比如拿一个经典例子来说.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

这道题我想绝大部分大学生应该会做，我们接着想想减去右边等价一个什么阶呢？当然你立即想到了斯特林公式的逼近式子(Maclaurin 推出):

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}-\frac{571}{2488320n^4}+\cdots\right).$$

所以，你立刻就可以得到所谓的加边，但是我们更喜欢得到加边外面是 $n/\ln n$ 的形式, 我们可以尝试着继续:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

当然这个求解有很多方法，而我利用一个恒等式来求解.

注意恒等式:

$$\frac{n}{\ln n}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\frac{n}{\ln n}\ln\left(\mathrm{e}\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)\cdot\frac{\exp\left\{\ln\left(\mathrm{e}\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)\right\}-1}{\ln\left(\mathrm{e}\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}}\frac{\ln\left(\frac{\mathrm{e}^n\cdot n!}{n^n}\right)}{\ln n},n\to\infty$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{e}}$$

当然如果你还不过瘾，也可以做如下变式

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\left[\frac{1}{\ln n}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)-\frac{1}{2\mathrm{e}}\right]=\frac{\ln(2\pi)}{2\mathrm{e}}.$$

按照这样的思想，我们还可以得到如下问题(也许有人早就发现了，注：有些解答来自网络上或者学生，图片来自以前辅导班讲义).

设方程 $x^n+x=1$ 在 $(0,1)$ 中的根为 $a_n(n\in\mathbf{N}^+)$，

(1) 求证：数列 $\{a_n\}$ 单调递增；

(2) 求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

(3) 求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\ln n}(1-a_n)=1$. (大学一年级水平)

(4) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\ln(\ln n)}\left(1-a_n-\dfrac{\ln n}{n}\right)$ 的值. (大学二年级水平)

证明:

(1) 实际上, 利用零点定理和单调性知道$x^n+x=1$在$(0,1)$有唯一正实数根.

设$f_n(x)=x^n+x-1$, 则有

$$f_{n+1}(a_{n+1})=0\Rightarrow\left(a_{n+1}\right)^{n+1}+a_{n+1}=1,$$

$$f_n(a_n)=0\Rightarrow\left(a_n\right)^n+a_n=1.$$

即$f_n(x)$关于x单调递增, 且注意到

$$\begin{aligned}f_{n+1}(a_{n+1})&=\left(a_{n+1}\right)^{n+1}+a_{n+1}-1\\&=\left(a_{n+1}\right)^n-\left(a_{n+1}\right)^{n+1}\\&>0=f_n(a_n),0<a_{n+1}<1.\end{aligned}$$

所以有$a_{n+1}>a_n$.

(2) 注意到$0<a_n<1$, 且对任意充分小的$\varepsilon>0$, 我们考虑

$$\begin{aligned} f_n(1-\varepsilon) &= (1-\varepsilon)^n + (1-\varepsilon) - 1 \\ &= (1-\varepsilon)^n - \varepsilon \\ &= -\varepsilon, n \to +\infty \end{aligned}$$

故

$$1-\varepsilon < a_n < 1, n \to +\infty$$

由于ε的任意性, 故有

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

(3) 由上面解答, 我们还是令 $a_n = 1-\varepsilon$, 则有

$$(1-\varepsilon)^n - \varepsilon = 0 \Rightarrow n = \frac{\log \varepsilon}{\log(1-\varepsilon)} \approx \frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}, (\varepsilon \to 0)$$

于是我们只要证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\ln n}(1-a_n)=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\dfrac{\log x}{\log(1-x)}}{\log\left[\dfrac{\log x}{\log(1-x)}\right]}=1$$

注意到

$$\log(1-x)=-x+o\left(x^2\right)\Rightarrow x\cdot\frac{\log x}{\log(1-x)}=-\log x+o\left(\log x\right)$$

令

$$u=x\cdot\frac{\log x}{\log(1-x)}$$

则原极限等价于求

$$\lim_{x\to0}\frac{u}{\log u-\log x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\dfrac{\log u}{u}-\dfrac{\log x}{u}}=1.$$

解法 2:

$$(1-\varepsilon)^n-\varepsilon=0 \Rightarrow n=\frac{\log\varepsilon}{\log(1-\varepsilon)} \approx \frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon},(\varepsilon\to 0)$$

我们可以证明

$$\varepsilon \to \frac{\log n}{n},(n\to+\infty)$$

这是因为

$$\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon} \sim \frac{1}{\log n}\log\frac{1}{\log n}=\frac{n}{\log n}(\log n-\log\log n)\sim n,$$

所以有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\log n}\left(1-a_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\log n}\varepsilon=1.$$

(4) 设 $a_n = 1 - \frac{1}{n}(\log n) b_n$，则有 $(a_n)^n = 1 - a_n$，即

$n \log a_n = \log(1 - a_n)$，

也就是

$$n \log\left(1 - \frac{1}{n}(\log n) b_n\right) = \log\left(\frac{1}{n}(\log n) b_n\right).$$

注意到 $a_n \to 1$ 和 $\log(1-x) = -x + O\left(x^2\right)$，当 $x \to 0$，

$$\log\left(1 - \frac{1}{n}(\log n) b_n\right) = -\frac{1}{n}(\log n) b_n + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

由(3)知 $b_n \to 1, \log b_n = o(1)$，则有

$$-(\log n) b_n + o(1) = \log\log n - \log n + o(1),$$

也就是

$$b_n = 1 - \frac{\log\log n}{\log n} + o\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

即

$$1 - a_n - \frac{\log n}{n} + \frac{\log\log n}{\log n} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

等价于

$$\frac{n}{\log\log n}\left(1 - a_n - \frac{\log n}{n}\right) = -1 + o\left(\frac{1}{\log\log n}\right).$$

比如大家常问的题: 求证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}=\frac{e}{e-1}$.

我们是否也考虑减去右边极限? 此时加什么项? 我们如果利用泰勒公式, 就可以得到很好的结果.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n}=\sum_{k=1}^{n}\exp\left[n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)\right].$$

注意到

$$e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}=e^{-k}\left[1-\frac{k^2}{2n}+\frac{k^3(3k-8)}{24n^2}-\frac{k^4(k^2-8k+12)}{48n^3}\right]+o(1/n^4),$$

且注意到

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}=\frac{e}{e-1},\sum_{k=0}^{\infty}k^2e^{-k}=\frac{e(e+1)}{(e-1)^3},$$

和

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^3(3k-8)e^{-k}=\frac{e(-e^2+2e+11)(5e+1)}{(e-1)^5},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^4\left(k^2-8k+12\right)e^{-k}=\frac{e(21+365e+502e^2-138e^3-35e^4+5e^5)}{(e-1)^7}$$

代入即可得到

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}-\frac{1}{2n}\cdot\frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}+1)}{2(\mathrm{e}-1)^{3}}+\frac{1}{24n^{2}}\cdot\frac{\mathrm{e}(-\mathrm{e}^{2}+2\mathrm{e}+11)(5\mathrm{e}+1)}{(\mathrm{e}-1)^{5}}$$
$$-\frac{1}{48n^{3}}\cdot\frac{\mathrm{e}(21+365\mathrm{e}+502\mathrm{e}^{2}-138\mathrm{e}^{3}-35\mathrm{e}^{4})}{(\mathrm{e}-1)^{7}}$$

那么我们可以得到:

$$\lim_{n\to+\infty}n\left\{\frac{\mathrm{e}(-\mathrm{e}^{2}+2\mathrm{e}+11)(5\mathrm{e}+1)}{24(\mathrm{e}-1)^{5}}-n\left[n\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}\right)^{n}\right)-\frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}+1)}{2(\mathrm{e}-1)^{3}}\right]\right\}$$
$$=\frac{\mathrm{e}(5\mathrm{e}^{5}-35\mathrm{e}^{4}-138\mathrm{e}^{3}+502\mathrm{e}^{2}+365\mathrm{e}+21)}{48(\mathrm{e}-1)^{7}}$$

再比如 2014 年中国大学生数学竞赛有这样一个加边题:

六 (本题满分 15 分) 设

$$A_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2},$$

求: $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right)$.

这道题实际上是麦克劳林公式的应用:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) \sim \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right).$$

看完后我继续加边，编了一个题目投到一家国外杂志：

Define

$$A_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2},$$

Find

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right) - \frac{1}{4}\right].$$

Proposed by Yong-xi Wang, China

该题解答如下:

Now, let

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Then

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{4};$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=A_n;$$

$$f(1)-f(0)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2};$$

$$f'(1)-f'(0)=-\frac{1}{2}-0=-\frac{1}{2}.$$

so that

$$\frac{\pi}{4}=A_n+\frac{1}{4n}+\frac{1}{24n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Finally,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{24}.$$

我为 2016 年编了一道这样的题, 看完就会解密了.

祝大家新年快乐(西西)

设

$$A_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2},$$

求证:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4\left\{\frac{1}{24}-n\left[n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right]\right\}}=2016.$$

这类题太多了, 下面做几个练习:

三. (15 分) 设 $x_n(n\geq 2)$ 是下面方程的唯一正数解:

$$x^{-n}=\sum_{k=1}^{\infty}(x+k)^{-n}.$$

(1) 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n}$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n}=A$,, 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\dfrac{x_n}{n}-A\right)$存在, 并求极限.

(3) 若第 2 问得到的极限为 B, 求证: $n\left[n\left(\dfrac{x_n}{n}-A\right)-B\right]$存在,

并证明该极限值为无理数.

3. 设 $H_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, 我们已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_n-\ln n)=\gamma$,

其中 γ 是欧拉常数. 若现在已知

$$\lim_{n\to+\infty}n\left[A-n\left(H_n-\ln n-\gamma\right)\right]=B,$$

其中 A,B 是两个常数, 求 $\dfrac{A}{B}$.