(2013 年预赛第六题) 设 $I_a(r)=\int_C \frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$，其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$，取正向. 求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$.

解析：将椭圆 C 的方程极坐标化，得 $\rho^2+\rho^2\cos\theta\sin\theta=r^2$，即 $\rho^2=\frac{r^2}{1+\cos\theta\sin\theta}$ (注意：$1+\cos\theta\sin\theta=1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\geqslant\frac{1}{2}>0$).

因此，

$$
\begin{aligned}
&y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y\\
&=\rho(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}(\rho(\theta)\cos\theta)-\rho(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}(\rho(\theta)\sin\theta)\\
&=\rho(\theta)\sin\theta(\rho'(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta-\rho(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)-\rho(\theta)\cos\theta(\rho'(\theta)\sin\theta d\theta+\rho(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)\\
&=-\rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_a(r)&=\int_C \frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}=\int_0^{2\pi}\frac{-\rho^2(\theta)}{\rho^{2a}(\theta)}\mathrm{d}\theta\\
&=-\int_0^{2\pi}\rho^{2(1-a)}\mathrm{d}\theta=-\int_0^{2\pi}\frac{r^{2(1-a)}}{(1+\cos\theta\sin\theta)^{1-a}}\mathrm{d}\theta\\
&=r^{2(1-a)}J_a
\end{aligned}
$$

其中，$J_a=-\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\cos\theta\sin\theta)^{1-a}}$.

因此，

(1) 当 $a<1$ 时，$\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)=J_a\cdot\lim\limits_{r\to+\infty} r^{2(1-a)}=+\infty$；

(2) 当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{r\to+\infty} I_1(r)=J_1\cdot\lim\limits_{r\to+\infty} r^0=J_1=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=-2\pi$；

(3) 当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)=J_a\cdot\lim\limits_{r\to+\infty} r^{2(1-a)}=0$.