Lista 2 de Macroeconomia I - Parte 2

Fábio Nishida - PPGE/FEA-RP/USP

Julho, 2021

Conteúdo

7 Optimal Control: The Maximum Principle

7.0 [☒] Definições, Proposições, Lemas e Observações

Variáveis (?).

- t: tempo
- y: estado
- u: controle
- λ: variável de coestado (ou auxiliar) – semelhante ao multiplicador de Lagrange

---

Função Hamiltoniana (?).

$$H(t, y, u, \lambda) \equiv F(t, y, u) + \lambda(t) f(t, y, u). \tag{7.3}$$

Condições do Princípio Máximo (?).

$$\begin{aligned}
&\max_u H(t, y, u, \lambda), && \forall t \in [0, T] \qquad (7.5)\\
&\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} && \text{[equação de movimento da variável de estado } y\text{]}\\
&\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} && \text{[equação de movimento da variável de coestado } \lambda\text{]}\\
&\lambda(T) = 0 && \text{[condição de transversalidade]}
\end{aligned}$$

Condições Terminais em Controle Ótimo (?).

- Linha Terminal Vertical:
$$\lambda(T) = 0$$
- Linha Terminal Horizontal:
$$[H]_{t=T} = 0 \tag{7.31}$$
- Curva Vertical:
$$[H - \lambda \phi']_{t=T} = 0 \tag{7.32}$$
- Linha Terminal Vertical Truncada:
$$\lambda(T) \geq 0 \qquad y_T \geq y_{min} \qquad (y_T - y_{min})\lambda(T) = 0 \tag{7.35}$$
- Linha Terminal Horizontal Truncada:
$$[H]_{t=T} \geq 0 \qquad T \leq T_{max} \qquad (T - T_{max})[H]_{t=T} = 0 \tag{7.38}$$

7.2 The Maximum Principle

7.2.2 [☒]

Find the optimal paths of the control, state, and costate variables to

$$\text{Maximize} \quad \int_0^4 3y dt$$
$$\text{subject to} \quad \begin{cases} \dot{y} = y + u \\ y(0) = 5, \qquad y(4) \text{ free} \\ u(t) \in [0, 2] \end{cases}$$

Be sure to check that the Hamiltonian is maximized rather than minimized.

Pelo problema dado, temos a seguinte Hamiltoniana

$$H = 3y + \lambda(y + u).$$

Note que $\partial H/\partial u = \lambda$ e $\partial^2 H/\partial u^2 = 0$, ou seja, a função é linear em relação a u. Isto já era esperado, já que o conjunto de controle $\mathscr{U} = [0, 2]$ é fechado, o que indica uma provável solução de canto.

Para sabermos se é uma função crescente ou decrescente, percisamos achar mais informações da variável de coestado λ. Note que a derivada da variável de coestado, $\dot{\lambda}$, é dada por:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -(3 + \lambda) \iff \dot{\lambda} + \lambda = -3. \tag{1}$$

Observe que temos uma equação diferencial de primeira ordem

$$y' + ay = b$$

que possui uma solução geral na seguinte forma:

$$y(t) = k.e^{-at} + \frac{b}{a}. \qquad (k \text{ constante})$$

A partir de (1), temos $a = 1$ e $b = -3$. Logo, a solução geral para este problema é:

$$\lambda(t) = ke^{-t} - 3 \qquad (k \text{ constante}) \tag{2}$$

Usando a condição de transversalidade de linha terminal vertical, segue que

$$\lambda(T = 4) = 0 = ke^{-4} - 3 \iff k = 3e^4 \tag{3}$$

Substituindo (3) em (2), temos

$$\lambda^*(t) = (3e^4)e^{-t} - 3 \ = \ 3e^{4-t} - 3 \tag{4}$$

Como $t \in [0, 4]$, o menor valor de $\lambda(t)$ é quando $t = 4$, estágio em que $\lambda(4) = 0$. Portanto, $\lambda^*(t) \geq 0$. Como $\lambda^*(t) \geq 0$, então $\partial H/\partial u = k \geq 0$, ou seja, H é crescente em relação a u, logo a H é maximizada no limite superior do intervalo $[0, 2]$. Portanto, $u^* = 2$.

Portanto, aplicando $u^* = 2$ na equação de movimento da variável de estado y, temos

$$\dot{y} = y + 2 \iff \dot{y} - y = 2. \tag{5}$$

Note que (5) é uma equação diferencial de primeira ordem e tem a seguinte solução geral:

$$y(t) = ce^t - 2 \qquad (c \text{ constante})$$

Usando a condição inicial $y(0) = 5$, temos

$$y(0) = 5 = ce^0 - 2 \iff c = 7$$

Portanto, $y^*(t) = 7e^t - 2$. ∎

7.2.3 [⊠]

Find the optimal paths of the control, state, and costate variables to

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & \displaystyle\int_0^2 (y-u)^2 dt \\
\text{subject to} & \begin{cases} \dot{y} = u \\ y(0) = 0, \qquad y(2) \text{ free} \quad \text{and} \quad u(t) \text{ unconstrained} \end{cases}
\end{array}
$$

Make sure that the Hamiltonian is maximized rather than minimized.

A Hamiltoniana é dada por

$$H = y - u^2 + \lambda u$$

Note que, neste problema, $u(t)$ não é restrito e está na forma quadrática na Hamiltoniana, logo, espera-se uma solução interior, a ser obtida por CPO:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \lambda = 0 \iff u = \frac{\lambda}{2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0 \implies \text{ponto máximo} \tag{2}$$

Achado u em função de λ, acharemos agora o λ usando a condição de transversalidade para o caso de linha terminal vertical, com $T = 2$, e a equação de movimento da variável de coestado:

$$\lambda(T=2) = 0 \qquad \text{e} \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -1 \implies \lambda = -t + c_1$$

Logo, em $t = T = 2$, temos

$$\lambda(T=2) = 0 = -2 + c_1 \iff c_1 = 2$$

Portanto, as trajetórias ótimas para u e λ são:

$$\lambda^*(t) = -t + 2 \qquad \text{e} \qquad u^*(t) = -\frac{t}{2} + 1$$

Agora, acharemos $y^*(t)$ a partir de sua equação de movimento:

$$\dot{y} = u = -\frac{t}{2} + 1 \implies y = -\frac{t^2}{4} + t + c_2$$

Utilizando a condição inicial para achar c_2, segue que

$$y(0) = 0 = -\frac{0^2}{4} + 0 + c_2 \iff c_2 = 0.$$

Portanto, concluímos que a trajetória ótima da variável de estado é

$$y^*(t) = -\frac{t^2}{4} + t.$$

■

7.4 Alternative Terminal Conditions

7.4.1 [⊠]

Find the optimal paths of the control, state, and costate variables to

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & \displaystyle\int_0^T -(t^2+u^2)dt \\
\text{subject to} & \begin{cases} \dot{y} = u \\ y(0) = 4, \qquad y(T) = 5 \quad \text{and} \quad T \text{ free} \end{cases}
\end{array}
$$

A Hamiltoniana deste problema com linha terminal horizontal é

$$H = -t^2 - u^2 + \lambda u.$$

Note que u não é restrito e está na forma quadrática, logo, espera-se que a solução seja encontrada por meio de CPO:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \lambda = 0 \iff \lambda = 2u \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 \implies \text{ponto de máximo}$$

Encontramos λ em relação a u e, agora, utilizaremos a equação de movimento da variável de coestado:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \implies \lambda \text{ é constante}$$

Da equação de movimento da variável de estado, temos

$$\dot{y} = u \overset{(1)}{\iff} \dot{y} = \frac{\lambda}{2},$$

integrando os dois lados, segue que

$$y = \frac{\lambda}{2}t + c_1 \tag{2}$$

Das condições de fronteira, temos:

$$y(0) = 4 = \frac{\lambda}{2}.0 + c_1 \iff c_1 = 4$$

$$y(T) = 5 = \frac{\lambda}{2}.T + \cancelto{4}{c_1} \iff T = \frac{2}{\lambda} \tag{3}$$

Da condição de transversalidade para caso com linha terminal horizontal, temos

$$
\begin{aligned}
&[H]_{t=T} = 0 \iff -T^2 - u^2 - \lambda u = 0 \\
&\overset{(3)}{\iff} -\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - u^2 - \lambda u = 0 \\
&\overset{(1)}{\iff} -\frac{4}{\lambda^2} - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \lambda\frac{\lambda}{2} = 0 \\
&\iff \frac{4}{\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{4} \\
&\iff \lambda^4 = 16 \implies \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda = -2
\end{aligned}
$$

Como $T > 0$ e $T = \lambda/2$, então necessariamente $\lambda > 0$ e, portanto,

$$\lambda^* = 2. \tag{4}$$

Usando:

- (4) em (3), segue que $T^* = 1$;
- (4) em (2), segue que $y^*(t) = t + 4$; e
- (4) em (1), segue que $u^*(t) = 1$. ∎

7.4.2 [☒]

Find the optimal paths of the control, state, and costate variables to

$$\text{Maximize} \quad \int_0^T 3y dt$$
$$\text{subject to} \quad \begin{cases} \dot{y} = y + u \\ y(0) = 5, \qquad y(4) \geq 300 \\ 0 \leq u(t) \leq 2 \end{cases}$$

A Hamiltoniana do problema de linha terminal vertical truncada é:

$$H = 3y + \lambda(y + u)$$

Note que u é linear na Hamiltoniana e o conjunto de restrições $\mathscr{U}$ é fechado no intervalo $[0, 2]$. Portanto, espera-se tenhamos uma solução de canto.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 0 \implies \text{linear}$$

Não sabemos ainda se H é crescente ou decrescente em relação a u, pois não sabemos se $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$. Pela equação de movimento da variável de coestado, temos:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -3 - \lambda \iff \dot{\lambda} + \lambda = -3 \tag{1}$$

Observe que temos uma equação diferencial de primeira ordem

$$y' + ay = b$$

que possui uma solução geral na seguinte forma:

$$y(t) = k.e^{-at} + \frac{b}{a}. \qquad (k \text{ constante})$$

A partir de (1), temos $a = 1$ e $b = -3$. Logo, a solução geral para este problema é:

$$\lambda(t) = ke^{-t} - 3 \qquad (k \text{ constante}) \tag{2}$$

Usando a condição de transversalidade para o caso com linha terminal vertical, temos

$$\lambda(T = 4) = 0 \tag{3}$$

Igualando e para $t = T = 4$, temos

$$\lambda(4) = ke^{-4} - 3 = 0 \iff k = 3e^4.$$

Logo, substituindo k em , obtemos a trajetória ótima de coestado:

$$\lambda^* = 3e^4e^{-t} - 3 \;=\; 3(e^{4-t} - 1). \tag{4}$$

Note que $(e^{4-t} - 1)$ será sempre não-negativo, dado que o menor valor de e^{1-t} se dá em $t = T = 4$, quando $e^0 = 1$. Como a inclinação de u é dada por $\partial H/\partial u = \lambda > 0$, temos que H é linearmente crescente em u. Logo, a trajetória ótima de u é dada por $u^* = 2$ (constante).

Da equação de movimento da variável de estado y, temos que

$$\dot{y} = y + 2 \iff \dot{y} - y = 2,$$

que é um equação diferencial de primeira ordem com solução dada por:

$$y(t) = ce^t - 2.$$

Usando a condição inicial e igualando com a solução geral para $t = 0$, obtemos

$$y(0) = 5 = ce^0 - 2 \iff c = 7.$$

Portanto, encontramos $y(t) = 7e^t - 2$, mas precisamos verificamos verificar se $y(T) \geq y_{min} = 300$. Assim,

$$y(T = 4) = 7e^4 - 2 \approx 380 \ \geq 300.$$

Portanto, a trajetória ótima da variável de estado é, de fato,

$$y^*(t) = 7e^t - 2.$$

*caso $y(T) \ngeq y_{min}$, então teríamos $\lambda(T) \neq 0$ e precisaríamos solucionar o problema considerando $y^*(t) = y_{min}$. ■

7.4.4 [⊠]

Find the optimal control path and the corresponding optimal state path that minimize the distance between the point of origin $(0,0)$ and a terminal curve $y(T) = 10 - T^2$, $T > 0$. Graph the terminal curve and the $y^*(t)$ path.

Dada a curva terminal $y(t) = 10 - T^2$, em que $T > 0$, temos

- quando $y(T) = 0$, temos $T^2 = 10 \iff T = \sqrt{10}$ e $y(T) = 0$.
- quando $T = 0$, temos $y(T) = 10$

O problema é dado por

$$\max \left\{ \int_0^T -(1+U^2)^{1/2} dt, \right\}, \qquad \text{sujeito a } \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(T) = 10 - T^2 \\ \dot{y} = u, \ \text{com } U \text{ livre} \end{cases}$$

Note que u é constante e, logo, integrando $\dot{y} = u$ em relação a t, temos

$$y = ut + c$$

Dado $y(0) = 0$, temos que $y(0) = u.0 + c = 0 \iff c = 0$ e, portanto,

$$y(t) = ut \tag{1}$$

Dado $y(T) = 10 - T^2$ e (1), segue, para $t = T$,

$$10 - T^2 = uT \iff u = \frac{10}{T} - T \tag{2}$$

Do problema de maximização, segue a Hamiltoniana

$$H = -(1+u^2)^{1/2} + \lambda u$$

Como a variável de controle não possui restrição e u está na forma quadrática, espera-se que a solução ótima seja uma solução interior. Logo, por CPO:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{1}{2}(1+u^2)^{-1/2}.2u + \lambda \iff (1+u^2)^{-1/2}u = \lambda \tag{3}$$

Como se trata de um caso com curva terminal, temos a condição de transversalidade $[H - \lambda\phi']_{t=T} = 0$, em que $\phi = y(t) = 10 - T^2$. Logo,

$$\begin{aligned}
-(1+u^2)^{1/2} + \lambda u - \lambda(-2T) &= 0 \\
(1+u^2)^{1/2} &= \lambda(u+2T) \\
(1+u^2)^{1/2} &= [(1+u^2)^{-1/2}u](u+2T) && \text{(usando (3))} \\
(1+u^2)^1 &= (1+u^2)^0.u(u+2T) && \text{(multiplicando por } (1+u^2)^{1/2}\text{)} \\
1+u^2 &= u^2 + 2Tu \\
u &= \frac{1}{2T} && (4)
\end{aligned}$$

Igualando (2) e (4), temos

$$\frac{10}{T} - T = \frac{1}{2T} \iff \frac{10 - T^2}{T} = \frac{1}{2T} \iff 20 - 2T^2 = 1$$

$$T^2 = \frac{19}{2} \implies T = \sqrt{\frac{19}{2}}, \text{ pois } T > 0$$

Aplicando T em (4), segue que

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{19}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{19}\right)^{1/2} \implies u^*(t) = \sqrt{\frac{1}{38}},$$

logo, substituindo $u^*(t)$ em (1), temos

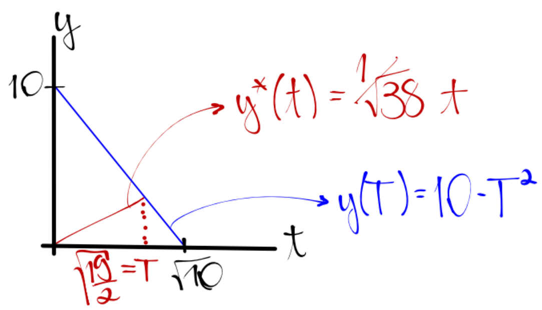
$$y^*(t) = \sqrt{\frac{1}{38}}t.$$

Substituindo $u^*(t)$ em (3), temos

$$\lambda = \left[1 + \left(\sqrt{\frac{1}{38}}\right)^2\right]^{-1/2}\left(\sqrt{\frac{1}{38}}\right)$$

$$= \left(\frac{39}{38}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{38}{1}\right)^{-1/2} = (39)^{-1/2}$$

$$\lambda^*(t) = \sqrt{\frac{1}{39}}$$



7.4.5 [☒]

Demonstrate the validity of the transversality condition (7.37) for the problem with a truncated horizontal terminal line.

Estratégia da Prova:

- Similar ao caso de linha terminal vertical truncada (?, págs. 182-183).

Seja o estado terminal fixo e com estágio terminal T que pode variar, mas limitado a $T^* \leq T_{max}$, onde T_{max} é o valor máximo permitido de T. Logo, teremos $T^* < T_{max}$ ou $T^* = T_{max}$ na solução ótima.

Para $T^* < T_{max}$, temos que a restrição terminal não é limitante, logo a condição de transversalidade para o problema regular de reta terminal horizontal é válida:

$$[H]_{t=T} = 0, \quad \text{para } T^* < T_{max} \tag{7.36}$$

Para $T^* = T_{max}$, como a restrição terminal é limitante, temos que as trajetórias aceitáveis vizinhas y são apenas aquelas com estágios terminais $T \leq T_{max}$.

Em $T^* = T_{max}$, os estados das trajetórias vizinhas são dados por

$$y_{T^*} = y^*_{T^*} + \varepsilon q(T^*).$$

Note que $y^*_{T^*}$ é igual ao estado terminal fixado, atingindo apenas em $T^* = T_{max}$, e que os estado das trajetórias vizinha y^{T^*} possuem valores superiores ou iguais a $y^*_{T^*}$, pois, dado T_{max}, estas trajetórias vizinhas aceitáveis teriam atingido o estado terminal em $T \leq T_{max}$.

Assumindo $q(T^*) > 0$ na curva de perturbação $q(t)$, temos obrigatoriamente que $\varepsilon \geq 0$, já que $y_{t^*} \geq y^*_{T^*}$. Pelas condições de Kuhn-Tucker, a não-negatividade de ε alteraria a CPO de $d\mathscr{V}/d\varepsilon = 0$ para $d\mathscr{V}/d\varepsilon \leq 0$ para o nosso problema de maximização. Segue de (7.30) a condição de transversalidade com desigualdade:

$$[H]_{t=T}.\Delta T \leq 0.$$

Dada a relação (7.26), $T = T^* + \varepsilon.\Delta T$, e que $T^* > T \iff T - T^* < 0$ e $\varepsilon \geq 0$, temos que $\Delta T < 0$. Como $[H]_{t=T}.\Delta T \leq 0$ e $\Delta T < 0$, é possível estabelecer a condição de transversalidade:

$$[H]_{t=T} \geq 0, \quad \text{para } T^* = T_{max}, \tag{7.37}$$

demonstrando a sua validade. ∎

7.6 The Political Business Cycle

7.6.1 [☒]

(a) What would happen in the Nordhaus model if the Optimal control path were characterized by $dU^*/dt = 0$ for all t?

Se $dU^*/dt = 0, \forall t \in [0, T]$, então a função de taxa de desemprego permanece constante ao longo do tempo, ou seja, o modelo indicaria que a forma de maximizar os votos seria manter a taxa de desemprego constante ao longo do período $[0, T]$. ■

(b) What values of the various parameters would cause dU^*/dt to become zero?

A derivada da trajetória de taxa de desemprego ótima é dada por

$$\frac{dU^*}{dt} = -\frac{1}{2} khbae^{B(T-t)} < 0, \tag{7.69}$$

em que $B \equiv r - b + ab$.

Logo, dU^*/dt nunca será estritamente igual a 0, pois $k, h, b, a > 0$, assim como $e^{B(T-t)}$. No entanto, dU^*/dt pode se aproximar de 0 quando k, h, b e/ou a tenderem a 0, ou também, quando o expoente $B(T - t) \to -\infty$. ■

(c) Interpret economically the parameter values you have indicated in part (b).

- $\underline{k, a}$: dada a equação

$$p = (j - kU) + a\pi, \tag{7.63}$$

  logo, k é um parâmetro de sensibilidade da inflação em relação ao desemprego, e a é um parâmetro de sensibilidade da inflação em relação em relação à expectativa de inflação.

- $\underline{h}$: dada a função voto

$$v(U, p) = -U^2 - hp, \quad \text{com } h > 0, \tag{7.62}$$

  segue que h é um parâmetro de sensibilidade do voto em relação à taxa de inflação.

- $\underline{b}$: a equação de movimento da expectativa de inflação é

$$\dot{\pi} = b(p - \pi), \tag{7.60}$$

  em que $b > 0$ é o peso de ajuste de expectativa dada a diferente entre a inflação e a expectativa de inflação, $(p - \pi)$. ■

7.6.2 [⊠]

What parameter values would, aside from causing $dU^*/dt = 0$, also cause $U^*(t) = 0$ for all t? Explain the economic implications and rationale for such an outcome.

A trajetória ótima da taxa de desemprego é dada por

$$U^*(t) = \frac{kh}{2B}\left[r - b + bae^{B(T-t)}\right].$$

Caso $h = 0$, o poder de ganho dos votos do partido incumbente não seria influenciado pela inflação (7.62), fazendo com que o controle de inflação não fosse o foco do governo, mantendo a taxa de desemprego $U^*(t) = 0$.

Caso $k = 0$, a inflação não seria mais influenciada pela taxa de desemprego (7.62), mas ainda continuaria influenciada pela expectativa de inflação. ■

7.6.3 [$\boxtimes$]

How does a change in the value of parameter r (the rate of decay of voter memory) affect the slope of the $U^*(t)$ path? Discuss the economic implications of your result. [Note: $B = r - b + ab$.]

A derivada da trajetória de taxa de desemprego ótima U^* em relação a t é

$$\frac{dU^*}{dt} = -\frac{1}{2} rhbae^{B(T-t)}. \tag{7.69}$$

Note que, se r aumenta, $B = r - b + ab$ também aumenta. Logo, o aumento de r diminui dU^*/dt. Isso quer dizer que, ao longo de $[0, T]$, o governo diminui a taxa de desemprego de maneira mais acentuada.

A variável r representa a intensidade da memória curta da população eleitora, ou seja, quanto maior r, maior é o peso dado aos períodos mais próximos do estágio terminal (eleição). Logo, um aumento de r, faz com que o governo priorize taxas de desemprego mais baixas em períodos mais próximos de T e, eventualmente, mantendo taxas de desemprego mais altas nos estágios iniciais, dado um maior "esquecimento" dos eleitores. ■

7.6.4 [☒]

Eliminate the e^{rt} tem in the objective function in (7.64) and write out the new problem.

(a) Solve the new problem by carrying out the same steps as those illustrated in the text for the original problem.

Ao eliminar o termo e^{rt} da equação (7.64), o que equivale a retirar o peso de da memória curta dos eleitores, temos:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad \int_0^T (-U^2 - hj + hkU - ha)dt, && \text{(7.64')}\\ &\text{sujeito a} \quad \begin{cases} \dot{\pi} = b[(j - kU) - (1-a)\pi] \\ \pi(0) = \pi_0, \quad \pi(T) \text{ livre} \quad (\pi_0, T \text{ dados}) \end{cases} \end{aligned}$$

Temos a seguinte Hamiltoniana:

$$H = \left(-U^2 - hj + hkU - ha\pi\right) + \lambda b[j - kU - (1-a)\pi.]$$

Como temos um termo quadrático na variável de controle U na Hamiltoniana e U é não-restrita, espera-se que a solução seja interior por meio da CPO:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial U} = (-2U + hk) - \lambda bk = 0 \iff U(t) = \frac{1}{2}(h - \lambda b)k && (1)\\ &\frac{\partial^2 H}{\partial U^2} = -2 < 0 \implies \text{ponto de máximo} \end{aligned}$$

Pela equação de movimento da variável de coestado, temos:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = ha + \lambda(1-a) \iff \dot{\lambda} - b(1-a)\lambda = ha$$

Note que temos uma equação diferencial de 1ª ordem com coeficiente e termo constantes, cuja solução geral tem a seguinte forma:

$$y(t) = ce^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}$$

Logo, a solução geral para este problema é dado por

$$\lambda(t) = ce^{b(1-a)t} - \frac{ha}{b(1-a)}$$

Como se trata de um problema de linha terminal vertical, usaremos a condição de transversalidade $\lambda(T) = 0$ para encontrar o valor de c:

$$\lambda(T) = ce^{b(1-a)T} - \frac{ha}{b(1-a)} = 0 \iff c = \frac{ha}{b(1-a)}e^{-b(1-a)T}$$

Logo,

$$\lambda^*(t) = \frac{ha}{b(1-a)}e^{-b(1-a)T}e^{b(1-a)t} - \frac{ha}{b(1-a)} = \frac{ha}{b(1-a)}\left(e^{b(1-a)(t-T)} - 1\right) \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos

$$\begin{aligned}
U^*(t) &= \frac{1}{2}k\left[h - \left(\frac{ha}{b(1-a)}\left(e^{b(1-a)(t-T)}-1\right)\right)b\right] \\
&= \frac{1}{2}kh\left[1 - \frac{a}{1-a}\left(e^{b(1-a)(t-T)}-1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}kh\left[\frac{1-a}{1-a} - \frac{a}{1-a}\left(e^{b(1-a)(t-T)}-1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{kh}{1-a}\left[1-a-a\left(e^{b(1-a)(t-T)}-1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{kh}{1-a}\left[1-a-ae^{b(1-a)(t-T)}+a\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{kh}{1-a}\left[1-ae^{b(1-a)(t-T)}\right] \qquad (3)
\end{aligned}$$

Derivando $U^*(t)$ em relação a t, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dU^*}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{kh}{1-a}\left(-ae^{b(1-a)(t-T)}\right).b(1-a) \\
&= -\frac{1}{2}khabe^{b(1-a)(t-T)} < 0 \qquad (4)
\end{aligned}$$

■

(b) Check your results by setting $r = 0$ in the results of the original model, especially (7.68) and (7.69).

Equação (7.68) é dada por

$$U^*(t) = \frac{kh}{2(r-b+ab)}\left[r-b+bae^{(r-b+ab)(T-t)}\right] \qquad (7.68)$$

Ao estabelecer $r = 0$, temos

$$\begin{aligned}
U^*(t) &= \frac{kh}{2(-b+ab)}\left[-b+bae^{(-b+ab)(T-t)}\right] \\
&= \frac{kh}{2b(a-1)}\left[b\left(-1+ae^{b(a-1)(T-t)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{kh}{(a-1)}\left(ae^{b(a-1)(T-t)}-1\right),
\end{aligned}$$

que é exatamente igual a (3).

Equação (7.69) é dada por

$$\frac{dU^*}{dt} = -\frac{1}{2}khbae^{(r-b+ab)(T-t)} \qquad (7.69)$$

Ao estabelecer $r = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{dU^*}{dt} &= -\frac{1}{2}khbae^{(-b+ab)(T-t)} \\
&= -\frac{1}{2}khbae^{b(-1+a)(T-t)} \\
&= -\frac{1}{2}khbae^{b(1-a)(t-T)},
\end{aligned}$$

que também é igual ao ${dU^*}/{dt}$ do item anterior (4). ■

7.7 Energy Use and Environmental Quality

7.7.1 [☒]

Suppose that the solution of (7.80) turns out to be E_3^*, which fails to satisfy the $S(T) \geq 0$ restriction, and consequently the Energy Board is forced to select the lower rate of energy use, E_2^*, instead.

(a) Does E_3^* satisfy the "marginal utility $=$ marginal disutility" rule?

Como E_3^* é solução de

$$U_c C'(E) + U_P P'(E) = 0 \iff U_c C'(E) = -U_P P'(E) \tag{7.80}$$

então satisfaz a regra de que utilidade marginal é igual a desutilidade marginal. ■

(b) Does E_2^* satisfy that rule? If not, is E_2^* characterized by "marginal utility $<$ marginal disutility" or "marginal utility $>$ marginal disutility"? Explain.

Forster especifica as funções consumo e poluição como

$$C = C(E) \qquad (C' > 0, C'' < 0) \tag{7.72}$$
$$P = P(E) \qquad (P' > 0, P'' > 0) \tag{7.73}$$

e, ambas, afetam a utilidade social, dado um nível de uso energético E. Note que a função consumo, $C(E)$, é uma função positivamente inclinada e côncava em E, o que demonstra utilidade marginal decrescente, com maiores utilidades marginais em menores valores de E. Por outro lado, a função poluição, $P(E)$, é também uma função positivamente inclinada, mas convexa, ou seja, há desutilidade marginal crescente.

Como E_3^* é solução de (7.80), este consumo energético equilibra a utilidade marginal do consumo com a desutilidade marginal da poluição. Ao determinarmos um $E_2^* < E_3^*$, a utilidade marginal do consumo cresce e a desutilidade da poluição decresce. Portanto, E_2^* é caracterizado por "utilidade marginal $>$ desutilidade marginal" e não satisfaz a regra (7.80). ■

8 More on Optimal Control

8.0 [☒] Definições, Proposições, Lemas e Observações

Hamiltoniana de Valor Corrente (?). Caso em que o integrando F possui fator de desconto $e^{-\rho t}$:

$$F(t,y,u) = G(t,y,u)e^{-\rho t}, \tag{8.6}$$

então o problema de controle ótimo é dado por

$$\text{Maximizar} \quad V = \int_0^T G(t,y,u)e^{-\rho t}dt, \qquad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{y} = f(t,y,u) \\ \text{condições de fronteira} \end{cases} \tag{8.7}$$

A Hamiltoniana de valor corrente é dada por:

$$H_c \equiv He^{\rho t} = G(t,y,u) + mf(t,y,u), \tag{8.10}$$

em que

$$m = \lambda e^{\rho t}. \tag{8.9}$$

Condições do Princípio Máximo para H_c (?).

$$\begin{aligned}
&\max_u H_c(t,y,u,m), && \forall t \in [0,T] && (8.11)\\
&\dot{y} = \frac{\partial H_c}{\partial m} && \text{[equação de movimento da variável de estado } y\text{]} && (8.12)\\
&\dot{m} = -\frac{\partial H_c}{\partial y} + \rho m && \text{[equação de movimento da variável de coestado } m\text{]} && (8.13)\\
&m(T)e^{-\rho t} = 0 && \text{[TVC de linha terminal vertical]} && (8.14)\\
&[H_c]_{t=T}\, e^{\rho T} = 0 && \text{[TVC de linha terminal horizontal]} && (8.15)
\end{aligned}$$

Teorema de Suficiência de Mangasarian (?). As condições necessárias do princípio ótimo também são suficientes para máximo global de V se

(1) F e f são diferenciáveis e côncavas em (y,u) conjuntamente

(2) na solução ótima, temos

$$\lambda(t) \geq 0, \qquad \forall t \in [0,T] \qquad\qquad \text{(se } f \text{ é não-linear em } y \text{ ou } u\text{)}$$

*f é linear em y e u $\implies$ λ não precisa de restrição de sinal

---

Hamiltoniana Maximizada (?). Seja $u^*(t,y,\lambda)$ a variável de controle que maximiza $H(t,y,u,\lambda)$. Ao substituir u^* em H, obtemos a Hamiltoniana Maximizada:

$$H^0(t,y,\lambda) = F(t,y,u^*) + \lambda f(t,y,u^*) \tag{8.33}$$

Teorema de Suficiência de Arrow (?). As condições necessárias do princípio ótimo são suficientes para o máximo global de V se a Hamiltoniana Maximizada, H^0, é côncava em y.

8.2 The Current-Value Hamiltonian

8.2.1 [☒]

Find the revised transversality conditions stated in terms of the current-value Hamiltonian for a problem with terminal curve $y_T = \phi(T)$.

O problema em que o integrando possui termo de desconto, $e^{-\rho t}$, tem a seguinte forma:

$$H = G(t, y, u)e^{-\rho t} + \lambda f(t, y, u) \tag{8.8}$$

Multiplicando ambos lados por $e^{\rho t}$ e definindo $m \equiv \lambda e^{\rho t}$, segue que

$$H_c \equiv He^{\rho t} = G(t, y, u) + mf(t, y, u) \tag{8.10}$$

Com a Hamiltoniana padrão, H, no problema com curva terminal, a condição de transversalidade é dada por

$$[H - \lambda\phi']_{t=T} = 0 \tag{7.32}$$

Logo, dado que

$$H = H_c e^{-\rho t} \qquad \text{e} \qquad \lambda = me^{-\rho t},$$

a condição de transversalidade para a Hamiltoniana de valor corrente, H_c, é

$$\left[H_c e^{-\rho t} - me^{-\rho t}\phi'\right]_{t=T} = 0 \iff \left[(H_c - m\phi')e^{-\rho t}\right]_{t=T} = 0 \iff [H_c - m\phi']_{t=T}\, e^{-\rho T} = 0$$

■

8.2.2 [⊠]

Find the revised transversality conditions stated in terms of the current-value Hamiltonian for a problem with a truncated vertical terminal line.

O problema com linha terminal vertical truncada, em termos da Hamiltoniana, H, possui a seguinte condição de transversalidade:

$$\lambda(t) \geq 0 \qquad y_T \geq y_{min} \qquad (y_T - y_{min})\lambda(T) = 0 \tag{7.35}$$

Considerando a Hamiltoniana de valor corrente, H_c, e usando a relação $\lambda = me^{-\rho t}$, nos dá a seguinte condição de transversalidade:

$$me^{-\rho t} \geq 0 \qquad y_T \geq y_{min} \qquad (y_T - y_{min})me^{-\rho t} = 0$$

■

8.2.3 [⊠]

Find the revised transversality conditions stated in terms of the current-value Hamiltonian for a problem with a truncated horizontal terminal line.

O problema com linha terminal horizontal truncada, em termos da Hamiltoniana, H, possui a seguinte condição de transversalidade:

$$[H]_{t=T} \geq 0 \qquad T \leq T_{max} \qquad (T - T_{max})\,[H]_{t=T} = 0 \tag{7.35}$$

Considerando a Hamiltoniana de valor corrente, H_c, e usando a relação $H = H_c.e^{\rho t}$, nos dá a seguinte condição de transversalidade:

$$\begin{aligned} &\left[H_c.e^{\rho t}\right]_{t=T} \geq 0 \qquad T \leq T_{max} \qquad (T - T_{max})\left[H_c.e^{\rho t}\right]_{t=T} = 0 \iff \\ &[H_c]_{t=T}\, e^{\rho T} \geq 0 \qquad T \leq T_{max} \qquad (T - T_{max})\,[H_c]_{t=T}\, e^{\rho T} = 0 \end{aligned}$$

Como $e^{\rho T} > 0$, então, para $[H_c]_{t=T}\, e^{\rho T} = 0$, precisamos necessariamente que $[H_c]_{t=T} = 0$. Logo, não é necessário incluir o termo $e^{\rho T}$ nas condições acima:

$$[H_c]_{t=T} \geq 0 \qquad T \leq T_{max} \qquad (T - T_{max})\,[H_c]_{t=T} = 0$$

■

8.3 Sufficient Conditions

8.3.1 [☒]

Check Mangasarian and Arrow sufficient conditions for the Example 1 in Sec. 7.4.

O problema do exemplo 1 da Seção 7.4 é

$$\text{Maximizar} \quad V = \int_0^1 -u^2 dt, \qquad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{y} = y + u \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

Usando a condição (1) do Teorema de Suficiência de Mangasarian, verificaremos se F e f são diferenciáveis e côncavas em (y, u) conjuntamente. Note que $F = -u^2$ não depende de y, portanto faremos a verificação em relação a u:

$$F = -u^2 \overset{\partial/\partial u}{\Longrightarrow} F_u = -2u \overset{\partial/\partial u}{\Longrightarrow} F_{uu} = -2 \leq 0$$

Portanto, F é diferenciável e côncava em (y, u). Como $f = \dot{y} = y + u$ é linear em y e em u, logo é côncava e diferenciável em (y, u). Assim, a condição (1) do Teorema de Suficiência de Mangasarian é satisfeita.

Como f é linear em (y, u), então λ não precisa de restrição de sinal. Logo, a condição (2) do Teorema de Suficiência de Mangasarian também é satisfeita.

Usando o Teorema de Suficiência de Arrow, verificaremos agora se a Hamiltoniana Maximizada, H^0, é côncava em y. Para obter H^0 (por 8.33), precisamos encontrar u^* e substituí-lo na Hamiltoniana, H. A Hamiltoniana é dada por

$$H = -u^2 + \lambda(y + u).$$

Note que u tem a forma quadrática em H e também é não-restrita, então espera-se solução interna. Encontraremos u^* por CPO:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \lambda \iff u^* = \frac{\lambda}{2}$$

Substituindo u^* em H, encontraremos H^0:

$$\begin{aligned} H^0 &= -\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \lambda y + \lambda\left(\frac{\lambda}{2}\right) \\ &= -\frac{\lambda^2}{4} + \lambda y + \frac{2\lambda^2}{4} \\ &= \frac{\lambda^2}{4} + \lambda y \end{aligned}$$

Como H^0 é linear em y dado um λ, então é côncava em y. Portanto, a condição do Teorema de Suficiência de Arrow é satisfeita. ■

8.3.2 [☒]

Check Mangasarian and Arrow sufficient conditions for the Example 3 in Sec. 7.4.

O problema do exemplo 3 da Seção 7.4 é

$$\text{Maximizar} \quad V = \int_0^T -1dt, \qquad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{y} = y + u \\ y(0) = 5, \quad y(T) = 11, \quad T \text{ livre} \\ U = [-1, 1] \end{cases}$$

Usando a condição (1) do Teorema de Suficiência de Mangasarian, verificaremos se F e f são diferenciáveis e côncavas em (y, u) conjuntamente. Note que $F = -1$ não depende de y e de u, logo é linear em ambos. Portanto, F é diferenciável e côncava em (y, u). Observe também que $f = \dot{y} = y + u$ é linear em (y, u), então f é diferenciável e côncava em (y, u). Assim, a condição (1) do Teorema de Suficiência de Mangasarian é satisfeita.

Como f é linear em (y, u), então λ não precisa de restrição de sinal. Logo, a condição (2) do Teorema de Suficiência de Mangasarian também é satisfeita.

Usando o Teorema de Suficiência de Arrow, verificaremos agora se a Hamiltoniana Maximizada, H^0, é côncava em y. Para obter H^0 (por 8.33), precisamos encontrar u^* e substituí-lo na Hamiltoniana, H. A Hamiltoniana é dada por

$$H = -1 + \lambda(y + u)$$

Note que a Hamiltoniana é linear em u e pertence ao intervalo fechado $U = [-1, 1]$, logo espera-se uma solução de canto:

$$u^* = -1 \qquad \text{ou} \qquad u^* = 1$$

Para sabermos se H é crescente ou decrescente em u, encontraremos o sinal de λ[1]:

$$u^* = sgn\lambda \qquad \text{ou} \qquad u^* \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ se } \lambda \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0 \tag{1}$$

Usando a definição da equação de movimento de λ, temos

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\lambda \iff \dot{\lambda} + \lambda = 0,$$

que é uma equação diferencial de 1ª ordem com coeficiente e termo constantes e, logo, tem a seguinte solução geral:

$$\lambda(t) = ke^{-t} \qquad (k \text{ constante}) \tag{2}$$

Pela TVC de ponto terminal horizontal, segue que

$$\begin{aligned} [H]_{t=T} = 0 &= -1 + \lambda[y(T) + u^*] \\ &= -1 + ke^{-T}(11 + u^*) \qquad (\lambda(t) = ke^{-t}) \\ 1 &= ke^{-T}(11 + u^*) \end{aligned}$$

Note que $(11 + u^*)$, com $u^* \in [-1, 1]$, é sempre positivo, e $e^{-T} > 0$. Logo, dado o lado direito da equação, precisamos que $k > 0$. Como $k > 0$, sabemos, pela equação (2), que $\lambda(t) > 0$ e, por (1), segue que $u^* = 1$.

Substituindo $u^* = 1$ na Hamiltoniana, obtemos H^0:

$$H^0 = -1 + \lambda + \lambda y$$

Como H^0 é linear em y dado um λ, é côncava em y, satisfazendo a condição de Arrow. ■

---

[1] Ver **?**, pág. 188.

8.3.3 [☒]

Check Mangasarian and Arrow sufficient conditions for Problem 1 in Exercise 7.4.

O problema do Exercício 7.4.1 é

$$\text{Maximizar } \; V = \int_0^T -(t^2+u^2)dt, \qquad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{y} = u \\ y(0) = 5, \quad y(4) \geq 300 \\ U = [0,2] \end{cases}$$

Usando a condição (1) do Teorema de Suficiência de Mangasarian, verificaremos se F e f são diferenciáveis e côncavas em (y, u) conjuntamente. Note que $F = -(t^2 + u^2)$ não depende de y, portanto faremos a verificação em relação a u:

$$F = -(t^2+u^2) \overset{\partial/\partial u}{\Longrightarrow} F_u = -2u \overset{\partial/\partial u}{\Longrightarrow} F_{uu} = -2 \leq 0$$

Portanto, F é diferenciável e côncava em (y, u). Como $f = \dot{y} = y + u$ é linear em y e em u, logo é côncava e diferenciável em (y, u). Assim, a condição (1) do Teorema de Suficiência de Mangasarian é satisfeita.

Como f é linear em (y, u), então λ não precisa de restrição de sinal. Logo, a condição (2) do Teorema de Suficiência de Mangasarian também é satisfeita.

Usando o Teorema de Suficiência de Arrow, verificaremos agora se a Hamiltoniana Maximizada, H^0, é côncava em y. Para obter H^0 (por 8.33), precisamos encontrar u^* e substituí-lo na Hamiltoniana, H. A Hamiltoniana é dada por

$$H = -(t^2 + u^2) + \lambda u.$$

Note que u tem a forma quadrática em H, então espera-se solução interna. Encontraremos u^* por CPO:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \lambda = 0 \iff u^* = \frac{\lambda}{2}$$

Substituindo u^* em H, obtemos

$$H^0 = -\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{2} = \frac{\lambda^2}{4}$$

Como H^0 não está em função de y dado, logo, é côncavo em y. Portanto, condição de Arrow é satisfeita. Note também que $u \in [0, 2]$ e, a partir do u^* encontrado, temos

$$0 \leq u^* \leq 2 \iff 0 \leq \lambda \leq 4,$$

logo, precisamos também que $\lambda \in [0, 4]$. ∎

8.3.4 [☒]

Check Mangasarian and Arrow sufficient conditions for Problem 3 in Exercise 7.4.

O problema do Exercício 7.4.3 é

$$\text{Maximizar} \quad V = \int_0^T -1dt, \qquad \text{sujeito a} \begin{cases} \dot{y} = 2u \\ y(0) = 8, \quad y(T) = 0 \\ U = [-1, 1] \end{cases}$$

Usando a condição (1) do Teorema de Suficiência de Mangasarian, verificaremos se F e f são diferenciáveis e côncavas em (y, u) conjuntamente. Note que $F = -1$ não depende de y e de u, logo é linear em ambos. Portanto, F é diferenciável e côncava em (y, u). Observe também que $f = \dot{y} = 2u$ não depende de y e é linear em u, então

$$f = 2u \overset{\partial/\partial u}{\Longrightarrow} f_u = 2 \overset{\partial/\partial u}{\Longrightarrow} f_{uu} = 0$$

Portanto, f é diferenciável e côncava em (y, u). Assim, a condição (1) do Teorema de Suficiência de Mangasarian é satisfeita.

Como f é linear em (y, u), então λ não precisa de restrição de sinal. Logo, a condição (2) do Teorema de Suficiência de Mangasarian também é satisfeita.

Usando o Teorema de Suficiência de Arrow, verificaremos agora se a Hamiltoniana Maximizada, H^0, é côncava em y. Para obter H^0 (por 8.33), precisamos encontrar u^* e substituí-lo na Hamiltoniana, H. A Hamiltoniana é dada por

$$H = -1 + \lambda 2u$$

Note que, como H é linear em u, com $u \in U = [-1, 1]$ fechado, espera-se solução de canto com valor máximo em $u^* = -1$ ou $u^* = 1$.

Observe que, pela equação de movimento de y, temos

$$\dot{y} = 2u \iff y(t) = 2ut + k \quad [k \text{ constante}]$$

Das condições de fronteira, segue

$$y(0) = 8 = 2u.0 + k \iff k = 8$$
$$y(T) = 0 = 2u.T + \cancelto{8}{k} \iff u = -\frac{4}{T}$$

Como $T > 0$, então $u > 0$ e, logo,

$$u^* = -1$$

Substituindo $u^* = -1$ na Hamiltoniana, obtemos

$$H^0 = -1 - 2\lambda$$

Como H^0 não é dependente de y, então é linear e côncava em y. Portanto, a condição de suficiência de Arrow é satisfeita. ■

8.5 Antipollution Policy

8.5.2 [☒]

Let a discount factor $e^{-\rho t}$, $(\rho > 0)$, be incorporated into problem (8.65).

(a) Write the current-value Hamiltonian H_c, for the new problem.

A Hamiltoniana do problema é dada por

$$H = U[C(E), P] + \lambda_p(\alpha E - \beta A - \delta P) - \lambda_s(A + E)$$

Incorporando o fator de desconto, temos

$$H = U[C(E), P]e^{-\rho t} + \lambda_p(\alpha E - \beta A - \delta P) - \lambda_s(A + E)$$

Para obtermos a Hamiltoniana de valor corrente, H_c, precisamos multiplicar os dois lados por $e^{\rho t}$ e definir

$$H_c \equiv H.e^{\rho t} \qquad m_p \equiv \lambda_p.e^{\rho t} \qquad m_s \equiv \lambda_s.e^{\rho t}$$

logo

$$H_c = U[C(E), P] + m_p(\alpha E - \beta A - \delta P) - m_s(A + E)$$

■

(b) What are the conditions for maximizing H_c?

Para maximizar H_c, precisamos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_c}{\partial E} &= U_c C'(E) + m_p.\alpha - m_s = 0 \\
\frac{\partial^2 H_c}{\partial E^2} &= U_{cc} C'(E) + U_c C''(E) < 0 \\
\frac{\partial H_c}{\partial A} &= m_p.\beta + m_s \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0 \implies A^* = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \hat{A} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

■

(c) Rewrite these conditions in terms of λ_P and λ_S (instead of m_P, and m_S), and compare them with (8.67) and (8.68) to check whether the new conditions are equivalent to the old.

As equações (8.67) e (8.68) são dadas por

$$\frac{\partial H}{\partial E} = U_c C'(E) + \lambda_p.\alpha - \lambda_s = 0 \tag{8.67}$$

$$\beta\lambda_p + \lambda_s \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0 \implies A^* = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \hat{A} \end{array} \right\} \tag{8.68}$$

Reescrevendo as condições do item anterior em termos de λ_p e λ_s, dadas as relações

$$m_p \equiv \lambda_p.e^{\rho t} \qquad m_s \equiv \lambda_s.e^{\rho t},$$

segue que

$$\frac{\partial H_c}{\partial E} = U_c C'(E) + \lambda_p . e^{\rho t} . \alpha - \lambda_s . e^{\rho t} = 0$$
$$\frac{\partial H_c}{\partial A} = \lambda_p . e^{\rho t} . \beta + \lambda_s . e^{\rho t} \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0 \implies A^* = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \hat{A} \end{array} \right\}$$

Para verificarmos a equivalência do modelo construído com H_c e H, consideraremos que $\rho = 0$, ou seja, não há desconto temporal:

$$\frac{\partial H_c}{\partial E} = U_c C'(E) + \lambda_p . e^{0t} . \alpha - \lambda_s . e^{0t} = 0$$
$$\frac{\partial H_c}{\partial A} = \lambda_p . e^{0t} . \beta + \lambda_s . e^{0t} \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0 \implies A^* = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \hat{A} \end{array} \right\}$$

logo,

$$\frac{\partial H_c}{\partial E} = U_c C'(E) + \lambda_p . \alpha - \lambda_s = \frac{\partial H}{\partial E} = 0$$
$$\frac{\partial H_c}{\partial A} = \lambda_p . \beta + \lambda_s = \frac{\partial H}{\partial A} \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0 \implies A^* = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \hat{A} \end{array} \right\}$$

Portanto, as novas condições são equivalentes às antigas. ■