(2014 年预赛第五题)设$f(x)$在$[a,b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n\in[a,b]$使得$[f(x_n)]^n=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b[f(x)]^n\mathrm{d}x$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解析：$f(x_n)=\left(\dfrac{1}{b-a}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\displaystyle\int_a^b[f(x)]^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$，若极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在，由反函数$x=f^{-1}(y)$的连续性(由$f(x)$连续且严格单增得到)可知，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}f^{-1}(f(x_n))=f^{-1}\left(\lim_{n\to\infty}f(x_n)\right)\text{存在.}$$

下面证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在并求其值.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}f(x_n)&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\frac{1}{n}}\left([f(b)]^n\int_a^b\left[\frac{f(x)}{f(b)}\right]^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\right]\\&=f(b)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b\left[\frac{f(x)}{f(b)}\right]^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

下面我们要证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\displaystyle\int_a^b\left[\frac{f(x)}{f(b)}\right]^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=1$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}(b-a)^{\frac{1}{n}}=1$，所以$\forall\varepsilon>0$，存在$N_1\in\mathbb{N}$使得当$n>N_1$时，$(b-a)^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon$. 因此，

$$\left(\int_a^b\left[\frac{f(x)}{f(b)}\right]^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\int_a^b\left[\frac{f(b)}{f(b)}\right]^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=(b-a)^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon.$$

因为函数$f(x)$在$x=b$处连续且单调递增，所以存在$\delta>0$，当$b-\delta\leqslant x\leqslant b$时$f(x)\geqslant f(b)\sqrt{1-\varepsilon}$，因此

$$\left(\int_a^b\left[\frac{f(x)}{f(b)}\right]^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant\left(\int_{b-\delta}^b\left(\sqrt{1-\varepsilon}\right)^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=\delta^{\frac{1}{n}}\sqrt{1-\varepsilon}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\delta^{\frac{1}{n}}=1$，所以存在$N_2\in\mathbb{N}$使得当$n>N_2$时，

$\delta^{\frac{1}{n}}>\sqrt{1-\varepsilon}$. 因此，$\left(\int_a^b\left[\frac{f(x)}{f(b)}\right]^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}>1-\varepsilon$.

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时

$1-\varepsilon<\left(\int_a^b\left[\frac{f(x)}{f(b)}\right]^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon$. 由 ε 的任意性可知，

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b\left[\frac{f(x)}{f(b)}\right]^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=1$.

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(b)$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$.

DUN-MU STUDIO OF MATHEMATICS 算敦 斋睦 1908