绝密★启用前

第九届全国大学生数学竞赛初赛模拟试题（一）

（非数学类）

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	12	12	14	16	16	100
得分							

注意：

1.所有答案都需写在试卷密封线右边，写在其他纸上一律无效；

2.密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记；

3.如果答题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

一、填空题（本题满分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

1.将函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\pi x}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 上展成余弦级数，设 a_n（$n=1,2,\cdots$）为其 Fourier 系数，则数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和为____________.

2. $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{\ln x}\sum_{n=0}^{\infty}x^{2^n}\mathrm{d}x=$____________.

3.设 $\rho(\xi)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{(\xi-x)^2+y^2}$，$f(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\xi-x|^{\frac{1}{2}}\rho(\xi)\mathrm{d}\xi$，其中 ξ，x 为任意实数，y 为正实数，则 $f(x)$ 的表达式为____________.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{x^3(\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x)}=$____________.

5.微分方程 $y''-2xy'-4y=0$ 满足初值条件 $y(0)=0$ 和 $y'(0)=1$ 的解为____________.

二、（本题满分 12 分）

设三角形的三个顶点分别位于曲线 $f(x,y)=0$，$\varphi(x,y)=0$，$\psi(x,y)=0$ 上，证明：若三角形的面积达到极值，则曲线在三角形顶点处的法线都通过该三角形的垂心.

三、（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上五次可微，证明：在 (a,b) 内存在 ξ，使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{6}(b-a)\left(f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)-\frac{1}{2880}(b-a)^5 f^{(5)}(\xi).$$

四、（本题满分 14 分）

求经过三条平行直线 $L_1: x=y=z$，$L_2: x-1=y=z+1$，$L_3: x=y+1=z-1$ 的圆柱面的方程.

五、（本题满分 16 分）

设 $P\in\mathbf{R}^3$，$B(P,\delta)$ 是以 P 为球心，δ 为半径的球，$\partial B(P,\delta)$ 为其边界.

证明:若在 $B(P,\delta)$ 上 u 满足 $\Delta u=0$，则 $u(P)=\dfrac{1}{4\pi\delta^2}\displaystyle\iint_{\partial B(P,\delta)}u\mathrm{d}S$.其中 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为 Laplace 算子.

六、（本题满分 16 分）

记将序列 $a_n=\dfrac{1}{n}$（$n\in\mathbf{N}_+$）分母中含有数字 9 的数全部删去得到的序列为 b_n.

证明：

（1）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛；

（2）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n<30$.

绝密★启用前

第九届全国大学生数学竞赛初赛模拟试题（二）

（非数学类）

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	12	14	14	14	16	100
得分							

注意：

1.所有答案都需写在试卷密封线右边，写在其他纸上一律无效；

2.密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记；

3.如果答题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

一、填空题（本题满分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

1.设 $x_0>0, x_n=\ln(1+x_{n-1})(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=$______________.

2.设 $f(x)=\int_0^1 \left|\ln|x-t|\right|\mathrm{d}t$，则 $\max\limits_{0\le x\le 1} f(x)=$______________.

3.设 Σ_1: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$，$\Sigma_2: z^2=x^2+y^2$，$\Gamma$ 为 Σ_1 与 Σ_2 的交线，则椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值为________________.

4.$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(2\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x=$________________.

5.设区域 $D_\varepsilon=\{(x,y)|0\le x\le 1-\varepsilon, 0\le y\le 1-\varepsilon\}$，则 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\iint_{D_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-xy}=$______________.

二、（本题满分 12 分）

（1）证明：对任意正整数 m，有 $\displaystyle\frac{1}{m}=\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}C_m^n}{k}$；

（2）求 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\prod\limits_{m=0}^{2017}(k+m)}$.

三、（本题满分 14 分）

计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 位于第一象限，由下列曲面所围成：$x^2+y^2=mz$，$x^2+y^2=nz$， $xy=a^2$， $xy=b^2$， $y=\alpha x$， $y=\beta x$，其中 $0<a<b$， $0<\alpha<\beta$，$0<m<n.$

四、（本题满分 14 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微，且 $\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\mathrm{e}^{-x^2}f'(x)\right|<+\infty.$ 证明：

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|x\mathrm{e}^{-x^2}f(x)\right|<+\infty.$$

五、（本题满分 14 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $2n$ 阶连续导数且 $\left|f^{(2n)}(x)\right|\le M$， $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0.$ 其中 $k=1,2,\cdots,2n-1.$ 证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)!}M.$$

六、（本题满分 16 分）

设 $\varphi(x)=|x|(-1\le x\le 1)$，且 $\varphi(x+2)=\varphi(x)$.现在定义 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^n x)$，证明：$f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上处处连续但处处不可微.

绝密★启用前

第九届全国大学生数学竞赛初赛模拟试题（三）

（非数学类）

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	12	12	14	16	16	100
得分							

注意：

1.所有答案都需写在试卷密封线右边，写在其他纸上一律无效；

2.密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记；

3.如果答题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

一、填空题（本题满分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

1.微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x}y^2+\dfrac{y}{x}+x$ 的通解为______________________.

2.使级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)(p>0)$ 条件收敛的 p 的取值范围为_____________.

3.设 $f(u,v)$ 具有一阶连续偏导数，且满足 $f(tu,tv)=t^2f(u,v)$， $f(1,2)=0, f_u(1,2)=3$，

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x\left[1+f(t-\sin t+1,\sqrt{1+t^3}+1)\right]^{\frac{1}{\ln(1+t^3)}}=$ ________________.

4.$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$_____________.

5.对于三角形 ABC， $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 的最大值为_____________.

二、（本题满分 12 分）

求闭曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 所围成立体的体积.

三、（本题满分 12 分）

设 S 为 $\mathbf{R}^3$ 中的抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，$P(a,b,c)$ 为 S 外一定点，满足 $a^2+b^2>2c$.过点 P 作 S 的所有切线，证明：这些切线的切点落在同一个平面上.

四、（本题满分 14 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有直到 $n+1$ 阶的导数，$f^{(n+1)}(x)\neq 0$，且满足

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)(0<\theta<1).$$

证明：

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

五、（本题满分 16 分）

设 $f_0(x)$，$f_1(x)$ 是 $[0,1]$ 上的正值连续函数，满足 $\int_0^1 f_0(x)\mathrm{d}x\le\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x$，设

$$f_{n+1}(x)=\frac{2f_n^2(x)}{f_n(x)+f_{n-1}(x)},\quad n=1,2,\cdots.$$

证明：序列 $a_n=\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$，$n=1,2,\cdots$ 单调递增且收敛.

六、（本题满分 16 分）

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

（1）证明：对 $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2},n\neq k^2\\ \dfrac{1}{k^2},n=k^2\end{cases}$，$k=1,2,\cdots$，$\lim_{n\to\infty}na_n\neq 0$；

（2）证明：对任意 a_n，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}}=0.$

绝密★启用前

第九届全国大学生数学竞赛初赛模拟试题（四）

（非数学类）

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	12	14	14	14	16	100
得分							

注意：

1.所有答案都需写在试卷密封线右边，写在其他纸上一律无效；

2.密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记；

3.如果答题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

一、填空题（本题满分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

1.设可微函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$，且 $f'(0)=1$，则 $f(x)$ 的表达式为____________________.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=$____________________.

3.已知空间中五点 $A(1,0,1)$， $B(1,1,2)$， $C(1,-1,-2)$， $D(3,1,0)$， $E(3,1,2)$，则过点 E 且与 A， B， C 所在平面平行而与直线 AD 垂直的直线方程为____________________.

4.设区域 $D=\{(x,y)|x^4+y^4\le 1\}$，则 $\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________________.

5.设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$，则 $\lim_{n\to\infty}n\left[n\left(\frac{\pi}{4}-x_n\right)-\frac{1}{4}\right]=$________________.

二、（本题满分 12 分）

求 $\lim_{t\to 0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{d}u\int_{u^2}^{t}\sin y^2\mathrm{d}y}{\left[\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x-1\right]\arctan t^{\frac{3}{2}}}$.

三、（本题满分 14 分）

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为向量场，$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为 Laplace 算子，证明：

（1）$\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}-\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\Delta\boldsymbol{A}$；

（2）$\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}$.

四、（本题满分 14 分）

设函数 $f(x)$ 对任意 $b>0$，都在 $[0,b]$ 上可积且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\alpha$. 证明：

$$\lim_{t\to 0^+}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x=\alpha.$$

五、（本题满分 14 分）

设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 B_1，B_2，$\cdots$，B_n. 令 P_A，P_B 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 的周长，证明：

$$P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}}>2\pi.$$

六、（本题满分 16 分）

设 $f(x)=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$，$|r|<1$.

（1）证明：$f(x)=1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$；

（2）求 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x$.

绝密★启用前

第九届全国大学生数学竞赛初赛模拟试题（五）

（非数学类）

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	12	14	14	14	16	100
得分							

注意：

1.所有答案都需写在试卷密封线右边，写在其他纸上一律无效；

2.密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记；

3.如果答题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

一、填空题（本题满分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

1.设函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.若 $y(0)=y'(0)=1$，则反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 的值为________________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\tan\left(\pi\sqrt{n^2+[\dfrac{6n}{11}]}\right)+4\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+[\dfrac{8n}{11}]}\right)\right]=$________________.

3.曲面 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$（$a,b,c>0$）所围立体的体积为__________________.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=$__________________.

5.已知一非退化的二次曲面 Σ 经过以下九点：$A(1,0,0)$，$B(1,1,2)$，$C(1,-1,-2)$，$D(3,0,0)$，$E(3,1,2)$，$F(3,-2,-4)$，$G(0,1,4)$，$H(3,-1,-2)$，$I(5,2\sqrt{2},8)$，则曲面 Σ 的类型（仅写出形状即可）为_____________________.

二、（本题满分 12 分）

设区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\dfrac{\pi}{2},0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D \sin y\mathrm{e}^{\sin x\sin y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

三、（本题满分 14 分）

设 $a>0$，$b>0$，$x_1=a$，$x_2=b$，且 $x_{n+2}=3+\dfrac{1}{x_{n+1}^2}+\dfrac{1}{x_n^2}$. 证明：$\{x_n\}$ 收敛.

四、（本题满分 14 分）

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $[a,b]$ 上，若有实数 $\lambda\neq 0$，使得

$$\left|f(x)g(x)+\lambda g'(x)\right|\le\left|g(x)\right|, x\in(a,b)$$

成立，证明：在 $[a,b]$ 上有

$$g(x)\equiv 0.$$

五、（本题满分 14 分）

设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，现在记 $k=d-c$，$p=\iint\limits_D\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$A=\int_a^b\left|f(x,c)\right|^2\mathrm{d}x$，$B=\iint\limits_D\left|f(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，证明：

$$\frac{k^2}{4k^2+1}A^2\le B^2+pB.$$

六、（本题满分 16 分）

设 $B(n)$ 为对正整数 n 进行二进制表示时其中数字1的数目，记 $a_n=\dfrac{B(n)}{n(n+1)}$. 证明：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

（2）$\exp\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right)$ 是一个有理数.

第九届全国大学生数学竞赛初赛模拟试题（一）参考答案

（非数学类）

一、填空题

1.【答案】 $\dfrac{\pi^2}{6}$

【分析】本题考查函数的 Fourier 级数展开，属于简单题.注意本题不需求出 a_n 的具体表达式.

【解析】将 $f(x)$ 展成余弦级数即 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，其中

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{3}，因此\sum_{n=1}^{\infty}a_n=f(0)-\frac{a_0}{2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

2.【答案】 $-\ln 3$

【分析】本题考查 Froullani 积分，属于中档题.计算时注意一致收敛级数的逐项积分性质.

【解析】 $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{\ln x}\sum_{n=0}^{\infty}x^{2^n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{2^n}-x^{2^{n+1}}}{\ln x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\ln\frac{2^n+1}{2^n+2}=\ln\prod_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+1}{2(2^{n-1}+1)}$

$$=\ln\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=-\ln 3.$$

3.【答案】 $f(x)=\sqrt{2x}$

【分析】本题综合考查积分的计算，属于中档题.计算时要熟练应用变量代换使运算简洁，同时要注意题干中的 x 和 $f(x)$ 中的 x 的意义不同.

【解析】 $\displaystyle f(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\xi-x|^{\frac{1}{2}}\frac{y}{\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}}\mathrm{d}\xi=\frac{2y}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{t^2+y^2}\mathrm{d}t=\frac{4y}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{u^4+y^2}\mathrm{d}u$

$$=\frac{4y}{\pi}\frac{1}{2\sqrt{2y}}\pi=\sqrt{2y}，因此 f(x)=\sqrt{2x}.$$

4. 【答案】 $\dfrac{1}{32}$

【分析】本题结合幂级数求和、变限定积分等知识考查不定式极限的求法，属于中档题.使用的方法很常规，要注意计算的准确.

【解析】 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{x^3(\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{-x^3\cdot\frac{2}{3}x+o(x^4)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}\int_0^x\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{-\frac{2}{3}x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-x}{-\frac{8}{3}x^3}$$

$$=\frac{1}{32}.$$

5.【答案】$y=xe^{x^2}$

【分析】本题考查幂级数法解微分方程，属于较难题.需要提醒的是要对此方法有一定印象.

【解析】设 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,n=0,1,2,\cdots.$

则 $y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$， $y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$，由 $y''-2xy'-4y=0$ 得

$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}-2(n+2)a_n\right]x^n=0$，故 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n$.

又由 $y(0)=0$ 和 $y'(0)=1$ 得 $a_0=0$， $a_1=1$，从而

$$a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\frac{2}{2n}\cdot\frac{2}{2n-2}\cdots\cdots\frac{2}{2}a_1=\frac{a_1}{n!}=\frac{1}{n!};\quad a_{2n}=\frac{2}{2n-1}a_{2n-2}=\cdots=0.$$

故 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2}$.

二、【分析】本题考查条件极值，属于中档题.情景较复杂，需要细心分析与推导，注意涉及到的三个解析几何知识：已知平面上三点坐标求三角形面积、平面曲线的法线方程、三角形垂心的向量表示.

【证明】设点 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$， $C(x_3,y_3)$ 分别位于曲线 $f(x,y)=0$， $\varphi(x,y)=0$，

$\psi(x,y)=0$ 上，考虑三角形 ABC 面积 $S=\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]$在

条件 $f(x_1,y_1)=0$，$\varphi(x_2,y_2)=0$，$\psi(x_3,y_3)=0$ 下的最值.设

$$F(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,\lambda,\mu,\eta)$$
$$=\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]+\lambda f(x_1,y_1)+\mu\varphi(x_2,y_2)+\eta\psi(x_3,y_3),$$

那么令

$$\begin{cases} F_{x_1}=\frac{1}{2}(y_2-y_3)+\lambda f_x(x_1,y_1)=0 & ① \\ F_{y_1}=\frac{1}{2}(x_3-x_2)+\lambda f_y(x_1,y_1)=0 & ② \\ F_{x_2}=\frac{1}{2}(y_3-y_1)+\mu\varphi_x(x_2,y_2)=0 & ③ \\ F_{y_2}=\frac{1}{2}(x_1-x_3)+\mu\varphi_y(x_2,y_2)=0 & ④ \\ F_{x_3}=\frac{1}{2}(y_1-y_2)+\eta\psi_x(x_3,y_3)=0 & ⑤ \\ F_{y_3}=\frac{1}{2}(x_2-x_1)+\eta\psi_y(x_3,y_3)=0 & ⑥ \end{cases}$$

由①②得 $\dfrac{f_y(x_1,y_1)}{f_x(x_1,y_1)}=\dfrac{x_3-x_2}{y_2-y_3}$，在此情况下曲线 $f(x,y)=0$ 在 $A(x_1,y_1)$ 处的法线方程为

$$y-y_1=\frac{f_y(x_1,y_1)}{f_x(x_1,y_1)}(x-x_1)=\frac{x_3-x_2}{y_2-y_3}(x-x_1).$$

同理，曲线 $\varphi(x,y)=0$ 在 $B(x_2,y_2)$ 处和曲线 $\psi(x,y)=0$ 在 $C(x_3,y_3)$ 处的法线方程分别为

$$y-y_2=\frac{\varphi_y(x_2,y_2)}{\varphi_x(x_2,y_2)}(x-x_2)=\frac{x_1-x_3}{y_3-y_1}(x-x_2).$$

$$y-y_3=\frac{\psi_y(x_3,y_3)}{\psi_x(x_3,y_3)}(x-x_3)=\frac{x_2-x_1}{y_1-y_2}(x-x_3).$$

设三角形 ABC 的垂心坐标为 $H(x,y)$，则

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{CH}=(x_2-x_1,y_2-y_1)\cdot(x-x_3,y-y_3)=(x_2-x_1)(x-x_3)+(y_2-y_1)(y-y_3)=0.$$

同理 $\boldsymbol{AC}\cdot\boldsymbol{BH}=\boldsymbol{BC}\cdot\boldsymbol{AH}=0.$

因此若三角形面积达到极值，则三条曲线在三角形顶点处的法线都通过该三角形的垂心.

三、**【分析】**本题考查微分中值定理，属于中档题.需要特别注意的是本题中用于构造辅助函数的常数 k 值法.

【证明】令 $a=c-h$，$b=c+h$，则 $c=\dfrac{a+b}{2}$，$h=\dfrac{b-a}{2}$.

那么

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{6}(b-a)\left(f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)-\frac{1}{2880}(b-a)^5 f^{(5)}(\xi)$$

等价于

$$f(c+h)=f(c-h)+\frac{h}{3}\left(f'(c-h)+f'(c+h)+4f'(c)\right)-\frac{h^5}{90}f^{(5)}(\xi).$$

设$\varphi(x)=f(c+x)-f(c-x)-\frac{x}{3}\left(f'(c-x)+f'(c+x)+4f'(c)\right)+\frac{k}{90}x^5$，

下证$k=f^{(5)}(\xi)$. 由于$f(x)$在$[a,b]$上五次可微，$\varphi(x)$必在$[0,h]$上四次可微，则

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3}\left[f'(c+x)+f'(c-x)\right]-\frac{x}{3}\left[f''(c-x)-f''(c+x)\right]+\frac{k}{18}x^4;$$

$$\varphi''(x)=\frac{1}{3}\left[f''(c+x)-f''(c-x)\right]-\frac{x}{3}\left[f'''(c+x)+f'''(c-x)\right]+\frac{2k}{9}x^3;$$

$$\varphi'''(x)=-\frac{x}{3}\left[f^{(4)}(c+x)-f^{(4)}(c-x)\right]+\frac{2k}{3}x^2.$$

由 Rolle 定理可知，由于$\varphi(0)=\varphi(h)=0$，存在$\xi_1\in(0,h)$使得$\varphi'(\xi_1)=\varphi'(0)=0$，所以

又存在$\xi_2\in(0,\xi_1)$使得$\varphi''(\xi_2)=\varphi''(0)=0$，进而存在$\xi_3\in(0,\xi_2)$使得$\varphi'''(\xi_3)=0.$

又由 Lagrange 中值定理，存在$\xi\in(c-\xi_3,c+\xi_3)\subset(c-h,c+h)$使得

$$\varphi'''(\xi_3)=-\frac{\xi_3}{3}\left[f^{(4)}(c+\xi_3)-f^{(4)}(c-\xi_3)\right]+\frac{2k}{3}\xi_3^2=\frac{2}{3}\xi_3^2\left[k-f^{(5)}(\xi)\right]=0.$$

而$\xi_3\neq 0$，就有

$$k=f^{(5)}(\xi).$$

四、【分析】本题考查空间中二不相交直线的距离公式，属于简单题.思考难度不大，但要注意计算的准确.

【解】设圆柱面的轴为L_0，由L_0到L_0，L_1，L_2的距离相等可知

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y-z-1)^2+(z-x+2)^2+(x-y-1)^2$$

$$=(y-z+2)^2+(z-x-1)^2+(x-y-1)^2$$

整理得$\begin{cases}x=z+1\\ y=z-1\end{cases}$，即$L_0: x-1=y+1=z.$

圆柱面的半径为$r=\dfrac{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$，那么对圆柱面上任意一点，有

$$(y-z-1)^2+(z-x+2)^2+(x-y-1)^2=6$$

整理即得经过L_0，L_1，L_2的圆柱面方程为

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz-3x+3y=0.$$

五、【分析】本题综合考查多变量微积分学的各种知识，属于较难题.题目中涉及曲面积分的变量代换、Gauss 公式、方向导数、积分中值定理以及两类曲面积分间转化等知识点，处理上有相当大的难度，是不可多得的好题.

【证明】设$P(x_0,y_0,z_0)$，考虑曲面$S:\partial B(P,r)(r>0)$，即：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

其参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+r\sin\varphi\cos\theta\\ y=y_0+r\sin\varphi\sin\theta.\\ z=z_0+r\cos\varphi\end{cases}$$

那么

$$I(r)=\iint\limits_S u(x,y,z)\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}u(x_0+r\sin\varphi\cos\theta,y_0+r\sin\varphi\sin\theta,z_0+r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I(r)}{\partial r}&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\left[(u_x\sin\varphi\cos\theta+u_y r\sin\varphi\sin\theta+u_z r\cos\varphi)r^2\sin\varphi+2ur\sin\varphi\right]\mathrm{d}\varphi\\ &=\iint\limits_S\frac{1}{r}(u_x,u_y,u_z)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\mathrm{d}S+2\iint\limits_S\frac{u}{r}\mathrm{d}S\\ &=\iint\limits_S\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}\vec{S}+\frac{2}{r}\iint\limits_S u\mathrm{d}S\\ &=\iiint\limits_S\Delta u\mathrm{d}V+\frac{2}{r}\iint\limits_S u\mathrm{d}S\\ &=\frac{2}{r}I(r).\end{aligned}$$

而$\lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{I(r)}{r^2}=\lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{\iint\limits_S u(P)\mathrm{d}S}{r^2}=\lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{4\pi r^2u(P^*)}{r^2}=4\pi u(P^*)$，其中$P^*\in B(P,r)$，从而

$$I(r)=4\pi r^2u(P).$$

那么$r=\delta$时就有

$$u(P)=\frac{1}{4\pi\delta^2}\iint_{\partial B(P,\delta)}u\mathrm{d}S.$$

六、【分析】本题考查正项级数敛散性的判断，属于中档题.证明时需要反复尝试，找出正确的放缩方式.

【证明】首先我们有

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}=\frac{761}{280}<\frac{840}{280}=3.$$

那么$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{88}$

$=\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{18}\right)+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\cdots+\frac{1}{28}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{80}+\frac{1}{21}+\cdots+\frac{1}{88}\right)$

$<\frac{9}{10}+\frac{9}{20}+\cdots+\frac{9}{80}$

$=\frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}\right)$

$<\frac{9}{10}\times 3.$

同理$\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\cdots+\frac{1}{188}+\cdots+\frac{1}{888}$

$<\frac{9}{100}\times 9+\frac{1}{2}\times\frac{9}{100}\times 9+\cdots+\frac{1}{8}\times\frac{9}{100}\times 9$

$<3\times\left(\frac{9}{10}\right)^2.$

由数学归纳法不难得知，$\{b_n\}$中所有分母为n位的数的和小于$3\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\sum_{n=1}^{\infty}3\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}=30.$$

【注】本题中的$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$称为 Kempner 级数，由于正整数中几乎所有的数都包含数字9（事实上也可以是0到8中的任何一个），这里的$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$是收敛的.读者不妨尝试证明$\sum_{n=1}^{\infty}b_n<23$，并考虑将$\{a_n\}$分母中是质数的项全部去掉后得到的级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$的敛散性（$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$发散）.

第九届全国大学生数学竞赛初赛模拟试题（二）参考答案

（非数学类）

一、填空题

1.【答案】2

【分析】本题考查单调有界原理和 Stolz 定理，属于中档题.Stolz 定理是参加数学竞赛必须掌握的内容，应当引起重视.

【解析】由 $x_n=\ln(1+x_{n-1})>0$ 及 $x_n-x_{n-1}=\ln(1+x_{n-1})-x_{n-1}<0$ 可知 $\{x_n\}$ 单调下降有下界，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则由 $A=\ln(1+A)$ 得 $A=0$. 从而由 Stolz 定理：

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\ln(1+x_{n-1})}-\frac{1}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}\ln(1+x_{n-1})}{x_{n-1}-\ln(1+x_{n-1})}=2.$$

2.【答案】$\frac{1}{2}$

【分析】本题反常积分的计算和利用导数求函数的最值，属于简单题.计算时要注意各变量的取值范围.

【解析】$f(x)=\int_0^1\left|\ln|x-t|\right|\mathrm{d}t=\int_0^1\left|\ln|u|\right|\mathrm{d}u=\int_{x-1}^0-\ln(-u)\mathrm{d}u+\int_0^x(-\ln u)\mathrm{d}u=\int_{1-x}^0\ln u\mathrm{d}u$
$-\int_0^x\ln u\mathrm{d}u=-(1-x)\ln(1-x)-x\ln x+1(0<x<1).$

则 $f'(x)=\ln(1-x)-\ln x=\ln\frac{1-x}{x}$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$. 因此 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调增加，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调减少.于是 $\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\ln 2.$

3.【答案】$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【分析】本题结合解析几何知识考查条件极值，属于中档题.注意计算的准确.

【解析】设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为 Σ_1 上一点，此点处的切平面方程为 $\frac{x_0}{9}x+\frac{y_0}{4}y+z_0z=1$，它到原点的距离为 $d=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{9}\right)^2+\left(\frac{y_0}{4}\right)^2+z_0^2}}$，考虑

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=\left(\frac{x}{9}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2-1\right)+\mu\left(x^2+y^2-z^2\right),$$

令

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{2}{81}x + \dfrac{2\lambda}{9}x + 2\mu x = 0 \\ F_y = \dfrac{1}{8}y + \dfrac{\lambda}{2}y + 2\mu y = 0 \\ F_z = 2z + 2\lambda z - 2\mu z = 0 \qquad (*)\text{，} \\ F_\lambda = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0 \\ F_\mu = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

显然 x, y, z 不能都不为 0，否则方程组 $(*)$ 中的前三个方程互相矛盾，若 d 取最大值，只需令 $x=0$ 即可得到极大值点 $\left(0,\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}},\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$，此时有 $d_{\max} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. 【答案】$\dfrac{\pi}{2}\ln 3$

【分析】本题含参变量积分的求导，属于中档题.如果了解含参积分的相关知识，解决此题并不困难.

【解析】设 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan at}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$，则

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} = a\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)(u^2+a^2)} = \frac{a}{a^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+a^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\pi}{2(a+1)}.$$

于是 $I(a) = \int_0^a \dfrac{\pi}{2(a+1)}\mathrm{d}a = \dfrac{\pi}{2}\ln(a+1)$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\arctan(2\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x = I(2) = \dfrac{\pi}{2}\ln 3.$

5.【答案】$\dfrac{\pi^2}{6}$

【分析】本题考查幂级数的逐项积分性质，属于中档题.要能够想到将被积函数展成幂级数.

【解析】$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\iint\limits_{D_\varepsilon} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-xy} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\iint\limits_{D_\varepsilon}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(xy)^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\iint\limits_{D_\varepsilon}(xy)^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{1-\varepsilon} x^n\mathrm{d}x$

$$\int_0^{1-\varepsilon} y^n\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{(1-\varepsilon)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

二、【分析】本题结合定积分和级数考查数学证明的基本功，属于中档题.（1）问中要能够想到向积分转化，（2）问中的裂项可以先找出规律再用数学归纳法证明.需要提醒的是本题

对组合数与求和符号的性质要求较高，应当引起重视.

【解】（1）证明：对任意正整数m，有

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}C_m^n}{k}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}(-1)^{m-1}C_m^n\int_0^1\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{m}(-1)^{m-1}C_m^n\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1-x}\left[\sum_{n=1}^{m}(-1)^{m-1}C_m^n+\sum_{n=1}^{m}(-1)^{m-1}C_m^n x^n\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1-x}\left[1+(x-1)^m-1\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{m}.$$

（2）先证明$\dfrac{1}{k(k+1)\cdots(k+m)}=\dfrac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}C_{m-1}^{n-1}\dfrac{1}{(k+n-1)(k+n)}.\qquad(*)$

$m=1$时显然成立.先假设$m=l(l\geq 1)$时$(*)$式成立，则$m=l+1$时：

$$\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+l)(k+l+1)}$$

$$=\frac{1}{(l+1)!}\left[\sum_{n=1}^{l}(-1)^{n-1}C_{l-1}^{n-1}\frac{1}{(k+n-1)(k+n)}-\sum_{n=1}^{l}(-1)^{n-1}C_{l-1}^{n-1}\frac{1}{(k+n)(k+n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{(l+1)!}\left[\sum_{n=1}^{l}(-1)^{n-1}C_{l-1}^{n-1}\frac{1}{(k+n-1)(k+n)}-\sum_{n=2}^{l+1}(-1)^{n-1}C_{l-1}^{n-2}\frac{1}{(k+n-1)(k+n)}\right]$$

$$=\frac{1}{(l+1)!}\left[\frac{1}{k(k+1)}+\sum_{n=2}^{l}(-1)^{n-1}\left(C_{l-1}^{n-1}-C_{l-1}^{n-2}\right)\frac{1}{(k+n-1)(k+n)}+\frac{(-1)^{l-1}}{(k+l)(k+l+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{(l+1)!}\sum_{n=1}^{l+1}(-1)^{n-1}C_l^{n-1}\frac{1}{(k+n-1)(k+n)}.$$

这表明$(*)$式对一切正整数m都成立.从而有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m)}$$

$$=\frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}C_{m-1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+n-1)(k+n)}$$

$$=\frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}\frac{C_{m-1}^{n-1}}{n}$$

$$=\frac{1}{m}\frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}C_{m}^{n}$$

$$=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m!}.$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{m=0}^{2017}(k+m)}=\frac{1}{2017}\cdot\frac{1}{2017!}.$

【注】本题中证明的 $\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m)}=\frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}C_{m-1}^{n-1}\frac{1}{(k+n-1)(k+n)}$ 本身也是值得记住的一个结论.

三、【分析】本题考查三重积分的变量代换，属于简单题.注意每一步的计算都要准确.

【证明】令 $\frac{x^2+y^2}{z}=u$，$xy=v$，$\frac{y}{x}=w$，由 $x>0,y>0,z>0$ 可得

$$\begin{cases}x=\sqrt{\dfrac{v}{w}}\\ y=\sqrt{vw}\\ z=\dfrac{v}{u}\left(w+\dfrac{1}{w}\right)\end{cases}\text{，其中}\begin{cases}m\le u\le n\\ a^2\le v\le b^2\\ \alpha\le w\le\beta\end{cases}，$$

从而 $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|}=\frac{z^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{2y}=\frac{v}{2u^2w}\left(w+\frac{1}{w}\right).$

那么 $\iiint\limits_{\Omega}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega'}\frac{v^3}{u^3}\left(w+\frac{2}{w}+\frac{1}{w^2}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\frac{1}{2}\int_m^n\frac{1}{u^3}\mathrm{d}u\int_{a^2}^{b^2}v^3\mathrm{d}v\int_\alpha^\beta\left(w+\frac{2}{w}+\frac{1}{w^2}\right)\mathrm{d}w$$

$$=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\left(b^8-a^8\right)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right].$$

四、【分析】本题考查微分中值定理，属于中档题.思路较为清晰，但对不等式的要求较高，需要反复尝试.

【解】设 $M=\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\mathrm{e}^{-x^2}f(x)\right|$，由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，对任意 $a>0$， $f(x)$ 都在 $[-a,a]$ 上有界，那么对任意 $x\in(a,+\infty)$，都存在 $\xi\in(a,x)$，使得

$$\frac{xf(x)-af(a)}{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{a^2}}=\left.\frac{[xf(x)]'}{(\mathrm{e}^{x^2})'}\right|_{x=\xi}.$$

而 $\left|\dfrac{[xf(x)]'}{(\mathrm{e}^{x^2})'}\right|=\dfrac{xf'(x)+f(x)}{2x\mathrm{e}^{x^2}}$

$$\begin{aligned}
&\le\frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{-x^2}f'(x)\right|+\left|\frac{\mathrm{e}^{-x^2}f(x)}{2x}\right|\\
&\le\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{-x^2}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|+\frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{-x^2}\frac{f(0)}{x}\right|\\
&\le\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{-x^2}f'(\eta)\right|+\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-a^2}\left|f(0)\right|\\
&\le\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{-\eta^2}f'(\eta)\right|+\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-a^2}\left|f(0)\right|\\
&\le M+\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-a^2}\left|f(0)\right|.
\end{aligned}$$

其中 $0<\eta<x$，令 $M_0=M+\dfrac{1}{2a}\mathrm{e}^{-a^2}\left|f(0)\right|$，从而

$$\left|xf(x)\right|-\left|af(a)\right|\le\left|xf(x)-af(a)\right|\le M_0\left|\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{a^2}\right|\le M_0\mathrm{e}^{x^2}-M_0\mathrm{e}^{a^2}\le M_0\mathrm{e}^{x^2}.$$

故

$$M_0\ge\left|x\mathrm{e}^{-x^2}f(x)\right|-a\mathrm{e}^{-x^2}\left|f(a)\right|\ge\left|x\mathrm{e}^{-x^2}f(x)\right|-a\mathrm{e}^{-a^2}\left|f(a)\right|.$$

即

$$\left|x\mathrm{e}^{-x^2}f(x)\right|\le M_0+a\mathrm{e}^{-a^2}\left|f(a)\right|<+\infty.$$

五、【分析】本题借助证明积分不等式综合考查一元函数微积分的知识，属于较难题.想要证出本题需要非常巧妙的构造，其中还涉及了 Leibniz 公式并多次使用分部积分，无论从证明还是计算上都有较大的难度.

【证明】设 $g(x)=(x-a)^n(b-x)^n$，那么

$$g^{(2n)}(x)=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}\left[(x-a)^n\right]^{(2n-k)}\left[(b-x)^n\right]^{(k)}=C_{2n}^{n}(n!)^2=(2n)!.$$

又有 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b(x-a)^n(b-x)^n\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{(b-a)^{2n+1}}{n+1}\int_0^1 t^n(1-t)^n\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(b-a)^{2n+1}}{n+1}\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}(1-t)^n\Big|_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n-1}(-n)\mathrm{d}t\right]$$

$$=(b-a)^{2n+1}\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$=(b-a)^{2n+1}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n+2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2n}\int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

注意到

$$\int_a^b f^{(2n)}g(x)\mathrm{d}x=(-1)^k\int_a^b f^{(2n-k)}(x)g^{(k)}(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g^{(2n)}(x)\mathrm{d}x\text{，}$$

故

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{(2n)!}\left|\int_a^b f^{(2n)}(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{M}{(2n)!}\left|\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)!}M.$$

六、【分析】本题综合考察推理和证明能力，属于难题.题目中构造了一个处处连续但处处不可导的函数，在证明其不可导时，构造子列的过程如同神来之笔，所用的方法“刀光剑影”，具有很大的难度.

【证明】由于 $0\le\varphi(x)\le 1$， $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^n x)\le\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

由 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 收敛可知 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^n x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，从而 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上连续.

现任取实数 x 和 $m>0$，令 $\delta_m=\pm\frac{1}{2}\cdot 4^{-m}$，其中符号的选取要使得 $4^m x$ 和 $4^m(x+\delta_m)$ 之间没有整数，再令

$$\gamma_n=\frac{\varphi(4^n(x+\delta_m))-\varphi(4^n x)}{\delta_m},$$

则 $n>m$ 时，由于 $4^n\cdot\delta_m=\pm\frac{1}{2}\cdot 4^{n-m}$ 必为偶数，有 $\gamma_n=0$；而 $0\le n\le m$ 时有

$$|\gamma_n|\le\frac{\left|4^n(x+\delta_m)-4^n x\right|}{\delta_m}=4^n.$$

其中$n=m$时，

$$\gamma_m=\frac{\varphi(4^m(x+\delta_m))-\varphi(4^m x)}{\delta_m}=\frac{\varphi(4^m\cdot\delta_m)}{\delta_m}=4^m.$$

由于$m\to\infty$时，$\delta_m\to 0$，而

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right|=\left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n\gamma_n\right|&=\left|\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n\gamma_n+\left(\frac{3}{4}\right)^m\gamma_m\right|\\&\geq 3^m-\left|\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n\gamma_n\right|\\&\geq 3^m-\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left|\gamma_n\right|\\&\geq 3^m-\sum_{n=0}^{m-1}3^n\\&=\frac{1}{2}(3^m+1)\to+\infty.\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在任意一点处的导数都不存在，即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上处处连续但处处不可微.

【注】本题中给出的函数灵感来源于 Weierstrass 构造出的病态函数：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b^k\cos(\pi a^k x),$$

其中$a\geq 3$为奇数，$0<b<1$且$ab\geq 1+\frac{3}{2}\pi$.它在 $\mathbf{R}^1$ 上处处连续但处处不可微，证明与本题所用的思路完全相同，但是过程要复杂得多，读者可以自行思考或查询相关资料，这里不再赘述.看过这个证明的人，无不为 Weierstrass 卓越的推理能力折服.他的证明犹如气势恢宏的交响乐，证明中的每个部分都担任一部分职责，而 Weierstrass 就像指挥家将他们整合为及其协调的整体.这种超越直觉的洞见，用定义、逻辑和不等式狠狠地摧毁了直观主义.

《微积分的历程》如是评价：“在持续不断的起伏中，数学家们建立起雄伟的理论体系，然后足以揭示他们思想界限的恰当反例.这种理论与反例的对照成为正确推理的引擎，凭借这种工具，数学得以进步。因为我们唯有知道某些特性是如何丧失的，方能了解他们是怎么样发挥作用的.同样，我们唯有认清直觉是如何把人引入歧途，方能如实地评价推理的威力。”

第九届全国大学生数学竞赛初赛模拟试题（三）参考答案

（非数学类）

一、填空题

1.【答案】$\arctan\dfrac{y}{x}-x=C$， C 是任意常数.

【分析】本题考查用积分因子法解一阶常微分方程，属于简单题.实际求解时可以通过全微分运算的熟练实现.

【解析】由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x}y^2+\dfrac{y}{x}+x$ 变形可得 $\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)=\mathrm{d}x$，故方程的通解为

$\arctan\dfrac{y}{x}-x=C$， C 是任意常数.

2.【答案】$\left(\dfrac{1}{2},1\right]$

【分析】本题考查任意项级数的收敛性，属于中档题.思路比较清晰，讨论时要注意 Taylor 公式的使用.

【解析】由 $\left|\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)\right|<\dfrac{1}{n^p}$ 可知， $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 绝对收敛.

设 m 是使得 $mp\ge 1$ 的最小正整数，则 $m\ge 2$ 时 $(m+1)p>1$，且

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+\frac{(-1)^n}{3n^{3p}}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{(-1)^{mp}}{mn^{mp}}+o\left(\frac{1}{n^{(m+1)p}}\right),$$

那么 $0<p\le\dfrac{1}{2}$ 时，由于 $mp\ge 1$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 可表示成有限个收敛级数和有限个发散级数的和，故发散.而 $\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时有 $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)=\dfrac{(-1)^n}{n^p}-\dfrac{1}{2n^{2p}}+o\left(\dfrac{1}{n^{2p}}\right)$ ，原级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 可表示为两个绝对收敛级数和一个条件收敛级数的和，所以它条件收敛.

3.【答案】$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$

【分析】本题结合多元函数求导考查不定式极限，属于简单题.注意计算的准确.

【解析】由已知 $f(tu,tv)=t^2f(u,v)$，两边对 t 求导得：$uf_1'(tu,tv)+vf_2'(tu,tv)=2tf(u,v)$.

代入 $t=1$， $u=1$， $v=2$ 得 $f_u(1,2)+2f_v(1,2)=0$，故 $f_v(1,2)=-\dfrac{3}{2}$.

那么 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x\left[1+f(t-\sin t+1,\sqrt{1+t^3}+1)\right]^{\frac{1}{\ln(1+t^3)}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)\right]^{\frac{1}{\ln(1+x^3)}}$$
$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)}{x^3}$$
$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)f_u(1,2)+\frac{3}{2}x^2f_v(1,2)}{3x^2}$$
$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{4}x^2}{3x^2}$$
$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}.$$

4.【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$

【分析】本题考查 B 函数，属于中档题.Euler 积分是求解定积分的重要工具，对于本题而言如果熟悉 B 函数，解决起来并不困难，但是如果不了解 B 函数则无法求解.

【解析】$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x=\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$

5.【答案】$\dfrac{35}{4}\sqrt{7}$

【分析】本题考查利用导数求函数的最值，属于较难题.题目看似简单，但处理起来并不容易，如果用研究多元函数的方法，计算会相当繁杂，而化成一元函数的方式又有三种，繁琐程度各不相同.即使采用如下的方法也会遇到难以分解的因式，需要有高超的代数基本功.

【解析】设 $D=\{(\alpha,\beta,\gamma)|0<\alpha<\pi,0<\beta<\pi,0<\gamma<\pi,\alpha+\beta+\gamma=\pi\}$，则

$$\max_{(A,B,C)\in D}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)=\max_{\substack{A+C>\pi\\ A,C>0}}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)$$
$$=\max_{0<C<\pi}\max_{0<A<\pi-C}\left[(3+4\cos C)\sin A+4\sin C\cos A+18\sin C\right]$$
$$=\max_{0<C<\pi}\left(\sqrt{(3+4\cos C)^2+4\sin^2 C}+18\sin C\right)$$
$$=\max_{0<C<\pi}\left(\sqrt{24\cos C+25}+18\sin C\right).$$

设 $f(C)=\sqrt{24\cos C+25}+18\sin C,0<C<\pi$. 由于 $C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，

$f(C)=\sqrt{24\cos C+25}+18\sin C\geq\sqrt{25-24\cos C}+18\sin C=f(\pi-C)$，下面只需考

虑 $f(C)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值.由 $f'(C)=-\frac{12\sin C}{\sqrt{24\cos C+25}}+18\cos C=0$ 得：

$$(8\cos C-1)(27\cos^2 C+32\cos C+4)=0.$$

$C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$C=\arccos\frac{1}{8}$.那么 $f(C)$ 在 $\left(0,\arccos\frac{1}{8}\right)$ 上单调上升，在 $\left(\arccos\frac{1}{8},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调下降，故 $f(C)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\subset(0,\pi)$ 上的最大值为 $f\left(\arccos\frac{1}{8}\right)=\frac{35}{4}\sqrt{7}$.即对于三角形 ABC，$3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 的最大值为 $\frac{35}{4}\sqrt{7}$.

二、【分析】本题考查三重积分的变量代换（广义球坐标变换），属于中档题.首先要注意的是图形的对称性和变量的取值范围，其次本题计算略显复杂，要注意每一步计算的准确，另外计算最后的积分时可以使用B 函数.

【解】立体关于 xOy 平面和 yOz 平面对称，且 $y\ge 0$.记 Ω 为其位于第一卦限内的部分，令

$$\begin{cases} x=\sqrt{r\cos\varphi}\cos\theta \\ y=\sqrt{r\cos\varphi}\sin\theta \\ z=\sqrt{r\sin\varphi} \end{cases},$$

则 $$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix} \frac{\cos\varphi}{2\sqrt{r\cos\varphi}}\cos\theta & \frac{\cos\varphi}{2\sqrt{r\cos\varphi}}\sin\theta & \frac{\sin\varphi}{2\sqrt{r\sin\varphi}} \\ -\frac{r\sin\varphi}{2\sqrt{r\cos\varphi}}\cos\theta & -\frac{r\sin\varphi}{2\sqrt{r\cos\varphi}}\sin\theta & \frac{r\cos\varphi}{2\sqrt{r\sin\varphi}} \\ -\sqrt{r\cos\varphi}\sin\theta & \sqrt{r\cos\varphi}\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{r\cos^2\varphi}{4\sqrt{r\sin\varphi}}\sin^2\theta-\frac{r\sin^2\varphi}{4\sqrt{r\sin\varphi}}\cos^2\theta-\frac{r\sin^2\varphi}{4\sqrt{r\sin\varphi}}\sin^2\theta-\frac{r\cos^2\varphi}{4\sqrt{r\sin\varphi}}\cos^2\theta$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{r}{\sin\varphi}}.$$

故 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{r}{\sin\varphi}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$.

那么 $(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 围成的立体体积为：

$$V=4\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}\int_0^{\sqrt[3]{\cos\varphi\sin^2\theta}}\sqrt{r}\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cot\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi.$$

三、【分析】本题考查曲面的切平面与切线，属于简单题.只要保持清醒就不难证出本题.

【证明】设过点 P 所做的曲面 S 的切线与 S 切于点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

则 $(x_0,y_0,-1)$ 是 P_0 处的一个切向量，故 P_0 处的切平面方程为

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

由 P_0 在曲面 S 上可将切平面方程化为

$$x_0x+y_0y-z-z_0=0.$$

若 PP_0 是曲面 S 的切线，点 P 应该位于过点 P_0 的曲面 S 的切平面上，因此

$$ax_0+by_0-z_0=c.$$

所以所有的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 均位于平面 $ax+by-z=c$ 上.

四、【分析】本题考查 Taylor 公式，属于简单题.问题非常简单，但要注意没有 $f^{(n+1)}(x)$ 连续的条件，直接使用 Taylor 中值定理会出现问题.

【证明】首先由 Taylor 公式：

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1})(h\to 0).$$

而又有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)(0<\theta<1).$$

所以

$$f^{(n)}(x+\theta h)=f^{(n)}(x)+\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(x)+o(1)(h\to 0).$$

从而

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{h}=f^{(n+1)}(x)\lim_{h\to 0}\theta=\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}.$$

即

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

五、【分析】本题单调有界原理等综合考查推理和证明能力，属于较难题.思路比较清晰，但是需要巧妙的构思，反复尝试方能证出.

【证明】由于 $\int_0^1 f_0(x)\mathrm{d}x\le\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x$，且 $f_0(x)$， $f_1(x)$ 在 $[0,1]$ 上正值连续，有

$$f_0(x)\le f_1(x),$$

且 $f_n(x)(n=0,1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上正值连续.

那么 $a_2-a_1=\int_0^1 f_2(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^1\left[\frac{2f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}-f_1(x)\right]\mathrm{d}x\\
&\ge\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{f_1^2(x)-2f_1(x)f_0(x)+f_0^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left[f_1(x)-f_0(x)\right]^2}{f_1(x)+f_0(x)}\mathrm{d}x\\
&\ge 0.
\end{aligned}
$$

若 $a_k\ge a_{k-1}(k=2,3,\cdots)$，则 $f_k(x)\ge f_{k-1}(x)$，且

$$a_k-a_{k-1}=\int_0^1\left[\frac{f_{k-1}^2(x)-2f_{k-1}(x)f_{k-2}(x)}{f_{k-1}(x)+f_{k-2}(x)}\right]\mathrm{d}x\ge\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left[f_{k-1}(x)-f_{k-2}(x)\right]^2}{f_{k-1}(x)+f_{k-2}(x)}\mathrm{d}x\ge 0.$$

因此序列 $\{a_n\}$ 单调上升.

由 $f_0(x)$， $f_1(x)$ 在 $[0,1]$ 上正值连续可知存在 $k\ge 1$ 使得 $f_1(x)\le kf_0(x)$. 记 $c_1=k$，则

$$f_2(x)=\frac{2f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\le\frac{2c_1}{c_1+1}f_1(x).$$

归纳即得

$$c_{n+1}=\frac{2c_n}{c_n+1},\ f_{n+1}(x)\le c_{n+1}f_n(x),n=0,1,2,\cdots.\qquad(*)$$

由于

$$c_{n+1}-c_n=\frac{2c_n}{c_n+1}-c_n=-\frac{c_n(c_n-1)}{c_n+1}<0.$$

且 $c_n\le c_1=k$，所以 $\{c_n\}$ 单调下降有下界，记 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，则由 $A=\dfrac{2A}{A+1}(A>0)$，解得

$$\lim_{n\to\infty}c_n=A=1.$$

且

$$\frac{c_n}{c_n+1}\le\frac{c_1}{c_1+1}=\frac{k}{k+1}.$$

由 $(*)$ 两端积分可得 $a_{n+1}\le c_{n+1}a_n(n=0,1,2,\cdots)$，因此

$$0 < c_{n+1}a_{n+1} = \frac{2c_n}{c_n+1}a_{n+1} \le \frac{4c_n}{(c_n+1)^2}c_n a_n \le c_n a_n.$$

故$\{a_n c_n\}$单调下降有下界，因此它收敛，而之前又已证明$\{c_n\}$收敛到1，因此$\{a_n\}$也收敛.

六、【分析】本题考查正项级数敛散性的判断以及与其相关的极限知识，属于较难题.问题看似简单但是稍有不慎就会出错，想要正确证明需要非常细致.

【证明】（1）显然$a_{k^2} = \dfrac{1}{k^2}$是$\{a_n\}$的一个子列，当$n \to \infty$时，$k^2 \to \infty$.故

$$\lim_{n\to\infty} k^2 a_{k^2} = 1 \ne 0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} na_n \ne 0.$$

（2）设$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$并取$S_0 = 0$，由$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛可知S_n有界，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(S_k - S_{k-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(nS_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k + \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$$

$$= 0$$

由 Stirling 公式得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{2\pi n}\cdot\dfrac{n}{\mathrm{e}}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

因此有

$$0 < \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} \le n\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = n\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n} ka_k} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n} ka_k}{n} \to \infty(n\to\infty).$$

由夹挤准则可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} = 0.$$

【注】可能一些读者想要先证明$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$然后直接使用 Stolz 定理，但（1）问中构造的反例已经打消了这种念头.