(2012 年预赛第一(1)题)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

解析：$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$,

$$0<\frac{1}{n^2}\ln(n!)=\frac{1}{n^2}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)<\frac{1}{n^2}\cdot n\ln n=\frac{\ln n}{n},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$，所以由夹挤准则得，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(n!)=0$.

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=\mathrm{e}^0=1$.