2018年秋季学期“数学竞赛选讲”作业题

1. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin(\tan x)}{\tan x-\sin x}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 二阶可导，且 $f(0)=1$，$f'(0)>1$，$f''(x)>f(x)\,(x>0)$. 求证：$f(x)>\mathrm{e}^x$.

3. 计算曲线积分$\displaystyle\int_{\widehat{ACB}}[f(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+[f'(y)\sin x-\pi]\mathrm{d}y$，其中$\widehat{ACB}$为连结点$A(\pi,2)$与点$B(3\pi,4)$的线段$\overline{AB}$之下方的任意路线，且该路线与线段$\overline{AB}$所围图形的面积为1，$f(x)$是连续可导的函数.

4. 设$f(u)$在$[1,+\infty)$上有连续的二阶导数，$f(1)=-1$，$f'(1)=\dfrac{3}{2}$且函数$\omega=(x^2+y^2+z^2)f(x^2+y^2+z^2)$满足：$\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=0$，求$f(u)$在$[1,+\infty)$上的最小值.

5. 已知当$x>0$时，有$(1+x^2)f'(x)+(1+x)f(x)=1$，$g'(x)=f(x)$，$f(0)=g(0)=0$，求证：$\dfrac{1}{4}<\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}g\left(\frac{1}{n}\right)<1$.