(2011 年预赛第六题)设函数$f(x)$连续，a,b,c为常数，Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$. 记第一型曲面积分$I=\iint_{\Sigma} f(ax+by+cz)\mathrm{d}S$. 求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u\right)\mathrm{d}u$.

解析：设$u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，则$|u|$表示原点到平面$ax+by+cz=d$（或点$(x,y,z)$到平面$ax+by+cz=0$）的距离. 用平面族$ax+by+cz=d$，$d\in\mathbb{R}$分割单位球面,得到的面积微元是一个“圈”.

这个“圈”的半径是$\sqrt{1-u^2}$，

弧长$s=1\cdot\arcsin u=\arcsin u$，弧长微分$ds=\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$，“圈”的宽度即$\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$，因此$\mathrm{d}S=2\pi\sqrt{1-u^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=2\pi\,\mathrm{d}u$.

综上，$ax+by+cz=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u$，$\mathrm{d}S=2\pi\,\mathrm{d}u$，

$$I=\iint_{\Sigma} f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u\right)\mathrm{d}u.$$