2022届福建名校联盟优质校高三第四次调研

数　学

姓名______________________________　　准考证号______________________________

本试卷共 4 页，总分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的。

1. 给定$\triangle ABC$，则平面内使得到 A,B,C 三点距离的平方和最小的点是$\triangle ABC$ 的

A. 重心　　B. 垂心　　C. 外心　　D. 内心

2. $\forall x \in R,\ \cos^5 x = a\cos 5x + b\cos 3x + c\cos x$，则 $7a+b+6c=$

A. 3.5　　B. 4.5　　C. 5.5　　D. 7.5

3. 六个正实数 a,b,c,d,e,f 之积为 $\frac{1}{16}\sqrt{15999496003969}$，有三个定义域为 $\mathbf{R}^2$ 的函数：$f_{i,j}=a^3i^3+b^3j^3, w_{i,j}=c^3i^3+d^3j^3, z_{i,j}=e^3i^3+f^3j^3$，则 $f_{1,2}w_{2,1}z_{1,1}$ 的最小值是

A. 4253475　　B. 6202421　　C. 3999937　　D. 5524856

4. 数列 $\{F_n\}$、$\{S_n\}$ 定义如下：$F_1=F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$,

$S_1=1, S_{n+1}=\begin{cases} S_n-F_{n+1}, if\ S_n>F_{n+1} \\ S_n+F_{n+1}, if\ S_n\le F_{n+1}\end{cases}$，则 $S_{2023}=$

A. 1　　B. 828　　C. 940002　　D. 734268509

5. 在四行四列的数表中的每一格内填入 0 或 1，记第 i 行 j 列的数为 a_{ij}. 若对任意 $i,j\in\{1,2,3,4\}$（允许 i,j 相等）均有 $a_{ij}=a_{ji}$，且该数表任两行不能完全相同，则符合要求的数表的个数是

A. 1024　　B. 685　　C. 609　　D. 716

6. 计算：$\sum_{k=1}^{2021}\tan^2\left(\frac{4043-2k}{8086}\pi\right)=$

A. 1384146　　B. 2722287　　C. 4510923　　D. 9528774

7. $\forall n\in N_+, \mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}>A$，则实数 A 的最大可能值是

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{4}{7}$　　C. $\frac{1}{e}$　　D. $\frac{\ln 3}{2}$

8. 记集合 $X=\left\{\frac{1}{\alpha^{\beta}-1}\middle|\alpha,\beta\in Z\cap[2,+\infty)\right\}$，则 X 中所有元素之和为

A. 4　　B. 1　　C. 3　　D. 2

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 设非负整数 a,b,c 满足：$\forall u,v\in[0,1],u<v,\exists n\in N_+\ s.t.\ u<\{\sqrt{an^2+bn+c}\}<v$，这里 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分，即 x 与不大于 x 的最大整数的差. 下列四组 (a,b,c) 中，符合要求的是

A. $(0,3,1)$　　B. $(4,0,3)$　　C. $(2,2,2)$　　D. $(3,1,7)$

10. 下列四个命题中，真命题有

A. 设 $x,y,z\geq -1,x+y+z=1$，则 $9(xyz)^2+8xyz(x^2+y^2+z^2)+1\geq 30xyz$.

B. 存在正整数列 $\{a_n\}$，使得只有有限个正整数 k，满足 $a_k+1>\sqrt[k]{2}a_{k-1}$.

C. 存在积为 1 的正实数 a,b,c,d，满足 $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}+d^{-1}+9(a+b+c+d)^{-1}=6$.

D. 对任意实数 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 和正实数 $b_1,b_2,\dots,b_n,c$，在一个 n 行 n 列的方格表中的位于第 i 行 j 列的方格里填入 $a_ia_j\left(b_i+b_j\right)^{-c}$，则所有方格的数之和非负.

11. 记复数 z 的实部和虚部分别为 $\mathrm{Re}(z)$ 和 $\mathrm{Im}(z)$，定义复数 $w=\left(z_1+z_1^{-1}\right)^2$. 已知 z 满足 $\mathrm{Re}(z)^2+2\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z)+2\mathrm{Im}(z)^2+\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=1$，则 w 的模长可能是

A. 0　　B. 7　　C. 1　　D. 6

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e^x-1},if\ x\neq 0\\ 1,if\ x=0\end{cases}$，定义 $f^{(0)}(x)=f(x)$，对正整数 n，$f^{(n)}(x)$ 为 $f^{(n-1)}(x)$ 的导函数，令 $B_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，下列结论中正确的是

A. $B_{122111}=0$.

B. $\forall p,n\in N_+,(p+1)\sum_{k=1}^{n}k^p=\sum_{j=0}^{p}(-1)^jC_{p+1}^{j}B_jn^{p+1-j}$.

C. $\forall x\in R,n\in N_+,-\frac{x}{\tan x}+\tan x+1\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}B_kx^{2k}+\left(2^{4k}-2^{2k}\right)B_kx^{2k-1}}{(2k)!}$.

D. $\forall n,r\in N_+,\sum_{k=1}^{n}k^{-2r}<\frac{(-1)^{r-1}(2\pi)^{2r}}{2(2r)!}B_{2r}$.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=222,a_n=\sin a_{n-1}\,(n\geq 1)$，则 $\sqrt{122111}a_{122111}$ 的近似值为（结果精确到 0.001）____▲____.

14. 平面直角坐标系中，抛物线 $x^2=4y$ 上有三个不重合的点 A,B,C，已知三角形 ABC 的垂心为抛物线的焦点，则三角形 ABC 的内切圆半径的取值范围是____▲____.

15. 设正整数 $k(k\geq 2)$ 满足 $2^{2^{k-1}}-1$ 是 k 的整数倍，则 k 的最小可能值是__▲__.

16. 莱洛四面体的定义如下：给定边长为 r 的正四面体 $ABCD$，分别以四个顶点为球心，r 为半径作球，称这四个球的公共部分为莱洛四面体，则莱洛四面体的体积与其内切球的体积的比值是__▲__.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本题满分 10 分）

给定正整数 n，设正方形数阵 M_n 满足以下要求：

1° 数阵中的每个数都是正整数；

2° 数阵中所有数之和为 n（允许整个数阵只有一个数）.

记 $F(n)$ 为符合要求的 M_n 的个数，例如：$F(6)=11$，所有的 M_6 如下：

$$[6],\begin{bmatrix}1&1\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&2\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&1\\1&1\end{bmatrix}.$$

（1）试求 $F(13)$.

（2）设 $\lfloor x\rfloor$ 为不超过实数 x 的最大整数. 证明：当 $n\geq 2$ 时，$F(n)<\frac{\sqrt{n}}{2}C_n^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}$.

18. （本题满分 12 分）

“拼接全等”是指两个简单多边形（即任意两边若相交则交点只能是顶点）中的一个经过有限次平移、旋转、切割、重组后可以得到另一个.

（1）证明；两个简单多边形拼接全等当且仅当二者面积相等.

（2）将拼接全等的概念推广到三维空间，对于两个体积相等的简单多面体（简单多面体的定义是任意两个面若相交，交线只能是棱），是否一定拼接全等？ 证明你的结论.

19. （本题满分 12 分）

记函数 $f(x)=\sin x-ax\cos x, a\in R$.

（1）若 $\forall x\in[0,\pi]$，恒有$f(x)\geq 0$，求 a 的取值范围.

（2）当 $a=1$ 时，设 $f(x)$ 的所有正零点构成的集合为 X. 设实数 C 满足：存在 X 中若干元素的倒数平方和大于 C，试求 C 的取值范围.

20. （本题满分 12 分）

三棱锥 $P-ABC$ 中，记 $\angle BPC=a,\angle CPA=b,\angle APB=c$，二面角 $C-PA-B$，二面角 $A-PB-C$，二面角 $B-PC-A$ 的平面角分别为 α,β,γ.

（1）证明：$\frac{\sin a}{\sin \alpha}=\frac{\sin b}{\sin \beta}=\frac{\sin c}{\sin \gamma}$.

（2）给定以 P 为球心，半径不超过 P 到平面 ABC 的距离的球 S. 若 a,b,c 为已知量，α,β,γ 为未知量，记三棱锥与 S 的公共部分的体积为 V_1，S 的体积为 V_2，试求 $\frac{V_1}{V_2}$.

21. （本题满分 12 分）

在$\triangle A_1A_2A_3$ 中，对 $i=1,2,3$，以 A_{i+1},A_{i+2}（下标 mod 3 ）为两焦点作经过 A_i 的椭圆 Γ_i. 对 $i\neq j$，设 Γ_i和 Γ_j 的两交点为 X_{ij} 和 X_{ji}. 过 X_{ij} 和 X_{ji} 分别作 Γ_i 的切线交于 P_{ij}.

（1）证明：直线 $P_{ij}P_{ji}$ 经过 $\triangle A_1A_2A_3$ 的一个顶点.

（2）证明：P_{12}，P_{13}，P_{23}，P_{21}，P_{31}，P_{32} 六点共圆锥曲线.

22. （本题满分 12 分）

设 $z\in C,a\in[-1,1],n\in N_+$. 定义多项式 $f_n(z)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{k(n-k)}z^k$.

（1）当 $a=\frac{1}{2},n=5$ 时，解方程：$f_n(z)=0$.

（2）证明：若 $f_n(z)=0$，则 $|z|=1$.