4 Lista 4

4.0 [☒] Definições, Proposições, Lemas e Observações

Teorema de Benveniste-Scheinkman. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, $V > X \to \mathbb{R}$ côncava, $x_0 \in int(X)$ e D uma vizinhança de x_0. Se existe uma função diferenciável $W : X \to X \to \mathbb{R}$ com $W(x_0) = C(x_0)$ e $W(x) \leq V(x)$ para todo $x \in D$, então V é diferenciável em x_0, e

$$\partial_i V(x_0) = \partial_i W(x_0), \qquad i = 1, 2, ..., n$$

em que ∂_i é a derivada parcial em relação à i-ésima coordenada.

Definição 59 (Krueger, 2017). Uma distribuição $\Pi \in \mathbb{R}^N_+$ que satisfaz

$$\Pi = \pi'\Pi \iff \Pi'\pi = \Pi'$$

é chamada de uma distribuição estacionária associada com a matriz de Markov π.

Teorema 60 (Krueger, 2017). Dada uma matriz de Markov, π, existe pelo menos uma distribuição estacionária.

Teorema 2.2.1 (Ljungqvist & Sargent, 2018). Seja π uma matriz estocástica, com $\pi_{i,j} > 0, \forall i, j$. Então, π possui uma única distribuição estacionária.

Teorema 2.2.2 (Ljungqvist & Sargent, 2018). Seja π uma matriz estocástica e $\pi^n = \pi \times \pi \times ... \times \pi$ (n vezes). Se $\pi^n_{i,j} > 0, \forall i, j$, então π possui uma única distribuição estacionária.

Modelo de Crescimento Neoclássico Estocástico.

- <u>Tecnologia</u>: $y_t = e^{z_t} F(k_t, n_t)$
  - Choque tecnológico $z \in Z = \{z_1, z_2, ..., z_N\}$ com média 0 e N estados.
  - Seja π a matriz de transição de Markov e Π a distribuição estacionária.
- <u>Preferências</u>:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \qquad \beta \in (0, 1)$$

Formulação Recursiva do Problema com Incerteza.

$$\begin{aligned} v(k, z) &= \max_{0 \leq k' \leq e^z F(k,1) + (1-\delta)k} \{U(c) + \beta \mathbb{E}_{z'} [v(k', z')]\} \\ &= \max_{0 \leq k' \leq e^z F(k,1) + (1-\delta)k} \left\{ U(e^z F(k, 1)(1 - \delta)k - k') + \beta \sum_{z'} \pi(z'|z) v(k', z') \right\} \end{aligned}$$

em que:

- $n = 1$: pessoas não valorizam lazer

- $F(k,n) = k^\alpha n^{1-\alpha} \overset{n=1}{\rightsquigarrow} k^\alpha$
- $c = e^z F(k,n) + (1-\delta)k - k' \overset{n=1}{\rightsquigarrow} e^z F(k,1)(1-\delta)k - k'$
- $\mathbb{E}_{z'}\left[v(\,k', z'\,)\right] = \sum_{z'} \pi(z'|z)v(k',z')$

Formulação Recursiva do Problema com Incerteza e Escolha de Trabalho.

$$
\begin{aligned}
v(k,z) &= \max_{\substack{0 \le k' \le e^z F(k,n) + (1-\delta)k \\ 0 \le n \le 1}} \left\{ U(c,\ell) + \beta \mathbb{E}_{z'}\left[v(\,k', z'\,)\right] \right\} \\
&= \max_{\substack{0 \le k' \le e^z F(k,n) + (1-\delta)k \\ 0 \le n \le 1}} \left\{ U(e^z F(k,1)(1-\delta)k - k',\ \ell) + \beta \sum_{z'} \pi(z'|z)v(k',z') \right\}
\end{aligned}
$$

em que:

- $U(c,\ell) = U(c, 1-n)$: pessoas valorizam lazer, então decidem o quanto irão trabalhar

---

4.1 [☒]

Considere um consumidor de vida infinita que tem uma renda constante, y, a cada período. Este consumidor encara o seguinte problema.

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$\text{s.a } c_t + a_{t+1} \leq y + (1+r_t)a_t \quad \forall\, t, \quad a_0 > 0 \text{ dado},$$

em que, para cada período t, a_t representa a riqueza do consumidor, c_t é o consumo, r_t é a taxa de juros e $\beta \in (0,1)$. Suponha que o consumidor conhece $\{r_t\}_{t=0}^{\infty}$ e que $u(c) = c^{1-\sigma}/(1-\sigma)$ com $\sigma > 0$ e $\sigma \neq 1$.

(a) Escreva o problema recursivo do consumidor.

O problema recursivo é dado por:

$$\begin{aligned} v(a) &= \max_{c,a'} \{u(c) + \beta v(a')\} \\ &= \max_{c,a'} \left\{ \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta v(a') \right\} \\ &= \max_{a'} \left\{ \frac{1}{1-\sigma} \left[y + (1+r)a - a'\right]^{1-\sigma} + \beta v(a') \right\} \qquad (c = y + (1+r)a - a') \end{aligned}$$

(b) Encontre a equação de Euler associada ao problema do consumidor.

Por CPO:

$$\begin{aligned} [a'] : \quad 0 &= \frac{1}{1-\sigma}(1-\sigma)\left[y + (1+r)a - a'\right]^{-\sigma}(-1) + \beta v'(a') \\ &= -\left[y + (1+r)a - a'\right]^{-\sigma} + \beta v'(a') \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Usando o Teorema de Benveniste-Scheinkman, obtemos

$$\begin{aligned} v'(a) &= \frac{1}{1-\sigma}(1-\sigma)\left[y + (1+r)a - a'\right]^{-\sigma}(1+r) \\ &= (1+r)\left[y + (1+r)a - a'\right]^{-\sigma} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Usando $a = a_t, a' = a_{t+1}$ e $r = r_t$, avançando um período em (4.1.2) e aplicando em (4.1.1):

$$\begin{aligned} 0 &= -\left[y + (1+r_t)a_t - a_{t+1}\right]^{-\sigma} + \beta(1+r_{t+1})\left[y + (1+r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2}\right]^{-\sigma} \\ \beta(1+r_{t+1}) &= \left(\frac{y + (1+r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2}}{y + (1+r_t)a_t - a_{t+1}} \right)^{\sigma}, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

e obtemos a equação de Euler. ■

(c) Mostre que se $\beta = (1+r_{t+1})^{-1}$, então $c_{t+1} = c_t$.

Aplicando $\beta = (1 + r_{t+1})^{-1}$ em (4.1.3), segue que:

$$\begin{aligned}
(1 + r_{t+1})^{-1}(1 + r_{t+1}) &= \left(\frac{y + (1 + r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2}}{y + (1 + r_t)a_t - a_{t+1}}\right)^{\sigma} \\
1^{\frac{1}{\sigma}} &= \left(\frac{y + (1 + r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2}}{y + (1 + r_t)a_t - a_{t+1}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma}} \\
1 &= \frac{y + (1 + r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2}}{y + (1 + r_t)a_t - a_{t+1}}.
\end{aligned}$$

Usando $c_t = y + (1 + r_t)a_t - a_{t+1}$, temos

$$1 = \frac{c_{t+1}}{c_t} \iff c_t = c_{t+1},$$

como queríamos demonstrar. ■

(d) O que ocorre com o consumo se $\beta > (1 + r_{t+1})^{-1}$? e se $\beta < (1 + r_{t+1})^{-1}$?

- Se $\beta > (1 + r_{t+1})^{-1}$, então o lado esquerdo de (4.1.3) será maior do que 1 e, portanto, no lado direito, precisamos que $c_{t+1} > c_t$. Logo, o consumo crescerá no período seguinte.
- Se $\beta < (1 + r_{t+1})^{-1}$, então o lado esquerdo de (4.1.3) será menor do que 1 e, portanto, no lado direito, precisamos que $c_{t+1} < c_t$. Logo, o consumo diminuirá no período seguinte.

■

(e) Escreva os passos de um algoritmo para computar a solução do problema recursivo do consumidor.

---

1. Defina um grid $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ para as riquezas.
2. Defina a função utilidade do modelo: $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$, com $\sigma > 0$ e $\sigma \neq 1$.
3. Estabeleça os valores para parâmetros: β, y e $\{r_t\}_{t=0}^{\infty}$
4. Defina vetores para guardar as funções valor e política: V, TV e g_a. Note que cada um desses vetores têm dimensão $m \times 1$. Coloque valores de zeros em todos os vetores. Usaremos V, em que $V(a) = 0, \forall a$, como chute inicial para nossa iteração.
5. Estabeleça um critério de convergência para a iteração da função valor: $\varepsilon \sim 0$ e positivo.
6. Para cada $a \in \mathbb{A}$, calcule
$$TV(a) = \max_{a' \in \mathbb{A}} \left\{ \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta V(a') \right\}, \qquad \text{s.a. } 0 \leq a' \leq y + (1 + r)a$$
Guarde $g_a(a) = a'$ que resolvem o problema acima
7. Calcule a distância $D = \max |TV - V|$ e atualize $V \equiv TV$.
8. Se $D > \varepsilon$, volte para o passo 6. Caso contrário, pare.

■

4.2 [⊠]

Considere uma ilha (economia) com uma única árvore de Lucas.

- **Os frutos (chamados de dividendos pelos habitantes da ilha) que crescem na árvore são a única fonte de consumo.**
- **Esses frutos seguem o seguinte processo estocástico:**
  - $d_{t+1} = \gamma d_t$ **com probabilidade** π **ou** $d_{t+1} = d_t$ **(com probabilidade** $(1-\pi)$**).**
  - **se em um dado período** T **temos que** $d_T = d_{T-1}$ **então para todo** $t > T$ **vale que** $d_t = d_T$**.**

Existe uma massa unitária de pessoas iguais nessa ilha com preferências sobre um fluxo de consumo dadas por

$$U = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t),$$

em que $u(c) = c^{1-\sigma}/(1-\sigma)$**. Suponha que** $\sigma > 0$**,** $\sigma \neq 1$**,** $0 < \beta < 1$**,** $\gamma > 1$ **e que** $\beta\gamma^{1-\sigma} < 1$**.**

(a) Escreva o problema recursivo de um agente representativo.

Além do consumo a cada período, c_t, o agente escolhe a fração de árvores, s_t, que deseja comprar. Então, o problema é dado por

$$\max_{\{c_t, s_{t+1}\}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathbb{E}[u(c_t)] \right\}, \qquad \text{s.a. } c_t + s_{t+1}p_t \leq (p_t + d_t)s_t, \text{ dado } s_0 \tag{4.2.1}$$

A partir dele, podemos obter o problema na forma recursiva:

$$\max_{s',c} \{u(c) + \beta \mathbb{E}[V(s', d')]\}, \qquad \text{s.a. } c + p(d)s' \leq [p(d) + d]s.$$

■

(b) Defina um equilíbrio competitivo recursivo para essa economia.

Definição (Equilíbrio Competitivo Recursivo): Um equilíbrio competitivo recursivo para a economia descrita é uma coleção de funções $\{V, g, p\}$, em que V é uma função valor do problema recursivo, g é função política e p é a função preço, tais que:

(i) Dada a função preço p, a função valor V e a função política resolvem o problema recursivo de programação dinâmica do consumidor.

(ii) Os mercados se equilibram com $g(s,d) = 1$, para todo par (s,d)

Note que, pela condição (ii), temos que $s = s' = 1$. Portanto, pela restrição orçamentária de fluxo, temos:

$$c + p(x).1 = [p(x) + x].1 \implies c = x, \tag{4.2.2}$$

ou seja, no equilíbrio competitivo recursivo, todo dividendo é consumido. ■

(c) Encontre a condição de primeira ordem do problema do agente representativo e, utilizando a condição de equilíbrio, escreva a equação a apreçamento do ativo.

Resolveremos o problema pela forma sequencial (4.2.1). Considerando $u'' < 0 < u'$ e aplicando $c_t = (p_t + d_t)s_t - s_{t+1}p_t$, obtemos:

$$\max_{s_{t+1}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathbb{E}[u((p_t + d_t)s_t - s_{t+1}p_t)] \right\}$$

Note que, no somatório acima, há dois termos que possuem s_{t+1}:

$$... + \beta^t \mathbb{E}[u((p_t + d_t)s_t - s_{t+1}p_t)] + \beta^{t+1}\mathbb{E}[u((p_{t+1} + d_{t+1})s_{t+1} - s_{t+2}p_{t+1})] + ...$$

Logo, por CPO:

$$\begin{aligned}
[s_{t+1}]: \qquad 0 &= -\beta^t \mathbb{E}\left[u'(c_t)p_t\right] + \beta^{t+1}\mathbb{E}\left[u'(c_{t+1})(p_{t+1} + d_{t+1})\right] \\
\beta^t \mathbb{E}\left[u'(c_t)p_t\right] &= \beta^{t+1}\mathbb{E}\left[u'(c_{t+1})(p_{t+1} + d_{t+1})\right] \\
p_t &= \frac{\beta^{t+1}}{\beta^t} . \frac{\mathbb{E}\left[u'(c_{t+1})(p_{t+1} + d_{t+1})\right]}{\mathbb{E}[u'(c_t)]} \\
p_t &= \beta \mathbb{E}\left[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}(p_{t+1} + d_{t+1})\right].
\end{aligned}$$

Pela condição de equilíbrio $c_t = d_t$ (4.2.2), segue que

$$p_t = \beta \mathbb{E}\left[\frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)}(p_{t+1} + d_{t+1})\right]. \tag{4.2.3}$$

■

(d) Escreva os preços de equilíbrio como uma função dos dividendos.

Usaremos o método "guess-and-verify". Suponha que a função preço seja uma proporção do dividendo e dependa de seu estado no processo estocástico ($d_{t+1} = \gamma d_t$ ou $d_{t+1} = \gamma d_t$):

$$p_t = \begin{cases} p_s d_t, & \text{se } d_t = d_{t-1} \\ p_g d_t, & \text{se } d_t = \gamma d_{t-1} \end{cases} \qquad (p_s \text{ e } p_g \text{ constantes})$$

Logo, se em um período tivermos $d_t = d_{t-1}$, sabemos que $d_{t+1} = d_t$. Note que

$$u(d_t) = \frac{d_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

e, portanto,

$$u'(d_t) = (1-\sigma)\frac{d_t^{1-\sigma-1}}{1-\sigma} = d_t^{-\sigma}.$$

Assim,

$$\frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)} = \left(\frac{d_{t+1}}{d_t}\right)^{-\sigma}. \tag{4.2.4}$$

Aplicando (4.2.4) em (4.2.3) e lembrando que este é o caso em que $d_t = d_{t-1}$, segue que

$$\begin{aligned}
p_t &= \beta\left[\left(\frac{d_{t+1}}{d_t}\right)^{-\sigma}(p_{t+1}+d_{t+1})\right] && (\text{tira } \mathbb{E} \text{ pois caso único } d_t = d_{t+1})\\
p_t &= \beta\left[1^{-\sigma}(p_{t+1}+d_{t+1})\right] && (d_t = d_{t+1})\\
p_s d_t &= \beta(p_s d_t + d_t) && (p_t = p_s d_t)\\
p_s d_t &= \beta(p_s+1)d_t\\
p_s &= \beta p_s + \beta\\
p_s(1-\beta) &= \beta\\
p_s &= \frac{\beta}{1-\beta}. && (4.2.5)
\end{aligned}$$

Se $d_t = \gamma d_{t-1}$, então, no valor esperado, consideraremos possíveis transições para os casos $d_{t+1} = d_t$ e $d_{t+1} = \gamma d_t$. Segue que

$$\begin{aligned}
p_t &= \beta\left[\underbrace{\pi\left(\frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)}(p_{t+1}+d_{t+1})\right)}_{\text{caso } d_{t+1}=\gamma d_t} + \underbrace{(1-\pi)\left(\frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)}(p_{t+1}+d_{t+1})\right)}_{\text{caso } d_{t+1}=d_t}\right]\\
p_g d_t &= \beta\left[\pi\left(\frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)}(p_g d_{t+1}+d_{t+1})\right) + (1-\pi)\left(\frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)}(p_s d_t+d_{t+1})\right)\right]\\
&\qquad (p_t = p_g d_t \text{ ou } p_t = p_s d_t)\\
p_g d_t &= \beta\left[\pi\left(\left(\frac{d_{t+1}}{d_t}\right)^{-\sigma}(p_g d_{t+1}+d_{t+1})\right) + (1-\pi)\left(\left(\frac{d_{t+1}}{d_t}\right)^{-\sigma}(p_s d_t+d_{t+1})\right)\right]\\
&\qquad (\text{usando } 4.2.4)\\
p_g d_t &= \beta\left[\pi\left(\left(\frac{d_{t+1}}{d_t}\right)^{-\sigma}(p_g d_{t+1}+d_{t+1})\right) + (1-\pi)\left(1^{-\sigma}(p_s d_t+d_t)\right)\right]\\
&\qquad (d_{t+1} = d_t)\\
p_g d_t &= \beta\left[\pi\left(\left(\frac{d_{t+1}}{d_t}\right)^{-\sigma}(p_g d_{t+1}+d_{t+1})\right) + (1-\pi)\left(\frac{\beta}{1-\beta}d_t+d_t\right)\right]\\
&\qquad (\text{usando } 4.2.5)\\
p_g d_t &= \beta\left[\pi\left(\gamma^{-\sigma}(p_g\gamma d_t+\gamma d_t)\right) + (1-\pi)\left(\frac{\beta}{1-\beta}+1\right)d_t\right]\\
&\qquad \left(d_{t+1} = \gamma d_t \iff \tfrac{d_{t+1}}{d_t} = \gamma\right)\\
p_g &= \beta\left[\pi\gamma^{-\sigma}(p_g\gamma+\gamma) + (1-\pi)\left(\frac{\beta}{1-\beta}+1\right)\right]\\
p_g &= \beta\pi\gamma^{1-\sigma}(p_g+1) + \beta(1-\pi)\left(\frac{\beta+1-\beta}{1-\beta}\right)\\
p_g - (\beta\pi\gamma^{1-\sigma})p_g &= \beta\pi\gamma^{1-\sigma} + \frac{\beta(1-\pi)}{1-\beta}\\
p_g &= \frac{1}{1-\beta\pi\gamma^{1-\sigma}}\left(\beta\pi\gamma^{1-\sigma} + \frac{\beta(1-\pi)}{1-\beta}\right).
\end{aligned}$$

Dado que encontramos as constantes p_s e p_g, o palpite da função preço está correta. ■

(e) Seja T o primeiro período tal que $d_{T-1} = d_T$. Vale $p_{T-1} > p_T$? Encontre condições para que isto seja verdade. Interprete os resultados.

Note que p_{T-1} é o preço enquanto ainda $d_t = d_{t-1}$ e a partir de p_T estamos no caso em que $d_t = d_{t-1}$, ou seja, estas funções preço correspondem a $p_g d_t$ e $p_s d_t$, respectivamente. Portanto, basta encontrar as condições para que $p_g > p_s$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\beta\pi\gamma^{1-\sigma}}\left(\beta\pi\gamma^{1-\sigma} + \frac{\beta(1-\pi)}{1-\beta}\right) &> \frac{\beta}{1-\beta} \\
\frac{1}{1-\beta\pi\gamma^{1-\sigma}}\left(\pi\gamma^{1-\sigma} + \frac{(1-\pi)}{1-\beta}\right) &> \frac{1}{1-\beta} \\
\frac{1}{1-\beta\pi\gamma^{1-\sigma}}\left(\frac{(1-\beta)\pi\gamma^{1-\sigma} + (1-\pi)}{1-\beta}\right) &> \frac{1}{1-\beta} \\
\frac{(1-\beta)\pi\gamma^{1-\sigma} + (1-\pi)}{1-\beta\pi\gamma^{1-\sigma}} &> 1 \\
(1-\beta)\pi\gamma^{1-\sigma} + (1-\pi) &> 1-\beta\pi\gamma^{1-\sigma} \\
\pi\gamma^{1-\sigma} + (1-\pi) &> 1 \\
\gamma^{1-\sigma} &> \frac{1-(1-\pi)}{\pi} \\
\gamma^{1-\sigma} &> 1 \\
\gamma &> 1.
\end{aligned}$$

Para valer $p_{T-1} > p_T$, precisamos de $\gamma > 1$ (como suposto inicialmente), ou seja, quando vale $d_{t+1} = \gamma d_t$, há crescimento dos dividendos. ■

4.3 [☒]

Seja a Matriz estocástica

$$M = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.30 & 0.40 & 0.10 \\ 0.10 & 0.10 & 0.70 & 0.10 \\ 0.95 & 0.024 & 0.025 & 0.001 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

(a) Defina a distância entre duas matrizes como a soma do quadrado das diferenças entre cada entrada das matrizes. No Python, defina uma distribuição inicial

$$P_0 = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25),$$

ache o k, tal que a distancia entre P^{k+1} e P^k seja menor do que 10^{-7}.

Usando Definição 59 (Krueger, 2017), encontraremos a distribuição de probabilidade P que satisfaz $P'\pi = \Pi'$. Faremos iterações até a distância entre P^{k+1} e P^k ser menor do que 10^{-7}.

```
# Construindo a matriz de Makov e a distribuição inicial
P_it = [np.array([0.25, 0.25, 0.25, 0.25])]

pi = np.array([[0.200, 0.300, 0.400, 0.100],
               [0.100, 0.100, 0.700, 0.100],
               [0.950, 0.024, 0.025, 0.001],
               [0.250, 0.250, 0.250, 0.250]])

# Estabelecendo par metros
tol_norma = 1e-7
norma = np.inf  # Apenas para entrar no loop
it = 0

# Realizando iterações até dist ncia de P_t e P_{t+1} ser menor do que 10^{-7}
while norma > tol_norma:
    it += 1

    P = np.dot(P_it[it - 1], pi)
    P_it.append(P)

    norma = np.sum((P - P_it[it - 1]) ** 2)
    print("Iteração {}: com norma = {:.7f}".format(it, norma))

print("Distribuição estacionária:", np.round(P_it[it], 4))
```

```
Distribuição estacionária: [0.4266 0.1731 0.3199 0.0804]
```

(b) Reporte a distribuição invariante de M. Há mais do que uma?

A distribuição invariante da matriz de Markov M é dada por

$$P^{ss} = \begin{bmatrix} 0.4266 & 0.1731 & 0.3199 & 0.0804 \end{bmatrix}$$

Se a distribuição invariante for única, usando o Teorema 2.2.1 (Ljungqvist & Sargent, 2018), cada elemento da matriz de Markov, $M_{i,j}, \forall i, j$, deve ser estritamente maior do que zero.

```python
# Verificar se existe algum 0 na matriz de Markov
qtd_zeros = 0
for p in range(len(pi)):
    for q in range(len(pi[0])):
        if pi[p, q] == 0:
            qtd_zeros += 1

if qtd_zeros == 0:
    print("A distribuição estacionária é única, pois todos elemento na matriz",
          "de Markov é estritamente maior do que zero.")
else:
    print("A distribuição estacionária não é única, pois há", qtd_zeros,
          "elemento(s) igual(is) a zero na matriz de Markov.")
```

```
A distribuição estacionária é única, pois todos elemento na matriz de Markov é
    estritamente maior do que zero.
```

Como nenhuma entrada na matriz de Markov M é 0 e não é necessário verificar em M^n. Porém, para praticar, faremos a verificação em M^n, usando o Teorema 2.2.2 (Ljungqvist & Sargent, 2018), em que cada elemento de $M^n_{i,j} > 0, \forall i, j$, se a distribuição invariante for única.

```python
# Calculando a matriz de Markov elevada a n
pi_it = [pi]
tol_norma = 1e-7
norma = np.inf
it = 0

while norma > tol_norma:
    it += 1
    pi_novo = np.dot(pi_it[it - 1], pi)
    pi_it.append(pi_novo)
    norma = np.sum((pi_it[it] - pi_it[it - 1]) ** 2)
    print("Iteração {}: com norma = {:.7f}".format(it, norma))

print(np.round(pi_it[it], 4))
```

```
Iteração 1: com norma = 1.6061799
...
Iteração 11: com norma = 0.0000000

[[0.4266 0.1731 0.3199 0.0804]
 [0.4267 0.1731 0.3199 0.0804]
 [0.4266 0.1731 0.3199 0.0804]
 [0.4266 0.1731 0.3199 0.0804]]
```

```python
# Verificar se existe algum 0 na matriz de Markov iterada
qtd_zeros = 0
for p in range(len(pi_it[it])):
    for q in range(len(pi_it[it])):
        if pi[p, q] == 0:
            qtd_zeros += 1

if qtd_zeros == 0:
    print("A distribuição estacionária é única, pois todos elemento na matriz",
          "de Markov é estritamente maior do que zero.")
else:
    print("A distribuição estacionária não é única, pois há", qtd_zeros,
          "elemento(s) igual(is) a zero na matriz de Markov.")
```

```
A distribuição estacionária é única, pois todos elemento na matriz de Markov é
    estritamente maior do que zero.
```

■

4.4 [⊠]

Suponha que o planejador deseja maximizar

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left(c_t, l_t\right)\right\}, \quad 0<\beta<1$$

sujeito a restrição de recursos

$$c_t+k_{t+1}=z_t f\left(k_t, l_t\right)+(1-\delta) k_t, \quad 0<\delta<1$$

com condições iniciais $k_0>0$ e $z_0>0$. A produtividade z_t evolui de acordo com um processo de Markov com probabilidade de transição $F\left(z^{\prime} \mid z\right)=\operatorname{Prob}\left[z_{t+1} \leq z^{\prime} \mid z_t=z\right]$ e média incondicional $\bar{z}>0$.

Neste problema o planejador escolhe quanto trabalho l_t ofertar. Assuma que $u\left(c_t, l_t\right)$ é estritamente crescente e estritamente côncava em c_t, e é estritamente decrescente e estritamente convexa em l_t. A função de produção $f\left(k_t, l_t\right)$ é estritamente crescente e estritamente côncava em ambos argumentos e tem retornos constantes de escala.

(a) Seja $v(k, z)$ a função valor do planejador. Escreva e explique a equação de Bellman que determina $v(k, z)$.

Note que, neste modelo, as probabilidades de transição de um estado z para z' seguem uma distribuição de probabilidade com a c.d.f. $F(z'|z)$ (diferente da seção 6.4 de Krueger (2017) que é discretizado). Logo, ao invés calcular o valor esperado pela soma dos valores de $v(k', z')$ ponderados pelas probabilidades de transição de k para o estado k', integraremos $v(k', z')$ pela distribuição $F(z'|z)$. Portanto,

$$\begin{aligned} v(k,z) &= \max_{\substack{0\leq k'\leq zf(k,l)+(1-\delta)k \\ 0\leq l\leq 1}} \left\{U(c,l)+\beta\mathbb{E}_{z'}\left[v(\, k', z'\,)\right]\right\} \\ &= \max_{\substack{0\leq k'\leq zf(k,l)+(1-\delta)k \\ 0\leq l\leq 1}} \left\{U(zf(k,l)(1-\delta)k-k',\ l)+\beta\int v(k',z')dF(z'|z)\right\}. \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Esta equação de Bellman inclui não apenas o estoque de capital k que o planejador traz para o período corrente, mas também o estado da tecnologia z. Ainda, o trabalhador decidirá o quanto irá trabalhar, dado que, além do consumo, valoriza também o lazer. Logo, para maximizar a expressão, o planejador irá escolher ambos capital do período seguinte k' e quantidade de trabalho l. ■

(b) Derive as condições de otimalidade do problema do planejador.

Estratégia da Prova:

- Seção 6.4.1 de Krueger (2017) ou Notas de aula

Por CPO, a partir da equação de Bellman (4.4.1), temos

$$[\,l\,]: \qquad 0 = U_c(c,l)zf_l(k,l) + U_l(c,l) \tag{4.4.2}$$

$$[k']: \qquad 0 = U_c(c,l)(-1) + \beta \int v_k(k',z')dF(z'|z) \tag{4.4.3}$$

em que os subscritos indicam as derivadas parciais. A condição (4.4.2) pode ser reescrita como:

$$-\frac{U_l(c,l)}{U_c(c,l)} = zf_l(k,l). \tag{4.4.4}$$

Esta é a condição de otimalidade intratemporal que postula que, no ótimo, o planejador equaciona a taxa marginal de substituição entre trabalho e consumo em relação ao produto marginal do trabalho (Krueger, 2017, pág. 133).

Usando Teorema de Benveniste-Scheinkman (condição de envelope), segue que

$$v_k(k,z) = U_c(c,l)[zf_k(k,l) + (1-\delta)]. \tag{4.4.5}$$

Usando os índices temporais k' e z' em (4.4.5) e aplicando em (4.4.3), obtemos a equação de Euler intertemporal:

$$U_c(c,l) = \beta \int U_c(c',l')[zf_k(k',l') + (1-\delta)]dF(z'|z), \tag{4.4.6}$$

tal que a restrição de recursos é dada por

$$c + k' = zf(k,l) + (1-\delta)k. \tag{4.4.7}$$

Portanto, as condições de otimalidade são dadas por: condição de otimalidade intratemporal (4.4.4), equação de Euler intertemporal (4.4.6) e restrição de recursos (4.4.7), em que o planejador escolhe c, l e k', dado os estados k, z. ■

(c) Suponha que

$$u(c,l) = \log c - \frac{l^{1+\varphi}}{1+\varphi}, \quad \varphi > 0$$

e

$$f(k,l) = k^\alpha l^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Encontre os valores de steady state não estocástico de consumo, capital e trabalho em termos dos parâmetros do modelo. Suponha que existe um aumento permanente no nível de produtividade $\bar{z}$. Explique como isto muda os valores de estado estacionário do consumo, capital e trabalho. Dê uma intuição econômica para seus resultados.

Estratégia da Prova:

- Calcular as derivadas parciais e aplicá-las nas condições de otimalidade encontradas.
- Como as relações de estado estacionário $c = c' = \bar{c}$, $l = l' = \bar{l}$ e $k = k' = \bar{k}$, e, como é não-estocástico, $z = z' = \bar{z}$.
- Encontrar as relações $\bar{k}/\bar{l}$, $\bar{y}/\bar{l}$, $\bar{k}/\bar{y}$, $\bar{c}/\bar{y}$ e $\bar{l}$.
- Verificar como um choque em $\bar{z}$ afeta $\bar{c}$, $\bar{k}$ e $\bar{l}$.

Primeiro, usando as funções $U(c,l)$ e $f(k,l)$ dadas, calcularemos as derivadas parciais utilizadas no item (c):

$$U_c(c,l) = {}^1\!/_c \qquad \text{e} \qquad U_l(c,l) = (1+\varphi)\frac{l^{1+\varphi-1}}{(1+\varphi)} = l^\varphi$$

$$f_l(k,l) = (1-\alpha)k^\alpha l^{-\alpha} = (1-\alpha)\left(\frac{k}{l}\right)^\alpha \qquad \text{e} \qquad f_k(k,l) = \alpha k^{\alpha-1}l^{1-\alpha} = \alpha\left(\frac{k}{l}\right)^{\alpha-1}.$$

Aplicando as derivadas parciais em (4.4.4) e (4.4.6), e aplicando $f(k,l)$ em (4.4.7), obtemos:

$$-\frac{l^\varphi}{{}^1\!/_c} = z(1-\alpha)\left(\frac{k}{l}\right)^\alpha \iff cl^\varphi = z(1-\alpha)\left(\frac{k}{l}\right)^\alpha \tag{4.4.4'}$$

$$\frac{1}{c} = \beta\int\frac{1}{c'}\left[z'\alpha\left(\frac{k'}{l'}\right)^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]dF(z'|z) \tag{4.4.6'}$$

$$c + k' = zk^\alpha l^{1-\alpha} + (1-\delta)k. \tag{4.4.7'}$$

No estado estacionário não-estocástico, não há incerteza, então $z = z' = \bar{z}$. Além disso, no estado estacionário, temos que $c = c' = \bar{c}$, $l = l' = \bar{l}$ e $k = k' = \bar{k}$. Portanto, as três condições de otimalidade são dadas por:

$$\bar{c}\bar{l}^\varphi = \bar{z}(1-\alpha)\left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^\alpha \tag{4.4.4''}$$

$$\frac{1}{\bar{c}} = \beta\int\frac{1}{\bar{c}}\left[\bar{z}\alpha\left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]dF(\bar{z}|\bar{z}) \iff 1 = \beta\left[\bar{z}\alpha\left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^{\alpha-1} + (1-\delta)\right] \tag{4.4.6''}$$

$$\bar{c} + \bar{k} = \bar{z}\bar{k}^\alpha\bar{l}^{1-\alpha} + (1-\delta)\bar{k} \iff \bar{c} + \delta\bar{k} = \bar{z}\bar{k}^\alpha\bar{l}^{1-\alpha} = \bar{z}f(\bar{k},\bar{l}) \equiv \bar{y} \tag{4.4.7''}$$

A partir de (4.4.6"), a razão capital/trabalho é dada por:

$$\frac{1}{\beta} - (1-\delta) = \bar{z}\alpha\left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^{\alpha-1}$$

$$\frac{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}{\bar{z}\alpha} = \left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^{\alpha-1}$$

$$\frac{\bar{z}\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} = \left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^{1-\alpha} \qquad \text{(elevado a } -1\text{)}$$

$$\left(\frac{\bar{z}\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{\bar{k}}{\bar{l}}. \tag{4.4.8}$$

em que $\rho \equiv {}^1\!/_\beta - 1$. Logo, aplicando ${}^{\bar{k}}\!/_{\bar{l}}$ em (4.4.7"), obtemos a razão output/trabalho:

$$\bar{y} = \bar{z}\bar{k}^\alpha\bar{l}^{1-\alpha} = \bar{z}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^\alpha\bar{l}$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{l}} = \bar{z}\left[\left(\frac{\bar{z}\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^\alpha = \bar{z}^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \qquad \text{(usando 4.4.8)}$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{l}} = \bar{z}^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{4.4.9}$$

E a razão capital/output é dada por:

$$\frac{\bar{k}}{\bar{y}} = \frac{\bar{k}/\bar{l}}{\bar{y}/\bar{l}} = \frac{\left(\frac{\bar{z}\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\bar{z}^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} = \frac{\alpha}{\rho+\delta}, \tag{4.4.10}$$

que não depende de $\bar{z}$. Da restrição de recursos (4.4.7”), obtemos a razão consumo/output:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{c}+\delta\bar{k}}{\bar{y}} &= 1\\ \frac{\bar{c}}{\bar{y}} &= 1-\frac{\delta\bar{k}}{\bar{y}} = 1-\delta\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right),\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

que também não depende de $\bar{z}$. De (4.4.4”), segue que

$$\begin{aligned}\bar{c}\bar{l}^{\varphi} &= \bar{z}(1-\alpha)\left[\left(\frac{\bar{z}\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^{\alpha}\\
\bar{c}\bar{l}^{\varphi} &= (1-\alpha)\bar{z}^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\\
\bar{c}\bar{l}^{\varphi} &= (1-\alpha)\bar{z}^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\\
\bar{c}\bar{l}^{\varphi} &= (1-\alpha)\frac{\bar{y}}{\bar{l}} && \text{(usando (4.4.9))}\\
\bar{l}^{1+\varphi} &= (1-\alpha)\frac{\bar{y}}{\bar{c}} = \frac{(1-\alpha)}{\bar{c}/\bar{y}}\\
\bar{l}^{1+\varphi} &= \frac{(1-\alpha)}{1-\delta\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)} && \text{(usando (4.4.11))}\\
\bar{l}^{1+\varphi} &= \frac{(1-\alpha)}{\left(\frac{\rho+\delta-\delta\alpha}{\rho+\delta}\right)}\\
\bar{l}^{1+\varphi} &= \frac{(1-\alpha)(\rho+\delta)}{\rho+\delta(1-\alpha)}\\
\bar{l} &= \left[\frac{(1-\alpha)(\rho+\delta)}{\rho+\delta(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{1+\varphi}}, && (4.4.12)\end{aligned}$$

que é novamente independente de $\bar{z}$. Portanto,

- um aumento permanente em $\bar{z}$ não altera a quantidade de trabalho $\bar{l}$;
- como, em (4.4.9), $\bar{y}/\bar{l}$ é crescente em $\bar{z}$, e $\bar{l}$ não depende de $\bar{z}$, então $\bar{y}$ é crescente em $\bar{z}$; e
- como, em (4.4.11), $\bar{c}/\bar{y}$ é independente de $\bar{z}$, mas sabemos que $\bar{y}$ é crescente em $\bar{z}$, então $\bar{c}$ deve crescer na mesma proporção que $\bar{y} \implies \bar{c}$ é crescente em $\bar{z}$.
- como, em (4.4.10), $\bar{k}/\bar{y}$ é independente de $\bar{z}$, mas sabemos que $\bar{y}$ é crescente em $\bar{z}$, então $\bar{k}$ deve crescer na mesma proporção que $\bar{y} \implies \bar{k}$ é crescente em $\bar{z}$. ■

(d) Suponha que os possíveis valores de z_t são $\mathscr{Z} = \{0.8, 1, 1.2\}$ e que a matriz de transição é dada por

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.5 & 0.3 \\ 0.10 & 0.6 & 0.3 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{pmatrix}.$$

Sejam $\alpha = 0.3, \beta = 1/1.05, \delta = 0.05, \varphi = 1$. Escreva um código Python para calcular a função valor e funções políticas. Use um grid para o capital entre 0 e 100.[3]

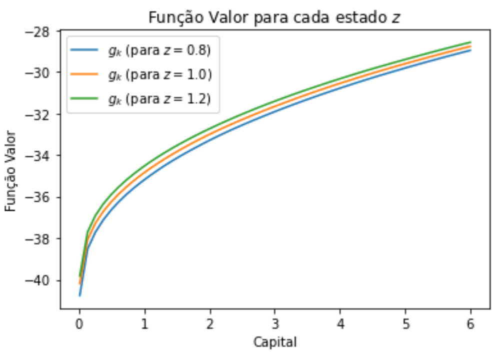
```python
# Definição dos par metros
k_grid = np.linspace(0.01, 6, 51)
n_k = len(k_grid)
alpha = 0.3
beta = 1 / 1.05
delta = 0.05
phi = 1
n_grid = np.linspace(0, 1, 11)
# n_grid = np.array([1/4, 2/4, 3/4, 1])
n_n = len(n_grid)
z_grid = np.array([0.8, 1.0, 1.2])
n_z = len(z_grid)
pi = np.array([[0.20, 0.50, 0.30],
               [0.10, 0.60, 0.30],
               [0.25, 0.25, 0.50]])


# Criando lista de listas para incluir funções valor e política
# Note que, num modelo que considera incerteza, teremos uma função para cada z
v_it = [np.zeros((n_k, n_z))]
gk_it = [np.zeros((n_k, n_z))]
gn_it = [np.zeros((n_k, n_z))]


# Estabelecendo variáveis para realizar os loops
tol_norma = 1e-5  # Dist ncia entre funções máxima para considerar converg ncia
tol_it = 500  # Número máximo de iterações (caso não convirja antes)
norma = np.inf  # Valor apenas para entrar no loop
it = 0  # N  iterações (antes utilizamos n - agora usado para trabalho)


while norma > tol_norma and it < tol_it:
    it += 1  # Atualizando o número da iteração

    # Criando objetos para preencher com funções objetivo, valor e política
    f_obj = np.zeros((n_k, n_z, n_k, n_n))  # Lista com n_k matrizes n_k x z
    Tv = np.zeros((n_k, n_z))
    gn = np.zeros((n_k, n_z))
    gk = np.zeros((n_k, n_z))

    for i_k, k in enumerate(k_grid):
        for i_z, z in enumerate(z_grid):
            for i_kk, kk in enumerate(k_grid):
                for i_n, n in enumerate(n_grid):
                    c = z*(k**alpha * n**(1 - alpha)) + (1 - delta)*k - kk
                    if c > 0:
                        Ev = np.dot(pi[i_z,:], v_it[it - 1][i_kk,:])
                        f_obj[i_k, i_z, i_kk, i_n] = log(c) - (n**(1 + phi) / 1 + phi) + beta*Ev
                    else:
                        f_obj[i_k, i_z, i_kk, i_n] = -np.inf

```

[3] Usar o zero para capital não é uma boa ideia.

```
            # Preenchida uma matriz kk x n, encontrar elemento que maximiza
            indice_max = np.argmax(f_obj[i_k, i_z])
            indice_gk = indice_max // n_n  # Divisão Inteira - Índice de k'
            indice_gn = indice_max % n_n  # Resto da Divisão - Índice de n

            Tv[i_k, i_z] = np.max(f_obj[i_k, i_z])
            gk[i_k, i_z] = indice_gk
            gn[i_k, i_z] = indice_gn


    # Após preencher totalmente gk e gn, trocar índices pelos valores nos grids
    for p in range(len(gk)):
        for q in range(len(gk[0])):
            gk[p, q] = k_grid[int(gk[p, q])]
            gn[p, q] = n_grid[int(gn[p, q])]

    v_it.append(Tv)
    gk_it.append(gk)
    gn_it.append(gn)

    norma = np.max(abs(v_it[it] - v_it[it - 1]))
    print('A iteração {} terminou com norma igual a {:.5f}'.format(it,norma))
```

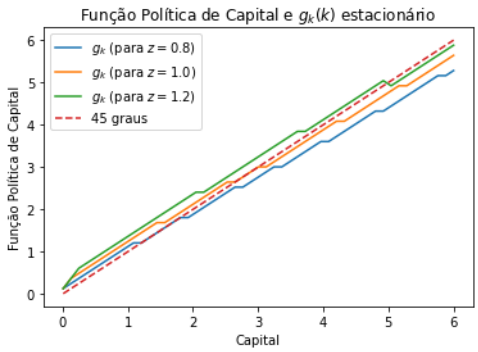
```
A iteração 1 terminou com norma igual a 3.32584
A iteração 2 terminou com norma igual a 2.94468
(...)
A iteração 247 terminou com norma igual a 0.00001
A iteração 248 terminou com norma igual a 0.00001
```

```
""" Visualização Gráfica da Função Valor """
fig, ax = plt.subplots()

# Inclusão de cada função valor no gráfico
ax.plot(k_grid, v_it[it][:,0], label='$g_k$ (para $z = 0.8)')
ax.plot(k_grid, v_it[it][:,1], label='$g_k$ (para $z = 1.0)')
ax.plot(k_grid, v_it[it][:,2], label='$g_k$ (para $z = 1.2)')

# Legendas
ax.set_xlabel('Capital')
ax.set_ylabel('Função Política')
ax.set_title('Função Política e $g(k)$ estacionário')
ax.legend()
```

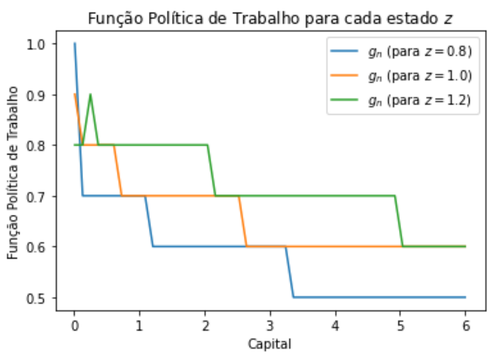



```
""" Visualização Gráfica da Função Política do Capital """
fig, ax = plt.subplots()

# Inclusão de cada função valor no gráfico
ax.plot(k_grid, gk_it[it][:,0], label='$g_k$ (para $z = 0.8)')
ax.plot(k_grid, gk_it[it][:,1], label='$g_k$ (para $z = 1.0)')
ax.plot(k_grid, gk_it[it][:,2], label='$g_k$ (para $z = 1.2)')
ax.plot(k_grid, k_grid, '--', label='45 graus')
```

```python

# Limites do gráfico
# ax.set_ylim([4.5, 6])  # tamanho mínimo e máximo vertical
# ax.set_xlim([4.5, 6])  # tamanho mínimo e máximo horizontal

# Legendas
ax.set_xlabel('Capital')
ax.set_ylabel('Função Política')
ax.set_title('Função Política e $g(k)$ estacionário')
ax.legend()

plt.show()
```




```python
""" Visualização Gráfica da Função Política do Trabalho """
fig, ax = plt.subplots()

# Inclusão de cada função valor no gráfico
ax.plot(k_grid, gn_it[it][:,0], label='$g_n$ (para $z = 0.8)')
ax.plot(k_grid, gn_it[it][:,1], label='$g_n$ (para $z = 1.0)')
ax.plot(k_grid, gn_it[it][:,2], label='$g_n$ (para $z = 1.2)')

# Legendas
ax.set_xlabel('Capital')
ax.set_ylabel('Função Política')
ax.set_title('Função Política e $g(k)$ estacionário')
ax.legend()
```




```python
""" Cálculo dos capitais estocásticos """
for i_z, z in enumerate(z_grid):
    i_k = 0
    loop = 0
    # Achar índice do capital estacionário
    while k_grid[i_k] != gk_it[it][i_k, i_z] and loop < 100:  # até termos k = k'
        i_k = np.where(k_grid == gk_it[it][i_k, i_z])[0][0]  # Aplica o índice de k' em k
        loop += 1  # Inserido por loops infinitos próximo ao k estacionário

    print('O capital estacionário para z = {} é {:.3f}'.format(z, k_grid[i_k]))
```

```
O capital estacionário para z = 0.8 é 1.208
O capital estacionário para z = 1.0 é 2.646
O capital estacionário para z = 1.2 é 5.042
```