1. 数列极限的 Stolz 定理

$\frac{*}{\infty}$ 型

设有数列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 其中 $\{x_n\}$ 严格增,且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ (注意:不必 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$),若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a \quad (\text{实数},+\infty,-\infty)$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

Proof:

(1) a 为实数

$\forall\varepsilon>0,\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a,\therefore\exists N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时,有

$$\left|\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

即

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n-x_{n-1})<y_n-y_{n-1}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n-x_{n-1})$$

类推有

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n-1}-x_{n-2})<y_{n-1}-y_{n-2}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n-1}-x_{n-2})$$

$$\cdots\cdots$$

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(x_{N_1+1}-x_{N_1}\right)<y_{N_1+1}-y_{N_1}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(x_{N_1+1}-x_{N_1}\right)$$

将上面各式相加得

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(x_n-x_{N_1}\right)<y_n-y_{N_1}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(x_n-x_{N_1}\right)$$

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{y_n-y_{N_1}}{x_n-x_{N_1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}$$

对固定的 $N_1,\because \lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty,\therefore\exists N>N_1$, s.t. 当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{y_{N_1}-ax_{N_1}}{x_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad 0<\frac{x_{N_1}}{x_n}<1$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{y_n}{x_n}-a\right| &= \left|\frac{y_{N_1}-ax_{N_1}}{x_n}+\left(1-\frac{x_{N_1}}{x_n}\right)\left(\frac{y_n-y_{N_1}}{x_n-x_{N_1}}-a\right)\right| \\ &\leqslant \left|\frac{y_{N_1}-ax_{N_1}}{x_n}\right|+\left|\frac{y_n-y_{N_1}}{x_n-x_{N_1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a$$

上面的恒等变形:

$$\frac{y_n}{x_n}-a=\frac{y_{N_1}-ax_{N_1}}{x_n}+\left(1-\frac{x_{N_1}}{x_n}\right)\left(\frac{y_n-y_{N_1}}{x_n-x_{N_1}}-a\right)$$

可以利用两个分式拼凑而来

$$\frac{b}{c}=\frac{e}{c}\cdot\frac{d}{e}+\frac{b-d}{c}$$

只需把 $\frac{y_n}{x_n}-a$ 和 $\frac{y_n-y_{N_1}}{x_n-x_{N_1}}-a$ 化为分式,套用上述关系即可得到上面的恒等式.

(2) $a=+\infty$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a=+\infty, \therefore \exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, $\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}>1, y_n-y_{n-1}>x_n-x_{n-1}>0$

即 $\{y_n\}$ 严格增.又由于

$$\begin{aligned}y_n-y_N &= (y_n-y_{n-1})+(y_{n-1}-y_{n-2})+\cdots+(y_{N+1}-y_N) \\ &> (x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_{N+1}-x_N) \\ &= x_n-x_N\end{aligned}$$

根据 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 知 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$. 应用 (1) 的结果得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}1\Big/\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}1\Big/\frac{x_n}{y_n}=+\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

(3) $a=-\infty$

由 (2) 知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{-y_n}{x_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-y_n)-(-y_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} \\ &= -\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=+\infty\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{-y_n}{x_n}=-\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

$\frac{0}{0}$ 型

设数列 $\{x_n\}$ 严格减，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a \quad (实数, +\infty, -\infty)$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

Proof:

(1) a **为实数**

$\forall \epsilon > 0, \because \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n=1}} = a, \therefore \exists N \in \mathbb{N}$,当 $n > N$ 时,有

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} < a + \frac{\varepsilon}{2}, \quad x_n - x_{n+1} > 0$$

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n - x_{n+1}) < y_n - y_{n+1} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n - x_{n+1})$$

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(x_n - x_{n+p}\right) < y_n - y_{n+p} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(x_n - x_{n+p}\right)$$

令 $p \to +\infty$, 则由 $x_{n+p} \to 0, y_{n+p} \to 0$, 得到

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) x_n \leqslant y_n \leqslant \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) x_n$$

由于 $x_n > 0$, 有

$$a - \varepsilon < a - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{y_n}{x_n} \leqslant a + \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a$$

(2) $a = +\infty$

$\forall A > 0. \because \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n=1}} = +\infty, \therefore N \in \mathbb{N}$,当 $n > N$ 时,有

$$\frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_n + 1} > 2A$$

类似上述论证有

$$y_n - y_{n+p} > 2A\left(x_n - x_n + p\right)$$

令 $p \to +\infty$, 则由 $x_{n+p} \to 0, y_{n+p} \to 0$, 得到

$$y_n \geqslant 2Ax_n, \quad \frac{y_n}{x_n} \geqslant 2A > A$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$$

(3) $a = -\infty$

类似 (2) 的证明或将 (2) 的结论应用到 $\{y_n\}$ 即得.

$\frac{*}{\infty}$ 型推广

设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足:

(1) $\exists$ 正整数 p, N_0,s.t.$y_n < y_{n+p}, n \geqslant N_0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+p}-x_n}{y_{n+p}-y_n} = A$ (其中 A 为有限数,$+\infty, -\infty$)

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+p}-x_n}{y_{n+p}-y_n}$

Proof:

首先注意到对任意的自然数 n, 都存在自然数 m, i, 使得 $n = mp + i, 0 \leqslant \leqslant p-1$,

且满足 $n \to \infty \Leftrightarrow m \to \infty$

(1) 若 A 为有限数.根据数列极限与其子列极限的关系知,对于任意的 $0 \leqslant i \leqslant p-1$, 都有

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x_{(m+1)p+i} - x_{mp+i}}{y_{(m+1)p+i} - y_{mp+i}} = A$$

由极限定义知,对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $m \geqslant N$ 时,有

$$A - \varepsilon < \frac{x_{(m+1)p+i} - x_{mp+i}}{y_{(m+1)p+i} - y_{mp+i}} < A + \varepsilon$$

又根据已知条件,总有 $y_{(m+1)p+i} > y_{mp+i}$, 从而得到一连串不等式

$$A - \varepsilon < \frac{x_{mp+i} - x_{(m-1)p+i}}{y_{mp+i} - y_{(m-1)p+i}} < A + \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < \frac{x_{(m-1)p+i} - x_{(m-2)p+i}}{y_{(m-1)p+i} - y_{(m-2)p+i}} < A + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$A - \varepsilon < \frac{x_{(N+1)p+i} - x_{Np+i}}{x_{(N+1)p+i} - x_{Np+i}} < A + \varepsilon$$

利用比例性质,可得

$$A - \varepsilon < \frac{x_{mp+i} - x_{Np+i}}{y_{mp+i} - y_{Np+i}} < A + \varepsilon$$

注意到

$$\frac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}} - A = \frac{y_{mp+i} - y_{Np+i}}{y_{mp+i}} \cdot \left(\frac{x_{mp+i} - x_{Np+i}}{y_{mp+i} - y_{Np+i}} - A \right) + \frac{x_{Np+i} - Ay_{Np+i}}{y_{mp+i}}$$

由三角不等式即得

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}} = A, \quad 0 \leqslant i \leqslant p-1$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

(2) 若 $A = +\infty$, 则当 n 足够大时,有 $x_{n+p} - x_n > y_{n+p} - y_n > 0$

于是由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$ 易知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+p}-y_n}{x_{n+p}-x_n}=0$

由 (1) 的证明可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=+\infty$

(3) 若 $A=-\infty$, 令 $z_n=-x_n$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_{n+p}-z_n}{y_{n+p}-y_n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+p}-x_n}{y_{n+p}-y_n}=+\infty$$

由 (2) 的证明,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{y_n}=+\infty$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=-\infty$

$\frac{0}{0}$ 型推广

设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足:

(1) $\exists$ 正整数 $p,N_0,\text{s.t.}\,y_n>y_{n+p},n\geqslant N_0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n+p}}{y_n-y_{n+p}}=A$ (其中 A 为有限数,$+\infty,-\infty$)

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n+p}}{y_n-y_{n+p}}$

Proof:

首先注意到对任意的自然数 n, 都存在自然数 m,i, 使得 $n=mp+i,0\leqslant\leqslant p-1$,

且满足 $n\to\infty\Leftrightarrow m\to\infty$

(1) 若 A 为有限数.根据数列极限与其子列极限的关系知,对于任意的 $0\leqslant i\leqslant p-1$, 都有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{x_{mp+i}-x_{(m+1)p+i}}{y_{mp+i}-y_{(m+1)p+i}}=A$$

注意到,总有 $y_{mp+i}>y_{(m+1)p+i}$, 由极限定义知,对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $m\geqslant N$ 时,有

$$A-\varepsilon<\frac{x_{mp+i}-x_{(m+1)p+i}}{y_{mp+i}-y_{(m+1)p+i}}<A+\varepsilon$$

从而得到一连串不等式

$$A-\varepsilon<\frac{x_{mp+i}-x_{(m-1)p+i}}{y_{mp+i}-y_{(m-1)p+i}}<A+\varepsilon$$

$$A-\varepsilon<\frac{x_{(m+1)p+i}-x_{(m+2)p+i}}{y_{(m+1)p+i}-y_{(m+2)p+i}}<A+\varepsilon$$

$$\vdots$$

$$A-\varepsilon<\frac{x_{(m+k-1)p+i}-x_{(m+k)p+i}}{y_{(m+k-1)p+i}-y_{(m+k)p+i}}<A+\varepsilon$$

利用比例性质,可得

$$A-\varepsilon<\frac{x_{mp+i}-x_{(m+k)p+i}}{y_{mp+i}-y_{(m+k)p+i}}<A+\varepsilon$$

固定 m, 令 $k\to\infty$, 对上式取极限,有

$$A-\varepsilon\le\frac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}\le A+\varepsilon\Rightarrow A-\varepsilon\le\varliminf_{m\to\infty}\frac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}\le\varlimsup_{m\to\infty}\frac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}\le A+\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性,有

$$\varliminf_{m\to\infty}\frac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}=\varlimsup_{m\to\infty}\frac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}=A$$

从而

$$\lim_{m\to\infty}\frac{x_{mp+i}}{y_{mp+i}}=A,\quad 0\le i\le p-1$$

于是由数列与其子列的关系知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A$$

(2) 若 $A=+\infty$, 则当 n 足够大时,有 $x_n-x_{n+p}>y_n-y_{n+p}>0$

即 n 足够大时 $x_n>x_{n+p}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n+p}}{x_n-x_{n+p}}=0$

由 (1) 的证明可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=+\infty$

(3) 若 $A=-\infty$, 令 $z_n=-x_n$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n-z_{n+p}}{y_n-y_{n+p}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n+p}}{y_n-y_{n+p}}=+\infty$$

由 (2) 的证明,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{y_n}=+\infty$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=-\infty$

Question 1

设 $0<x_1<1, x_{n+1}=x_n(1-x_n)(n=1,2,3,\cdots)$.证明: $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$.

进而设 $0<x_1<\dfrac{1}{q}$, 其中 $0<q\leqslant 1$, 并且 $x_{n+1}=x_n(1-qx_n), n\in\mathbb{N}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\frac{1}{q}$.

Proof:

易见 $0<x_n<1$, 且 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)<x_n$

于是 $\{x_n\}$ 单调减少且有界,从而 $\{x_n\}$ 收敛,设其极限为 A. 对递推公式取极限得到 $A=A(1-A)$. 因此, $A=0$.即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

进一步,由 Stolz 定理,有:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^{-1}}{n}&=\lim_{n\to+\infty}\left(x_{n+1}^{-1}-x_n^{-1}\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n+1}}{x_nx_{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^2}{x_n^2(1-x_n)}=1\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=1$$

进一步,考虑 $0<q\leqslant 1, x_{n+1}=x_n(1-qx_n)$ 的情形.

令 $y_n=qx_n$, 则 $y_1=qx_1, 0<y_1<1$, 且

$$y_{n+1}=qx_{n+1}=qx_n(1-qx_n)=y_n(1-y_n)$$

由前面的证明知 $\lim\limits_{n\to\infty}ny_n=1$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_nq=1, q\neq 0$. 故

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{ny_n}{q}=\frac{1}{q}$$

Question 2

设数列 $\{x_n\}$ 使得 $\{2x_{n+1}+x_n\}$ 收敛,证明: $\{x_n\}$ 收敛

Proof:

设 $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_{n+1}+x_n)=A$, 令 $y_n=x_n-\frac{A}{3}$.
则 $\lim\limits_{n\to\infty}(2y_{n+1}+y_n)=0$. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(-1)^n y_n&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(-2)^n y_n}{2^n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(-2)^{n+1}y_{n+1}-(-2)^n y_n}{2^{n+1}-2^n}=\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\left(2y_{n+1}+y_n\right)=0\end{aligned}$$

由此即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{A}{3}$

Question 3

设正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\frac{a_{n+1}^2}{n}+a_{n+1},n\in\mathbb{N}^+$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ln n$.

Sol1.:

依题意得

$$a_n=\frac{a_{n+1}^2}{n}+a_{n+1}>a_{n+1}$$

所以 $\{a_n\}$ 严格单调递减,又 $\{a_n\}$ 有下界 0, 故 $\{a_n\}$ 收敛.

由

$$a_n=\frac{a_{n+1}^2}{n}+a_{n+1}$$

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}\left(\frac{a_{n+1}}{n}+1\right)}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{\frac{1}{n}}{\frac{a_{n+1}}{n}+1}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}+n}$$

即

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}+n}$$

故由 Stolz 定理知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}}{\ln n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}}{\ln(n+1)-\ln n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(a_{n+1}+n)\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a_{n+1}}{n}+1}\\&=1\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}a_n\ln n=1$$

Sol2.:

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A \geqslant 0$

若 $A > 0$, 则

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{a_{n+1}^2}{n} < -\frac{A^2}{n}$$

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) + a_1 = -A^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + a_1$$

由于调和级数是发散的,故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

矛盾,故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

又

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{n} + 1$$

两边取极限知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$$

故由 Stolz 定理知

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n \ln n &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\frac{1}{a_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}a_n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{a_n - a_{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Question 4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Solution:

由 Stolz 定理知

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n\to\infty} e^{\ln\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n\ln n-\ln n!}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{(n+1)\ln(n+1)-\ln(n+1)!-n\ln n+\ln n!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \\
&= e
\end{aligned}$$

Question 5

设 $a_1=1, a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{a_{n-1}}, n\geqslant 2.$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$;并计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\left(a_n-\sqrt{2n}\right)}{\ln n}$.

Solution:

显然 $\{a_n\}$ 严格单调递增,故要么 $\{a_n\}$ 存在有限极限,要么 $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 若 $\{a_n\}$ 存在有限极限 $a(a>0)$, 则在递推公式两边取极限得

$$a=a+\frac{1}{a}$$

这对任何有限数 a 都不可能成立,矛盾,故

$$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-a_{n-1}^2}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{a_{n-1}^2}\right)=2$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(a_n-\sqrt{2n}\right)}{\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{a_n+\sqrt{2n}}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-2n}{\ln n}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a_n^2-2n\right)-\left(a_{n-1}^2-2n+2\right)}{\ln n-\ln(n-1)}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{a_{n-1}^2}-2}{\frac{1}{n}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

Question 6

设 $a_n>0$, 且 $a_{n+1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}$.

Solution:

显然 $\{a_n\}$ 严格单调递减,若 $\{a_n\}$ 有上界,

则由单调有界定理知, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,设为 $A(A>0)$

在递推关系式两边取极限得

$$A-\frac{1}{A}=A+\frac{1}{A}$$

这对任何 A 都不可能成立,故 $\{a_n\}$ 无上界, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\infty$.

故由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{a_k}\right)^2-\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^2}{(n+1)-n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + 2\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}{a_{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}}{a_{n+1}-a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}-a_n} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

故

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1
$$

Question 7

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln C_n^k}{n^2}$$

Solution:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln C_n^k}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln C_n^k}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln C_{n+1}^k + 0 - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln C_n^k}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln \frac{C_{n+1}^k}{C_n^k}}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln \frac{n+1}{n-k+1}}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln \frac{n+1}{n-k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln \frac{n}{n-k}}{2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln \frac{n+1}{n}}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Question 8

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\frac{n!(n-1)!\cdots 2!}{n^n (n-1)^{n-1}\cdots 2^2}}$$

Solution:

$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1)$

$$\text{原式} = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\ln k! - \sum\limits_{k=2}^{n}\ln k^k}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\ln k! - \sum\limits_{k=2}^{n}\ln k^k}{n^2} \xlongequal{Stolz} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n! - \ln n^n}{2n-1}$$
$$\xlongequal{Stirling} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}\cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{2n-1} = -\frac{1}{2}$$

Question 9

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 = 1$.证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n = 1$.

Proof:

设 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$, 显然 $\{S_n\}$ 单调增.下证 $S_n \to +\infty (n\to+\infty)$. 事实上,若 $S_n \to S$ (有限),则 $a_n^2 = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0 (n\to+\infty)$,从而, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n\sum_{i=1}^{n}a_i^2 = \lim_{n\to+\infty} a_nS_n = 0\cdot S = 0$$

这与题设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 = 1$ 相矛盾,于是

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i^2 = +\infty$$

再由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_nS_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 = 1$,知

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(a_n\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\cdot\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2} = 1\cdot 0 = 0$$

考虑到

$$\begin{aligned}
S_n^3 - S_{n-1}^3 &= (S_n - S_{n-1})\left(S_n^2 + S_nS_{n-1} + S_{n-1}^2\right)\\
&= a_n^2\left[S_n^2 + S_n\left(S_n - a_n^2\right) + \left(S_n - a_n^2\right)^2\right]\\
&= 3\left(a_nS_n\right)^2 - 3a_n^4S_n + a_n^6\\
&= 3\left(a_n\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2 - 3a_n^3\left(a_n\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right) + a_n^6\\
&\to 3\times 1 - 3\times 0\times 1 + 0 = 3 \quad (n\to+\infty)
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3na_n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(a_nS_n)^3}\cdot\frac{S_n^3}{3n}$$

$$\xlongequal{Stolz} \lim_{n\to\infty} \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

即

$$\lim_{n\to+\infty} 3na_n^3 = 1$$

Question 10

设 $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, n = 0, 1, 2, \cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$

Proof:

由 $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$ 两边平方得

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2 \geqslant a_n^2 + 2$$

$$a_1^2 \geqslant a_0^2 + 2$$

$$a_2^2 \geqslant a_1^2 + 2$$

$$\vdots$$

$$a_n^2 \geqslant a_{n-1}^2 + 2$$

$$a_{n+1}^2 \geqslant a_n^2 + 2$$

各式相加后有

$$a_{n+1}^2 \geqslant a_0^2 + 2(n+1) = 2n+3$$

即

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

再代入 $a_{n+1}^2 = a_n^2 + \dfrac{1}{a_n^2} + 2 \leqslant a_n^2 + \dfrac{1}{2n+1} + 2$

$$a_1^2 \leqslant a_0^2 + 1 + 2$$

$$a_2^2 \leqslant a_1^2 + \frac{1}{3} + 2$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1}^2 \leqslant a_{n-2}^2 + \frac{1}{2n-3} + 2$$

$$a_n^2 \leqslant a_{n-1}^2 + \frac{1}{2n-1} + 2$$

各式相加后有

$$a_n^2 \leqslant a_0^2 + 2n + \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

故

$$2n+1 \leqslant a_n^2 \leqslant 2n+1 + \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$1 \leqslant \frac{a_n^2}{2n+1} \leqslant 1 + \frac{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{n}$$

由夹逼定理知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2}{2n+1} = 1$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n} = 1 \times 1 = 1$$

由此立即有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$$

Question 11

若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛，$\alpha > 0$，证明：

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^\alpha} = 0$$

Proof1:

设 $r_n = \frac{a_n}{n^\alpha} + \frac{a_{n+1}}{(n+1)^\alpha} + \cdots$，则 $r_n \to 0 (n\to\infty)$，且 $r_n - r_{n+1} = \frac{a_n}{n^\alpha}$
从而 $a_n = n^\alpha (r_n - r_{n+1})$，在原极限中代入 r_n，得

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha (r_1 - r_2) + 2^\alpha (r_2 - r_3) + \cdots + n^\alpha (r_n - r_{n+1})}{n^\alpha} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1^\alpha r_1 + (2^\alpha - 1^\alpha) r_2 + \cdots + (n^\alpha - (n-1)^\alpha) r_n}{n^\alpha} - r_{n+1} \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{((n+1)^\alpha - n^\alpha) r_{n+1}}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} - r_{n+1} \right] = 0
\end{aligned}$$

Proof2:

设 $b_n = \frac{a_n}{n^\alpha}, p_n = n^\alpha$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n^\alpha} = \frac{p_1 b_1 + p_2 b_2 + \ldots + p_n b_n}{p_n}$$

由 Abel 变换有

$$p_1 b_1 + p_2 b_2 + \ldots + p_n b_n = \sum_{k=1}^{n-1} (p_k - p_{k+1}) B_k + p_n B_n$$

然后利用 Stolz 定理

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} B_k (p_k - p_{k+1})}{p_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} B_k (p_k - p_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (p_k - p_{k+1})}{p_{n+1} - p_n} = \lim_{n\to\infty} (-B_n)
\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1b_1+p_2b_2+\ldots+p_nb_n}{p_n}=\lim_{n\to\infty}(-B_n)+\lim_{n\to\infty}B_n=0$$

Question 12

任意给定 $k\in\mathbb{N}^+$, 则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^{k-1}|\cos t|\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^{k-1}|\sin t|\mathrm{d}t}{x^k}=\frac{2}{k\pi}$$

Proof:

当 x 充分大时,存在 $n\in\mathbb{N}^+$ 使得 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$, 故

$$\frac{\int_0^{n\pi} t^{k-1}|\cos t|\mathrm{d}t}{(n+1)^k\pi^k}\leqslant\frac{\int_0^x t^{k-1}|\cos t|\mathrm{d}t}{x^k}\leqslant\frac{\int_0^{(n+1)\pi} t^{k-1}|\cos t|\mathrm{d}t}{n^k\pi^k}$$

令 $A_n(k)=\displaystyle\int_0^{n\pi} t^{k-1}|\cos t|\mathrm{d}t, B_n(k)=(n+1)^k\pi^k, n,k=1,2,\cdots$

易知对于固定的 $k\in\mathbb{N}^+,\{B_n(k)\}$ 单调递增,且 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n(k)=+\infty$. 由 Stolz 定理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{n\pi} t^{k-1}|\cos t|\mathrm{d}t}{(n+1)^k\pi^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^{k-1}|\cos t|\mathrm{d}t}{\left((n+2)^k-(n+1)^k\right)\pi^k}$$

$$\frac{(n\pi)^{k-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\cos t|\mathrm{d}t}{\left[((n+1)+1)^k-(n+1)^k\right]\pi^k}\leqslant\frac{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^{k-1}|\cos t|\mathrm{d}t}{\left((n+2)^k-(n+1)^k\right)\pi^k}\leqslant\frac{(n+1)^{k-1}\pi^{k-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\cos t|\mathrm{d}t}{\left[((n+1)+1)^k-(n+1)^k\right]\pi^k}$$

易知

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=2$$

当充分大时利用近似公式

$$(1+1/(n+1))^k\approx 1+k/(n+1)$$

可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{2(n\pi)^{k-1}}{\left[((n+1)+1)^k-(n+1)^k\right]\pi^k}\\
=&\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1}\frac{1}{(n+1)\left((1+1/(n+1))^k-1\right)}\\
=&\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^{k-1}\frac{1}{(n+1)(1+k/(n+1)-1)}\\
=&\frac{2}{k\pi}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^{k-1}\pi^{k-1}}{\left[((n+1)+1)^k-(n+1)^k\right]\pi^k}=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\left((1+1/(n+1))^k-1\right)}=\frac{2}{k\pi}$$

由夹逼定理即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^{k-1}|\cos t|\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^{k-1}|\sin t|\mathrm{d}t}{x^k}=\frac{2}{k\pi}$$

Question 13

设 $f(t)$ 是非负可积的周期函数,其最小正周期为 T, 且 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = a$, 则对任意给定的 $k\in\mathbb{N}^+$, 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^{k-1}f(t)\mathrm{d}t}{x^k}=\frac{a}{kT}$$

Proof:

当 x 充分大时,存在 $n\in\mathbb{N}^+$ 使得 $nT\leqslant x<(n+1)T$, 故

$$\frac{\int_0^{nT} t^{k-1}f(t)\mathrm{d}t}{(n+1)^kT^k}\leqslant\frac{\int_0^x t^{k-1}f(t)\mathrm{d}t}{x^k}\leqslant\frac{\int_0^{(n+1)T} t^{k-1}f(t)\mathrm{d}t}{n^kT^k}$$

令 $X_n(k)=\int_0^{nT} t^{k-1}f(t)\mathrm{d}t, Y_n(k)=(n+1)^kT^k, n,k=1,2,\cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{nT} t^{k-1}f(t)\mathrm{d}t}{(n+1)^kT^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{nT}^{(n+1)T} t^{k-1}f(t)\mathrm{d}t}{(nT+2T)^k-(nT+T)^k}$$

利用积分的单调性有

$$\frac{(nT)^{k-1}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t}{\left[(n+2)^k-(n+1)^k\right]T^k}\leqslant\frac{\int_{nT}^{(n+1)T} t^{k-1}f(t)\mathrm{d}t}{(nT+2T)^k-(nT+T)^k}\leqslant\frac{(n+1)T^{k-1}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t}{\left[(n+2)^k-(n+1)^k\right]T^k}$$

$\because f(t\pm T)=f(t),\forall t\in\mathbb{R}$. 故令 $t=nT+u$, 则

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(u)\mathrm{d}u=a$$

因此,当 n 充分大时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(nT)^{k-1}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t}{\left[(n+2)^k-(n+1)^k\right]T^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)T)^{k-1}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t}{\left[(n+2)^k-(n+1)^k\right]T^k}=\frac{a}{kT}$$

由夹逼定理即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^{k-1}f(t)\mathrm{d}t}{x^k}=\frac{a}{kT}$$

Question 14

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^3|\sin t+\cos t|\mathrm{d}t}{x^4}$$

Solution:

此时 $k=4, f(t)=|\sin t+\cos t|$ 是非负可积周期函数,且最小正周期为 π, 计算得

$$a=\int_0^\pi|\sin t+\cos t|\mathrm{d}t=\int_0^{3\pi/4}\sin(t+\pi/4)\mathrm{d}t-\int_{3\pi/4}^{\pi}\sin(t+\pi/4)\mathrm{d}t=2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^3|\sin t+\cos t|\mathrm{d}t}{x^4}=\frac{2\sqrt{2}}{4\pi}$$

Question 15

设 $f(x)$ 是非负可积的周期函数,其最小正周期为 T, 且 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = a$, 正值函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,且 $g(x)$ 与 $g'(x)$ 均单调递增, $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)$ 存在且不为零,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x g'(t)f(t)\mathrm{d}t}{g(x)}=\frac{a}{T}$$

Proof:

当 x 充分大时,存在 $n\in\mathbb{N}^+$ 使得 $nT\leqslant x<(n+1)T$, 故

$$g(nT)\leqslant g(x)\leqslant g((n+1)T)$$

$$\frac{\int_0^{nT} g'(t)f(t)\mathrm{d}t}{g((n+1)T)}\leqslant\frac{\int_0^{x} g'(t)f(t)\mathrm{d}t}{g(x)}\leqslant\frac{\int_0^{(n+1)T} g'(t)f(t)\mathrm{d}t}{g(nT)}$$

令 $X_n=\int_0^{nT} g'(t)f(t)\mathrm{d}t, Y_n=g((n+1)T), n,k=1,2,\cdots$,由 Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{n^7} g'(t)f(t)\mathrm{d}t}{g((n+1)T)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{nT}^{(n+1)T} g'(t)f(t)\mathrm{d}t}{g((n+2)T)-g((n+1)T)}$$

由导函数的单调性有

$$\frac{g'(nT)\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t}{g((n+2)T)-g((n+1)T)}\leqslant\frac{\int_{nT}^{(n+1)T} g'(t)f(t)\mathrm{d}t}{g((n+2)T)-g((n+1)T)}\leqslant\frac{g'((n+1)T)\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t}{g((n+2)T)-g((n+1)T)}$$

由题设条件,不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=A>0$, 取数列 $z_n=(n+1)T$, 显然 $z_n\to+\infty(n\to\infty)$, 由海涅定理必有

$$\lim_{n\to\infty} g'(z_n)=\lim_{n\to\infty} g'((n+1)T)=A$$

另一方面,由 Lagrange 中值定理知,必 $\exists\xi\in((n+1)T,(n+2)T)$, 使得

$$g((n+2)T)-g((n+1)T)=g'(\xi)T$$

显然, $n\to\infty\Leftrightarrow\xi\to\infty$, 当然也有 $\lim\limits_{n\to\infty} g'(\xi)=\lim\limits_{\xi\to\infty} g'(\xi)=A$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g'((n+1)T)}{g((n+2)T)-g((n+1)T)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} g'((n+1)T)}{\lim\limits_{n\to\infty} g'(\xi)T}=\frac{A}{AT}=\frac{1}{T}$$

又 $\displaystyle\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(u)\mathrm{d}u=a$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g'((n+1)T)\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t}{g((n+2)T)-g((n+1)T)}=\frac{a}{T}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g'(nT)\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t}{g((n+2)T)-g((n+1)T)}=\frac{a}{T}$$

由夹逼定理即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x g'(t)f(t)\mathrm{d}t}{g(x)}=\frac{a}{T}$$

Question 16

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}|\sin t+\cos t|\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$$

Solution:

令 $f(x)=|\sin x+\cos x|, g(x)=\sqrt{x^2+1}, \forall x\in[0,+\infty)$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在,故不适用于 L'Hospital 法则

显然,正值函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,且满足

$$g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 0, g''(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}>0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1\neq 0$$

故 $g(x)$ 与 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上均单调递增, $T=\pi, a=2\sqrt{2}$, 由上例有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}|\sin t+\cos t|\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

Question 17

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot\left(\ln 2-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$ 的极限不存在.

Proof:

记

$$a_n=\frac{\ln 2-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}}{\frac{1}{n}}$$

分别考虑 $\{a_{2n}\},\{a_{2n+1}\}$ 的极限. 依 0/0 型的 Stolz 定理, 有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{2n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2-\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}}{\frac{1}{2n}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\ln 2-\sum\limits_{k=1}^{2(n+1)}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)-\left(\ln 2-\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)}{\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2n}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}}{\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2n}}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2-\sum\limits_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}}{\frac{1}{2n+1}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\ln 2-\sum\limits_{k=1}^{2(n+1)+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)-\left(\ln 2-\sum\limits_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)}{\frac{1}{2(n+1)+1}-\frac{1}{2n+1}}
\end{aligned}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}}{\frac{1}{2(n+1)+1}-\frac{1}{2n+1}}=-\frac{1}{2},$$

这表明 $\{a_{2n}\},\{a_{2n+1}\}$ 收敛于不同极限，所以 $\{a_n\}$ 不收敛.

Question 18

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{3}}+\cdots n^{\frac{1}{n}}}{n}$$

Solution:

当 $k\geqslant 2$ 时,依均值不等式有

$$1\le n^{\frac{1}{k}}=(\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{k-2\text{ terms}}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n})^{\frac{1}{k}}\le\frac{k-2+2\sqrt{n}}{k}\le 1+\frac{2\sqrt{n}}{k}$$

所以

$$\begin{aligned}1+\frac{n-1}{n}\le 1+\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}n^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}n^{\frac{1}{k}}&\\&=1+\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}n^{\frac{1}{k}}\le 1+\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(1+\frac{2\sqrt{n}}{k}\right)\\&=1+\frac{n-1}{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

其中,依 Stolz 定理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{n}=0$$

依夹逼定理

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{3}}+\cdots n^{\frac{1}{n}}}{n}=2$$

Question 19

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{kn}$$

Solution:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{kn}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{2n}}=\frac{2}{3}$$

Question 20

设有数列 $\{x_n\}$, 若 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在或为 $\pm\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}=\lim_{n\to\infty}x_n$

Proof:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{x_k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}{n+1-n}}=\lim_{n\to\infty}x_n$$

Question 21

设有正数数列 $\{x_n\}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在或为 $+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

Proof:

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}<\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

由 Stolz 定理,夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n$$

Question 22

设有正数数列 $\{x_n\}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}$

Proof:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}$$

Question 23

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Solution:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}=e^{-1}$$

Question 24

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}}{n}$

Solution:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n!}{n!n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n!}{n!n^n}}{\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n-2)}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\frac{4}{e}$$

Question 25

设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数,满足 $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, 证明: $c_n>0(n\geqslant 0)$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在,且等于 $f(x)$ 的最小根.

Solution:

不妨设 $f(x)$ 的全部根为 $0<a_1<a_2<\cdots<a_k$, 这样

$$f(x)=A(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k}$$

其中 r_i 为对应根 a_i 的重数 $(i=1,\cdots,k,r_k\geqslant 1)$

$$f'(x)=Ar_1(x-a_1)^{r_1-1}\cdots(x-a_k)^{r_k}+\cdots+Ar_k(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k-1}=f(x)\left(\frac{r_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{r_k}{x-a_k}\right)$$

$$-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{r_1}{a_1}\frac{1}{1-\frac{x}{a_1}}+\cdots+\frac{r_k}{a_k}\frac{1}{1-\frac{x}{a_k}}$$

若 $|x|<a_1$, 则

$$-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{r_1}{a_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a_1}\right)^n+\cdots+\frac{r_k}{a_k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a_k}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{a_1^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{a_k^{n+1}}\right)x^n$$

而 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, 由幂级数的唯一性知

$$c_n=\frac{r_1}{a_1^{n+1}}+\ldots+\frac{r_k}{a_k^{n+1}}>0$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=\frac{\frac{r_1}{a_1^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{a_k^{n+1}}}{\frac{r_1}{a_1^{n+2}}+\cdots+\frac{r_k}{a_k^{n+2}}}=a_1\cdot\frac{r_1+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+1}r_k}{r_1+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=a_1\frac{r_1+0+\cdots+0}{r_1+0+\cdots+0}=a_1>0$$

2. 函数极限的 Stolz 定理

$\frac{*}{\infty}$ 型

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 有定义，T 是一个正常数,且满足:

(1)$g(x+T) > g(x), \forall x \geqslant a$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$;

(3)$f(x), g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)} = A$(A 可以是有限数，$+\infty$ 或 $-\infty$).

则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Proof:

(i) 当 A 为有限数时,由

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)} = A$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 (M \geq a), \forall x > M$,有

$$\left| \frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)} - A \right| < \varepsilon$$

由题意,进而有

$$(A-\varepsilon)[g(x+T)-g(x)] < f(x+T)-f(x) < (A+\varepsilon)[g(x+T)-g(x)] \qquad (*)$$

$\forall x \in (M, M+T], \forall n \in \mathbb{N}^+$,有 $x+nT > M$，由 $(*)$ 式，依次有

$$(A-\varepsilon)[g(x+2T)-g(x+T)] < f(x+2T)-f(x+T) < (A+\varepsilon)[g(x+2T)-g(x+T)]$$

$$(A-\varepsilon)[g(x+3T)-g(x+2T)] < f(x+3T)-f(x+2T) < (A+\varepsilon)[g(x+3T)-g(x+2T)]$$

$$\cdots\cdots$$

$$(A-\varepsilon)[g(x+nT)-g(x+(n-1)T)] < f(x+nT)-f(x+(n-1)T) < (A+\varepsilon)[g(x+nT)-g(x+(n-1)T)]$$

将各式相加,得到

$$(A-\varepsilon)[g(x+nT)-g(x)] < f(x+nT)-f(x) < (A+\varepsilon)[g(x+nT)-g(x)]$$

注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$，故 $g(x+nT) > 0$，有

$$(A-\varepsilon)\left[1-\frac{g(x)}{g(x+nT)}\right] + \frac{f(x)}{g(x+nT)} < \frac{f(x+nT)}{g(x+nT)} < (A+\varepsilon)\left[1-\frac{g(x)}{g(x+nT)}\right] + \frac{f(x)}{g(x+nT)}$$

由于 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$,故

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{g(x)}{g(x+nT)}\right)=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{g(x+nT)}=0$$

故对上述 $\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N,\forall x\in(M,M+T]$, 有

$$\left|\frac{f(x+nT)}{g(x+nT)}-A\right|<(A+1)\varepsilon+\varepsilon^2$$

于是, $\forall y>M+NT,\exists x_0\in(M,M+T],\exists n>N$, 使 $y=x_0+nT$

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)}-A\right|=\left|\frac{f(x_0+nT)}{g(x_0+nT)}-A\right|<(A+1)\varepsilon+\varepsilon^2$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

(ii)当 $A=+\infty$, 由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=+\infty$$

$\forall G>0,\exists M>0,\forall x>M$, 有

$$\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}>G$$

$\forall x\in(M,M+T],\forall n>\mathbb{N}^+$,有 $x+nT>M$, 所以

$$f(x+T)-f(x)>G[g(x+T)-g(x)]>0$$

$$f(x+2T)-f(x+T)>G[g(x+2T)-g(x+T)]>0$$

$$\cdots\cdots$$

$$f(x+nT)-f(x+(n-1)T)>G[g(x+nT)-g(x+(n-1)T)]>0 f(x+nT)-f(x+(n-1)T)>G[g(x+nT)-g(x+(n-1)T)]>0$$

将各式相加,得到

$$f(x+nT)-f(x)>G[g(x+nT)-g(x)]$$

$$\frac{f(x+nT)}{g(x+nT)}>G\left[1-\frac{g(x)}{g(x+nT)}\right]+\frac{f(x)}{g(x+nT)}$$

由于 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$,故

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{g(x)}{g(x+nT)}\right)=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{g(x+nT)}=0$$

故对上述 $G>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N,\forall x\in(M,M+T]$, 有

$$\frac{f(x+nT)}{g(x+nT)}>G$$

于是, $\forall y>M+NT,\exists x_0\in(M,M+T],\exists n>N$, 使 $y=x_0+nT$

$$\frac{f(y)}{g(y)}=\frac{f(x_0+nT)}{g(x_0+nT)}>G$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

(iii)当 $A=-\infty$, 只需令 $h(x)=-f(x)$, 利用 (ii) 的结果即可证明.

$\frac{0}{0}$ 型

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 有定义, T 是一个正常数,且满足:

(1)$0<g(x+T)<g(x),\forall x\geqslant a$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A$(A 可以是有限数, $+\infty$ 或 $-\infty$).

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

Proof:

(i) 当 A 为有限数时,由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A$$

$\forall\varepsilon>0,\exists M>0(M\geq a),\forall x>M$,有

$$\left|\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}-A\right|<\varepsilon$$

由题意,进而有

$$(A-\varepsilon)[g(x+T)-g(x)]>f(x+T)-f(x)>(A+\varepsilon)[g(x+T)-g(x)]\qquad(**)$$

$\forall x\in(M,M+T],\forall n\in\mathbb{N}^+$,有 $x+nT>M$, 由 $(**)$ 式, 依次有

$$(A-\varepsilon)[g(x+2T)-g(x+T)]>f(x+2T)-f(x+T)>(A+\varepsilon)[g(x+2T)-g(x+T)]$$

$$(A-\varepsilon)[g(x+3T)-g(x+2T)]>f(x+3T)-f(x+2T)>(A+\varepsilon)[g(x+3T)-g(x+2T)]$$

$$\cdots\cdots$$

$$(A-\varepsilon)[g(x+nT)-g(x+(n-1)T)]>f(x+nT)-f(x+(n-1)T)>(A+\varepsilon)[g(x+nT)-g(x+(n-1)T)]$$

将各式相加,得到

$$(A-\varepsilon)[g(x+nT)-g(x)]>f(x+nT)-f(x)>(A+\varepsilon)[g(x+nT)-g(x)]$$

注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, 且 $g(x)>0$,令$n\to\infty$, 有

$$(A-\varepsilon)g(x)\leq f(x)\leq(A+\varepsilon)g(x)$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

(ii)当 $A=+\infty$, 由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=+\infty$$

$\forall G>0,\exists M>0,\forall x>M$,有

$$\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}>G$$

类似于 $\frac{*}{\infty}$ 型的证明可得

$$f(x)-f(x+nT)>G[g(x)-g(x+nT)]$$

注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 且 $g(x)>0$,令 $n\to\infty$, 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant G$$

即证.

(iii)当 $A=-\infty$, 只需令 $h(x)=-f(x)$, 利用 (ii) 的结果即可证明.

Question 26

设函数 $f(x)$ 定义在 $(a,+\infty)$ 上,在每一个有限区间 (a,b) 上有界,并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=A$.
证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{A}{n+1}$

Proof:

令 $g(x)=x^{n+1},T=1$, 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n+C_{n+1}^2x^{n-1}+\cdots+1}=\frac{A}{n+1}$$

故有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{A}{n+1}$$

不难证明此例中若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{x^n}=A(h>0)$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{A}{h(n+1)}$$

Question 27

设函数 $f(x)$ 定义在 $(a,+\infty)$ 上,在每一个有限区间 (a,b) 上有界,并且 $f(x)\geqslant c>0$, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+h)}{f(x)}=A(h>0)$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)^{\frac{1}{x}}=A^{\frac{1}{h}}$

Proof:

令 $F(x)=\ln(f(x)),g(x)=x$, 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x+h)-F(x)}{g(x+h)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x+h)-\ln f(x)}{h}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{f(x+h)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\frac{\ln A}{h}$$

故有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(f(x))^{\frac{1}{x}}=\frac{\ln A}{h}=\ln A^{\frac{1}{h}}$$

即有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)^{\frac{1}{x}}=A^{\frac{1}{h}}$$

Question 28

设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的非负可积的周期函数,周期为 p, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x t^k f(t)dt=\frac{1}{p(k+1)}\int_0^p f(t)dt \qquad \left(k\in\mathbb{N}^+\right)$$

Proof:

令$F(x)=\displaystyle\int_0^x t^k f(t)dt, g(x)=x^{k+1}$

由积分中值定理及周期函数积分性质, $\exists\theta\in(0,1)$,使得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x+p)-F(x)}{g(x+p)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+p}t^k f(t)dt}{(x+p)^{k+1}-x^{k+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\theta p)^k\int_0^p f(t)dt}{(k+1)x^k p+C_{k+1}^2x^{k-1}p^2+\cdots+p^{k+1}}$$

进一步有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x+p)-F(x)}{g(x+p)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{\theta p}{x}\right)^k\int_0^p f(t)dt}{(k+1)p+C_{k+1}^2x^{-1}p^2+\cdots+p^{k+1}x^{-k}}=\frac{\int_0^p f(t)dt}{(k+1)p}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x t^k f(t)dt=\frac{1}{p(k+1)}\int_0^p f(t)dt$$

由上述例子不难得到:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x t^k|\sin t|dt=\frac{2}{\pi(k+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x t^k|\cos t|dt$$

Question 29

证明:若 $g'(x)\neq0$, $f(x),g(x)$ 可导, $x\in[a,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$

Proof:

只需验证 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a<+\infty)$ 上满足 $\frac{*}{\infty}$ 型 Stolz 定理条件即可,这里 $T=1$.

首先

$$g'(x)\neq0, x\in[a,+\infty)$$

由 Darboux 定理知, $g'(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内不变号,又 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

从而 $g'(x)>0$,下面验证条件:

利用 Lagrange 公式, $\forall x\in[a,+\infty),\exists\theta_x\in(0,1)$, s.t. $g(x+1)-g(x)=g'(x+\theta_x)$.

由于 $g'(x+\theta_x)>0$, 故 $g(x+1)-g(x)>0$, 即 $g(x+1)>g(x), x\in[a,+\infty)$

由条件, $f(x)$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 上可导,故 $f(x)$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 的任意子区间上有界,

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ 已由条件给出.

根据 Cauchy 中值定理, $\forall x\in[a,+\infty),\exists\theta_x\in(0,1)$, s.t.

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=\frac{f'(x+\theta x)}{g'(x+\theta_x)}=l$$

满足 $\frac{*}{\infty}$ 型 Stolz 定理条件,故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=l$$

Question 30

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\{p_n\}$ 为单调增加的正数列,且 $p_n\to+\infty(n\to+\infty)$, 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0$$

Proof:

令 $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$, 则 $a_1=A_1,a_n=A_n-A_{n-1}$,于是

$$\begin{aligned}&\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}\\=&\frac{p_1A_1+p_2(A_2-A_1)+\cdots+p_n(A_n-A_{n-1})}{p_n}\\=&\frac{A_1(p_1-p_2)+A_2(p_2-p_3)+\cdots+A_{n-1}(p_{n-1}-p_n)}{p_n}+A_n\\=&\frac{B_n}{p_n}+A_n\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$ 和 Stolz 定理有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{B_n}{p_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{B_{n+1}-B_n}{p_{n+1}}-\lim_{n\to+\infty}\frac{A_n(p_{n+1}-p_n)}{p_n-p_{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}(-A_n)=-A$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{B_n}{p_n}+A_n=0$$

Question 31

给定序列 $\{a_n\}$, 使得序列 $b_n=pa_n+qa_{n+1}$ 是收敛的,如果 $|p|<|q|$, 试证明序列 $\{a_n\}$ 收敛.

Proof:

$\because|p|<|q|,\therefore p+q\neq0,q\neq0.$设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$

若设序列 $\alpha_n=\frac{b}{P+q}-a_n,\beta_n=-\frac{b_n-b}{q}$, 再记 $\lambda=-p/q$, 则

$$\beta_n+\lambda\alpha_n=\alpha_{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\beta_n=\lim_{n\to+\infty}-\frac{b_n-b}{q}=0$$

$$\alpha_{n+1}=\beta_n+\lambda\alpha_n=\beta_n+\lambda(\beta_{n-1}+\lambda\alpha_{n-1})$$

$$\begin{aligned}&=\beta_n+\lambda\beta_{n-1}+\lambda^2\alpha_{n-1}\\&=\cdots=\beta_n+\lambda\beta_{n-1}+\lambda^2\beta_{n-2}+\lambda^{n-1}\beta_1+\lambda^n\alpha_1\\&=\frac{\beta_n\lambda^{-n}+\beta_{n-1}\lambda^{-(n-1)}+\cdots+\beta_1\lambda^{-1}+\alpha_1}{\lambda^{-n}}\end{aligned}$$

于是 $|\alpha_{n+1}|\leqslant\dfrac{\left|\beta_n\lambda^{-n}\right|+\left|\beta_{n-1}\lambda^{-(n-1)}\right|+\cdots+\left|\beta_1\lambda^{-1}\right|+|\alpha_1|}{|\lambda^{-n}|}$, 由 Stolz 定理有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\beta_n\lambda^{-n}\right|+\left|\beta_{n-1}\lambda^{-(n-1)}\right|+\cdots+\left|\beta_1\lambda^{-1}\right|+|\alpha_1|}{|\lambda^{-n}|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\beta_{n+1}\right|\cdot|\lambda|^{-(n+1)}}{|\lambda|^{(n+1)}-|\lambda|^{-n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\beta_{n+1}\right|}{1-|\lambda|}=0$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_{n+1}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$, 从而

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{b}{p+q}-\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{b}{p+q}$$

Question 32

设 $f_n(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{n+1}}, n=1,2,\cdots$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. 数列 $\{y_n\}$ 满足:

$(1)y_1=C>0$;

$(2)\dfrac{n}{n+1}\displaystyle\int_0^{y_{n+1}}f_n(x)dx=y_n$

Solution:

由条件 (2) 得 $n\left(e^{\frac{y_{n+1}}{n+1}}-1\right)=y_n$, 所以

$$\frac{y_{n+1}}{n+1}=\ln\left(1+\frac{y_n}{x}\right),x_{n+1}=\ln(1+x_n),y_n=nx_n$$

因为 $x_1=y_1=C>0$, 所以

$$x_2=\ln(1+x_1)>0$$

$$x_3=\ln(1+x_2)>0$$

$$\vdots$$

$$x_n>0$$

又 $\ln(1+x)<x(x>0)$, 所以

$$x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$$

从而 $\{x_n\}$ 是单调递减且有界的,因此 $\exists a$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

从而 $a=\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\ln(1+x_n)=\ln(1+a)$, 即 $a=0$

这说明 $\{x-n\}$ 是严格递减趋于零的,从而 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 严格递增趋于无穷,由 Stolz 定理有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}nx_n=\lim_{n\to+\infty n}\frac{n}{1/x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1/x_{n+1}-1/x_n}\\=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1/\ln(1+x_n)-1/x_n}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1/\ln(1+x)-1/x}=2\end{aligned}$$

Question 33

证明:设 $a>0, p>1$, 取 x_0 为正数使得 $0<ax_0^{p-1}<1$, 令 $x_{n+1}=x_n-ax_n^p$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{-p+1}}{n}=(p-1)a$$

Proof:

易知 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 再 Stolz 由公式和 L'Hospital 法则,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{-p+1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^{-p+1}-x_n^{-p+1}}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}x_n^{-p+1}\left[\left(1-ax_n^{p-1}\right)^{-p+1}-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-ax_n^{p-1}\right)^{-p+1}-1}{x_n^{p-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{-p+1}}{n}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-ax)^{-p+1}-1}{x}=(p-1)a$$

若把条件 $0<ax_0^{p-1}<1$ 换成 $\lim_{n\to\infty}x_0=0$, 结论仍然成立.

推论:设 $f(x)$ 是一个正的连续函数,常数 $p>1$ 满足 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^p}=a\neq 0$, 令 $x_{n+1}=x_n-f(x_n)$,如果 $\{x_n\}$ 为正数列且收敛于 0, 有 $\lim_{n\to\infty}nx_n^{p-1}=\frac{1}{a(p-1)}$.证明同上.

Question 34

证明:设 $a>0, p>1$, 取 x_0 为正数使得 $0<ax_0^{p-1}<1$, 令 $x_{n+1}=x_n-ax_n^p$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left[1-a(p-1)nx_n^{p-1}\right]}{\ln n}=\frac{p}{2(p-1)}$$

3. 数列形式 Stolz 定理的逆定理

Stolz 定理的逆命题不一定正确,例如 $y_n=(-1)^n, x_n=n$ 时,
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$ 不存在.

数列形式 Stolz 逆定理

设 $\{y_n\}$ 从某一项开始为严格单调增加数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$, 对任一正整数 $k\geqslant 1$,
(i)当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+k}}{y_{n+k}-y_n}=a$ (a 为有限数)时,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$($l$ 为有限数) ,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+k}-x_n}{y_{n+k}-y_n}=l$$

(ii)当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+k}}{x_{n+k}-x_n}=b$ (b 为有限数). $\{x_n\}$ 从某一项开始为严格单调增加(减少)数列时,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$(或 $-\infty$) ,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+k}-x_n}{y_{n+k}-y_n}==+\infty(\text{或}-\infty)$$

Proof:
(i)由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$(l 为有限数),即对任给的 $\varepsilon>0, \exists N_1>0$, 当 $n>N_1$ 时,有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|<\varepsilon$$

又因 $\{y_n\}$ 从某一项开始为严格单调增加数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$, 故 $\exists N>N_1$,
当 $n>N$ 时, $y_{n+k}>y_n>0$, 从而 $|x_{n+k}-ly_{n+k}|<\varepsilon y_{n+k}, |x_n-ly_n|<\varepsilon y_n$, 于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_{n+k}-x_n}{y_{n+k}-y_n}-l\right|=\left|\frac{x_{n+k}-ly_{n+k}-(x_n-ly_n)}{y_{n+k}-y_n}\right|&\leqslant\left|\frac{x_{n+k}-ly_{n+k}}{y_{n+k}-y_n}\right|+\left|\frac{x_n-ly_n}{y_{n+k}-y_n}\right|\\&<\left|\frac{\varepsilon y_{n+k}}{y_{n+k}-y_n}\right|+\left|\frac{\varepsilon y_n}{y_{n+k}-y_n}\right|\\&<2\varepsilon\frac{y_{n+k}}{y_{n+k}-y_n}\end{aligned}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+k}}{y_{n+k}-y_n}=a$ (a 为有限数), 从而数列 $\left\{\frac{y_{n+k}}{y_{n+k}-y_n}\right\}$ 有界,设为 $c(c>0)$,
于是当 $n>N$ 时

$$\left|\frac{x_{n+k}-x_n}{y_{n+k}-y_n}-l\right|<2c\varepsilon$$

即知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+k}-x_n}{y_{n+k}-y_n}=l$$

(ii) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$, 则 $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时,$x_n>y_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,
又 $\{x_n\}$ 从某项起是严格单调递增数列,所以考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$,

注意 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+k}}{x_{n+k}-x_n}=b$ (b 为有限数), 用 (i) 中的结果有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+k}-y_n}{x_{n+k}-x_n}=0$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+k}-x_n}{y_{n+k}-y_n}=+\infty$$

因为 $\{x_n\}$ 从某项起是严格单调减少数列,从而对 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=-\infty$ 的情形,
可令 $z_n=-x_n$, 则类似可证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+k}-x_n}{y_{n+k}-y_n}=-\infty$$

注:从上述证明过程中可以看出:如果在 (i),(ii) 中分别把条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+k}}{y_{n+k}-y_n}=a$ (a 为有限数), $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+k}}{x_{n+k}-x_n}=b$ (b 为有限数)换为 $\left\{\dfrac{y_{n+k}}{y_{n+k}-y_n}\right\},\left\{\dfrac{x_{n+k}}{x_{n+k}-x_n}\right\}$ 都是有界数列,结论仍然成立.

Question 35

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{e^n}=+\infty$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-(n-1)!}{e^n-e^{n-1}}$

Solution:
令 $y_n=e^n, x_n=n!$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$, 且 $\{y_n\}$ 严格单调递增,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{y_n-y_{n-1}}=\frac{1}{1-e^{-1}}$$

由 Stolz 逆定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!-(n-1)!}{e^n-e^{n-1}}=+\infty$$

Question 36

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^m-(n-2)^m}{e^n-e^{n-2}}$ (m 为常数)

Solution:
级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^m}{e^n}=0$ 收敛,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^m}{e^n}=0$.
令 $x_n=n^m, y_n=e^n$, 则 $\{y_n\}$ 单调递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$, 注意 $k=2$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+2}}{y_{n+2}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+2}}{e^{n+2}-e^n}=\frac{e^2}{e^2-1}$$

由 Stolz 逆定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^m-(n-2)^m}{e^n-e^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^m}{e^n}=0$$

4. 函数形式 Stolz 定理的逆定理

函数形式 Stolz 逆定理

函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, T 为任意正常数,$\forall x\geqslant a$,有 $g(x+T)>g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$,则:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{g(x)-g(x+T)}=A$ (A 为有限数),若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$ (l 为有限数), 则:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=l$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(x)-f(x+T)}=A$ (A 为有限数),若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$, 则:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=\pm\infty$$

Proof:

(1)只需证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x+nT)-f(x+(n+1)T)}{g(x+nT)-g(x+(n+1)T)}=l$$

即 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 当 $n>N$ 时,$\forall x\in[a,a+nT]$,有

$$\left|\frac{f(x+nT)-f(x+(n+1)T)}{g(x+nT)-g(x+(n+1)T)}-l\right|<\varepsilon$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$,当 $n>N_1$ 时, $\forall x\in[a,a+nT]$, 有

$$\left|\frac{f(x+(n+1)T)}{g(x+(n+1)T)}-l\right|<\varepsilon$$

$\Rightarrow|f(x+(n+1)T)-lg(x+(n+1)T)|<\varepsilon|g(x+(n+1)T)|,|f(x+nT)-lg(x+nT)|<\varepsilon|g(x+nT)|$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{g(x)-g(x+T)}=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N_2>0$,当 $n>N_2$ 时, $\forall x\in[a,a+nT]$, 有

$$\left|\frac{g(x+nT)}{g(x+nT)-g(x+(n+1)T)}-A\right|<\varepsilon\qquad(*)$$

则

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+(n+1)T)-f(x+nT)}{g(x+(n+1)T)-g(x+nT)}-l\right|&\leqslant\frac{f(x+(n+1)T)-f(x+nT)-lg(x+(n+1)T)+lg(x+nT)}{g(x+(n+1)T)-g(x+nT)}\\&\leqslant\frac{|f(x+(n+1)T)-lg(x+(n+1)T)|+|f(x+nT)-lg(x+nT)|}{|g(x+(n+1)T)-g(x+nT)|}\\&\leqslant\frac{\varepsilon(|g(x+(n+1)T)|+|g(x+nT)|)}{|g(x+(n+1)T)-g(x+nT)|}\\&\leqslant\varepsilon+\frac{2\varepsilon|g(x+nT)|}{|g(x+(n+1)T)-g(x+nT)|}\end{aligned}$$

由（$*$）式，$\left|\frac{g(x+nT)}{g(x+(n+1)T)-g(x+nT)}+A\right|\leqslant\varepsilon$,故

$$\left|\frac{g(x+nT)}{g(x+(n+1)T)-g(x+nT)}\right|<1+|A|,\left|\frac{f(x+(n+1)T)-f(x+nT)}{g(x+(n+1)T)-g(x+nT)}-l\right|\leqslant(2|A|+3)\varepsilon$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=l$$

(2)当 $l=+\infty$ 时,因为 $\forall x\geqslant a$,有 $g(x+T)>g(x)$，所以 $g(x+T)-g(x)>0$
又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$,易知当 x 充分大时，$f(x+T)-f(x)>0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,
所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0$，又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(x)-f(x+T)}=A$ 及（$*$）式,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)-g(x+T)}{f(x)-f(x+T)}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=+\infty$$

当 $l=-\infty$ 时,因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$,所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$,同理有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=-\infty$$

5. L'Hospital 法则

$\frac{*}{\infty}$ 不定型极限

设 f,g 都在 (x_0,b) 上可导,且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty, g'(x)\neq 0, \forall x\in(x_0,b)$,

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A($ 实数 $,\pm\infty,\infty)$, 则

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

Proof:

只证 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\mathbb{R}$ 的情形,其它情形 $(A=\pm\infty,\infty)$ 类似证明

$\forall\varepsilon>0,\exists b_1\in(x_0,b)$, s.t. 当 $x\in(x_0,b_1)$ 时,

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

因此,根据 Cauchy 中值定理,$\exists\xi\in(x,b_1)$, s.t.

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(b_1)}{g(x)}\right)\left(1-\frac{g(b_1)}{g(x)}\right)^{-1}=\frac{f(x)-f(b_1)}{g(x)-g(b_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left(1-\frac{g(b_1)}{g(x)}\right)\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(b_1)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\left(1-\frac{g(b_1)}{g(x)}\right)\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(b_1)}{g(x)}$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$, 故

$$\lim_{x\to x_0^+}\left[\left(1-\frac{g(b_1)}{g(x)}\right)\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(b_1)}{g(x)}\right]=A-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\left[\left(1-\frac{g(b_1)}{g(x)}\right)\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(b_1)}{g(x)}\right]=A+\frac{\varepsilon}{2}$$

由此知, $\exists b_2\in(x_0,b_1)$, s.t. 当 $x\in(x_0,b_2)$ 时

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon$$

这就证明了

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Question 37

对于$a>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)+2af'(x)+a^2f(x)=l$

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)$

Solution:

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{ax}}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)e^{ax}+af(x)e^{ax}}{ae^{ax}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)e^{ax}+2af'(x)e^{ax}+a^2f(x)e^{ax}}{a^2e^{ax}} = \frac{l}{a^2}\end{aligned}$$

(2)显然 $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)+2af'(x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)x^{2a}}{x^{2a}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)+2af'(x)}{2a}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f''(x)=0$$

Question 38

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, 又 $a>0$. 求证:方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=f(x)$ 的一切解,均有 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\frac{b}{a}$

Solution:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} y(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}y(x)}{\mathrm{e}^{ax}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a\mathrm{e}^{ax}y(x)+\mathrm{e}^{ax}y'(x)}{a\mathrm{e}^{ar}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{ay(x)+y'(x)}{a} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{a}=\frac{b}{a}\end{aligned}$$