（2009 年预赛第二题）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}$，其中$n$是给定的正整数.

解析：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-n}{n}\right)}{x}$$

$$=\frac{\mathrm{e}}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-n}{x}$$

$$=\frac{\mathrm{e}}{n}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}+\cdots+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{nx}-1}{x}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{e}}{n}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}+\cdots+\lim_{x\to 0}\frac{nx}{x}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{e}}{n}(1+2+\cdots+n)$$

$$=\frac{(1+n)e}{2}$$

因此，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{(1+n)\mathrm{e}}{2}}$.