

# Dynamic Optimization of a Monopolist: Modelo Clássico de Evans

**Alpha C. Chiang (1999) - Seção 2.4**

Apresentação por Fábio Nishida

Junho, 2021

# Uma Função Lucro Dinâmica (1/2)

- Economia com um monopolista que produz uma única commodity.
- Função **custo total** quadrática:

$$C = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma \quad (2.31)$$

em que  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ .

- **Output**  $Q$  é sempre igual à quantidade demandada no período  $t$  e depende do **preço**  $P(t)$  e da **taxa de mudança do preço**  $P'(t)$ :

$$Q = a - bP(t) + hP'(t) \quad (2.32)$$

em que  $a, b > 0$  e  $h \neq 0$ .

## Uma Função Lucro Dinâmica (2/2)

O **lucro** da firma,  $\pi$ , é dado por:

$$\begin{aligned}\pi &= PQ - C \\&= PQ - (\alpha Q^2 + \beta Q + \gamma) && \text{(aplicando } C) \\&= P(a - bP + hP') - \alpha(a - bP + hP')^2 - \beta(a - bP + hP') - \gamma && \text{(aplicando } Q) \\&= P(a - bP + hP') - \alpha(a^2 + b^2P^2 + h^2P'^2 - 2abP + 2ahP' - 2bhPP') \\&\quad - \beta(a - bP + hP') - \gamma \\&= P^2 [-b - \alpha b^2] + P [a - (-2\alpha ab) - \beta(-b)] + P'^2 [-\alpha h^2] + P' [-\alpha 2ah - \beta h] \\&\quad PP' [h - \alpha(-2bh)] + [-\alpha a^2 - \beta a - \gamma] && \text{(rearranjando } P^2, P, P'^2, P' \text{ e } PP')\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\pi(P, P') &= -b(1 + \alpha b)P^2 + (a + 2\alpha ab + \beta b)P - \alpha h^2 P'^2 - h(2\alpha a + \beta)P' \\&\quad + h(1 + 2\alpha b)PP' - (\alpha a^2 + \beta a + \gamma).\end{aligned}\tag{2.33}$$

# O Problema

- O objetivo da firma é achar a trajetória ótima do preço  $P$  que maximiza a funcional  $\Pi$  no período finito  $[0, T]$ .
- Ambos **preço inicial**  $P_0$  e **preço terminal**  $P_T$  são dados.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \Pi[P] = \int_0^T \pi(P, P') dt \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} P(0) = P_0 & (P_0 \text{ dado}) \\ P(T) = P_T & (T, P_T \text{ dados}) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

# A Trajetória Ótima do Preço (1/7)

- Lembre-se que a Equação de Euler tem a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}F_{y'} - F_y = 0 \quad (2.18)$$

$$F_{y'y'} \cdot y''(t) + F_{yy'} \cdot y'(t) + F_{ty'} - F_y = 0 \quad (2.19)$$

- Precisamos calcular as derivadas parciais a partir do integrando (2.33):

$$\pi_P = -2b(1 + \alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b) + h(1 + 2\alpha b)P'$$

$$\pi_{P'} = -2\alpha h^1 P' - h(2\alpha a + \beta) + h(1 + 2\alpha b)P$$

$$\pi_{P'P'} = -2\alpha h^2 \quad \pi_{PP'} = h(1 + 2\alpha b) \quad \pi_{tP'} = 0$$

## A Trajetória Ótima do Preço (2/7)

Substituindo as derivadas parciais em (2.19):

$$\begin{aligned}\pi_{P'P'} \cdot P'' + \pi_{PP'} \cdot P' + \pi_{tP'} - \pi_P &= 0 \\ -2\alpha h^2 \cdot P'' + h(1 + 2\alpha b)P' - 0 - [-2b(1 + \alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b) + h(1 + 2\alpha b)P'] &= 0 \\ -2\alpha h^2 \cdot P'' + 2b(1 + \alpha b)P - (a + 2\alpha ab + \beta b) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2\alpha h^2 \cdot P'' + 2b(1 + \alpha b)P &= a + 2\alpha ab + \beta b \\ P''(t) - \frac{b(1 + \alpha\beta)}{\alpha h^2} P(t) &= -\frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2\alpha h^2}\end{aligned}\tag{2.35}$$

# A Trajetória Ótima do Preço (3/7)

- Note que a Equação de Euler (2.35) é uma equação diferencial de 2ª ordem com coeficiente constantes e termo constante:

$$y'' + a_1y' + a_2y = a_3$$

- em que a solução geral é dada por<sup>a</sup>:

$$y(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} + \bar{y}$$

- com as raízes  $r_1$  e  $r_2$  dadas por

$$r_1, r_2 = \frac{1}{2} \left( -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2} \right)$$

- e com a integral particular  $\bar{y} = a_3/a_2$

---

<sup>a</sup>Ver Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 4th ed., 2005, Sec. 16.1.

# A Trajetória Ótima do Preço (4/7)

- A solução geral deste problema é dado por

$$P^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \bar{P} \quad (2.36)$$

- A partir de (2.35), sabemos que:

$$a_1 = 0 \quad a_2 = -\frac{b(1 + \alpha\beta)}{\alpha h^2} \quad a_3 = -\frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2\alpha h^2}$$

- Portanto,

$$r_1, r_2 = \frac{1}{2} \left[ -0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \left( -\frac{b(1 + \alpha\beta)}{\alpha h^2} \right)} \right] = \pm \sqrt{\frac{b(1 + \alpha\beta)}{\alpha h^2}}$$
$$\bar{P} = \frac{-\frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2\alpha h^2}}{-\frac{b(1 + \alpha\beta)}{\alpha h^2}} = \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1 + \alpha\beta)}$$



# A Trajetória Ótima do Preço (5/7)

- Como  $r_1 = -r_2$ , defina  $r \equiv r_1$ , logo  $r_2 = -r$ .
- A solução geral pode ser reescrita como

$$P^*(t) = A_1 e^{rt} + A_2 e^{-rt} + \bar{P} \quad (2.36')$$

- Podemos calcular  $A_1$  e  $A_2$  a partir das condições inicial,  $P_0$ , e terminal,  $P_T$ , dadas por:

$$P(0) = P_0 = A_1 e^{r \cdot 0} + A_2 e^{-r \cdot 0} + \bar{P} = A_1 + A_2 + \bar{P} \quad (a)$$

$$P(T) = P_T = A_1 e^{rT} + A_2 e^{-rT} + \bar{P} \quad (b)$$

- Note que, se essas 2 condições não fossem dadas, não conseguiríamos resolver o sistema acima sem utilizar uma condição de transversalidade.
- Isolando  $A_1$  em (a), obtemos

$$A_1 = P_0 - \bar{P} - A_2$$

# A Trajetória Ótima do Preço (6/7)

- Substituindo  $A_1$  em (b), segue que:

$$(P_0 - \bar{P} - A_2)e^{rT} + A_2e^{-rT} + \bar{P} = P_T$$

$$A_2(e^{-rT} - e^{rT}) + (P_0 - \bar{P})e^{rT} = P_T - \bar{P}$$

$$A_2(e^{-rT} - e^{rT}) = P_T - \bar{P} - (P_0 - \bar{P})e^{rT}$$

$$A_2 = \frac{P_T - \bar{P} - (P_0 - \bar{P})e^{rT}}{e^{-rT} - e^{rT}} \left( \frac{e^{-rT}}{e^{-rT}} \right)$$

$$A_2 = \frac{(P_T - \bar{P})e^{-rT} - (P_0 - \bar{P})e^{rT-rT}}{e^{-rT-rT} - e^{rT-rT}}$$

$$A_2 = \frac{(P_T - \bar{P})e^{-rT} - (P_0 - \bar{P})}{e^{-2rT} - 1} \left( \frac{-1}{-1} \right)$$

$$A_2 = \frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}}.$$

# A Trajetória Ótima do Preço (7/7)

- Substituindo  $A_2$  em  $A_1$ , temos:

$$\begin{aligned} A_1 &= P_0 - \bar{P} - \left( \frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}} \right) \\ &= \frac{(P_0 - \bar{P})(1 - e^{-2rT}) - [P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{-rT}]}{1 - e^{-2rT}} \\ &= \frac{P_0 - \bar{P} - P_0e^{-2rT} + \bar{P}e^{-2rT} - P_0 + \bar{P} + (P_T - \bar{P})e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}} \\ &= \frac{(\bar{P} - P_0)e^{-2rT} + (P_T - \bar{P})e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}} \left( \frac{e^{2rT}}{e^{2rT}} \right) \\ &= \frac{(\bar{P} - P_0)e^{-2rT+2rT} + (P_T - \bar{P})e^{-rT+2rT}}{1e^{2rT} - e^{-2rT+2rT}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ A_1 &= \frac{(P_0 - \bar{P}) - (P_T - \bar{P})e^{rT}}{1 - e^{2rT}}. \end{aligned}$$