第十三届全国大学生数学竞赛预赛非数学类真题及参考答案

一、填空题。(本题满分 30 分，每小题 6 分)

1. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}\cdot\dfrac{x-\ln(e^x+x)}{x}=$ __________

参考解析：

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{x-\ln(e^x+x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{x-\ln(e^x+x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[x-\ln(e^x+x)]=0$$

2. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 所确定的二元隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ __________

参考解析：

注意到此时可以化简为 $x+2y-3z=C$，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}=1$

3. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$ __________

参考解析：

$$\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}=\frac{2\cdot\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}}{\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}+f(x)}=1$$

4. 经过三条直线 $\begin{cases}x=0,\\ y-z=2\end{cases}$，$\begin{cases}x=0,\\ x+y-z+2=0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y-z=0\end{cases}$ 的圆柱面方程为 __________

参考解析：

由题意知准线方程为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ z=0\end{cases}$，母线为 $\boldsymbol{s}=(0,1,1)$

所以假设圆柱上一点 (x,y,z)，经过该点的母线与准线相交于 (x_0,y_0,z_0)

所以 $\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{1}=\dfrac{z-z_0}{1}$ 并且 $\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{2}+\dfrac{y_0^2}{4}=1\\ z_0=0\end{cases}$，所以 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{(y-z)^2}{4}=1$，即 $2x^2+(y-z)^2=4$

5. 记 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant\pi\right\}$，则 $\iint\limits_D\left[\sin(x^2)\cos(y^2)+x\sqrt{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________

参考解析：

$$\text{原式}=\iint\limits_D\sin(x^2)\cos(y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^{\sqrt{\pi}}r\sin(r^2)\mathrm{d}r=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot2=\pi$$

二、(本题满分 14 分) 设 $x_1=2021$，$x_n^2-2(x_n+1)x_{n+1}+2021=0(n\geqslant 1)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求解极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

参考解析：

$x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+2021}{2(x_n+1)}=\dfrac{1}{2}\left[x_n+1+\dfrac{2022}{x_n+1}-2\right]$，所以 $x_{n+1}+1=\dfrac{1}{2}\left[x_n+1+\dfrac{2022}{x_n+1}\right]$

所以记 $y_n=x_n+1$，于是 $y_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(y_n+\dfrac{2022}{y_n}\right)$，此时 $y_1=2022$

所以 $y_n\geqslant\sqrt{2022}$，所以 $y_{n+1}-y_n=\dfrac{2022-y_n^2}{2y_n}\leqslant 0$，所以数列 $\{y_n\}$ 单调递减有下界

所以 $\{y_n\}$ 收敛，所以数列 $\{x_n\}$ 收敛

所以记 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，于是 $A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{2022}{A}\right)$，所以 $A=\sqrt{2022}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n-1=\sqrt{2022}-1$

三、(本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 是在 $[0,+\infty)$ 上是有界连续函数，证明：方程 $y''+14y'+13y=f(x)$ 的每一个解在 $[0,+\infty)$ 上都是有界函数。

参考解析：

$(y'+y)'+13(y'+y)=f(x)$，所以 $y'+y=e^{-13x}\left[\displaystyle\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t+C_1\right]$

所以 $y=e^{-x}\left[\displaystyle\int_0^x e^{-12t}\left[\int_0^t f(u)e^{13u}\mathrm{d}u+C_1\right]\mathrm{d}t+C_2\right]$，所以

$$\begin{aligned}
|y|&=\left|e^{-x}\left[\int_0^x e^{-12t}\left[\int_0^t f(u)e^{13u}\mathrm{d}u+C_1\right]\mathrm{d}t+C_2\right]\right|\\
&\leqslant e^{-x}\left[\int_0^x e^{-12t}\left[\int_0^t |f(u)|e^{13u}\mathrm{d}u+C_1\right]\mathrm{d}t+C_2\right]\\
&\leqslant e^{-x}\left[\int_0^x e^{-12t}\left[\int_0^t Me^{13u}\mathrm{d}u+C_1\right]\mathrm{d}t+C_2\right]=e^{-x}\left[\int_0^x e^{-12t}\left[\frac{M}{13}(e^{13t}-1)+C_1\right]\mathrm{d}t+C_2\right]\\
&=e^{-x}\left[\int_0^x\left[\frac{M}{13}(e^t-e^{-12t})+C_1e^{-12t}\right]\mathrm{d}t+C_2\right]\\
&=e^{-x}\left[\frac{M}{13}\cdot\left(e^x-1-\frac{1-e^{-12x}}{12}\right)+C_1\cdot\frac{1-e^{-12t}}{12}+C_2\right]\\
&=\left[\frac{M}{13}\cdot\left(1-e^{-x}-\frac{e^{-x}-e^{-13x}}{12}\right)+C_1\cdot\frac{e^{-x}-e^{-13x}}{12}+C_2e^{-x}\right]<\frac{M}{13}+\frac{M}{156}+\frac{C_1}{12}+C_2
\end{aligned}$$

其中指数函数的系数为负的全部放缩为 0，指数函数的系数为正的全部放缩为 1

四、(本题满分 14 分) 对于 4 次齐次函数

$$f(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2$$

计算曲面积分 $\displaystyle\oiint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=1$

参考解析：

由题意知

$$\oiint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma[a_1x^3+3a_4xy^2]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[a_2y^3+3a_5yz^2]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[a_3z^3+3a_6zx^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} [3a_1x^2+3a_4y^2+3a_2y^2+3a_5z^2+3a_3z_3^2+3a_6x^2]\mathrm{d}V$$

$$= \sum_{i=1}^{6} a_i \cdot \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V = \frac{4\pi}{5}\sum_{i=1}^{6} a_i$$

五、(本题满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 具有二阶连续导数，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right] = \frac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)]$$

参考解析：

记 $x_k = \dfrac{k(b-a)}{n}$，所以 $x_{k-\frac{1}{2}} = \dfrac{(2k-1)(b-a)}{2n}$，$\dfrac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$

所以 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x$, 所以原式

$$\lim_{n\to\infty} n^2\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_{k-\frac{1}{2}})]\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} n^2\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f'(x_{k-\frac{1}{2}})(x-x_{k-\frac{1}{2}}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_{k-\frac{1}{2}})^2\right]\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_1)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{1}{2}(x-x_{k-\frac{1}{2}})^2\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} n^2\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_1)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{(b-a)^3}{24}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{24}\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_1) = \frac{(b-a)^2}{24}\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2[f'(b)-f'(a)]}{24}$$

六、(本题满分 14 分) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为正实数列，满足 $a_1=b_1=1$，且 $b_n = a_nb_{n-1}-2(n=2,3,\cdots)$，$\{b_n\}$ 有界，证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛，并求出该级数的和

参考解析：

由题意知 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n} - \dfrac{b_{n-1}}{a_1a_2\cdots a_{n-1}} = -\dfrac{2}{a_1a_2\cdots a_n}$

并且数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n}\right\}$ 单调递减有下界 0，所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n}$ 存在，记 $c_n = \dfrac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n}$

所以 $\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n} = \dfrac{c_{n-1}-c_n}{2}$，此时 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n} = 0$，因为 $\{b_n\}$ 有界，所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛，并且级数的和为 $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{c_1-\lim\limits_{n\to\infty} c_n}{2} = \dfrac{3}{2}$

(灵感来源于峰哥)