Lista 1 de Macroeconomia I - Parte 2

Fábio Nishida - PPGE/FEA-RP/USP

Julho, 2021

Conteúdo

1 The Nature of Dynamic Optimization

1.4 Alternative Approaches to Dynamic Optimization

1.4.1 [⊠]

From Fig. 1.6, find $V^*(D)$, $V^*(E)$, and $V^*(F)$. Determine the optimal paths DZ, EZ, and FZ.

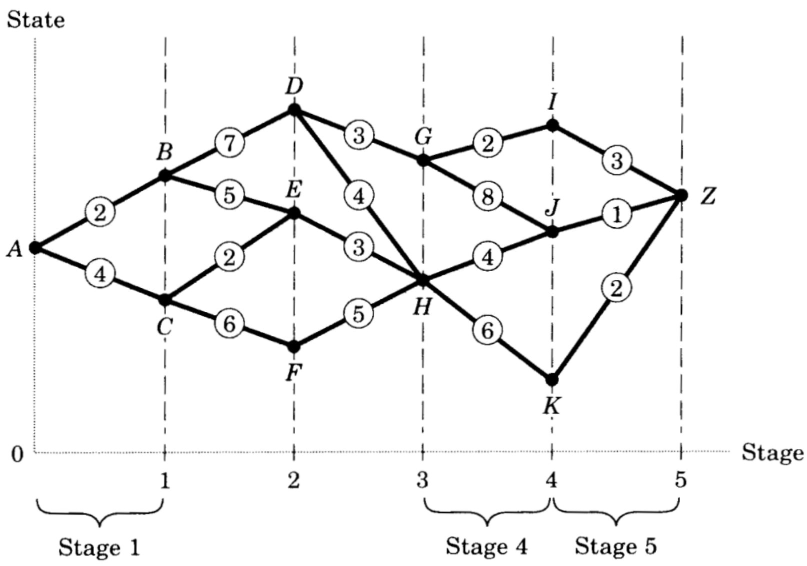


FIGURE 1.6

Considerando problema de minimização de valores, no estágio 5, temos:

$$V^*(I) = 3, \qquad V^*(J) = 1 \quad \text{e} \quad V^*(K) = 2,$$

pois há apenas a possibilidade de ir ao ponto Z a partir destes 3 pontos. Agora, considerando o início no estágio 4, temos:

$$V^*(G) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } GI + V^*(I) = 2 + 3 = 5, \\ \text{arco } GJ + V^*(J) = 8 + 1 = 9 \end{array} \right\} = 5$$

$$V^*(H) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } HJ + V^*(J) = 4 + 1 = 5, \\ \text{arco } HK + V^*(K) = 6 + 2 = 8 \end{array} \right\} = 5.$$

Logo, a partir do estágio 3, segue que:

$$V^*(D) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } DG + V^*(G) = 3 + 5 = 8, \\ \text{arco } DH + V^*(H) = 4 + 5 = 9 \end{array} \right\} = 8,$$

$$V^*(E) = \text{arco } EH + V^*(H) = 3 + 5 = 8,$$

$$V^*(F) = \text{arco } FH + V^*(H) = 5 + 5 = 10$$

Portanto, as trajetórias ótimas de DZ, EZ e FZ são:

- **DZ**: $D \to G \to I \to Z$
- **EZ**: $E \to H \to J \to Z$
- **FZ**: $F \to H \to J \to Z$

■

1.4.2 [⊠]

On the basis of the preceding problem, find $V^*(B)$ and $V^*(C)$. Determine the optimal paths BZ and CZ.

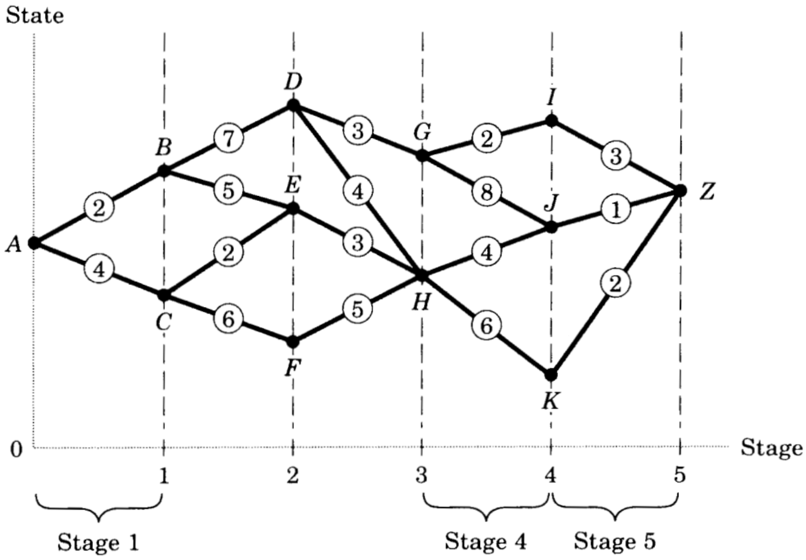


FIGURE 1.6

Do exercício anterior, temos:

$$
\begin{aligned}
V^*(D) &= 5, \\
V^*(E) &= 8, \\
V^*(F) &= 10
\end{aligned}
$$

Calculando $V^*(B)$ e $V^*(C)$:

$$
V^*(B) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } BD + V^*(D) = 7 + 8 = 15, \\ \text{arco } BE + V^*(E) = 5 + 8 = 13 \end{array} \right\} = 5
$$

$$
V^*(C) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } CE + V^*(E) = 2 + 8 = 10, \\ \text{arco } CF + V^*(F) = 6 + 10 = 16 \end{array} \right\} = 10.
$$

Portanto, as trajetórias ótimas são:

- **BZ**: $B \to E \to H \to J \to Z$
- **CZ**: $C \to E \to H \to J \to Z$

■

1.4.3 [☒]

Verify the statement in Sec. 1.1 that the minimum cost of production for the example in Fig. 1.6 is $14, achieved on the path $ACEHJZ$.

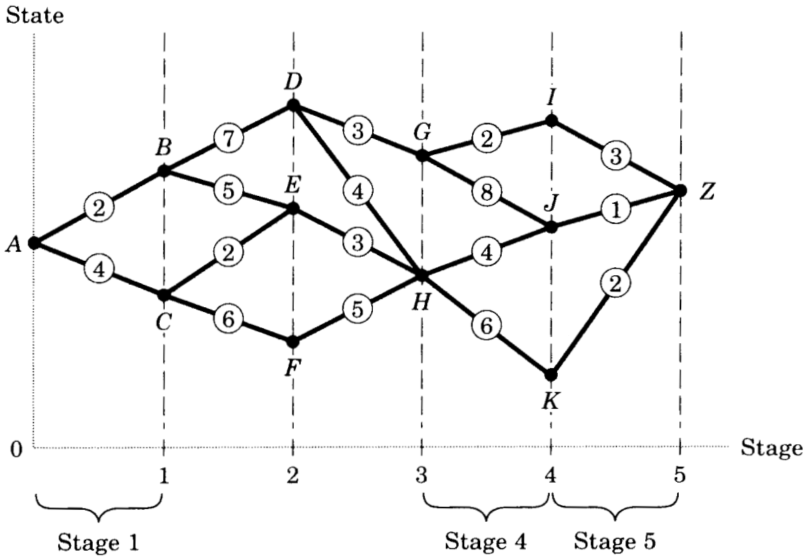


FIGURE 1.6

Do exercício anterior, temos:

$$
\begin{aligned}
V^*(B) &= 14, \\
V^*(C) &= 10.
\end{aligned}
$$

Calculando $V^*(A)$, temos:

$$
V^*(A) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } AB + V^*(B) = 2 + 13 = 15, \\ \text{arco } AC + V^*(C) = 4 + 10 = 14 \end{array} \right\} = 14.
$$

E, portanto, a trajetória ótima é, de fato,

- **AZ**: $A \to C \to E \to H \to J \to Z$

■

1.4.4 [☒]

Suppose that the arc values in Fig. 1.6 are profit (rather than cost) figures. For every point i in the set $\{A, B, ..., Z\}$ find:

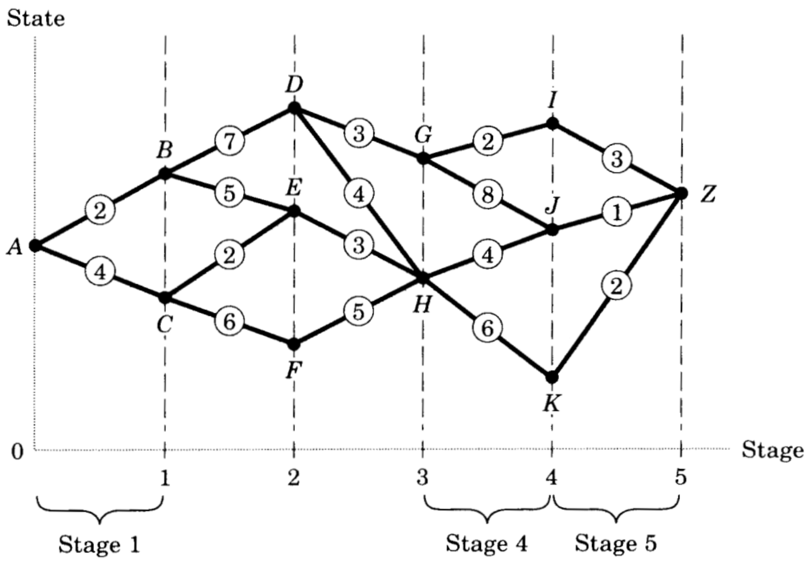


FIGURE 1.6

(a) the optimal (maximum-profit) value $V^*(i)$, and

Agora, faremos o mesmo procedimento dos exercícios 1 a 3, porém com maximização ao invés de minimização dos valores. No estágio 5, temos:

$$V^*(I) = 3, \qquad V^*(J) = 1 \quad \text{e} \quad V^*(K) = 2,$$

pois há apenas a possibilidade de ir ao ponto Z a partir destes 3 pontos. Agora, considerando o início no estágio 4, temos:

$$V^*(G) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } GI + V^*(I) = 2 + 3 = 5, \\ \text{arco } GJ + V^*(J) = 8 + 1 = 9 \end{array} \right\} = 9$$

$$V^*(H) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } HJ + V^*(J) = 4 + 1 = 5, \\ \text{arco } HK + V^*(K) = 6 + 2 = 8 \end{array} \right\} = 8.$$

A partir do estágio 3, segue que:

$$V^*(D) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } DG + V^*(G) = 3 + 9 = 12, \\ \text{arco } DH + V^*(H) = 4 + 8 = 12 \end{array} \right\} = 12,$$

$$V^*(E) = \text{arco } EH + V^*(H) = 3 + 8 = 11,$$

$$V^*(F) = \text{arco } FH + V^*(H) = 5 + 8 = 13$$

Logo, no estágio 2,

$$V^*(B) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } BD + V^*(D) = 7 + 12 = 19, \\ \text{arco } BE + V^*(E) = 5 + 11 = 16 \end{array} \right\} = 19$$

$$V^*(C) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } CE + V^*(E) = 2 + 11 = 13, \\ \text{arco } CF + V^*(F) = 6 + 13 = 19 \end{array} \right\} = 19.$$

E, portanto,

$$V^*(A) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{arco } AB + V^*(B) = 2 + 19 = 21, \\ \text{arco } AC + V^*(C) = 4 + 19 = 23 \end{array} \right\} = 23.$$

■

(b) the optimal path from i and Z.

As trajetórias ótimas de cada i até Z são:

- **IZ**: $I \to Z$
- **JZ**: $J \to Z$
- **KZ**: $K \to Z$
- **GZ**: $G \to J \to Z$
- **HZ**: $H \to K \to Z$
- **DZ**: $D \to G \to J \to Z$ ou $D \to H \to K \to Z$
- **EZ**: $E \to H \to K \to Z$
- **FZ**: $F \to H \to K \to Z$
- **BZ**: $B \to D \to G \to J \to Z$ ou $B \to D \to H \to K \to Z$
- **CZ**: $C \to F \to H \to K \to Z$
- **AZ**: $A \to C \to F \to H \to K \to Z$. ■

2 The Fundamental Problem of the Calculus of Variations

2.0 [☒] Definições, Proposições, Lemas e Observações

Regra de Leibniz (?). Seja a integral definida

$$I(x) \equiv \int_a^b F(t,x)dt$$

em que assume-se que $F(t,x)$ tenha uma derivada contínua $F_x(t,x)$ no intervalo $[a,b]$. Então, o efeito da mudança em x na integral é dada pela regra de Leibniz:

$$\frac{dI}{dx} = \int_a^b F_x(t,x)dt. \tag{2.6}$$

Integral por Partes.

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu \tag{2.15}$$

Equação de Euler (?).

$$\frac{d}{dt}F_{y'} - F_y = 0 \iff \tag{2.18}$$

$$F_{y'y'}.y''(t) + F_{yy'}.y'(t) + F_{ty'} - F_y = 0$$

Caso especial I (?): $F = F(t,y')$. Neste caso especial, a função F é livre de y, implicando em $F_y = 0$. Então, a equação de Euler se reduz a $dF_{y'}/dt = 0$, com a solução

$$F_{y'} = \text{constante}. \tag{2.20}$$

Caso especial II (?): $F = F(y,y')$. A função F é livre de t, implicando em $F_{ty'} = 0$. Então, a equação de Euler se simplifica em

$$F_{y'y'}.y''(t) + F_{yy'}.y'(t) - F_y = 0,$$

com a solução

$$F - y'.F_{y'} = \text{constante}. \tag{2.21}$$

Caso especial III (?): $F = F(y')$. Neste caso especial, a função F depende apenas de y', então, a equação de Euler se reduz a

$$F_{y'y'}.y''(t) = 0. \tag{2.24}$$

Caso especial IV (?): $F = F(t,y)$. Neste caso especial, a função F é livre de y', implicando em $F_{y'} = 0$. Então, a equação de Euler se reduz a

$$F_y = 0.$$

Caso com diversas variáveis de estado (?). Com $n > 1$ variáveis de estado em um dado problema, a funcional se torna:

$$V[y_1, ..., y_n] = \int_0^T F(t; y_1, ..., y_n; y_1', ..., y_n')dt \tag{2.26}$$

e haverá um par de condições inicial e terminal para cada variável de estado. Neste caso, teremos n equações de Euler:

$$F_{y_j} - \frac{d}{dt}F_{y_{j'}} = 0, \qquad \forall t \in [0, T], \quad j = 1, 2, ..., n \tag{2.27}$$

Caso de derivadas de ordem superior (?). Uma funcional com derivadas de ordem superior de $y(t)$ pode ser escrita como

$$V[y] = \int_0^T F(t, y, y', y'', ..., y^{(n)})dt. \tag{2.29}$$

A função F, com uma variável de estado y e derivadas de y até a n-ésima ordem, pode ser transformada na forma com n variáveis de estado com suas derivadas de primeira ordem.

2.1 The Euler Equation

2.1.2 [☒]

Find the derivatives of the following definite integral with respect to x:

$$I = \int_a^b x^2 dt$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= \frac{d}{dx}\int_a^b x^4 dt \\ &= \int_a^b \frac{dx^4}{dx} dt && \text{(Regra de Leibniz)} \\ &= \int_a^b 4x^3 dt \\ &= \left[4x^3 t + c\right]_a^b \\ &= 4x^3(b-a). \end{aligned}$$

■

2.1.3 [$\boxtimes$]

Find the derivatives of the following definite integral with respect to x:

$$I = \int_a^b e^{-xt} dt$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dx} &= \frac{d}{dx}\int_a^b e^{-xt} dt \\
&= \int_a^b \frac{de^{-xt}}{dx} dt && \text{(Regra de Leibniz)} \\
&= \int_a^b e^{-xt}(-t) dt && \left(\tfrac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)}.\ln e.f'(x)\right) \\
&= -\int_a^b te^{-xt} dt. && (1)
\end{aligned}$$

Usando Integral por Partes, sabemos que

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du \tag{2}$$

logo, se $u \equiv t$ e $dv \equiv e^{-xt}$, então

$$du = dt \qquad \text{e} \qquad v = -\frac{e^{-xt}}{x}.$$

De fato, derivando v em t, temos:

$$dv = \left(-\frac{e^{-xt}}{x}\right)' = -\frac{1}{x}e^{-xt}(-x) = e^{-xt}.$$

Portanto, usando (2) em (1), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dx} = -\int_a^b te^{-xt} dt &= -\left\{\left[t\left(-\frac{e^{-xt}}{x}\right)\right]_a^b - \int_a^b \left(-\frac{e^{-xt}}{x}\right) dt\right\} \\
&= \left[\frac{te^{-xt}}{x}\right]_a^b - \int_a^b \left(\frac{e^{-xt}}{x}\right) dt \\
&= \left[\frac{te^{-xt}}{x} - \frac{e^{-xt}}{x^2}\right]_a^b && \left(\tfrac{d}{dx}\tfrac{e^{-xt}}{x^2} = \tfrac{1}{x^2}e^{-xt}(-x) = \tfrac{e^{-xt}}{x}\right) \\
&= \left[\frac{txe^{-xt} - e^{-xt}}{x^2}\right]_a^b \\
&= \left[\frac{(tx-1)e^{-xt}}{x^2}\right]_a^b \\
&= \frac{1}{x^2}\left[(bx-1)e^{-xb} - (ax-1)e^{-ab}\right].
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

2.1.4 [☒]

Find the derivatives of the following definite integral with respect to x:

$$I = \int_0^{2x} e^t dt$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{2x} e^t dt &= \frac{d}{dx} \left[e^t \right]_0^{2x} \\ &= \frac{d}{dx} \left[e^{2x} - e^0 \right] \\ &= 2e^{2x} \end{aligned}$$

■

2.1.5 [☒]

Find the derivatives of the following definite integral with respect to x:

$$I = \int_0^{2x} te^x dt$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_0^{2x} te^x dt &= \frac{d}{dx}\left(e^x \int_0^{2x} tdt\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(e^x \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2x}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(e^x \left[\frac{(2x)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right]\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(e^x 2x^2\right) \\
&= e^x 2x^2 + e^x 4x && \text{(regra do produto)} \\
&= 2xe^x(x+2)
\end{aligned}$$

■

2.1.6 [☒]

Find the extremal, if any, of the following functional:

$$V[y] = \int_0^1 ty + 2y'^2 dt, \qquad \text{com } y(0) = 1 \text{ e } y(1) = 2$$

Note que $F = ty + 2y'^2$, logo

$$F_y = t, \qquad F_{y'} = 4y', \qquad F_{y'y'} = 4, \qquad F_{yy'} = 0 \quad \text{e} \quad F_{ty'} = 0.$$

Por definição, Equação de Euler é dada por:

$$F_{y'y'}.y''(t) + F_{yy'}.y'(t) + F_{ty'} - F_y = 0$$

Aplicando em nosso problema, segue:

$$4y''(t) + 0y'(t) + 0 - t = 0 \iff y''(t) = \frac{t}{4}.$$

Para obter $y'(t)$, integraremos $y''(t)$ em relação a t:

$$y'(t) = \int y''(t)dt = \int \frac{t}{4}dt = \frac{t^2}{8} + c_1$$

Para obter $y(t)$, integraremos $y'(t)$ em relação a t:

$$y(t) = \int y'(t)dt = \int \left(\frac{t^2}{8} + c_1\right) dt = \frac{t^3}{24} + c_1 t + c_2.$$

Para obter os valores de c_1 e c_2, usaremos as condições dadas:

$$y(0) = 1 = \frac{0^3}{24} + c_1.0 + c_2 \iff c_2 = 1$$
$$y(1) = 2 = \frac{1^3}{24} + c_1.1 + \underbrace{c_2}_{1} \iff c_1 = \frac{23}{24}$$

Portanto, a solução ótima (extremal) é:

$$y^*(t) = \frac{t^3}{24} + \frac{23}{24}t + 1.$$

■

2.1.7 [⊠]

Find the extremal, if any, of the following functional:

$$V[y] = \int_0^1 tyy'dt, \qquad \text{com } y(0) = 0 \ \text{ e } \ y(1) = 1$$

Note que $F = tyy'$, logo

$$F_y = y't, \qquad F_{y'} = ty, \qquad F_{y'y'} = 0, \qquad F_{yy'} = t \quad \text{e} \quad F_{ty'} = y.$$

Por definição, Equação de Euler é dada por:

$$F_{y'y'}.y''(t) + F_{yy'}.y'(t) + F_{ty'} - F_y = 0$$

Aplicando em nosso problema, segue:

$$0y''(t) + ty'(t) + y(t) - ty'(t) = 0 \iff y(t) = 0.$$

Usando as condições dadas:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0 \neq 1 \end{aligned}$$

Portanto, as condições de fronteira não são satisfeitas, o que implica na não-existência de solução ótima (extremal). ■

2.2 Some Special Cases

2.2.1 [☒]

Find the extremal of the following functional:

$$V[y] = \int_0^1 (t^2 + y'2)dt, \qquad \text{com } y(0) = 0 \ \text{ e } \ y(1) = 2$$

Note que $F(t, y') = t^1 + y'^2$, logo temos as seguintes derivadas

$$F_{y'} = 2y', \qquad F_{y'y'} = 2, \qquad F_{yy'} = 0, \qquad F_{ty'} = 0, \qquad F_y = 0 \tag{1}$$

Por se tratar de um integrando $F(t, y')$ (Caso especial I), segue que

$$F_{y'} = c_1 \quad \text{(constante)} \tag{2}$$

Logo, igualando $F_{y'}$ obtido em (1) e em (2), obtemos:

$$2y' = c_1 \iff y' = \frac{c_1}{2}$$

Integrando y' em relação a t, temos:

$$\int y' dt = \int \frac{c_1}{2} dt = \frac{c_1}{2} t + c_2 = y(t).$$

Usando as condições de fronteira, segue que:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &= \frac{c_1}{2}.0 + c_2 \iff c_2 = 0 \\ y(1) = 2 &= \frac{c_1}{2}.1 + \cancelto{0}{c_2} \iff c_1 = 4. \end{aligned}$$

Portanto, a solução ótima (extremal) é:

$$y^*(t) = 2t.$$

■

2.2.2 [☒]

Find the extremal of the following functional:

$$V[y] = \int_0^2 7{y'}^3 dt, \qquad \text{com } y(0) = 9 \text{ e } y(2) = 11$$

Note que $F(y') = 7{y'}^3$ e suas derivadas são:

$$F_{y'} = 21{y'}^2 \quad \text{e} \quad F_{y'y'} = 42y' \tag{1}$$

Observe também que o integrando $F(y')$ segue o Caso especial III, logo

$$F_{y'y'}.y''(t) = 0 \tag{2}$$

Substituindo $F_{y'y'} = 42y'$ em (2), obtemos:

$$42y'.y'' = 0 \iff y'.y'' = 0.$$

Se $y''(t) = 0$, então $y'(t) = c_1$ (constante). Logo, integrando $y'(t)$ em relação a t, segue que

$$\int y'(t)dt = \int c_1 dt = tc_1 + c_2 = y(t). \qquad (c_2 \text{ constante})$$

Usando as condições de fronteira:

$$\begin{aligned} y(0) = 9 = 0.c_1 + c_2 &\iff c_2 = 9 \\ y(2) = 11 = 2.c_2 + \cancelto{9}{c_2} &\iff c_1 = 1 \end{aligned}$$

Se $y'(t) = 0$, então $y(t) = c_3$ (constante). Logo, este caso é incompatível com as condições dadas, pois

$$y(0) = c_3 = 9 \neq 11 = c_3 = y(2).$$

Portanto, segue, do caso $y''(t) = 0$, que a solução ótima (extremal) é

$$y^*(t) = t + 9.$$

■

2.2.3 [☒]

Find the extremal of the following functional:

$$V[y] = \int_0^1 \left(y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2 \right) dt, \qquad \text{com } y(0) = 2 \ \text{ e } \ y(1) = 5$$

Note que $F(y, y') = y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2$, logo temos as seguintes derivadas

$$F_{y'} = y + 1 + y', \qquad F_{y'y'} = 1, \qquad F_{yy'} = 1, \qquad F_{ty'} = 0, \qquad F_y = 1 + y'$$

Por se tratar de um integrando $F(y, y')$ (Caso especial II), segue que

$$F - y'.F_{y'} = c \quad \text{(constante)}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left(y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2 \right) - y'\left(y + 1 + y'\right) &= c \\
y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2 - y'y + y' + y^{2'} &= c \\
y - \frac{1}{2}y'^2 &= c \\
y'^2 &= 2(y - c) \\
y' &= \left[2(y - c)\right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Como $y' = dy/dt$, temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{dy}{\left[2(y - c)\right]^{1/2}} \\
\int 1 dt &= \int \left[2(y - c)\right]^{-1/2} dy && \text{(integrando)} \\
t + c_2 &= \sqrt{2}\sqrt{y - c} + c_1 && \left(\tfrac{d}{dy}\sqrt{2}\sqrt{y - c} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(y - c)^{-1/2} = \left[2(y - c)\right]^{-1/2}\right) \\
\frac{t + c_2 - c_1}{\sqrt{2}} &= \sqrt{y - c} \\
\frac{\left(t + c_2 - c_1\right)^2}{2} &= y - c \\
y^*(t) &= \frac{\left(t + c_2 - c_1\right)^2}{2} + c.
\end{aligned}$$

Como c_1 e c_2 são constantes, definiremos a constante $k \equiv c_2 - c_1$. Substituindo k em $y^*(t)$, temos a solução geral:

$$\begin{aligned}
y^*(t) &= \frac{(t + k)^2}{2} + c \\
&= \frac{t^2}{2} + tk + \frac{k^2}{2} + c && (1)
\end{aligned}$$

A partir das condições de fronteira, segue que

$$\begin{aligned}
y^*(0) = 2 &= \frac{0^2}{2} + 0.k + \frac{k^2}{2} + c \iff c = \frac{4 - k^2}{2} && (2) \\
y^*(1) = 5 &= \frac{1^2}{2} + 1.k + \frac{k^2}{2} + c \\
&= \frac{1 + 2k + k^2}{2} + \frac{4 - k^2}{2} \iff && \text{(usando 2)} \\
10 &= 5 + 2k \iff k = 5/2 && (3)
\end{aligned}$$

Portanto, a solução ótima, $y^*(t)$, é dada por:

$$\begin{aligned} y^*(t) &= \frac{t^2}{2} + tk + \frac{k^2}{2} + \frac{4-k^2}{2} && \text{(usando 2 em 1)} \\ &= \frac{t^2}{2} + tk + \frac{4}{2} \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{5}{2}t + 2. && \text{(usando 3)} \end{aligned}$$

■

2.3 Two Generalizations of the Euler Equation

2.3.1 [$\boxtimes$]

Find the extremal of $V[y] = \int_0^1 (1 + y''^2)dt$, with $y(0) = 0$ and $y'(0) = y(1) = y'(1) = 1$.

Note que este é um Caso de derivadas de ordem superior. Defina $z \equiv y'$, então $z' = y''$, $z(0) = 1$ e $z(1) = 1$. Logo:

$$V[z] = \int_0^1 1 + z'^2 dt.$$

Note que $F = 1 + z'^2$ e temos as seguintes derivadas:

$$F_{z'} = 2z', \qquad F_{z'z'} = 2, \qquad F_{zz'} = 0, \qquad F_{tz'} = 0, \qquad F_z = 0.$$

Por definição, Equação de Euler é dada por:

$$F_{z'z'}.z''(t) + F_{zz'}.z'(t) + F_{tz'} - F_z = 0$$

Neste problema, segue que:

$$2.z''(t) + 0.z'(t) + 0 - 0 = 0 \iff z''(t) = 0$$

Integrando $z''(t)$, temos

$$\int z''(t)dt = c_1 = z'(t).$$

E, integrando $z'(t)$, segue que

$$\int z'(t)dt = \int c_1 dt = c_1 t + c_2 = z(t).$$

Usando as condições de fronteira, obtemos:

$$z(0) = 1 = c_1.0 + c_2 \iff c_2 = 1$$
$$z(1) = 1 = c_1.1 + \cancelto{1}{c_2} \iff c_1 = 0$$

Portanto,

$$z^*(t) = 1 = y'(t)$$

Integrando $y'(t)$ em relação a t, temos

$$y^*(t) = t + c_3$$

Usando a condição inicial:

$$y(0) = 0 = 0 + c_3 \iff c_3 = 0.$$

Então, a solução ótima é dada por $y^*(t) = t$. ■

2.3.2 [⊠]

Find the extremal of $V[y] = \int_a^b (y'^2 + z'^2 + y'z')dt$ (general solution only).

Note que este é um Caso com diversas variáveis de estado. Note que $F = y'^2 + z'^2 + y'z'$. Logo, temos as seguinte derivadas:

$$F_{y'} = 2y' + z', \qquad F_{y'y'} = 2, \qquad F_{yy'} = 0, \qquad F_{ty'} = 0, \qquad F_y = 0,$$

$$F_{z'} = 2z' + y', \qquad F_{z'z'} = 2, \qquad F_{zz'} = 0, \qquad F_{tz'} = 0, \qquad F_z = 0.$$

No caso com $n = 2 > 1$ variáveis de estado, teremos 2 equações de Euler. Usando (2.27):

$$\begin{aligned}
\text{para } y: \qquad 0 &= \frac{d}{dt}F_{y'} - F_y = F_{y'y'}.y''(t) + F_{yy'}.y'(t) + F_{ty'} - F_y \\
&= 2.y''(t) + 0.y'(t) + 0 - 0 \iff y''(t) = 0 \\
\text{para } z: \qquad 0 &= \frac{d}{dt}F_{z'} - F_z = F_{z'z'}.z''(t) + F_{zz'}.z'(t) + F_{tz'} - F_z \\
&= 2.z''(t) + 0.z'(t) + 0 - 0 \iff z''(t) = 0
\end{aligned}$$

Integrando $y''(t)$ em relação a t, segue que $y'(t) = c_1$ e, integrando novamente:

$$y^*(t) = c_1 t + c_2.$$

Integrando $z''(t)$ em relação a t, segue que $z'(t) = c_3$ e, integrando novamente:

$$z^*(t) = c_3 t + c_4.$$

■

2.4 Dynamic Optimization of a Monopolist

2.4.1 [☒]

If the monopolistic firm in the Evans model faces a static linear demand ($h = 0$), what price will the firm charge for profit maximization? Call that price P_s, and check that it has the correct algebraic sign. Then compare the values of P, and $\bar{P}$, and give the particular integral in (2.36) an economic interpretation.

Considerando demanda linear estática ($h = 0$), a função lucro (2.33) é dada por

$$\pi(P) = -b(1+\alpha b)P^2 + (a + 2\alpha ab + \beta b)P - (\alpha a^2 + \beta a + \gamma). \tag{2.33'}$$

Note que o lucro não está mais em função de P'. Logo, temos a seguinte derivadas:

$$F_{P'} = 0, \qquad F_{P'P'} = 0, \qquad F_{PP'} = 0, \qquad F_{tP'} = 0, \qquad F_P = -2b(1+\alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b),$$

O objetivo do monopolista é

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \Pi[P] = \int_0^T \pi(P, P')dt \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{cases} P(0) = P_0 & (P_0 \text{ dado}) \\ P(T) = P_T & (T, P_T \text{ dados}) \end{cases} \end{aligned} \tag{2.34}$$

Por definição, a equação de Euler é dada por:

$$\pi_{P'P'}.P''(t) + \pi_{PP'}.P'(t) + \pi_{tP'} - \pi_P = 0$$

Para este problema, segue que

$$\begin{aligned} 0.P''(t) + 0.P'(t) + 0 - [-2b(1+\alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b)] &= 0 \\ 2b(1+\alpha b)P - (a + 2\alpha ab + \beta b) &= 0 \\ P_S &= \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1+\alpha b)}. \end{aligned}$$

Como $a, b, \alpha, \beta > 0$, então $P_S > 0$ e $P_S = \bar{P}$. Ou seja, sob demanda linear estática ($h = 0$), a solução do problema do monopolista é igual à solução com demanda não-estática. ■

2.4.2 [☒]

Verify that A_1, and A_2 should indeed have the values shown in (2.37).

A solução geral do problema é dada por

$$P^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \bar{P} \tag{2.36}$$

e, a partir das condições de fronteira, temos

$$P(0) = P_0 = A_1 e^{r.0} + A_2 e^{-r.0} + \bar{P} \iff A_1 = P_0 - A_2 - \bar{P} \tag{1}$$

$$P(T) = P_T = A_1 e^{rT} + A_2 e^{-rT} + \bar{P} \tag{2}$$

Substituindo A_1 de (1) em (2), segue que

$$\begin{aligned} P_T &= \left(P_0 - A_2 - \bar{P}\right) e^{rT} + A_2 e^{-rT} + \bar{P} \\ &= A_2 \left(e^{-rT} - e^{rT}\right) + P_0 e^{rT} + \bar{P}\left(1 - e^{rT}\right). \end{aligned}$$

Isolando A_2, temos

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{P_T - P_0 e^{rT} - \bar{P}\left(1 - e^{rT}\right)}{e^{-rT} - e^{rT}} \\ &= \frac{P_T - P_0 e^{rT} - \bar{P} + \bar{P} e^{rT}}{e^{-rT} - e^{rT}} \left(\frac{e^{-rT}}{e^{-rT}}\right) \\ &= \frac{P_T e^{-rT} - P_0 e^{rT-rT} - \bar{P} e^{-rT} + \bar{P} e^{rT-rT}}{e^{-rT-rT} - e^{rT-rT}} \\ &= \frac{P_T e^{-rT} - P_0 - \bar{P} e^{-rT} + \bar{P}}{e^{-2rT} - 1} \\ &= \frac{\left(P_T - \bar{P}\right) e^{-rT} - P_0 + \bar{P}}{e^{-2rT} - 1} \left(\frac{-1}{-1}\right) \\ &= \frac{P_0 - \bar{P} - \left(P_T - \bar{P}\right) e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Substituindo (3) em (1):

$$\begin{aligned} A_1 &= P_0 - \left(\frac{P_0 - \bar{P} - \left(P_T - \bar{P}\right) e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}}\right) - \bar{P} \\ &= \frac{P_0\left(1 - e^{-2rT}\right) - \left[P_0 - \bar{P} - \left(P_T - \bar{P}\right) e^{-rT}\right] - \bar{P}\left(1 - e^{-2rT}\right)}{1 - e^{-2rT}} \\ &= \frac{P_0 - P_0 e^{-2rT} - P_0 + \bar{P} + P_T e^{-rT} - \bar{P} e^{-rT} - \bar{P} + \bar{P} e^{-2rT}}{1 - e^{-2rT}} \\ &= \frac{-P_0 e^{-2rT} + P_T e^{-rT} - \bar{P} e^{-rT} + \bar{P} e^{-2rT}}{1 - e^{-2rT}} \left(\frac{e^{2rT}}{e^{2rT}}\right) \\ &= \frac{-P_0 e^{-2rT+2rT} + P_T e^{-rT+2rT} - \bar{P} e^{-rT+2rT} + \bar{P} e^{-2rT+2rT}}{e^{2rT} - e^{-2rT+2rT}} \\ &= \frac{-P_0 + P_T e^{rT} - \bar{P} e^{rT} + \bar{P}}{e^{2rT} - 1} \left(\frac{-1}{-1}\right) \\ &= \frac{P_0 - \bar{P} - \left(P_T - \bar{P}\right) e^{rT}}{1 - e^{2rT}}. \end{aligned}$$

■

2.5 Trading Off Inflation and Unemployment

2.5.1 [☒]

Verify the result in (2.46) by using Euler equation (2.18).

O problema do policymaker é dado por

$$\text{Minimizar} \quad \Lambda[\pi] = \int_0^T \lambda(\pi, \pi')e^{-\rho t}dt \tag{2.45}$$
$$\text{sujeito a} \quad \begin{cases} \pi(0) = \pi_0 & (\pi_0 > 0 \text{ dado}) \\ \pi(T) = 0 & (T \text{ dado}) \end{cases}$$

em que $e^{-\rho t}$ é o termo que traz a perda social a valor presente.

O integrando de (2.45), $F \equiv \lambda(\pi, \pi')e^{-\rho t} = \left[\left(\frac{\pi'}{\beta j}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\pi'}{j} + \pi\right)^2\right]e^{-\rho t}$, tem as primeiras derivadas:

$$F_\pi = \left[2\alpha\left(\frac{\pi'}{j} + \pi\right)(1)\right]e^{-\rho t} = 2\left(\frac{\alpha}{j}\pi' + \alpha\pi\right)e^{-\rho t}$$

$$\begin{aligned} F_{\pi'} &= \left[2\left(\frac{\pi'}{\beta j}\right)\frac{1}{\beta j} + 2\alpha\left(\frac{\pi'}{j} + \pi\right)\frac{1}{j}\right]e^{-\rho t} = 2\left(\frac{\pi'}{\beta^2 j^2} + \alpha\frac{\pi'}{j^2} + \alpha\frac{\pi}{j}\right)e^{-\rho t} \\ &= 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{\alpha}{j}\pi\right)e^{-\rho t} \end{aligned}$$

e com as segundas derivadas:

$$\begin{aligned} F_{\pi'\pi'} &= 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)e^{-\rho t} \\ F_{\pi\pi'} &= \frac{2\alpha}{j}e^{-\rho t} \\ F_{t\pi'} &= 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{\alpha}{j}\pi\right)e^{-\rho t}.\ln e.(-\rho) = -2\rho\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{\alpha}{j}\pi\right)e^{-\rho t} \end{aligned}$$

Lembre-se que a Equação de Euler tem a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}F_{y'} - F_y = 0 \tag{2.18}$$
$$F_{y'y'}.y''(t) + F_{yy'}.y'(t) + F_{ty'} - F_y = 0 \tag{2.19}$$

Logo, substituindo as derivadas parciais na equação de Euler deste problema, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)e^{-\rho t}\pi'' + \frac{2\alpha}{j}e^{-\rho t}\pi' - 2\rho\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{\alpha}{j}\pi\right)e^{-\rho t} - 2\left(\frac{\alpha}{j}\pi' + \alpha\pi\right)e^{-\rho t} \\ 0 &= 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)e^{-\rho t}\pi'' + \left[\frac{2\alpha}{j} - 2\rho\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2} - 2\frac{\alpha}{j}\right]e^{-\rho t}\pi' + \left[-2\rho\frac{\alpha}{j} - 2\alpha\right]e^{-\rho t}\pi \\ 0 &= \left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\pi'' + \left[\frac{\alpha}{j} - \rho\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2} - \frac{\alpha}{j}\right]\pi' + \left[-\rho\frac{\alpha}{j} - \alpha\right]\pi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\pi'' - \left(\rho\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\pi' - \left(\frac{\alpha(\rho+j)}{j}\right)\pi \\
0 &= \left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\left(\frac{\beta^2 j^2}{1+\alpha\beta^2}\right)\pi'' - \left(\rho\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\left(\frac{\beta^2 j^2}{1+\alpha\beta^2}\right)\pi' - \left(\frac{\alpha(\rho+j)}{j}\right)\left(\frac{\beta^2 j^2}{1+\alpha\beta^2}\right)\pi \\
0 &= \pi'' - \rho\pi' - \left(\frac{\alpha\beta^2 j(\rho+j)}{1+\alpha\beta^2}\right)\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \pi'' - \rho\pi' - \Omega\pi = 0, \qquad (2.46)
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar. ■

2.5.2 [☒]

Let the objective functional in problem (2.45) be changed to

$$\int_0^T \frac{1}{2}\lambda(\pi, \pi')e^{-\rho t}dt.$$

(a) Do you think the solution of the problem will be different?

A funcional objetiva no problema é dada por

$$\Lambda[\pi] = \int_0^T \lambda(\pi, \pi')e^{-\rho t}dt, \tag{2.45}$$

e na forma alterada, temos

$$\int_0^T \frac{1}{2}\lambda(\pi, \pi')e^{-\rho t}dt.$$

Note que o valor $1/2$ não depende de t, portanto, pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \lambda(\pi, \pi')e^{-\rho t}dt \;=\; \frac{1}{2}\Lambda[\pi].$$

Logo, o problema de minimização independe de $1/2$ e, logo, a solução será a mesma. ■

(b) Can you think of any advantage in including a coefficient $\frac{1}{2}$ in the integrand?

No exercício anterior (2.5.1), obtivemos diversos termos multiplicados por 2, logo, a inclusão de $1/2$ no integrando poderia simplificar alguns cálculos sem alterar a solução do problema (como visto no item (a) deste exercício). ■

2.5.3 [☒]

Let the terminal condition in problem (2.45) be changed to

$$\pi(T) = \pi_T \qquad (0 < \pi_T < \pi_0)$$

(a) What would be the values of A_1 and A_2?

O problema alterado do policymaker é dado por

$$\text{Minimizar} \quad \Lambda[\pi] = \int_0^T \lambda(\pi, \pi')e^{-\rho t}dt \tag{2.45'}$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{cases} \pi(0) = \pi_0 & (\pi_0 > 0 \text{ dado}) \\ \pi(T) = \pi_T & (T \text{ dado, } 0 < \pi_T < \pi_0) \end{cases}$$

em que

$$\pi'' - \rho\pi' - \Omega\pi = 0, \tag{2.46}$$

Note que a mudança para $\pi(T) = \pi_T$ não altera a solução geral do problema de minimização:

$$\pi^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \cancelto{0}{\bar{\pi}} \tag{2.47}$$

em que

$$r_1, r_2 = \frac{1}{2}\left(\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\Omega}\right). \qquad \left(\Omega \equiv \tfrac{\alpha\beta^2 j(\rho+j)}{1+\alpha\beta^2}\right)$$

Como $\Omega > 0$, então $\rho = \sqrt{\rho^2} < \sqrt{\rho^2 + 4\Omega}$ e , portanto,

$$r_1 > 0 \qquad \text{e} \qquad r_2 < 0 \tag{2.48}$$

Usando as condições de fronteira em (2.47), segue que:

$$\pi(0) = \pi_0 = A_1 + A_2 \iff A_1 = \pi_0 - A_2 \tag{1}$$
$$\pi(T) = \pi_T = A_1 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} \tag{2}$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$\begin{aligned} (\pi_0 - A_2)\, e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} &= \pi_T \\ \pi_0 e^{r_1 T} - A_2 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} &= \pi_T \\ \pi_0 e^{r_1 T} + A_2 \left(e^{r_2 T} - e^{r_1 T}\right) &= \pi_T \\ A_2 &= \frac{\pi_T - \pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_2 T} - e^{r_1 T}}. \end{aligned}$$

Substituindo A_2 em (1), obtemos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \pi_0 - \left(\frac{\pi_T - \pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_2 T} - e^{r_1 T}}\right) \\ &= \frac{\pi_0\left(e^{r_2 T} - e^{r_1 T}\right) - \pi_T + \pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_2 T} - e^{r_1 T}} \\ &= \frac{\pi_0 e^{r_2 T} - \pi_T}{e^{r_2 T} - e^{r_1 T}}. \end{aligned}$$

■

(b) Can you unambiguously evaluate the signs of A_1 and A_2?

Como $0 < \pi_T < \pi_0$, $r_1 > 0$, $r_2 < 0$ e $T > 0$, então

$$r_1 T > 0 \qquad \text{e} \qquad r_2 T < 0,$$

e

$$e^{r_1 T} > 0 \qquad \text{e} \qquad e^{r_2 T} > 0.$$

Note que, quando T cresce, $r_2 T$ se torna um número cada vez mais negativo e, portanto, $e^{r_2 T} \to 0$. Já, quando $T \to 0$, temos que $e^{r_2 T} \to 1$. Logo,

$$0 < e^{r_1 T} < 1.$$

Agora, observe que, quando T aumenta, $r_1 T$ e $e^{r_1 T}$ também aumentam. Quando $T \to 0$, temos que $r_1 T \to 0$ e, logo, $e^{r_1 T} \to 1$. Portanto,

$$e^{r_1 T} > 1.$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} e^{r_1 T} - e^{r_2 T} &> 0, \quad \text{e} \\ \pi_0 e^{r_1 T} - \pi_T &> 0. \qquad \text{(pois } 0 < \pi_t < \pi_0 < \pi_0 e^{r_1 T}\text{)} \end{aligned}$$

Logo,

$$A_2 = \frac{\overbrace{\pi_0 e^{r_1 T} - \pi_T}^{>0}}{\underbrace{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}}_{>0}} > 0$$

$$A_1 = \frac{\overbrace{\pi_T - \pi_0 e^{r_2 T}}^{?}}{\underbrace{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}}_{>0}} \begin{cases} > 0, & \text{se } \pi_T/\pi_0 > e^{r_2 T}; \\ = 0, & \text{se } \pi_T/\pi_0 = e^{r_2 T}; \\ < 0, & \text{se } \pi_T/\pi_0 < e^{r_2 T}. \end{cases}$$

Portanto, conseguimos apenas avaliar o sinal de A_1, enquanto o sinal de A_2 depende da relação entre π_T/π_0 e $e^{r_2 T}$. ■

3 Transversality Conditions for Variable-Endpoints Problems

3.0 [☒] Definições, Proposições, Lemas e Observações

Condição de Transversalidade - TVC (?).

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T} .\Delta T + [F_{y'}]_{t=T} .\Delta y_T = 0 \tag{3.9}$$

Linha Terminal Vertical (?). Envolve T fixo (logo, $\Delta T = 0$) e δy_t é arbitrário. Portanto, a condição de transversalidade (3.9) se reduz a

$$[F_{y'}]_{t=T} = 0. \tag{3.10}$$

Linha Horizontal Vertical (?). Envolve y_T fixo (logo, $\Delta y_T = 0$) e ΔT é arbitrário. Portanto, a condição de transversalidade (3.9) se reduz a

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T} = 0. \tag{3.11}$$

Curva Terminal (?). Com uma curva terminal $y_t = \phi(T)$, temos que y_T e T não são fixos e $\Delta y_T = \phi'\Delta T$. Portanto, a condição de transversalidade (3.9) se reduz a

$$[F + (\phi'y')F_{y'}]_{t=T} = 0. \tag{3.12}$$

Linha Terminal Vertical Truncada (?). Quando a linha vertical terminal é truncada, em que há um nível mínimo de y permitido (y_{min}), a solução ótima pode ocorrer quando $y_T^* > y_{min}$ ou $y_T^* = y_{min}$. A condição de transversalidade é dada por:

$$[F_{y'}]_{t=T} \leq 0 \qquad y_T^* \geq y_{min} \qquad (y_T^* - y_{min})\,[F_{y'}]_{t=T} = 0 \qquad (3.17 \text{ – p/ max } V)$$
$$[F_{y'}]_{t=T} \geq 0 \qquad y_T^* \geq y_{min} \qquad (y_T^* - y_{min})\,[F_{y'}]_{t=T} = 0 \qquad (3.17\text{' – p/ min } V)$$

Linha Terminal Vertical Truncada (?). Quando a linha horizontal terminal é truncada, em que há um tempo máximo permitido (T_{max}), a solução ótima pode ocorrer quando $T^* < T$ ou $T^* = T$. A condição de transversalidade é dada por:

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T} \geq 0 \qquad T^* \leq T_{max} \qquad (T^* - T_{max})\,[F - y'F_{y'}]_{t=T} = 0 \qquad (3.18 \text{ – p/ max } V)$$
$$[F - y'F_{y'}]_{t=T} \leq 0 \qquad T^* \leq T_{max} \qquad (T^* - T_{max})\,[F - y'F_{y'}]_{t=T} = 0 \qquad (3.18\text{' – p/ max } V)$$

3.2 Specialized Transversality Conditions

3.2.1 [☒]

For the functional $V[y] = \int_0^T (t^2 + y'^2)dt$, the general solution to the Euler equation is $y^*(t) = c_1 t + c_2$ (see Exercise 2.2, Prob. 1).

(a) Find the extremal if the initial condition is $y(0) = 4$ and the terminal condition is $T = 2$, y_T free.

Note que se trata de um caso de linha terminal vertical, com $T = 2$ e y_T livre. Como T fixo, logo $\Delta T = 0$.

Por definição, a condição de transversalidade (TVC) é dada por:

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T} .\Delta T + [F_{y'}]_{t=T} .\Delta y_T = 0 \tag{3.9}$$

Como $\Delta T = 0$ e y_T é livre, então a TVC se reduz a

$$[F_{y'}]_{t=T} = 0. \tag{3.10}$$

Da funcional $V[y]$, temos $F = t^2 + y'^2$, logo

$$F_{y'} = 2y'. \tag{2}$$

De (3.10) e (2), em $t = T = 2$, temos:

$$[2y']_{t=2} = 0 \iff 2y' = 0 \iff y' = 0. \tag{3}$$

Do enunciado, temos que $y^*(t) = c_1 t + c_2$, então, derivando em t,

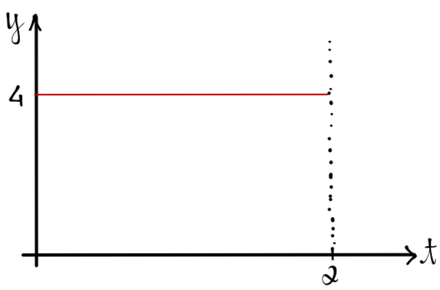
$$(y^*)' = c_1 \overset{(3)}{\iff} c_1 = 0.$$

Logo, $y^* = c_2$ e, como sabemos que $y(0) = 4$, segue que $c_2 = 4$ e, portanto,

$$y^* = 4.$$

■

(b) Sketch a diagram showing the initial point, the terminal point, and the extremal.



3.2.2 [☒]

How will the answer to the preceding problem change, if the terminal condition is altered to: $T = 2$, $y_T \geq 3$?

No exercícios anterior, encontramos $y^* = 4, \forall t$. Logo, no estágio terminal $T = 2$, temos

$$y(T = 2) = 4,$$

que respeita $y_{min} = 3$, já que $y_T = 4 \geq 3 = y_{min}$. ■

3.2.3 [☒]

Let the terminal condition in Prob. 1 be changed to: $y_T = 5$, T free.

(a) Find the new extremal. What is the optimal terminal time T^*?

Neste caso, temos linha horizontal terminal com T livre e y_T fixo. Por definição, a TVC é dada por:

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T}\,.\Delta T + [F_{y'}]_{t=T}\,.\Delta y_T = 0 \tag{3.9}$$

Como $\Delta y_T = 0$ e T é livre, então a TVC se reduz a

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T} = 0. \tag{1}$$

Relembre que a funcional do problema é

$$V[y] = \int_0^T (t^2 + y'^2)dt,$$

em que $F = t^2 + y'^2$ e $F_{y'} = 2y'$. Aplicando F e $F_{y'}$ em (1) temos

$$\begin{aligned}\left(T^2 + y'^2\right) - y'\,(2y') &= 0\\ T^2 + y'^2 - 2y'^2 &= 0\\ T^2 - y'^2 &= 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Do exercício 1, temos

$$y^*(t) = c_1 t + c_2 \implies y' = c_1. \tag{3}$$

Usando (3) em (2):

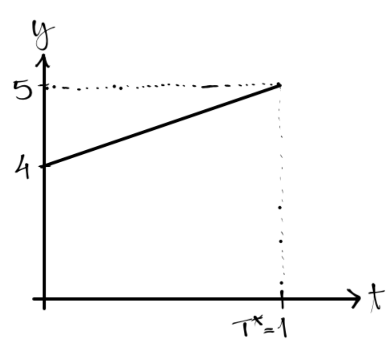
$$T^2 - c_1^2 = 0 \iff T = c_1.$$

Usando as condições de fronteira, segue

$$\begin{aligned}y(0) = 4 = c_1.0 + c_2 &\iff c_2 = 4\\ y(T) = 5 = c_1.\cancel{T}^{\,c_1} + \cancel{c_2}^{\,4} &\iff c_1^2 = 1 \iff c_1 = 1 = T^*. \qquad (T > 0)\end{aligned}$$

■

(b) Sketch a diagram showing the initial point, the terminal line, and the extremal.



3.3 Three Generalizations

3.3.1 [☒]

For the functional $V[y] = \int_0^T \left(y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2\right)$, the general solution of the Euler equation is $y^*(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_2$ (see Exercise 2.2, Prob. 3). If we have a vertical initial line at $t = 0$ and a vertical terminal line at $t = 1$, write out the transversality conditions, and use them to definitize the constants in the general solution.

Note que temos um problema com estágios inicial ($t_0 = 0$) e final ($T = 1$) fixos, e com estados inicial e terminal variáveis:

$$\Delta t_0 = 0 \quad \text{e} \quad \Delta T = 0, \qquad y_{t_0}, y_T \text{ livres.}$$

Da funcional, temos

$$F = y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2 \implies F_{y'} = y + 1 + y', \tag{1}$$

e, da solução geral,

$$y^*(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_2 \implies y'(t) = t + c_1. \tag{2}$$

Por definição, a condição de transversalidade (TVC) é dada por:

$$\left[F - y'F_{y'}\right]_t .\Delta T + \left[F_{y'}\right]_t .\Delta y_T = 0 \tag{3.9}$$

Como apenas os estágios inicial e terminal são fixos, e os estados são livres, precisamos utilizar 2 TVC's: uma para $t_0 = 0$ e outra para $T = 1$. Lembrando que $\delta t_0 = \Delta T = 0$, as condições de transversalidade se reduzem a:

$$\left[F_{y'}\right]_{t=t_0} = 0 \tag{A1}$$

$$\left[F_{y'}\right]_{t=T} = 0 \tag{B1}$$

Usando t_0 e $T = 1$ em (2), segue que

$$y(0) = c_2 \qquad \text{e} \qquad y'(0) = c_1 \tag{A2}$$

$$y(1) = \frac{1}{2} + c_1 + c_2 \qquad \text{e} \qquad y'(1) = 1 + c_1 \tag{B2}$$

Usando (A2) e (B2) em $F_{y'}$, segue que:

$$\underline{\text{para } t_0}: \qquad c_1 + c_2 + 1 = 0 \iff c_2 = -1 - c_1 \tag{A3}$$

$$\underline{\text{para } T}: \qquad (1 + c_1) + \left(\frac{1}{2} + c_1 + c_2\right) + 1 = 0 \tag{B3}$$

Substituindo c_2 de (A3) na expressão (B3), temos

$$1 + c_1 + \frac{1}{2} + c_1 + (-1 - c_1) + 1 = 0 \iff c_1 = -\frac{3}{2},$$

logo,

$$c_2 = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a solução geral é dada por:

$$y^*(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}.$$

■

3.3.2 [⊠]

Let the vertical initial line in the preceding problem be truncated with the restriction $y^*(0) \geq 1$, but keep the terminal line unchanged.

(a) Is the original solution still acceptable? Why?

Não, pois a solução anterior assume $y^*(0) = 1/2$, o que contradiz a restrição, pois

$$y^*(0) = 1/2 \not\geq 1 = y_{min}.$$

(b) Find the new extremal.

No estado terminal, T continua fixo e y_T livre, logo a TVC é a mesma:

$$[F_{y'}]_{t=T} = 0 \tag{B1}$$

Para t_0, agora temos y_{t_0} truncado, ou seja, $y^*_{t_0} \geq y_{min}$. Logo, a TVC é dada por:

$$[F_{y'}]_{t=t_0} \geq 0 \qquad y^*_{t_0} \geq y_{min} \qquad \left(y^*_{t_0} - y_{min}\right)[F_{y'}]_{t=t_0} = 0 \tag{A1}$$

Note que, da funcional, temos

$$F = y + yy' + y' + \frac{1}{2}y'^2 \implies F_{y'} = y + 1 + y', \tag{1}$$

e, da solução geral,

$$y^*(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_2 \implies y'(t) = t + c_1. \tag{2}$$

Assim, usando t_0 e $T = 1$ em (2), segue que

$$y(0) = c_2 \qquad \text{e} \qquad y'(0) = c_1 \tag{A2}$$

$$y(0) = \frac{1}{2} + c_1 + c_2 \qquad \text{e} \qquad y'(1) = 1 + c_1 \tag{B2}$$

Aplicando (B2) em (1), segue para $T = 1$:

$$(1 + c_1) + \left(\frac{1}{2} + c_1 + c_2\right) + 1 = 0 \iff c_2 = -\frac{5}{2} - 2c_1 \tag{B3}$$

Note que, para satisfazer a TVC no estágio inicial (A1), temos que

$$[F_{y'}]_{t=t_0} = 0 \tag{A3}$$

$$\text{ou} \qquad y^*_{t_0} - y_{min} = 0. \tag{A4}$$

<u>Verificando $[F_{y'}]_{t=t_0} = 0$:</u> (igual do exercício anterior.) Usando (A2) em (1), temos:

$$c_2 + 1 + c_1 = 0 \implies c_1 = -1 - c_2 \tag{A3.1}$$

Substituindo (A3.1) em (B3), segue que

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{5}{2} - 2(-1 - c_2) \\ -c_2 &= -\frac{5}{2} + 2 \\ c_2 &= \frac{1}{2} \implies y^*(0) = c_2 = \frac{1}{2} \ngeq 1 \end{aligned}$$

Portanto, não satisfaz a TVC em (A1). Então, precisamos verificar o outro caso.

Verificando $y^*_{t_0} - y_{min} = 0 \iff y^*(0) = y_{min} = 1$: De (A2), segue que

$$y^*(0) = y_{min} = 1 = c_2 \iff c_2 = 1 \tag{A4.1}$$

Logo, aplicando (A4.1) em (B3):

$$1 = -\frac{5}{2} - c_1 \iff c_2 = -\frac{7}{2} \tag{A4.2}$$

Portanto, usando (A4.1) e (A4.1) na solução geral (2), obtemos:

$$y^*(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{7}{2}t + 1.$$

Note que vale $y^*(0) = 1 \geq 1 = y_{min}$. ■

3.4 The Optimal Adjustment of Labor Demand

3.4.1 [☒]

(a) From the two transversality conditions (3.34) and (3.35), deduce the location of the optimal terminal state L_T^* with reference to Fig. 3.4.

Seja a função lucro, $\pi(L)$, com $\pi''(L) < 0$, como na Figura 3.4:

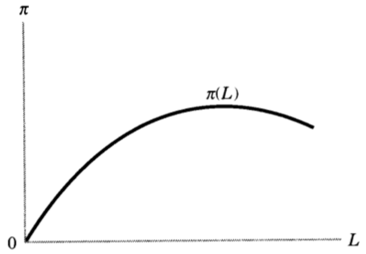


FIGURE 3.4

O problema de maximização é dado por:

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & \Pi[L] = \displaystyle\int_0^T \left[\pi(L) - bL'^2 - k\right]^{\rho t} dt + \frac{1}{\rho}\pi(L_T)e^{-\rho T} \\ \text{sujeito a} & \begin{cases} P(0) = L_0 & (L_0 \text{ dado}) \\ P(T) = L_T & (L_T > L_0 \text{ livre}, T \text{ livre}) \end{cases} \end{array} \tag{3.30}$$

Temos a seguinte equação de Euler:

$$L'' - \rho L' + \frac{\pi'(L)}{2b} = 0. \tag{3.33}$$

Como ambos L_T e T são livres, precisamos satisfazer ambas condições de transversalidade em $t = T$:

- $[F_{L'}]_{t=T} = 0$, ou seja,
$$L' - \frac{\pi'(L)}{2\rho b} = 0. \tag{3.34}$$

- $[F - L'F_{L'}]_{t=T} = 0$, ou seja,
$$L'^2 = \frac{k}{b} \quad \Longleftrightarrow \quad L' = \sqrt{\frac{k}{b}}. \tag{3.35}$$

Substituindo (3.35) em (3.34), temos:

$$\sqrt{\frac{k}{b}} - \frac{\pi'(L_T)}{2\rho b} = 0 \iff \pi'(L_T) = 2\rho b\sqrt{\frac{k}{b}} = 2\rho\sqrt{kb}$$

Como, por suposição do problema, $\rho, b > 0$ e $k > 0$ quando $L' \neq 0$, então

$$\pi'(L_T^*) = 2\rho\sqrt{kb} > 0.$$

Portanto, L_T^* deve estar localizado na parte crescente da curva $\pi(L)$, ou seja, ‘q esquerda do ponto máximo da Figura 3.4. ■

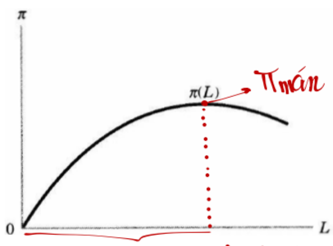


FIGURE 3.4

onde L_T^* deve estar localizado

(b) How would an increase in p affect the location of L_T^*? How would an increase in b or k affect L_T^*?

Como ρ, k e b afetam positivamente $\pi'(L_T^*)$, aumentos nestas variáveis faz com que L_T^* diminua, já que os pontos com menores L (mais à esquerda do π_{max} – ver figura 3.4) possuem maiores inclinações. ■

(c) Interpret the economic meaning of your result in (b).

Note que a função custo de ajuste no fator de trabalho, L, é dada por

$$C(L') = bL^2 + k, \tag{3.29}$$

na qual temos que aumentos em b e em k elevam o custo de ajuste em L, o que faz com que o lucro líquido e o trabalho diminuam.

Já um aumento em ρ, a taxa de desconto, dá maior peso para o lucro em períodos mais próximos do presente. Assim, o tomador de decisão tenderá a aumentar menos os custos com fator de trabalho que, diminuindo o trabalho e o lucro líquido. ■

3.4.2 [⊠]

In the preceding problem, let the profit function be

$$\pi(L) = 2mL - nL^2 \qquad (0 < n < m)$$

(a) Find the value of L_T^*.

Do problema (como visto no exercício anterior), temos, em $t = T$,

$$L' - \frac{\pi'(L)}{2\rho b} = 0. \tag{3.34}$$

e

$$L'^2 = \frac{k}{b} \iff L' = \sqrt{\frac{k}{b}}, \tag{3.35}$$

logo,

$$\pi'(L_T) = 2\rho\sqrt{kb}. \tag{1}$$

Do enunciado, para $t = T$, segue que

$$\pi(L) = 2mL - nL^2 \qquad (0 < n < m)$$
$$\implies \pi'(L) = 2m - 2nL \tag{2}$$

Aplicando (1) em (2), obtemos

$$2\rho\sqrt{bk} = 2m - 2nL_T \iff L_T^* = \frac{m - \rho\sqrt{bk}}{n}.$$

■

(b) At what L value does π reach a peak?

Para que π atinja um ponto máximo, precisamos:

$$\pi'(L) = 0 \quad \text{e} \quad \pi''(L) < 0.$$

Logo,

$$\pi'(L) = 2m - 2nL = 0 \iff L = \frac{m}{n}$$
$$\pi''(L) = -2n < 0 \iff n > 0.$$

Portanto, π atinge ponto máximo quando $L = \frac{m}{n}$, com $n > 0$. ■

(c) In light of (b), what can you say about the location of L_T^* in relation to the $\pi(L)$ curve?

Como $\rho, b, k > 0$, então

$$L_T^* = \frac{m - \rho\sqrt{bk}}{n} < L_{max} = \frac{m}{n}, \qquad (\text{dado } m - \rho\sqrt{bk} < m)$$
$$\pi'(L_T^*) = 2m - 2n\left(\frac{m - \rho\sqrt{bk}}{n}\right) = 2m - 2m + 2\rho\sqrt{bk} > 0.$$

Portanto, L_T^* está à esquerda de L_{max}, ou seja, na parte em que $\pi'(L) > 0$ (crescente). ■

3.4.3 [☒]

(a) From the transversality condition (3.35), deduce the location of the optimal terminal time T^* with reference to a graph of the solution path $L^*(t)$.

Do problema, temos a TVC, em $t = T$:

$$L'^2 = \frac{k}{b} \quad \Longleftrightarrow \quad L' = \sqrt{\frac{k}{b}}, \tag{3.35}$$

em que consideramos a raiz quadrada positiva, porque L deve crescer entre L_0 e L_T. (?)

■

(b) How would an increase in k affect the location of T^*? How would an increase in b affect T^*?

Integrando L' em relação a T, temos

$$\int L' dT = \int \sqrt{\frac{k}{b}} dT = T\sqrt{\frac{k}{b}} + c = L^*(T), \qquad c \text{ constante.}$$

Em $t = T$, temos

$$L^*(T^*) = T^*\sqrt{\frac{k}{b}} + c \quad \Longleftrightarrow \quad T^* = (L^* - c)\sqrt{\frac{b}{k}}.$$

Portanto, um aumento em k diminui ambos $\sqrt{b/k}$ e T^*. Um aumento em b aumenta ambos $\sqrt{b/k}$ e T^*. Isto tem sentido econômico, pois, da expressão do custo

$$C(L') = bL'^2 + k,$$

notamos que k corresponde ao custo fixo. Então, quanto maior for o k, maior será o custo $C(L')$ e, portanto, menor a firma em contratar trabalho e menor o T^*.

Por outro lado, b é um custo de ajustamento de L. Como a firma não conhece o número de períodos t, então a firma pode reduzir o custo de ajustamento elevando o T^*. ■