座位号______ 考场号______ 姓名______ 准考证号______ 学校______ 省市______

密封线

第十三届全国大学生数学竞赛初赛补赛试卷

（非数学类，2021 年）

题号	一	二	三	四	五	六		总分
满分	30 分	14 分	14 分	14 分	14 分	14 分		100 分
得分								

注意：本试卷共六大题，满分 100 分，考试时间为 150 分钟.

1 所有答题都须写在此试题纸密封线右边，写在其他纸上无效.

2 密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

3 当题空白不够，可写在当页背面，并注明题号.

得分	
评阅人	

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

1、设 $x_0=1$，$x_n=\ln(1+x_{n-1})\ (n\ge 1)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n=$ ____2____.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\ln(1+x_{n-1})}-\frac{1}{x_{n-1}}}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to0}\frac{t\ln(1+t)}{t-\ln(1+t)}$

2、积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\tan x}dx=$ ____$\frac{\sqrt2}{2}\ln(\sqrt2+1)$____.

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{\sin x+\cos x}dx=\frac12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\cos x}dx=\frac12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt2\sin(x+\frac{\pi}{4})}$

3、已知直线 $L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z=9\end{cases}$ 和平面 $\pi:4x-y+z=1$，

则直线 L 在平面 π 上的投影直线方程为 ____$\begin{cases}17x+31y-37z=117\\4x-y+z=1\end{cases}$____.

设 π_1: $(2x-4y+z)+\lambda(3x-y-2z-9)=0$

$\pi_1\perp\pi$ 时

$(2+3\lambda)\cdot4-(4+\lambda)\cdot(-1)+(1-2\lambda)\cdot1=0$

$\lambda=-\frac{13}{11}$

π_1: $17x+31y-37z=117$

4、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{2}{4n^2+4n+1}=$ ____$\arctan\frac12$____.

$\arctan\frac{2}{4n^2+4n+1}$

$=\arctan\frac{1}{2n}-\arctan\frac{1}{2(n+1)}$

$S_n=\arctan\frac12-\arctan\frac{1}{2(n+1)}$

5、微分方程 $\begin{cases}(x+1)\frac{dy}{dx}+1=2e^{-y}\\y(0)=0\end{cases}$ 的解是 ____$y=\begin{cases}\ln\frac{2x+1}{x+1},\ x\ne-1\\\ln2,\ x=-1\end{cases}$____.

令 $u=e^y$，$(x+1)\frac{du}{dx}+u=2$

$u=e^{-\int\frac{dx}{x+1}}\left[\int\frac{2}{x+1}e^{\int\frac{dx}{x+1}}dx+C\right]$

得分	
评阅人	

$(-1,1)$内，

$x\in(-1,1)$

得分	
评阅人	

二、（本题满分 14 分）

设 $f(x)=-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{e}\right)+\int_{-1}^{1}|x-t|\,e^{-t^2}\,dt$．证明：在区间 $(-1,1)$ 内，$f(x)$ 有且仅有两个实根.

$x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)+\int_{-1}^{x}(x-t)e^{-t^2}dt+\int_{x}^{1}(t-x)e^{-t^2}dt$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)+x\int_{-1}^{x}e^{-t^2}dt-\int_{-1}^{x}te^{-t^2}dt+\int_{x}^{1}te^{-t^2}dt-x\int_{x}^{1}e^{-t^2}dt$$

（可积出来）

$$=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2e}+e^{-x^2}+2x\int_{0}^{x}e^{-t^2}dt$$

易验 $f(x)=f(-x)$.

只需考虑 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 内零点.

$$f(0)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2e}+1<0$$

$$f(1)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2e}+e^{-1}+2\int_{0}^{1}e^{-t^2}dt$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}+2\int_{0}^{1}e^{-t^2}dt$$

$0\le t\le 1$ 时，$t^2\le t$，$f(1)\ge -\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}+2\int_{0}^{1}e^{-t}dt>0$

$0\le x<1$ 时，$f'(x)=-2xe^{-x^2}+2xe^{-x^2}+2\int_{0}^{x}e^{-t^2}dt>0$.

$f(x)\uparrow$，且有零点 $\xi\in(0,1)$ $\Rightarrow$ ξ 唯一.

$\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有两个零点，为 $\pm\xi$.

座位号______ 考场号______ 姓名______ 准考证号______ 学校______ 省市______

密封线

密封线

密封线

得分	
评阅人	

三、(本题满分 14 分)

设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 上具有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2+y^2$，求 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\tan r-\sin r)^2}$.

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r\left(\rho\cos\theta f'_x+\rho\sin\theta f'_y\right)\rho\, d\rho$$

换序

$$=\int_0^r\rho\, d\rho\int_0^{2\pi}\left(\rho\cos\theta f'_x+\rho\sin\theta f'_y\right)d\theta\quad = I$$

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=-\rho\sin\theta\,\underline{d\theta}\\ dy=\rho\cos\theta\,\underline{d\theta}\end{cases}$$

$$I=\int_0^r\rho\, d\rho\oint_{L_\rho:x^2+y^2=\rho^2}-f'_y\,dx+f'_x\,dy$$

格林

$$=\int_0^r\rho\, d\rho\iint\limits_{D_\rho:x^2+y^2\le\rho^2}\left(f''_{xx}+f''_{yy}\right)d\sigma$$

$$=\int_0^r\rho\, d\rho\iint\limits_{D_\rho}(x^2+y^2)\,d\sigma$$

$$=\int_0^r\rho\, d\rho\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\rho u^2\cdot u\, du$$

$$=2\pi\int_0^r\rho\cdot\frac{\rho^4}{4}d\rho=\frac{\pi}{12}r^6$$

$$\text{原式}=\lim_{r\to0^+}\frac{\frac{\pi}{12}r^6}{(\tan r-\sin r)^2}=\lim_{r\to0^+}\frac{\frac{\pi}{12}r^6}{\tan^2 r\cdot(1-\cos r)^2}=\frac{\pi}{3}.$$

得分	
评阅人	

四、(本题满分 14 分)

若对于 R^3 中半空间 $\{(x,y,z)\in R^3 \mid x>0\}$ 内的任意有向光滑封闭曲面 S，都有：

$$\iint_S \underbrace{xf'(x)}_{P}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\underbrace{y\left(xf(x)-f'(x)\right)}_{Q}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\underbrace{-xz\left(\sin x+f'(x)\right)}_{R}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

其中 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶导数连续且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$，求 $f(x)$.

由Gauss公式，有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.\quad \forall (x,y,z)\in R^3,\ x>0.$$

$$\cancel{f'(x)}+xf''(x)+xf(x)-\cancel{f'(x)}-x\sin x-xf'(x)=0$$

$$x>0 \Rightarrow f''(x)-f'(x)+f(x)=\sin x$$

特征方程 $r^2-r+1=0$

$$r_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

齐次通解：$y_{齐通}=e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

设特解 $y^*_{特}=C_3\cos x+C_4\sin x$. 代入原方程，解得

$$\begin{cases} C_3=1 \\ C_4=0 \end{cases}$$ 即 $y^*_{特}=\cancel{\sin x}\ \cos x$

$\Rightarrow$ 原方程解为 $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\cos x$

由 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-1 \\ C_2=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}x}\left(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\cos x.$$

得分	
评阅人	

五、（本题满分 14 分）

设 $f(x)=\int_0^x\left(1-\frac{[u]}{u}\right)du$，其中 $[x]$ 表示小于等于 x 的最大整数．试讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{f(x)}}{x^p}\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$ 的敛散性，其中 $p>0$．

当 $x\in[N,N+1)$ 时

$$f(x)=\int_0^1 du+\int_1^x = 1+\sum_{k=1}^{N-1}\int_k^{k+1}\left(1-\frac{k}{u}\right)du+\int_N^x\left(1-\frac{N}{u}\right)du$$

$$=\ln(N!)+x-N\ln x$$

$$\Rightarrow e^{f(x)}=\frac{e^x N!}{x^N},\quad N\le x<N+1.$$

由斯特林公式 (Stirling)；$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$

且 $\frac{e^N N!}{(N+1)^N}\le e^{f(x)}\le\frac{e^{N+1}N!}{N^N}$

从而 x 充分大时，N 充分大，有 $\begin{cases}\frac{e^{N+1}N!}{N^N}\sim\sqrt{2\pi}\,e\sqrt{N}\le\sqrt{2\pi}\,e\sqrt{x}\\ \frac{e^N N!}{(N+1)^N}\sim\frac{1}{e}\sqrt{2\pi}\sqrt{N}\le\frac{\sqrt{2\pi}}{e}\sqrt{x}\end{cases}$

$\Rightarrow$ $e^{f(x)}$ 与 $\sqrt{x}$ 为同阶无穷大 $(x\to+\infty)$．

故 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{f(x)}}{x^p}\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$ 的敛散性与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p-\frac{1}{2}}}\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$ 同．

令 $x^2=u$，$I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p-\frac{1}{2}}}\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^{\frac{p}{2}+\frac{1}{4}}}\cos\left(u-\frac{1}{u}\right)du$

由 Dirichlet 判别法．I 收敛．($p>0$ 时)．

且 $I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^{\frac{p}{2}+\frac{1}{4}}}\left(\cos u\cos\frac{1}{u}+\sin u\sin\frac{1}{u}\right)du=I_1+I_2$

对 I_1：$\frac{1}{u^{\frac{p}{2}+\frac{1}{4}}}\left|\cos u\cos\frac{1}{u}\right|\sim\frac{|\cos u|}{u^{\frac{p}{2}+\frac{1}{4}}}\ (u\to+\infty)$．$\begin{cases}p>\frac{3}{2}\text{ 时．}I_1\text{ 绝对收敛}\\ 0<p\le\frac{3}{2}\text{ 时．}I_1\text{ 条件收敛}\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}p>\frac{3}{2}，I\text{ 绝对收敛}\\ 0<p\le\frac{3}{2}．I\text{ 条件收敛}\end{cases}$

对 I_2：$\frac{1}{u^{\frac{p}{2}+\frac{1}{4}}}\left|\sin u\sin\frac{1}{u}\right|\sim\frac{|\sin u|}{u^{\frac{p}{2}+\frac{5}{4}}}<\frac{1}{u}$，$p>0$ I_2 绝对收敛

得分	
评阅人	

六、

设

证明：若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发

$f(x)$ 不收敛

由 $y=\ln x$

$\ln f(x)$

$\int_1^{+\infty}\frac{\ln f}{x}$

$1\quad\frac{e}{a_1}$

扫描全能王 创建

得分	
评阅人	

的最

六、(本题满分 14 分)

设正数列$\{a_n\}$单调减少且趋于零，$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^n x^n$.

证明：若级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$发散，则积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln f(x)}{x^2}\mathrm{d}x$也发散.

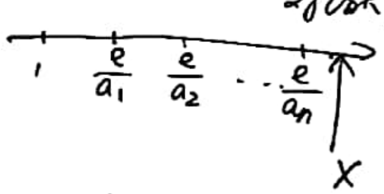
$f(x)$ 是幂级数. $R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a_n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=+\infty \Rightarrow f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$.

([illegible])

由 $y=\ln x$ 的凹凸性可知

$$\ln f(x)=\ln\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^n x^n\right)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\ln(a_n^n x^n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\ln(a_n x)\overset{\forall k\in\mathbb{N}^*}{\geqslant}k\ln(a_k x)\quad ☆$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln f(x)}{x^2}dx\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}n\ln(a_n x)}{x^2}dx=\int_1^{\frac{e}{a_1}}+\int_{\frac{e}{a_1}}^{\frac{e}{a_2}}+\cdots$$



对任意 X, $\int_1^X\frac{\sum_{n=1}^{\infty}n\ln(a_n x)}{x^2}dx=\int_1^{\frac{e}{a_1}}+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{e}{a_k}}^{\frac{e}{a_{k+1}}}+\int_{\frac{e}{a_n}}^{X}$

$x\in\left[\frac{e}{a_k},\frac{e}{a_{k+1}}\right]$ 时, $a_k x\geq e$

$$\geqslant M_1+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{e}{a_k}}^{\frac{e}{a_{k+1}}}\frac{k}{x^2}dx+\int_{\frac{e}{a_n}}^{X}\frac{n}{x^2}dx$$

$$=M_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(a_k-a_{k+1})}{e}+n\left(\frac{a_n}{e}-\frac{1}{X}\right)$$

$$\xlongequal[\text{整理}]{\text{Abel 变换}}M_1+\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{e}-\frac{n}{X}$$

当取 $X\geq\max\left\{n,\frac{e}{a_n}\right\}$ 时. $\int_1^X\frac{\sum_{n=1}^{\infty}n\ln(a_n x)}{x^2}dx\geq\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{e}+M_1-1$

由 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 发散知. 原积分发散.