DP

Problem 1

- 给定一个长度为N的序列
- 每一位有一个目标颜色。
- 初始时每一位都没有颜色。每次可以选择一个区间，将区间内的所有元素改为其目颜色。
- 设区间内不同颜色的数量为X，则操作的代价为X^2 。
- 求最小代价。
- $N \le 5 \times 10^4$

Problem 1

- 颜色一定不超过$\sqrt{N}$
- 分$\sqrt{N}$段处理
- HDU 5009

Problem 2

- 求N位数中无前导零且数码从高位到低位非降且数字和模M等于0的数字个数。
- $N \le 10^{18}, M \le 500$

Problem 2

- 任何一个数都可以表示为$\sum_{i=1}^{N} x_i \times 1\cdots1$
- 将$1\cdots1$按模M分组
- $f[i][j][k]$表示前i组已经用了j的值模为k的方案数
- 枚举分配值的多少
- $O(100M^2)$
- TC SRM 452 Div1 1000pt

Problem 3

- 求在[L,R]中的满足各位数字之积为K的数有多少个
- L,R 10^18

Problem 3

- F[i][j][k]表示做到第i位是否顶上界乘积为k的方案数
- K太大？
- 2 3 5 7
- BZOJ 2757

Problem 4

- 定义a和b的大小关系为
- 如果a的数字之和和b的数字之和相等，则按照字典序比较大小
- 否则按数字之和比较大小
- 两种询问
- 询问1-N中第k小的数
- 询问k在1-N中的位置
- 10^18

Problem 4

- 先算出每个数字和的数有多少个
- 然后就能确定数字和了
- 然后可以通过DP算出数字和为x开头的数字是多少的数字有多少个
- 然后blablabla就可以做完了
- ZOJ 2599

Problem 5

- 统计
- 长度为N的排列中
- 有多少个排列的逆序对是偶数个
- N<=50

Problem 5

- 考虑数从小向大插入
- 每次形成的逆序对数可计算

Problem 6

- 有一个n×m的网格。有一头大象，初始时在(1,1)，要移动到(n,m)，每 次只能向右或者向下走。有些格子中有老鼠，如果大象所在的格子和某个有老 鼠的格子的曼哈顿距离≤ 1，大象就会被那只老鼠吓到。 求一条移动路径，使得吓到过大象的老鼠数量最少。 n,m ≤ 100。

Problem 6

- 注意对大象进行去重
- CodeChef JUNE13 LEMOUSE

Problem 7

- 有一个长度为n的排列a，其中有一些位置被替换成了−1。你需要尝试恢 复这个排列，将−1替换回数字。 求有多少种可行的替换方法，满足得到的是一个排列，且不存在ai = i的 位置。n ⩽ 2000。

Problem 7

- 我们用一个n×n的棋盘来表示一个排列，第i行第j列如果被标记，则代表数字 i填在了第j个位置（aj = i）。对于给定的排列，不为−1的位置已经被 标记在棋盘上，而棋盘的主对角线上（ai = i）不可以被标记。
- 从棋盘中删去不为−1的位置的列，以及已经出现了的数字的行，记此时 棋盘大小为N。不难发现，每列不可被标记的位置至多只有1个，每行也是同 样。记这种位置的数量为M。
- 令f[N,M]表示，在这样的棋盘上标记N个格子的方案数。转移方程为: f[n,m] = f[n,m − 1] − f[n − 1,m − 1] 边界为f[i,0] = i!。
- 转移方程的含义为，相比起f[n,m − 1]的状态，f[n,m]的状态要多一个不 可标记的位置，而标记了这个位置的方案数为f[n − 1,m − 1]，因此从中减 去。
- CF 198C

Problem 8

- 网格中每步可以走(0……Mx,0……My)中任意非零向量
- 有K种向量不能走
- 分别是(ki,ki) ki一定是10的倍数
- 求从(0,0)走到(Tx,Ty)的方案数
- Tx,Ty,Mx,My<=800,R<=1600,K<=50

Problem 8

- f[i][x][y]表示走i步到xy方案数
- g[i][z]表示走i步到10z 10z方案数
- 答案可容斥
- x与y无关，可分割
- TC SRM 498 Div1 1000PT

Problem 9

- $N \times M$的棋盘上放若干个炮使得其互相不攻击的方案数。
- $N, M \leq 100$

Problem 9

- F[i][j][k]表示做到第i行有j列有0个炮k列有1个炮的方案数
- BZOJ 1801

Problem 10

- n个数（可能存在相同的数），双方轮流取数。如果在一方选取之后，所有
  已选取数字的GCD变为1，则此方输。
  问：
  若双方均采取最优策略，先手是否必胜？
  n; ai ≤ 100。

Problem 10

- 令f[i; j]表示GCD为i， 未选而且是i的倍数的数有j个的状态。
  转移时， 要么是转移到f[i; j - 1]， 要么是枚举一个令GCD减小的数转移。
  在GCD减小后， 原来是倍数的还是倍数， 此外还可能有之前不是倍数的， 现在
  变成了倍数， 统计一下即可。
  通过预处理倍数可以做到O(n)的转移。

Problem 11

- 玩游戏
- 初始(x,y)=(1,0)
- 1、(x,y)→(1,x+y)
- 2、(x,y)→(2x,y)
- 3、(x,y)→(3x,y)
- 如果x+y>=n就只能使用1操作
- 操作后如果y>=n则输
- 问必胜策略
- $N \leq 3 \times 10^4$
- 原题为交互题

Problem 11

- F[i][j][k]表示y为I x为2^j*3^k是否为必胜态
- BZOJ 2798

Problem 12

- 有一棵n个节点的有根树。现在依次飞来了k只鹰，想在树上休息。每只 鹰初始都在根节点，然后采取如下操作：
- 1 如果当前所在的节点是空的，那么占据这个节点休息；
- 2 否则，如果该节点有儿子节点，那么等概率随机飞到一个儿子节点上；
- 3 否则，这只鹰会放弃休息，直接飞走。
- 求第k只鹰最后留在树上的概率。$n \leqslant 50$，$k \leqslant 100$。

Problem 12

- p[x,k]代表第k只鹰从节点x出发，最后能留在树上的概 率
- TC Open 2014 Round 1B P3

Problem 13

- n个数字，选出其一个子集。 求有多少子集满足其中数字之和是m的倍数。$n \leqslant 100000$，$m \leqslant 100$

Problem 13

- 按模数进行背包
- CodeChef APRIL14 ANUCBC

Problem 14

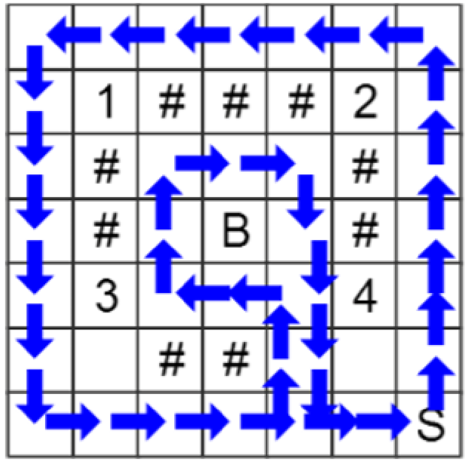
- 对于一个序列，定义其“激动值”为序列中严格大于前面所有数的元素的个 数。比如，{1,1,5,6,5}的激动值为3。 给定n个数 $p_1,p_2,\ldots,p_n$，求这n个数的所有排列中，激动值不超过k的个 数。$1 \leqslant k \leqslant n \leqslant 200$，$1 \leqslant p_i \leqslant 200$

Problem 14

- 先记录相同的数的个数，然后去重。
- 从大到小考虑每组相同的数。令f[i,j]代表已经插入前i大的数，且激动值 为j的序列方案数。
- 考虑当前这组数插入在哪些位置。每一组数的贡献至多为1，有贡献当且 仅当至少一个数被插在了最前面。无论插入在什么位置，已有的激动值不会减 少。
- 假设已经插入了x个数，当前这组有y个数，没有一个数被插在最前面的 方案数为
- $y!\,C_{x+y-1}^{x-1}$
- 至少一个被插在最前面的可以类似算。 复杂度O(nk)。
- CC FEB14 LEMOVIE

Problem 15

- 在一个n×m的地图上，有一些障碍，还有a个宝箱和b个炸弹。你从 (sx,sy)出发，走四连通的格子。你需要走一条闭合的路径，可以自交，且围出 来的复杂多边形内不能包含任何炸弹。你围出来的复杂多边形中包含的宝箱的 价值和就是你的收益。 求最大收益。n,m ≤ 20，a + b ≤ 8



Problem 15

- 射线法DP
- 令F[x,y,k]表示，当前在(x,y)，且集合k中的射线穿过了路径奇数次，这 样的状态是否可行。
- 转移时枚举下一步，然后看两步之间的线段穿过了哪些射线，并更新集合k。
- 最后枚举所有集合k，要求炸弹的射线穿过路径偶数次，且F[sx,sy,k] = true。用集合中宝箱的价值和更新答案。
- CF 221 C

Problem 16

- Crash买来了n $(n \leq 1000)$件礼物，他要将这些礼物送给他的好友们。
- Crash先将礼物们排成一排，从左到右用正整数$1 \dots n$编号，每件礼物有一个正整数的价值，依次用$w_1, w_2, \dots, w_n$表示。Crash送给每位好友的礼物一定是编号上连续的一段，满足这些礼物中任意两件礼物的价值差不会超过m，同时送给每个好友的礼物个数不少于k。
- 给出m, k和每件礼物的价值，问Crash最多能送出多少件礼物。

Problem 16

- 用$f(i)$表示对前i个礼物分组、能送出的最多礼物数。转移为枚举j，使得第$j+1\sim i$件礼物可以送出。或者选择不送出第i件礼物，直接从$f(i-1)$转移。
- 为了判断第$j+1\sim i$件礼物是否可以送出，需要求$w_{j+1},w_{j+2},\dots,w_i$中的最大值和最小值，$j$可以倒着循环，时间复杂度为$O(n^2)$。

Problem 17

- Tky来到一个雄奇的金字塔挖宝，但是这是一座被诅咒的金字塔，Tky必须马上逃离这里，否则Tky就会被埋在金字塔里，但他不希望此行落空。现在Tky面前有$N+1$种财宝，每种财宝都有一个价值。第一种财宝重量为0，第二种财宝重量为1，总之第i种财宝重量为$i-1$。现在Tky希望拿走$N+M$个物品，但是这$N+M$个物品总重量不能超过N。Tky希望能获得最大的价值（给定每个才报的价值）。你能帮帮他吗？由于金字塔跟Tky一样牛，所以每种财宝无限个。
- $N, M \leq 3000$

Problem 17

- 按照一般动态规划的思路，状态为 $f(i,j,k)$ 表示考虑了前 i 种财宝、选了j个且总重量不超过k时的最大价值和。这个动态规划算法显然会超时。
- 先去掉重量为0的财宝，在其他财宝里选择的话，选k件重量至少有k，反之如果重量不超过k，说明最多只选了k件。
- 假设选了$N+M$件第一种财宝，然后其他财宝的价值都减去第一个财宝的价值，这样问题可以转化为从其他财宝中选出重量不超过N的若干件财宝，使得价值和最大。
- 由于最多只会选出N件价值大于0的财宝，因此是符合总件数为$N+M$的要求的。

Problem 18

- 教主有着一个环形的花园，他想在花园周围均匀地种上n $(n \leq 100000)$棵树，但是教主花园的土壤很特别，每个位置适合种的树都不一样，一些树可能会因为不适合这个位置的土壤而损失观赏价值。
- 教主最喜欢3种树，这3种树的高度分别为10，20，30。教主希望这一圈树种得有层次感，所以任何一个位置的树要比它相邻的两棵树的高度都高或者都低，并且在此条件下，教主想要你设计出一套方案，使得观赏价值之和最高（给出每个位置分别种三种树的观赏价值）。

Problem 18

- 比较明显的DP模型，只不过虽然是环状的，但是每个点的状态跟确定的区间长度无关，所以只需要枚举第1棵树的高度（特别注意当高度为20时要分下一棵树是10还是30），链状DP即可。
- f[i][1..4]表示分别前i棵树，第i棵树的高度为10（下棵树肯定要比它高），20（下棵树比它高），20（下棵树比它矮），30（下棵树肯定要比它矮）的最大价值。转移也显而易见了。

Problem 19

- 给定N ($N \le 2{,}000$)个小写英文字母组成的字符串$\{a_i\}$，总长度不超过10^6。再给定一个长度为M ($M \le 2{,}000$)的正整数数列$\{b_i\}$ ($1 \le b_i \le N$)，定义$A = a_{b_1} + a_{b_2} + \cdots + a_{b_M}$，其中+表示字符串的连接。最后给定一个小写英文字母组成的字符串B ($|B| \le 2{,}000$)，求A和B的最长公共子序列。

Problem 19

- 用$f(i,j)$表示用B的前i个字符、满足存在长度为j的公共子序列所需要A的最少前缀长度。
- 转移有两种选择：用B_i进行匹配和不用。不用的话就是从$f(i-1,j)$转移过来，用的话就是在A中从$f(i-1,j-1)$位置往后找到第一个B_i。
- 通过预处理可以$O(1)$找出那个位置。总时间复杂度为$O\left(|\Sigma|\sum_{i=1}^{N}|a_i|+|\Sigma|M+|B|^2\right)$。

Problem 20

- P98 T3

你现在希望组建一支足球队，一支足球队一般来说由11人组成。这11人有四种不同的职业：守门员、后卫、中锋、前锋组成。你在组队的时候必须满足以下规则：

1、 足球队恰好由11人组成。
2、 11人中恰好有一名守门员，3-5 名后卫，2-5 名中锋，1-3 名前锋。
3、 你需要从这11人中选出一名队长。
4、 你这个足球队的价值是11人的价值之和再加上队长的价值，也就是说队长的价值会被计算两次。
5、 你这个足球队的花费是11人的花费之和，你的花费之和不能超过给定的上限。

现在告诉你球员的总数，每个球员的职业、价值、花费，以及花费的上限，你希望在满足要求的情况下，达到以下目标：

1、 最大化队伍的价值。
2、 在最大化队伍的价值的情况下，最小化队伍的花费。
3、 在满足以上两个要求的情况下，有多少种选择球员的方案。如果有两种方案它们的区别仅仅是队长不一样，那么这两种方案应该被认为是一种方案。

你的任务是输出这三个值：价值、花费、方案数。

Problem 21

- P98 T3

Yjq 买了 36 个卡包，并且把他们排列成6×6的阵型准备开包。左上角的包是(0,0)，右下角为(5,5)。为了能够开到更多的金色普通卡，Yjq 会为每个包添加$1-5$个玄学值，每个玄学值可以是$1-30$中的一个整数。但是不同的玄学值会造成不同的欧气加成，具体如下：

1、同一个卡包如果有两个相同的玄学值会有无限大的欧气加成。

2、同一个卡包如果有两个相邻的玄学值会有A点欧气加成。

3、相邻的两个卡包如果有相同的玄学值会有B点欧气加成。

4、相邻的两个卡包如果有相邻的玄学值会有C点欧气加成。

5、距离为2的卡包如果有相同的玄学值会有D点欧气加成。

6、距离为2的卡包如果有相邻的玄学值会有E点欧气加成。

以上的所有加成是每存在一个符合条件的就会加一次，如一包卡有1,2,3的玄学值就会加两次。

但是，玄学值是个不可控的东西，即使是 Yjq 也只能自己决定$(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)$这几包卡的玄学值。为了能够抽到更多的金色普通卡，Yjq 想知道自己能够获得的最少的欧气加成是多少。

Problem 22

- 1、一块地只能被种一次
- 2、一块地可以被种多次
- P101 T3

Hja 回到老家开始种地，由于太久没有种地，所以所有地都是荒地。将每片地从荒地变成不荒地有一定的代价，但是一旦改变之后就不再是荒地了。现在 Hja 要开始M年的种地生活，第i年 Hja 可以在l_i到r_i块地上种地，并且可以获得p_i的收益。（注意，要种地必须整段一起种，并且这些地一定已经是不荒地）Hja 可以选择种或者不种每一年的地，问 Hja 能够获得的最大收益。

Problem 23

- P105 T3

洗完衣服，就要晒在树上。但是这个世界并没有树，我们需要重新开始造树。我们一开始拥有T_0，是一棵只有一个点的树，我们要用它造出更多的树。

生成第i棵树我们需要五个参数$a_i, b_i, c_i, d_i, l_i (a_i, b_i < i)$。我们生成第$i$棵树是将第$a_i$棵树的$c_i$号点和第$b_i$棵树的$d_i$号点用一条长度为$l_i$的边连接起来形成的新的树（不会改变原来两棵树）。下面我们需要对新树中的点重编号：对于原来在第a_i棵树中的点，我们不会改变他们的编号；对于原来在第b_i棵树中的点，我们会将他们的编号加上第a_i棵树的点的个数作为新的编号。

定义

$$F(T_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} d(v_i, v_j)$$

其中，n为树T_i的大小，v_i, v_j是T_i中的点，$d(v_i, v_j)$代表这两个点的距离。现在希望你求出$\forall 1 \le i \le m, F(T_i)$是多少。

Problem 24

- P110 T2

求一张图的最小生成树是一个非常困难的问题，为了将该问题简化，我们把该问题简化为求一张图有多少个不同的生成树。但这个问题还是太难了，所以我们需要对这张图做出一些特殊的规定。对于图中两个点，他们之间有边当且仅当其编号之差的绝对值不超过k，求这张图不同的生成树的个数。