Flujo en Redes

Algoritmos y Estructuras de Datos III

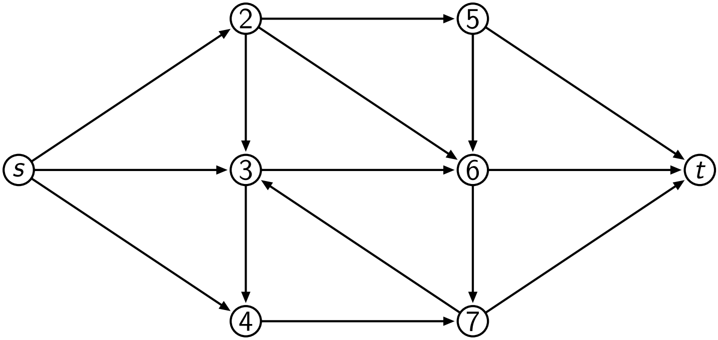
Flujo en Redes

Definiciones:

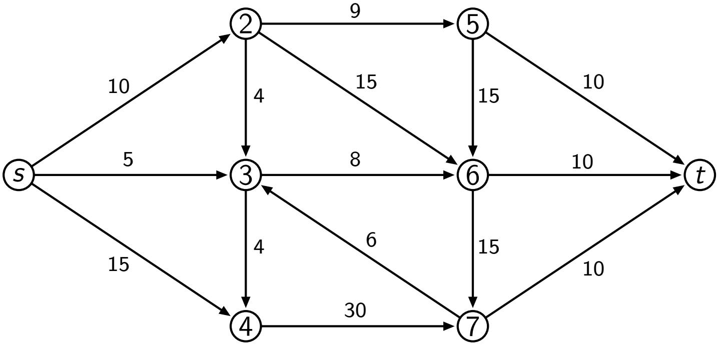
- Una red $N = (V, X)$ es un grafo orientado conexo que tiene dos nodos distinguidos una fuente s, con grado de salida positivo y un sumidero t, con grado de entrada positivo.

- Una función de capacidades en la red es una función $c : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Flujo en Redes



Flujo en Redes



Flujo en Redes

Definiciones:

- Un **flujo factible** en una red $N = (V, X)$ con función de capacidad c, es una función $f : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ que verifica:
  1. $0 \leq f(e) \leq c(e)$ para todo arco $e \in X$.
  2. Ley de conservación de flujo:

  $$\sum_{e \in In(v)} f(e) = \sum_{e \in Out(v)} f(e)$$

  para todo nodo $v \in V \setminus \{s, t\}$, donde

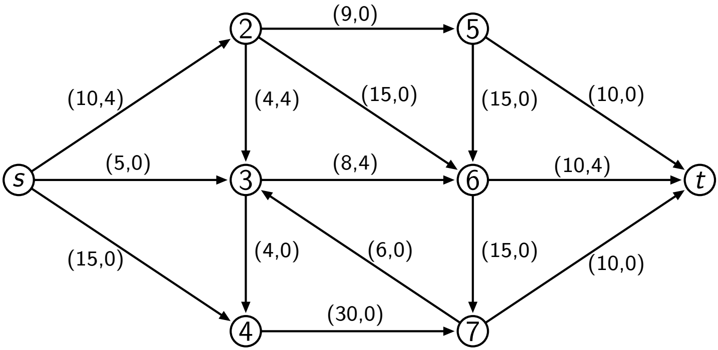
  $$In(v) = \{e \in X, e = (w \to v), w \in V\}$$

  $$Out(v) = \{e \in X, e = (v \to w), w \in V\}$$

- El **valor del flujo** es $F = \sum_{e \in In(t)} f(e) - \sum_{e \in Out(t)} f(e)$.

Flujo en Redes

$$F = 4$$



Flujo en Redes

Problema: Determinar el flujo de valor máximo F que se puede definir en una red $N = (V, X)$.

Aplicaciones

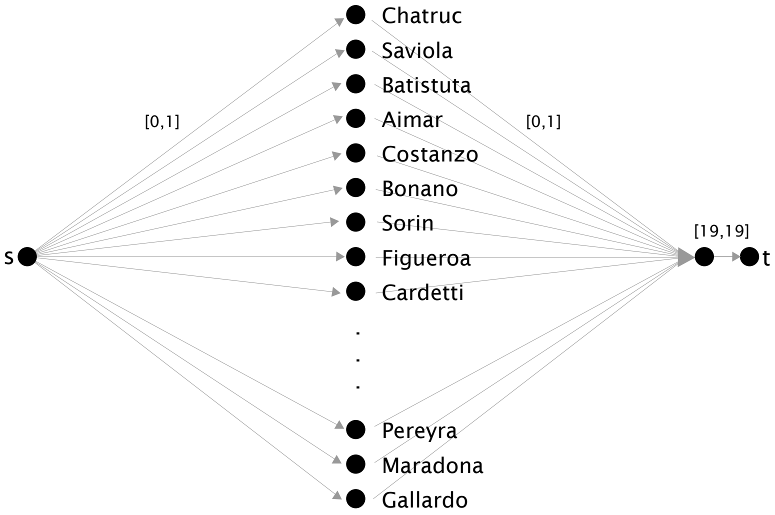
El problema de flujo máximo se puede usar para modelar problemas de:

- transporte de mercadería (logística)
- flujo de gases y líquidos por tuberías
- flujo de componentes o piezas en líneas de montaje
- flujo de corriente en redes eléctricas
- flujo de paquetes de información en redes de comunicaciones
- tráfico ferroviario, etc.

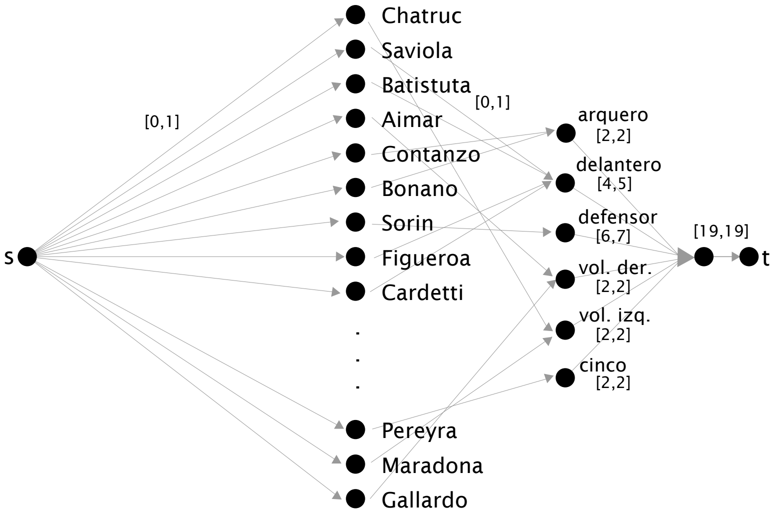
Ejemplo

El Coco Basile quiere armar un equipo para jugar el mundial de fútbol categoría veteranos. Para eso escribió una lista con sus 40 jugadores favoritos, de los cuales debe elegir los 19 convocados para el próximo encuentro. Necesita 2 arqueros, entre 4 y 5 delanteros, entre 6 y 7 defensores, 2 volantes por izquierda, 2 volantes por derecha y 2 cincos. Por otra parte, los clubes donde juegan el torneo veteranos no están dispuestos a ceder a la "selección" más de dos jugadores. Modelar el problema del Coco como un problema de flujo.

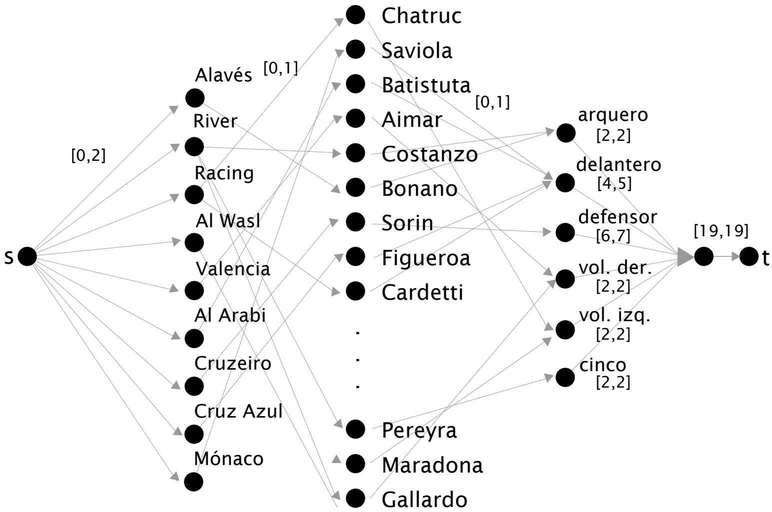
Primer aproximación... elegir 19 jugadores



Agregamos las posiciones



Agregamos las restricciones de los clubes



Definiciones:

- Un corte en la red $N = (V, X)$ es un subconjunto $S \subseteq V \setminus \{t\}$, tal que $s \in S$.

- Dados $S, T \subseteq V$, $ST = \{(u \to v) \in X : u \in S \text{ y } v \in T\}$

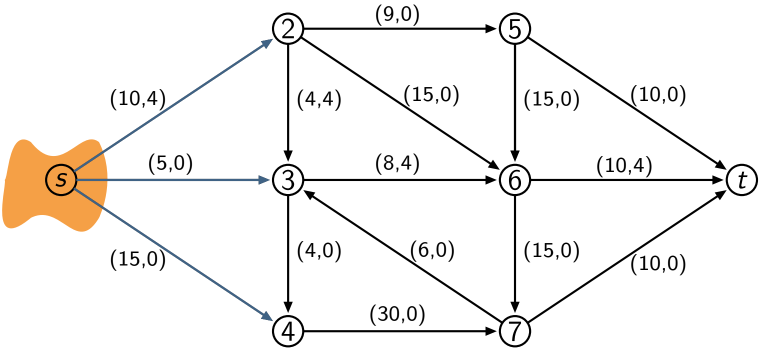
Proposición: Sea f un flujo definido en una red $N = (V, X)$ y sea S un corte, entonces

$$F = \sum_{e \in S\bar{S}} f(e) - \sum_{e \in \bar{S}S} f(e)$$

donde $\bar{S} = V \setminus S$.

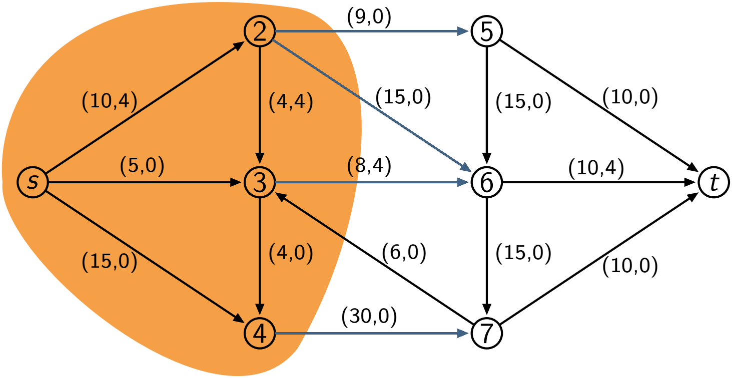
Flujo en Redes

$$F = 4$$



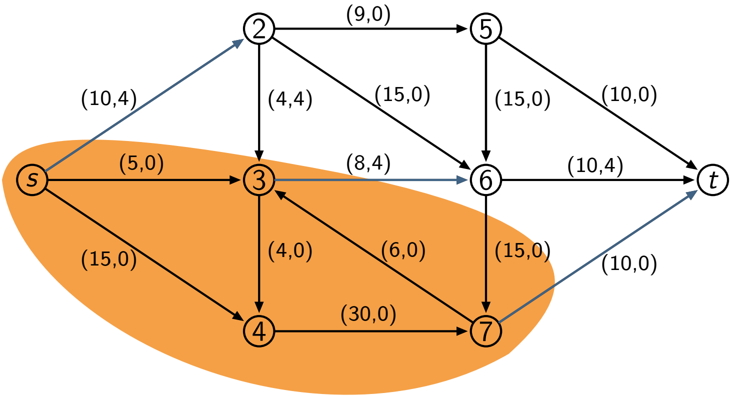
Flujo en Redes

$$F = 4$$



Flujo en Redes

$$F = 4$$



Flujo en Redes

Definición: La capacidad de un corte S se define como

$$c(S) = \sum_{e \in S\bar{S}} c(e).$$

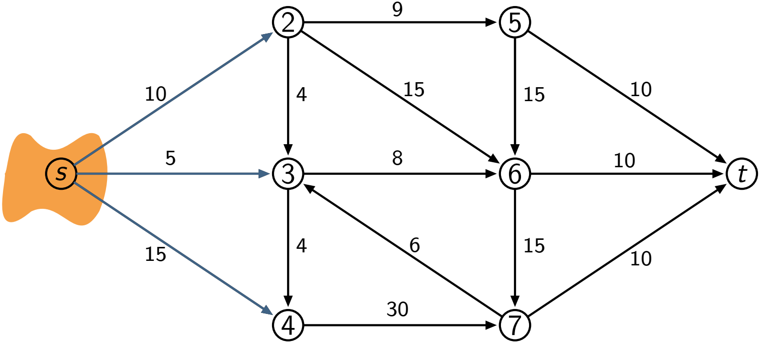
Lema: Si f es una función de flujo con valor F y S es un corte en N, entonces

$$F \leq c(S).$$

Corolario (certificado de optimalidad): Si F es el valor de un flujo f y S un corte en N tal que $F = c(S)$ entonces f define un flujo máximo y S un corte de capacidad mínima.

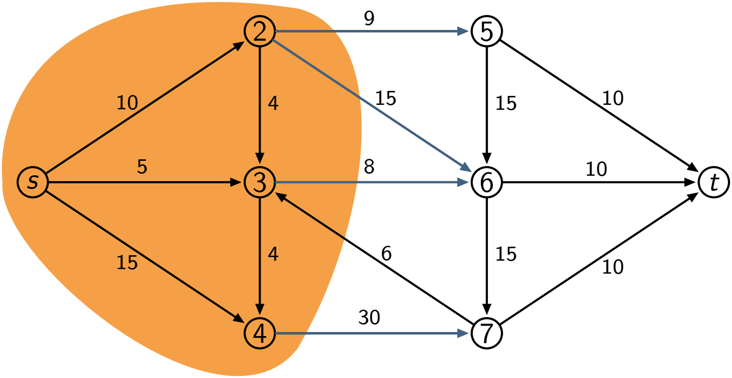
Flujo en Redes

$$C = 30$$



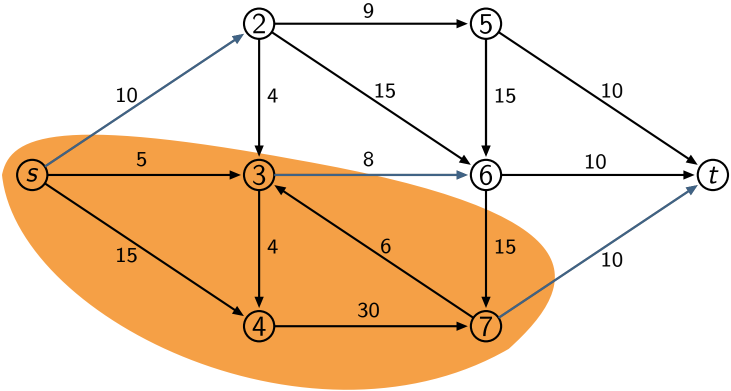
Flujo en Redes

$$C = 62$$



Flujo en Redes

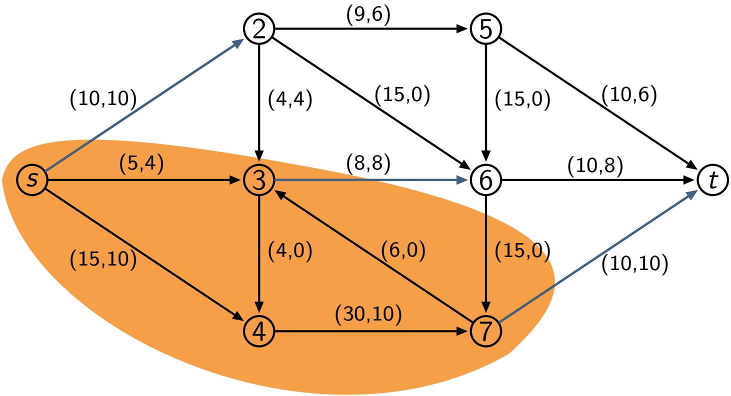
$$C = 28$$



Flujo en Redes

$$C = 28$$

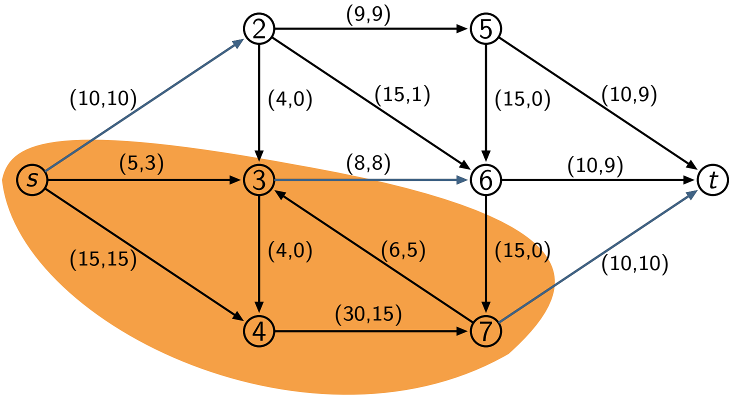
$$F = 24$$



Flujo en Redes

$$C = 28$$

$$F = 28$$



Flujo en Redes - Camino de Aumento

Definiciones: Dada una red $N = (V, X)$ con función de capacidad c y un flujo factible f,

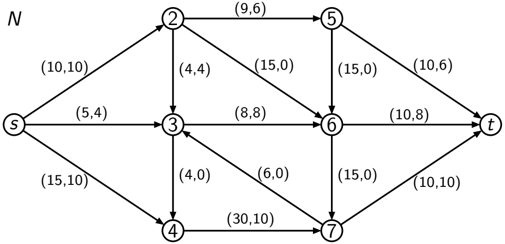
- Definimos la red residual, $R(N, f) = (V, X_R)$ donde

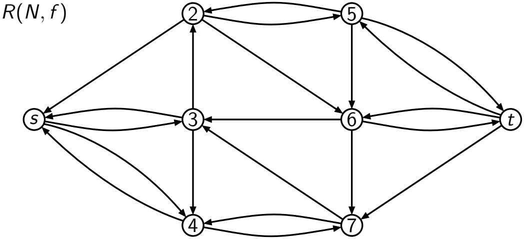
$$\forall (v \to w) \in X,$$

  - $(v \to w) \in X_R$ si $f((v \to w)) < c((v \to w))$
  - $(w \to v) \in X_R$ si $f((v \to w)) > 0.$

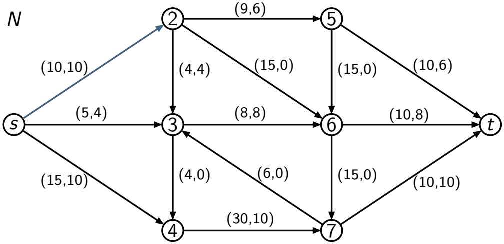
- Un camino de aumento es un camino orientado P de s a t en $R(N, f)$.

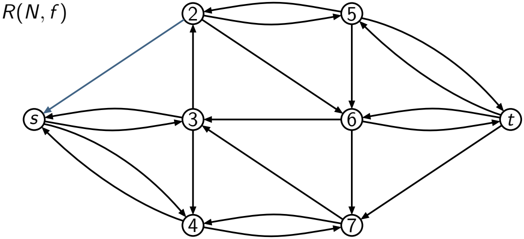
Flujo en Redes - Camino de Aumento



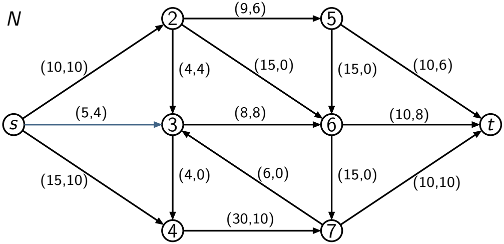


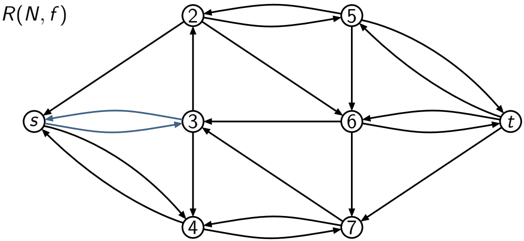
Flujo en Redes - Camino de Aumento



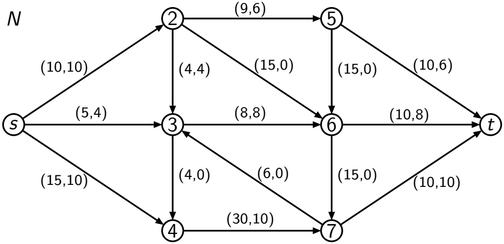


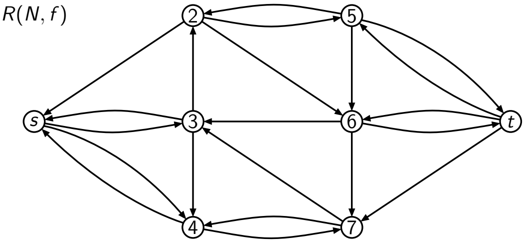
Flujo en Redes - Camino de Aumento



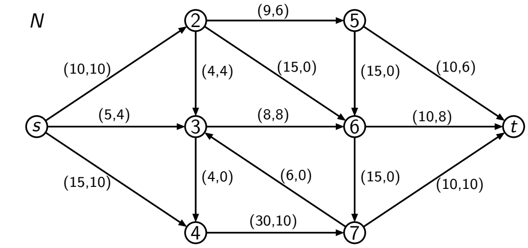


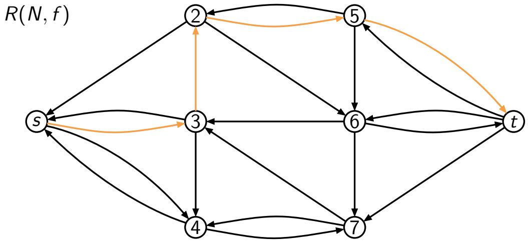
Flujo en Redes - Camino de Aumento





Flujo en Redes - Camino de Aumento





Flujo en Redes - Camino de Aumento

Definiciones: Dada una red $N = (V, X)$ con función de capacidad c y un flujo factible f,

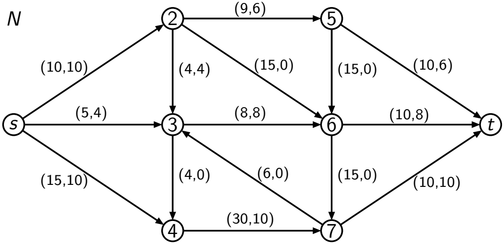
- Para cada arco $(v \to w)$ en el camino de aumento P, definimos

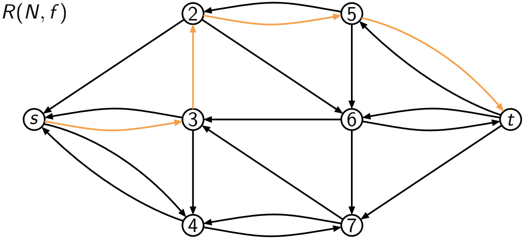
$$\Delta((v \to w)) = \begin{cases} c((v \to w)) - f((v \to w)) & \text{si } (v \to w) \in X \\ f((w \to v)) & \text{si } (w \to v) \in X \end{cases}$$

- Y

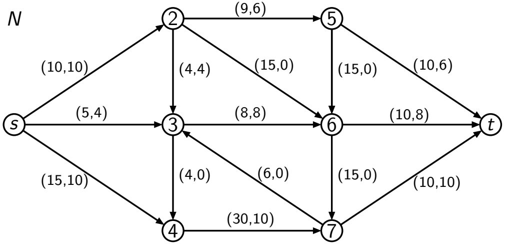
$$\Delta(P) = \min_{e \in P} \{\Delta(e)\}$$

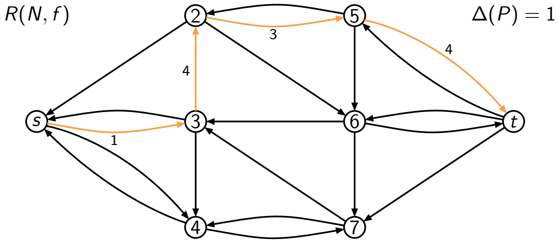
Flujo en Redes - Camino de Aumento





Flujo en Redes - Camino de Aumento





Flujo en Redes - Algoritmo de camino de aumento

Entrada: Dada una red N con función de flujo f, la red residual $R(N, f) = (V, X_R)$.

$S := \{s\}$
mientras $t \notin S$ **y** $\exists (v \rightarrow w) \in X_R$ **y** $v \in S$ **y** $w \notin S$ **hacer**
  $ant(w) := v$
  $S := S \cup \{w\}$
fin mientras
si $t \notin S$ **entonces**
  `retornar` S `corte de` V
si no
  `reconstruir` P `entre` s `y` t `usando` ant `a partir de` t
  `retornar` P `camino de aumento`
fin si

Flujo en Redes - Algoritmo de camino de aumento

Proposición: El algoritmo de camino de aumento determina un camino de aumento si existe, y si no llega a incorporar a t en S es porque no hay camino de aumento.

El algoritmo de camino de aumento no dice en qué orden deben incorporarse los nodos a S.

Flujo en Redes

Proposición: Sea f un flujo definido sobre una red N con valor F y sea P un camino de aumento en $R(N,f)$. Entonces el flujo $\bar{f}$, definido por

$$\bar{f}((v \to w)) = \begin{cases} f((v \to w)) & \text{si } (v \to w) \notin P \\ f((v \to w)) + \Delta(P) & \text{si } (v \to w) \in P \\ f((v \to w)) - \Delta(P) & \text{si } (w \to v) \in P \end{cases}$$

es un flujo factible sobre N con valor $\bar{F} = F + \Delta(P)$.

Teorema: Sea f un flujo definido sobre una red N. Entonces f es un flujo máximo $\iff$ no existe camino de aumento en $R(N,f)$.

Teorema: Dada una red N, el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.

Flujo máximo vs. corte mínimo

Teorema (Ford y Fulkerson, 1962)

Sea N una red con capacidades en lo arcos y s y t vértices de N. Entonces el valor del flujo máximo entre s y t coincide con el valor de un corte mínimo $(S, \overline{S})$ tal que $s \in S$ y $t \in \overline{S}$.

Flujo máximo vs. corte mínimo

Teorema (Ford y Fulkerson, 1962)

Sea N una red con capacidades en lo arcos y s y t vértices de N. Entonces el valor del flujo máximo entre s y t coincide con el valor de un corte mínimo $(S, \overline{S})$ tal que $s \in S$ y $t \in \overline{S}$.

Demo: Es fácil ver que el valor de un flujo máximo $\varphi_{\text{máx}}$ no puede superar el valor de un corte mínimo $\nu_{\text{mín}}$, porque el flujo que pasa de s a t tiene que pasar de S a $\overline{S}$ (de hecho, el valor de $\varphi_{\text{máx}}$ dado un corte se puede calcular como la suma del flujo de S a $\overline{S}$ menos la suma del flujo de $\overline{S}$ a S, que es no negativa). Entonces $\varphi_{\text{máx}} \leq \nu_{\text{mín}}$.

Flujo máximo vs. corte mínimo

Teorema (Ford y Fulkerson, 1962)

Sea N una red con capacidades en lo arcos y s y t vértices de N. Entonces el valor del flujo máximo entre s y t coincide con el valor de un corte mínimo $(S, \overline{S})$ tal que $s \in S$ y $t \in \overline{S}$.

Demo: Es fácil ver que el valor de un flujo máximo $\varphi_{\text{máx}}$ no puede superar el valor de un corte mínimo $\nu_{\text{mín}}$, porque el flujo que pasa de s a t tiene que pasar de S a $\overline{S}$ (de hecho, el valor de $\varphi_{\text{máx}}$ dado un corte se puede calcular como la suma del flujo de S a $\overline{S}$ menos la suma del flujo de $\overline{S}$ a S, que es no negativa). Entonces $\varphi_{\text{máx}} \leq \nu_{\text{mín}}$.

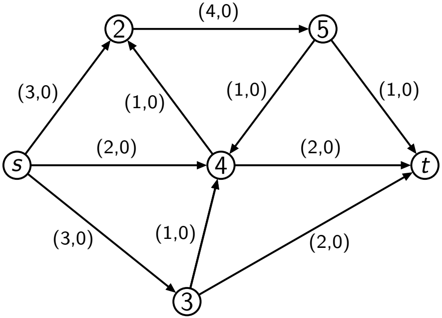
Por otra parte, al terminar el algoritmo determina un corte $(S, \overline{S})$ y un flujo f tal que los arcos del corte están saturados y los arcos de $\overline{S}$ a S tienen flujo cero (S son los vértices alcanzables desde s en $R(N, f)$ y $\overline{S}$ el resto). Por lo tanto $\varphi_{\text{máx}} \geq \varphi_f = \nu_{(S,\overline{S})} \geq \nu_{\text{mín}}$. Luego $\varphi_{\text{máx}} = \nu_{\text{mín}}$, y esto demuestra también que el algoritmo obtiene un flujo máximo. $\square$

Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)

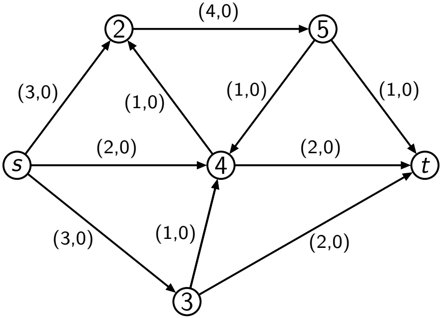
Entrada: Red $N = (X, V)$ con función de capacidad $c : X \to \mathbb{R}^+$.

definir un flujo inicial en N
    (por ejemplo $f(e) := 0$ *para todo* $e \in X$*)*
mientras exista $P :=$ camino de aumento en $R(N, f)$ **hacer**
    para cada arco $(v \to w)$ de P **hacer**
        si $(v \to w) \in X$ **entonces**
            $f((v \to w)) := f((v \to w)) + \Delta(P)$
        si no $((w \to v) \in X)$
            $f((w \to v)) := f((w \to v)) - \Delta(P)$
        fin si
    fin para
fin mientras

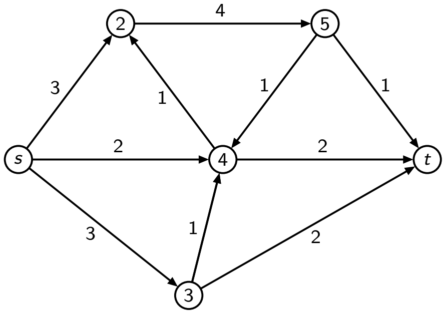
Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)



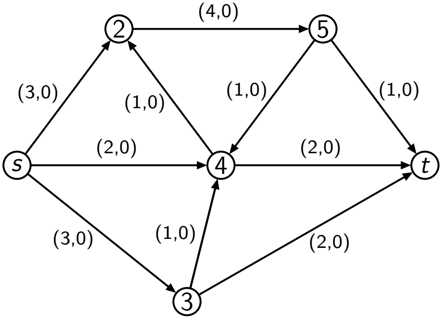
Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)



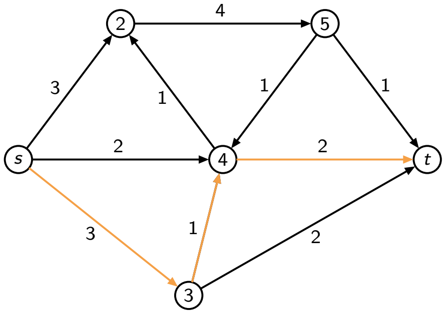
$R(N, f)$



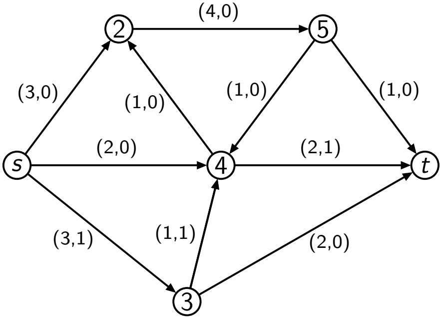
Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)



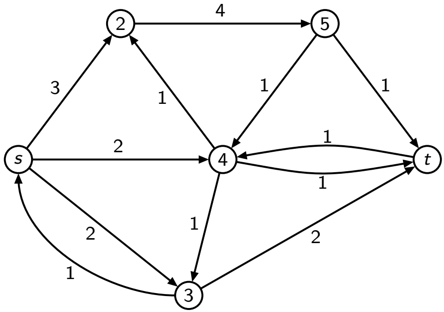
$R(N, f)$



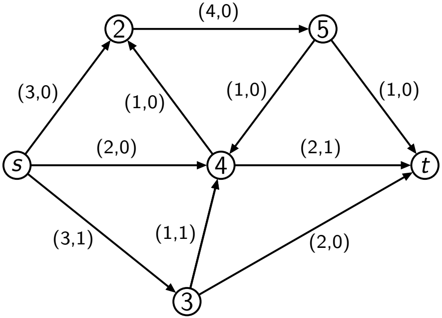
Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)



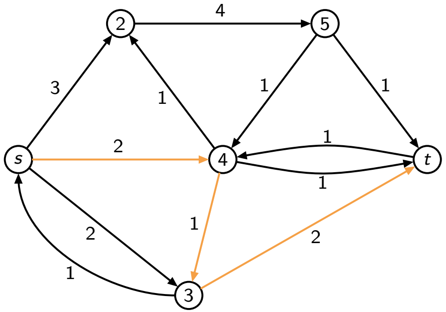
$R(N, f)$



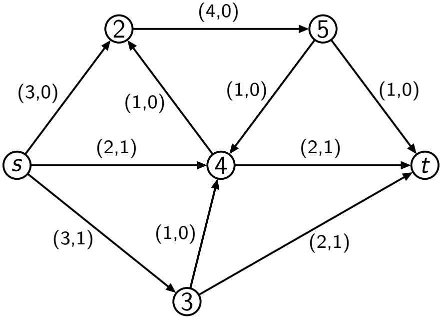
Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)



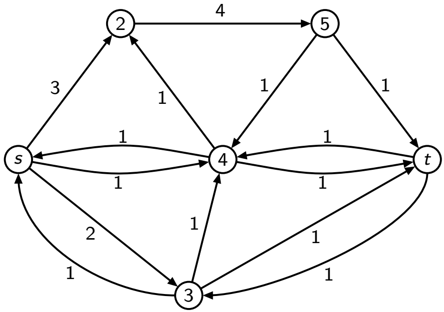
$R(N, f)$



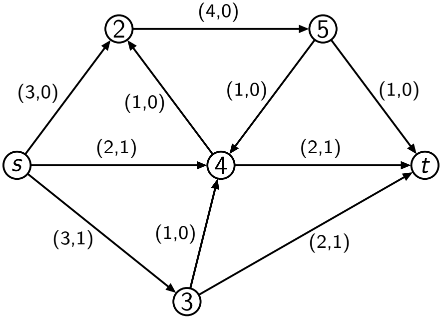
Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)



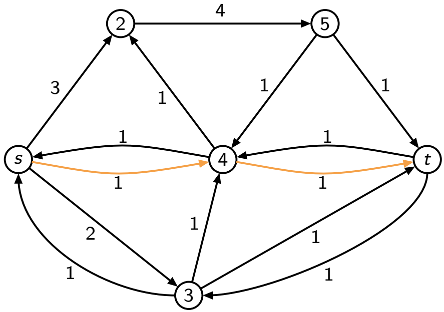
$R(N, f)$



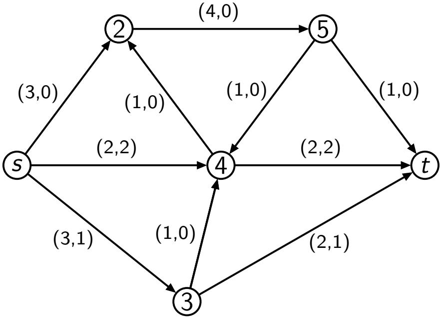
Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)



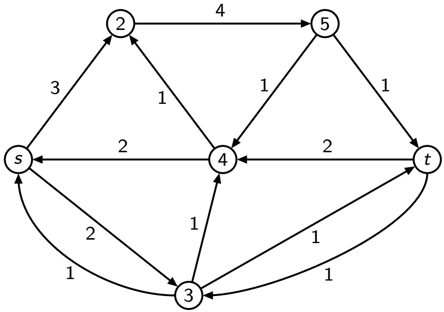
$R(N, f)$



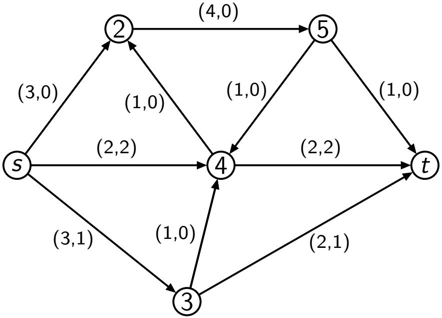
Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)



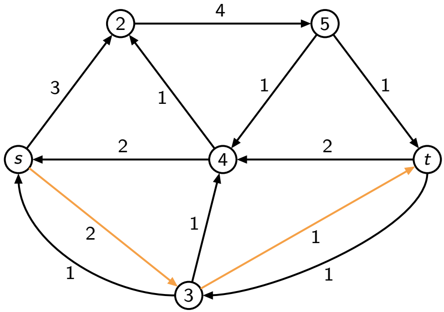
$R(N, f)$



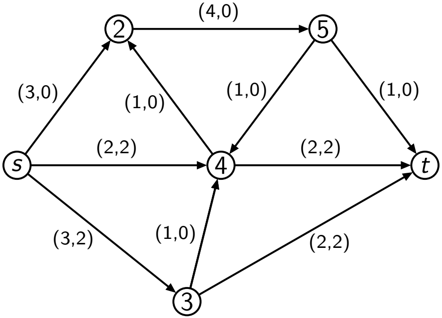
Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)



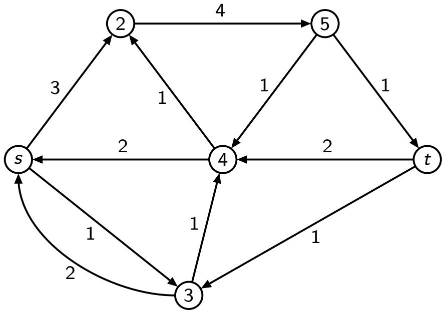
$R(N, f)$



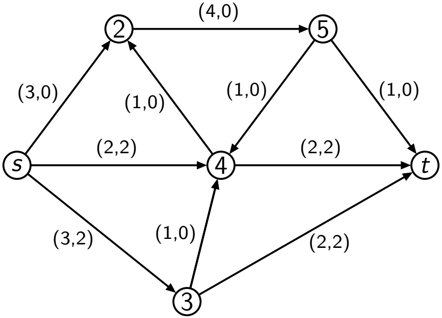
Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)



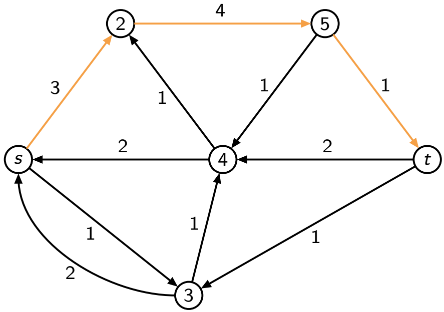
$R(N, f)$



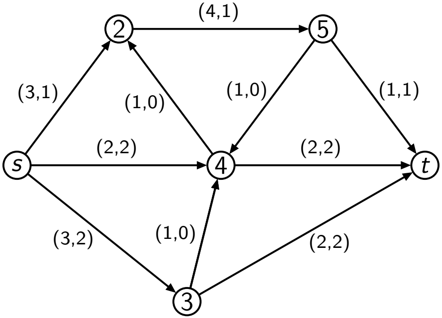
Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)



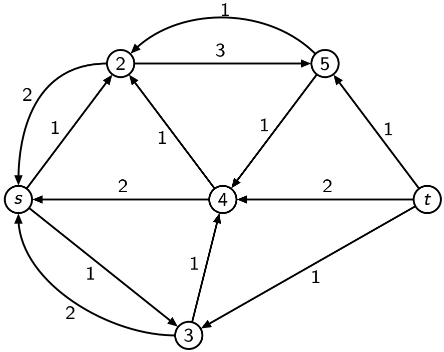
$R(N, f)$



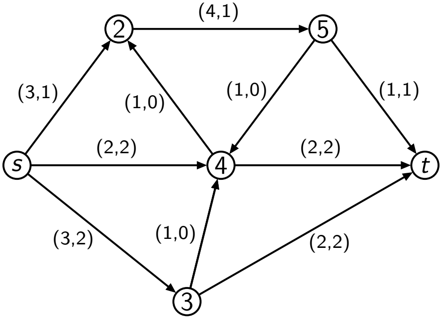
Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)

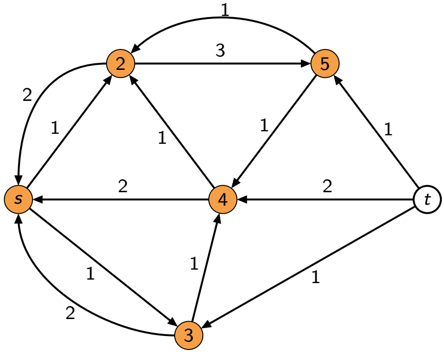


$R(N, f)$



Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)





$R(N, f)$

Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson (1956)

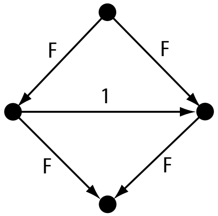
Teorema: Si las capacidades de los arcos de la red son enteras el problema de flujo máximo tiene un flujo máximo entero.

Teorema: Si los valores del flujo inicial y las capacidades de los arcos de la red son enteras el método de Ford y Fulkerson realiza a lo sumo nU iteraciones, siendo entonces $\mathcal{O}(nmU)$, donde U es una cota superior finita para el valor de las capacidades.

Si las capacidades o el flujo inicial son números irracionales, el método de Ford y Fulkerson puede no parar (realizar un número infinito de pasos).

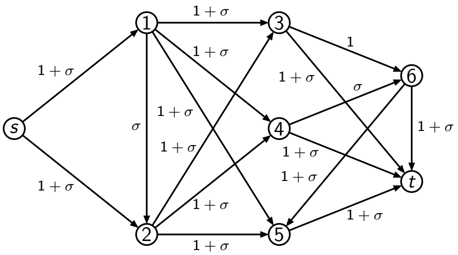
Si no se especifica el orden en el que se eligen los arcos y nodos a marcar en el algoritmo de camino de aumento, el número de iteraciones puede ser no polinomial respecto del tamaño del problema.

Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson



Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson

$$\sigma = (\sqrt{5} - 1)/2$$



Iteración	Camino de aumento
$6k+1$	$s, 1, 2, 3, 6, t$
$6k+2$	$s, 2, 1, 3, 6, 5, t$
$6k+3$	$s, 1, 2, 4, 6, t$
$6k+4$	$s, 2, 1, 4, 6, 3, t$
$6k+5$	$s, 1, 2, 5, 6, t$
$6k+6$	$s, 2, 1, 5, 6, 4, t$

Flujo en Redes - Modificación de Edmonds y Karp (1972)

- Usa BFS en el algoritmo de camino de aumento para marcar nodos.
- La complejidad del algoritmo es $\mathcal{O}(m^2 n)$.
- Hay otros algoritmos más eficientes (más complicados).

Variantes

Algunas variantes del problema de flujo:

- flujo en redes con arcos no dirigidos
- flujo factible, máximo o mínimo con cotas inferiores y superiores
- capacidades en los vértices
- flujo máximo con costo mínimo o acotado:
  - el costo es proporcional al flujo transportado a través del arco (polinomial)
  - el costo es fijo y se cobra por el uso del arco (NP-hard)
- múltiples orígenes y destinos
- flujo indivisible (NP-hard)

Flujo en Redes - Matching máximo

¿Cómo usar flujo para determinar un matching máximo en un grafo bipartito G?

Flujo en Redes - Teorema de Hall (1935)

Teorema de Hall

Si G es un grafo bipartito con partición (V_1, V_2), entonces G tiene un matching que satura a V_1 si y sólo si para todo $W \subseteq V_1$, $|W| \leq |N(W)|$, donde $N(W)$ es el conjunto de vecinos de los nodos de W en V_2.