(2009 年预赛第八题) 求$x\to 1^-$时，与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$等价的无穷大量.

解析：因为$0<x<1$，所以

$\forall t\in[n-1,n]$，$x^{n^2}\leqslant x^{t^2}$，$x^{n^2}=\int_{n-1}^{n}x^{n^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_{n-1}^{n}x^{t^2}\mathrm{d}t$；

$\forall t\in[n,n+1]$，$x^{t^2}\leqslant x^{n^2}$，$\int_{n}^{n+1}x^{t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_{n}^{n+1}x^{n^2}\mathrm{d}t=x^{n^2}$.

综上，$\forall n\in\mathbb{N}$，$\int_{n}^{n+1}x^{t^2}\mathrm{d}t\leqslant x^{n^2}\leqslant\int_{n-1}^{n}x^{t^2}\mathrm{d}t$，因此

$$\int_{0}^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}x^{t^2}\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\leqslant 1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{t^2}\mathrm{d}t=1+\int_{0}^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t$$

因此，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$与$\int_{0}^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t$是等价无穷大量.

下面计算$\int_{0}^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t$. 请注意，$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以

$$\int_{0}^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}t\xlongequal{t\sqrt{\ln\frac{1}{x}}=u}\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}$$

作为无穷小量，当$x\to 1^-$时，

$\ln\dfrac{1}{x}=\ln\left(1+\dfrac{1-x}{x}\right)\sim\dfrac{1-x}{x}\sim 1-x$. 因此，作为无穷大量

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

综上，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$与$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}$是等价无穷大量.