(2012 年预赛第一(5)题) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$.

解析：由积分中值定理得，存在$\xi_x\in[x,x+1]$使得

$$\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=\frac{\sin\xi_x}{\sqrt{\xi_x+\cos\xi_x}}(x+1-x)=\frac{\sin\xi_x}{\sqrt{\xi_x+\cos\xi_x}},$$

因此$\left|\frac{\sin\xi_x}{\sqrt{\xi_x+\cos\xi_x}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x-1}}$,

$$0\leqslant\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x-1}}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x-1}}=0$，所以由夹挤准则可得，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\right|=0$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=0.$$