(非数学类)第三届《预赛》试卷及参考答案

考研竞赛数学 2016-07-16

点击上方"**考研实验数学**"可以订阅哦

★ 预赛试卷及参考答案

(非数学类)第三届预赛试卷及参考答案

一、(本题共 4 小题，每题 6 分，共 24 分)计算题

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

【解】：因为

$$\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2(1-\ln(1+x))}{x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}$$

$$=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=0.$

2．**设** $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，**求** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

【解】：若 $\theta=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

若 $\theta\neq 0$，则当 n 充分大，使得 $2^n>|k|$ 时，

微信号：xwmath

$$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\cdot\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

这时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

3．求 $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)\,dxdy$ **，其中**

$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,0\le y\le 2\}.$$

【解】：设 $D_1=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le\frac{1}{2},0\le y\le 2\right\}$,

$$D_2=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{2}\le x\le 2,0\le y\le\frac{1}{x}\right\},$$

$$D_3=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{2}\le x\le 2,\frac{1}{x}\le y\le 2\right\},$$

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2}dxdy=1+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x}=1+2\ln 2,\iint\limits_{D_3}dxdy=2-2\ln 2,$$

$$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)\,dxdy=\iint\limits_{D_3}dxdy-\iint\limits_{D_1\cup D_2}dxdy=2-4\ln 2.$$

4．求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ **的和函数，并求级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$ **的和。**

【解】：令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ ，定义区间为 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

$\forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，则有

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2-x^2}.$$

所以有 $S(x)=\left(\dfrac{x}{2-x^2}\right)'=\dfrac{2+x^2}{\left(2-x^2\right)^2},x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{9}.$$

二、(本题两问，每问 8 分，共 16 分)设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为数列，a,λ为有限数，求证：

1．如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;

2．如果存在正整数p，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

【证明】：1. 由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\exists M>0$使得$|a_n|\le M$，且$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in N$，当$n>N_1$时，$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$.

微信号: xwmath

因为$\exists N_2>N_1$，当$n>N_2$时，$\frac{N_1\left(M+|a|\right)}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\le\frac{N_1\left(M+|a|\right)}{n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\left(n-N_1\right)}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

2. 对于$i=0,1,\cdots,p-1$, 令$A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$，易知$\left\{A_n^{(i)}\right\}$为$\left\{a_{n+p}-a_n\right\}$的子列。由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，知$\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda$，而

$$A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda$. 由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{p+i}}{n}=0$，知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\lambda.$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)p+i}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

$\forall m\in N,\exists n,p,i\in N,\left(0\le i\le p-1\right)$，使得$m=np+i$,

且当$m\to\infty$时，$n\to\infty$，所以有$\lim\limits_{m\to\infty}\frac{a_m}{m}=\frac{\lambda}{p}$.

三、（15 分）设函数$f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有连续的三阶导数，且$f(-1)=0, f(1)=1$，$f'(0)=0$，求证：在开区间$(-1,1)$内至少存在一点x_0，使得$f'''(x_0)=3$。

微信号: xwmath

【证明】：由麦克劳林公式，得

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3\ ,$$

$$\eta\text{ 介于 }0\text{ 和 }x\text{ 之间，}x\in[-1,1]\text{。}$$

在上式中分别取$x=1, x=-1$，得

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)+\frac{1}{3!}f'''(\eta_1), 0<\eta_1<1.$$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)-\frac{1}{3!}f'''(\eta_2), -1<\eta_2<0.$$

两式相减，得$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6.$

由于$f'''(x)$在闭区间$[-1,1]$上连续，因此$f'''(x)$在闭区间$[\eta_2,\eta_1]$上有最大值M和最小值m，从而有

$$m\le\frac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}\le M.$$

再由闭区间上连续函数的介值定理，至少存在一点$x_0\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-1,1)$，使得

$$f'''(x_0)=\frac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}=3.$$

四、（15 分）在平面上，有一条从点$(a,0)$向右的射线，线密度为ρ。在点$(0,h)$处（其中$h>0$）有一质量为m的质点。求射线对该质点的引力。

【解】：在x轴的x处取一小段dx，其质量为ρdx，到质点的距离为$\sqrt{h^2+x^2}$ 这一小段与质点的引力是$dF=\frac{Gm\rho dx}{h^2+x^2}$

微信号: xwmath

（其中 G 为引力常数），则有

$$F_x=\int_a^{+\infty}dF_x=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho xdx}{(h^2+x^2)^{3/2}}=\frac{Gm\rho}{2}\int_a^{+\infty}\frac{d(x^2)}{(h^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=-Gm\rho\left(h^2+x^2\right)^{-1/2}\Big|_a^{+\infty}=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}.$$

类似有

$$F_y=\int_a^{+\infty}dF_y=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho h dx}{\left(h^2+x^2\right)^{3/2}}=\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Gm\rho h^2\sec^2 t dt}{h^3\sec^3 t}$$

$$=\frac{Gm\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt=\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right)$$

所求引力向量为 $\vec{F}=\left(F_x,F_y\right)$.

五、(15 分)设 $z=z(x,y)$ **是由方程** $F\left(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y}\right)=0$ **确定的隐函数,且具有连续的二阶偏导数,求证:** $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$ **和** $x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

【解】: 对方程两边求导,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{x^2}\right)F_1+\frac{\partial z}{\partial x}F_2=0,\frac{\partial z}{\partial y}F_1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{y^2}\right)F_2=0.$$

由此可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2\left(F_1+F_2\right)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-1}{y^2\left(F_1+F_2\right)},$$

微信号: xwmath

所以 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$。对该式再求导,有

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2x\frac{\partial z}{\partial x},x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2y\frac{\partial z}{\partial y},$$

相加得 $x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

六、(15 分)设函数 $f(x)$ **连续,** a,b,c **为常数,** Σ **是单位球面** $x^2+y^2+z^2=1$ **。记第一型曲面积分** $I=\iint\limits_{\Sigma}f(ax+by+cz)dS$. **求证:**

$$I=2\pi\int_{-1}^{1}f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)du.$$

【证明】：由Σ的面积为4π。当a,b,c都为零时，等式显然成立。

当他们不全为0时，可知原点到平面$ax+by+cz+d=0$的距离是$\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。设平面$P_u: u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$其中$u$固定，则$|u|$是原点到平面$P_u$的距离，从而$-1\le u\le 1$。两平面$P_u$和$P_{u+du}$截单位球$\Sigma$的截下的部分上，被积函数取值为$f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)$。这部分摊开可以看成是一个细长条，这个细长条的长是$2\pi\sqrt{1-u^2}$，宽是$\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$，它的面积为$2\pi du$，故得证。

微信号：xwmath

微信号：xwmath

长按识别二维码关注我们

考研实验数学