怪怪數學題目的詳解

1 暖身題

1. 不行，有一個 7-連通塊中間有洞。
2. 切成五條一樣的長條狀。
3. 遇到要特別小心首項。
$a_n = \begin{cases} 5, & n = 1 \\ 2n+2, & n \geq 2 \end{cases}$
4. $a_n = 3 \cdot (\frac{4}{3})^{n-1}, \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} \cdot (\frac{3}{4})^{n-1},$
$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-(\frac{3}{4})^{\infty}}{1-(\frac{3}{4})} = \frac{4}{3}$

2 通靈消消消

1.

$$\begin{aligned}
&\sqrt[256]{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{256}+1)+1} \\
=&\sqrt[256]{(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{256}+1)+1} \\
=&\sqrt[256]{(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{256}+1)+1} \\
=&\sqrt[256]{(2^4-1)(2^4+1)\cdots(2^{256}+1)+1} \\
=&\sqrt[256]{(2^{512}-1)+1} \\
=&4
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
S_n &= & k+ && k^2+ && \cdots+ && k^n \\
kS_n &= & && k^2+ && \cdots+ && k^n + k^{n+1} \\
(1-k)S_n &= & k- & k^{n+1} \\
\Rightarrow S_n &= \frac{k-k^{n+1}}{1-k}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
S_n &= & k+ && 2k^2+ && \cdots+nk^n \\
kS_n &= & && k^2+ && \cdots+(n-1)k^n && +nk^{n+1} \\
(1-k)S_n &= & k+ && k^2+ && \cdots+k^n && -nk^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (1-k)S_n &= \frac{k-k^{n+1}}{1-k} - nk^{n+1} \\
\Rightarrow S_n &= \frac{k-k^{n+1}-(1-k)nk^{n+1}}{(1-k)^2}
\end{aligned}$$

4. 把整個圖左右翻轉和原本的加起來，這樣第 k 行的每個數字都是 $2^{k-1}(n+2)$ ，第 n 行的那個數字就是 $2^n(n+2)$ ，除以二即得答案 $2^{n-1}(n+2)$ 。

3 進階的等比數列

1. $a_n = 2^n$

2. 移項遞迴式得 $a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$ ，
令 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ，得 $b_1 = 2, b_n = 2b_{n-1}$ ，
故 $b_n = 2^n, a_n = b_{n-1} + a_{n-1}$
$\Rightarrow a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} = 5 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 4 + 2^n$

3. 先把礙眼的根號除掉。
令 $b_n = \sqrt{a_n}$ ，得 $b_1 = 1, b_2 = 2, b_n b_{n-2} = 2b_{n-1}b_{n-2} + pb_{n-1}^2$ 。
兩邊同除 $b_{n-1}b_{n-2}$ ，得 $\frac{b_n}{b_{n-1}} = 2 + p\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$ 。
令 $c_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ，得 $c_1 = 2, c_n = pc_{n-1} + 2 \Rightarrow c_n = p(p(\ldots(p \cdot c_1 + 2)\ldots) + 2) + 2$
$= 2 + 2p + 2p^2 + \cdots + 2p^{n-1} = \begin{cases} 2n, & p = 1 \\ 2\frac{1-p^n}{1-p}, & p \neq 1 \end{cases}$ ，又 $b_n = c_{n-1} \cdot b_{n-1} = b_1 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdots c_{n-1}$ ，
$\Rightarrow b_n = \begin{cases} 2^{n-1}(n-1)!, & p = 1 \\ 2^{n-1}\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(1-p^k)}{(1-p)^{n-1}}, & p \neq 1 \end{cases}$ ，平方即得 a_n 。

4 奇怪的作法

1. 作法很神奇。令 $x = \sqrt{12 + x}$ ，解得 $x^2 = 12 + x, (x-4)(x+3) = 0, x = 4, -3$ ，又 x 必為正數，故 $x = 4$ 。

2. 令 $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = x$ ，得 $F_{n+2} = x^2 F_n, F_{n+1} = xF_n \Rightarrow x^2 F_n = xF_n + F_n, x^2 = x + 1, x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ，檢查後發現只有正的答案符合條件，故答為 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。

5 勇氣很重要

1. 把 $\cos 60x^\circ$ 列出來，發現是 $1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}$ 的循環，丟回去會發現全部消掉，剩下 1 。