(2011 年预赛第一(4)题)求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$的和.

解析：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^{2n-2}}x^{2n-2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2} \tag{1}$$

令$y=\frac{x}{\sqrt{2}}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)y^{2n-2}$ (2)

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)|y|^{2n}}{(2n-1)|y|^{2n-2}}=|y|^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=|y|^2,$$

若$\rho=|y|^2<1$，即$|y|<1$，则幂级数(2)收敛；若$\rho=|y^2|>1$，即$|y|>1$，则幂级数发散. 因此，收敛半径$R_1=1$. 当$y=\pm1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)(\pm1)^{2n-2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)$发散. 因此，幂级数(2)的收敛域是$(-1,1)$. 因此，由$-1<\frac{x}{\sqrt{2}}<1$可知，幂级数(1)的收敛域是$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)y^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(y^{2n-1})'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}y^{2n-1}\right)'=\left(\frac{y}{1-y^2}\right)'$$

$$=\frac{(1-y^2)-y(-2y)}{(1-y^2)^2}=\frac{1+y^2}{(1-y^2)^2}$$

因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{x^2}{2}}{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{n}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{2}}=\frac{10}{9}.$$