

(2015 年预赛第一(5)题) 设区间 $(0, +\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为

$u(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$, 则 $u(x)$ 的初等函数表达式为_____.

解析: 已知概率积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}$, 所以 $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

$$\sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\text{因此, } u(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{x}t)^2} d(\sqrt{x}t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$