^{-y_2-\frac{y_1}{2}} \\ &= e^{-\frac{y_1}{2}-y_2-\frac{y_1}{2}} = e^{-y_1-y_2} \end{aligned}$$

para $0 < \frac{y_1}{2} < y_2 + \frac{y_1}{2} < \infty$.

b) Y_1 e Y_2 são independentes se $f(y_1, y_2) = f(y_1).f(y_2)$. Precisamos encontrar $f(y_1)$ e $f(y_2)$:

$$\begin{aligned} f(y_1) &= \int_0^\infty f(y_1, y_2)\ dy_2 \\ &= \int_0^\infty e^{-y_1-y_2}\ dy_2 \\ &= \left[-e^{-y_1-y_2}\right]_0^\infty = -e^{-y_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y_2) &= \int_0^\infty f(y_1, y_2)\ dy_1 \\ &= \int_0^\infty e^{-y_1-y_2}\ dy_1 \\ &= \left[-e^{-y_1-y_2}\right]_0^\infty = -e^{-y_2} \end{aligned}$$

Como

$$f(y_1, y_2) = e^{-y_1-y_2} = (-e^{-y_1})(-e^{-y_2}) = f(y_1).f(y_2),$$

então Y_1 e Y_2 são independentes. □