第二届预赛(非数学类)竞赛试卷及参考解答

考研竞赛数学 2016-07-12

★ **全国预赛试卷**

2010 年预赛（非数学类）

第二届全国大学生数学竞赛试卷及参考解答

一、（本题共 5 小题，每小题各 5 分，共 25 分）计算下列各题（要求写出重要步骤）.

(1) **设** $x_n=(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$ ，**其中** $|a|<1$ ，**求** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】：
$$x_n=\frac{1}{(1-a)}(1-a)(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$
$$=\frac{1}{(1-a)}(1-a^2)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$
$$=\frac{1}{(1-a)}(1-a^4)\cdot(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$$

由于 $|a|<1$ ，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^{n+1}}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{1-a}$.

(2) **求** $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

【解】：
$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[e^{-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x}$$
$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-1\right]x\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right]\right\}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(3) **设** $s>0$ ，**求** $I_n=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^n dx\ (n=1,2,\cdots)$.

【解】：因为 $s>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-sx}x^n=0$，所以

$$I_n=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}x^n d\left(e^{-sx}\right)=-\frac{1}{s}\left[x^n e^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-sx}d\left(x^n\right)\right]=\frac{n}{s}I_{n-1}$$

由此可得 $I_n=\dfrac{n}{s}I_{n-1}=\dfrac{n}{s}\cdot\dfrac{n-1}{s}I_{n-2}=\cdots=\dfrac{n!}{s^n}I_0=\dfrac{n!}{s^{n+1}}.$

(4) 设 $f(t)$ 有二阶连续导数, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【解】：因为 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r},\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$，所以

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right),\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{2x^2-y^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right),$$

利用对称性，可得

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{r^4}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right).$$

(5) 求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离.

【解】：直线 l_1 的对称式方程为 $l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$，记两直线的方向向量分别为 $\vec{l}_1=(1,1,0),\vec{l}_2=(4,-2,-1)$，两直线上两定点分别为 $P_1(0,0,0),P_2(2,1,3)$，并记

$$\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,3),\ \vec{l}_1\times\vec{l}_2=(-1,1,-6);$$

于是两点间的距离为

$$d=\frac{\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{l}_1\times\vec{l}_2\right)\right|}{\left|\vec{l}_1\times\vec{l}_2\right|}=\frac{|-2+1-18|}{\sqrt{38}}=\sqrt{\frac{19}{2}}.$$

二、(本题共 15 分)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，

并且 $f''(x)>0$, $\lim f'(x)=\alpha>0$, $\lim f'(x)=\beta<0$, 且

并且 $f''(x)>0,\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，且存在一点 x_0，使得 $f(x_0)<0$．证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根.

【证法 1】：由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，必有一个充分大的 $a>x_0$，使得 $f'(a)>0$。$f''(x)>0$ 可知 $y=f(x)$ 为凹函数，从而 $f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)\quad(x>a)$。当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(+\infty)+f'(a)(x-a)\to+\infty。$$

故存在 $b>a$，使得 $f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0$。

同样，由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，必有一个充分大的 $c<x_0$，使得 $f'(c)>0$。$f''(x)>0$ 可知 $y=f(x)$ 为凹函数，从而

$$f(x)>f(c)+f'(c)(x-c)\quad(x<c)。$$

当 $x\to-\infty$ 时，$f(-\infty)+f'(c)(x-c)\to+\infty$。故存在 $d<c$，使得

$$f(d)>f(c)+f'(c)(d-c)>0。$$

在 $[x_0,b]$ 和 $[d,x_0]$ 利用零点定理，

$$\exists x_1\in(x_0,b),x_2\in(d,x_0)$$

使得 $f(x_1)=f(x_2)=0.$

下面证明方程 $f(x)=0$ 只有两个实根。

用反证法。假设 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有三个实根，不妨设为 x_1,x_2,x_3 且 $x_1<x_2<x_3$。对 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ 上分别用洛尔定理，则各至少存在一点 $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$。再将 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用洛尔定理，则至少存在一点 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f''(\eta)=0$，与已知条件 $f''(x)>0$ 矛盾，所以方程不能多于两个实根。

【证法二】：先证方程 $f(x)=0$ 至少有两个实根。

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，必有一个充分大的 $a>x_0$，使得 $f'(a)>0$。因 $f(x)$ 具有二阶导数，所以 $f(x),f'(x)$ 均连

续，由拉格朗日中值定理，对于 $x>a$ ，有

$$f(x)-\left[f(a)+f'(a)(x-a)\right]=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$$
$$=f'(\xi)(x-a)-f'(a)(x-a)=\left[f'(\xi)-f'(a)\right](x-a)$$
$$=f''(\eta)(\xi-a)(x-a)$$

其中 $a<\xi<x, a<\eta<x$。由于 $f''(\eta)>0\left(f''(x)>0\right)$ ，则

$$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)\quad(x>a)$$

又 $f'(a)>0$ ，故存在 $b>a$ ，使得

$$f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0。$$

又已知 $f(x_0)<0$ ，由连续函数的中间值定理，至少存在一点 $x_1(x_0<x_1<b)$ ，使得 $f(x_1)=0$。即方程 $f(x)=0$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上至少有一个根 x_1。同理可证方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上至少有一个根 x_2。

证明方程只有两个实根的方法同证法一。

三、（本题共 15 分）设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定. 且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$ ，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$.

【解】：因为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{2+2t}$ ，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2+2t}\frac{(2+2t)\psi''(t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^3}=\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}$$

由题设 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$ ，故 $\dfrac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\dfrac{3}{4(1+t)}$ ，

从而有 $(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)=3(1+t)^2$ ，即

$$\psi''(t)-\frac{1}{(1+t)}\psi'(t)=3(1+t)$$

1

设$u=\psi'(t)$，故有$u'-\frac{1}{(1+t)}u=3(1+t)$，由一阶非齐次线性微分方程通解计算公式，有

$$u=e^{-\int\left(-\frac{1}{1+t}\right)dt}\left[\int 3(1+t)e^{\int\left(-\frac{1}{1+t}\right)dt}dt+C_1\right]$$

$$=(1+t)\left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1}dt+C_1\right]=(1+t)(3t+C_1)$$

由曲线$y=\psi(t)$与$y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\frac{3}{2e}$在$t=1$处相切知$\psi(1)=\frac{3}{2e},\psi'(1)=\frac{2}{e}$.所以有

$$u|_{t=1}=\psi'(1)=\frac{2}{e}\Rightarrow C_1=\frac{1}{e}-3.$$

于是有

$$\psi(t)=\int(1+t)(3t+C_1)dt=t^3+\frac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2。$$

由$\psi(1)=\frac{3}{2e}\Rightarrow C_2=2$，于是有

$$\psi(t)=t^3+\frac{1}{2e}t^2+\left(\frac{1}{e}-3\right)t+2\ (t>-1).$$

四、(本题共 15 分) 设 $a_n>0,\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ **，证明：**

(1) 当$\alpha>1$**时，级数**$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$**收敛；**

(2) 当$\alpha\le1$**，且**$S_n\to\infty$**（**$n\to\infty$**）时，级数**$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$**发散.**

【解】：令$f(x)=x^{1-\alpha},x\in[S_{n-1},S_n]$，将$f(x)$在区间$[S_{n-1},S_n]$上用拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(S_{n-1},S_n)$，使得

$$f(S_n)-f(S_{n-1})=f'(\xi)(S_n-S_{n-1})，$$

即 $$S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n。$$

(1) 当$\alpha>1$时，$\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\frac{a_n}{\xi^{\alpha}}\ge(\alpha-1)\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$，

显然$\left\{\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right\}$的前$n$项和有界，从而收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛。

(2) 当$\alpha=1$时，因为$a_n>0$，S_n单调递增，所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\geq\frac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为$S_n\to+\infty$对任意的n，当$p\in N,\frac{S_n}{S_{n+p}}<\frac{1}{2}$，从而$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\geq\frac{1}{2}$. 所以级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$发散。

(3) 当$\alpha<1$时，$\frac{a_n}{S_n^\alpha}\geq\frac{a_n}{S_n}$，由$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散及比较判别法，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$发散。

五、(本题共 15 分) 设 l 是过原点、方向为(α,β,γ)(其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$)的直线，均匀椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq1$(其中$0<c<b<a$，密度为 1) 绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量；

(2) 求其转动惯量关于方向(α,β,γ)的最大值和最小值.

【解】: (1)设旋转轴l的方向向量为$\vec{s}=(\alpha,\beta,\gamma)$，椭球内任意点$P(x,y,z)$的径向量为$\vec{r}$，则点$P$到旋转轴$l$的距离的平方为

$$d^2=\vec{r}^2-(\vec{r}\cdot\vec{s})=\left(1-\alpha^2\right)x^2+\left(1-\beta^2\right)y^2+\left(1-\gamma^2\right)z^2$$
$$-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint_\Omega(2\alpha\beta xy+2\beta\gamma yz+2\alpha\gamma xz)dV=0,$$

其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$。

而$\iiint\limits_{\Omega} x^2dV=\int_{-a}^{a}x^2dx\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1-\frac{x^2}{a^2}}dydz$

$$=\int_{-a}^{a}x^2\cdot\pi ab\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4a^3bc\pi}{15}.$$

（或者使用换元法，有

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot abcr^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{4a^3bc\pi}{15}.）$$

所以可得

$$\iiint\limits_{\Omega} y^2dV=\frac{4ab^3c\pi}{15},\iiint\limits_{\Omega} y^2dV=\frac{4abc^3\pi}{15}.$$

由转动惯量的定义，有

$$I_l=\iiint\limits_{\Omega} d^2dV=\frac{4abc\pi}{15}\left[\left(1-\alpha^2\right)a^2+\left(1-\beta^2\right)b^2+\left(1-\gamma^2\right)c^2\right].$$

(2) 考虑目标函数

$$V(\alpha,\beta,\gamma)=\left(1-\alpha^2\right)a^2+\left(1-\beta^2\right)b^2+\left(1-\gamma^2\right)c^2$$

在约束条件$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$的约束条件下的条件极值。

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)$$
$$=\left(1-\alpha^2\right)a^2+\left(1-\beta^2\right)b^2+\left(1-\gamma^2\right)c^2+\lambda\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1\right)$$

令$L'_{\alpha}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=0,L'_{\beta}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=0,$

$L'_{\gamma}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=0,L'_{\lambda}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=0,$

解得极值点为

$$Q_1\left(\pm1,0,0,a^2\right),Q_2\left(0,\pm1,0,b^2\right),Q_1\left(0,0,\pm1,c^2\right),$$

比较可知，绕z轴（短轴）的转动惯量最大，并且有

$$I_{\max}=\frac{4abc\pi}{15}\left(a^2+b^2\right).$$

绕x轴（长轴）的转动惯量最小，并且有

绕x轴（长轴）的转动惯量最小，并且有

$$I_{\max}=\frac{4abc\pi}{15}\left(b^2+c^2\right).$$

六、（本题共 15 分）设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上，曲线积分 $\oint\limits_C\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$ 的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明:

$$\oint\limits_L\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0\text{；}$$

(2) 求函数 $\varphi(x)$；

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求

$$\oint\limits_C\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}.$$

【解】:设 $\oint\limits_L\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=I$,闭曲线 $L=L_1+L_2$。设 L_0 不经过原点的光滑曲线，使得 $L_0\cup L_1^-$ 和 $L_0\cup L_2$ 分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线 C_1,C_2。由曲线积分的性质和题设条件，有

$$\oint\limits_L\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\int\limits_{L_1}+\int\limits_{L_2}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$$

$$=\int\limits_{L_2}+\int\limits_{L_0}-\int\limits_{L_0}-\int\limits_{L_1^-}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$$

$$\oint\limits_{C_1}+\oint\limits_{C_2}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=I-I=0$$

(2) 设 $P(x,y)=\frac{2xy}{x^4+y^2},Q(x,y)=\frac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$.

令 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即 $\frac{2x^5-2xy^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}=\frac{\varphi'(x)\left(x^4+y^2\right)-4x^3\varphi(x)}{\left(x^4+y^2\right)^2}$.

解得 $\varphi(x)=-x^2$。

(3) 设 D 为正向闭曲线 $C_a: x^4+y^2=1$ 所围的闭区域，由(1)得

$$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}\frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}$$

利用格林公式，有

$$\oint_{C_a}\frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}2xydx-x^2dy=\iint_D(-4x)dxdy=0.$$