省市：________ 学校：________ 姓名：________ 准考证号：________

装订线内不要答题

绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：数学竞赛

第十一届全国大学生数学竞赛预赛试题

(非数学类, 2019 年 10 月 26 日)

考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意：本试卷共六大题，满分 100 分，考试时间为 180 分钟

1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	评卷人	复核人

一、填空题 (**本题满分 30 分, 每小题 6 分**)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}=$______.

2. 设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定，则 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=$______.

3. 定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x=$______.

4. 已知 $\mathrm{d}u(x,y)=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}$，则 $u(x,y)=$______.

5. 设 $a,b,\mu>0$，曲面 $xyz=\mu$ 与曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 相切，则 $\mu=$______.

得分	评卷人	复核人

二、解答题（本题满分 14 分）

计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} \frac{xyz}{x^2+z^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

其中 Ω 是由曲面 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2xy$ 围成的区域在第一封限部分.

得分	评卷人	复核人

三、解答题 (本题满分 14 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可微，$f(0)=0$，且存在常数 $A>0$，使得 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立，试证明 $(0,+\infty)$ 上有 $f(x) \equiv 0$.

得分	评卷人	复核人

四、解答题（本题满分 14 分）

计算积分

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

装 订 线 内 不 要 答 题

省市：________ 学校：________ 姓名：________ 准考证号：________

装订线内不要答题

得分	评卷人	复核人

五、解答题（本题满分 14 分）

设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数，且满足 $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. 证明：$c_n > 0$，$n \geq 0$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在，且等于 $f(x)$ 的最小根.

得分	评卷人	复核人

六、解答题（本题满分 14 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数,满足 $3[3+f^2(x)]f'(x)=2[1+f^2(x)]^2\mathrm{e}^{-x^2}$，且 $f(0)\le 1$. 证明：存在常数 $M>0$，使得 $x\in[0,+\infty)$ 时，恒有 $|f(x)|\le M$.