

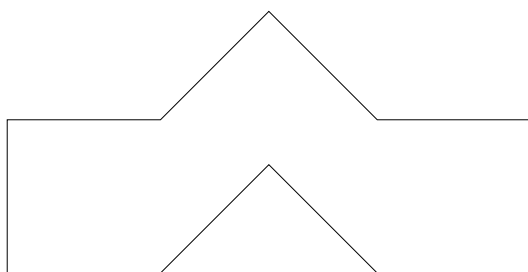
怪怪數學題目

1 前言

數列與級數是個適合發揮創意的題目類型。有時候把東西搬來搬去就做完了(?)

2 暖身題

1. 一個 x -連通塊代表將 x 個小正方形以邊相接連成一塊的形狀，例如俄羅斯方塊就是 4-連通塊。已知 7-連通塊有 108 種，求能不能把這 108 個 7-連通塊排成一個 7×108 的大矩形？證明可以或不行。
2. 下面圖形每條直線皆等長，所有角度皆為 45° 的倍數，請將此形狀分為五塊全等的區域。作答時間：直到放棄，或是發現他其實很簡單。



3. 令 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ ，已知 $S_n = n^2 + 3n + 1$ ，求 a_n 的一般式。

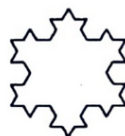
4. 令 a_n 為第 n 圖的周長，已知 $a_1 = 3$ ，求 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}$ 。



圖(1)



圖(2)



圖(3)

3 一些名詞雜燴

1. 公比：不能為 0，不然後面的比會沒辦法定義。
2. $\sum_{i=a}^b f(i)$ ：把 $f(a), f(a+1), f(a+2), \dots, f(b)$ 加起來。
3. $\prod_{i=a}^b f(i)$ ：把 $f(a), f(a+1), f(a+2), \dots, f(b)$ 乘起來。
4. 曲率半徑：假裝一段弧線是某個圓的一部分，求那個圓的半徑。

4 數列與級數

4.1 通靈消消消

1. 求 $\sqrt[256]{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{256}+1)}+1$ 。
2. 已知 $k \neq 1$ ，求 $\sum_{i=1}^n k^i$ 。
3. 已知 $k \neq 1$ ，求 $\sum_{i=1}^n i \cdot k^i$ 。
4. 如圖，已知每一列數字為上一列相鄰兩數的和，求圖中最下面的數字（以 n 表示）。



4.2 進階的等比數列

1. 已知 $a_1 = 2, a_n = 2a_{n-1} (\forall n \geq 2)$ ，求 a_n 一般式。
2. 已知 $a_1 = 5, a_2 = 7, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} (\forall n \geq 3)$ ，求 a_n 一般式。
3. 已知 $a_1 = 1, a_2 = 4, \sqrt{a_n a_{n-2}} = 2\sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} + p a_{n-1}$ ，求 a_n 一般式。

4.3 奇怪的作法

1. 已知 $a_1 = \sqrt{12}, a_n = \sqrt{12 + a_{n-1}}$, 已知 n 接近無限大時 a_n 會接近某一數值 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, 求 x 。
2. 已知 $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (\forall n \geq 3)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$ (n 接近無限大時 $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ 是多少)。

4.4 勇氣很重要

1. 求 $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\cos 60x^\circ}{2^x}$ 。