第八届《预赛》（非数学类）试题及参考解答

考研竞赛数学 2016-10-28

本次竞赛试题相对来说比较简单，方法可以说比较直接，符合一般的解题思路！以下解答过程为全国组委会下发的参考答案，对于错误部分做了简单修改！

第八届全国预赛(非数学类)试题及参考解答

(2016 年 10 月)

一、填空题(满分 30 分，每小题 5 分)

1．若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=\_\_\_\_\_\_。$$

【解】:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(a)+f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

2．若 $f(1)=0, f'(1)$ 存在，求极限

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\tan 3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}.$$

【解】: $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\cdot 3x}{x^2\cdot x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)}{x^2}$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=3f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}=3f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\cos x-1}{x^2}\right)$$

$$=3f'(1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}f'(1).$$

3 .设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(1)=2$. 记 $z=f\left(e^x y^2\right)$，若 $\frac{\partial z}{\partial x}=z$，求 $f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式。

【解】：由题设，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(e^x y^2\right)e^x y^2=f\left(e^x y^2\right)$. 令 $u=e^x y^2$，得到当 $u>0$，有

$$f'(u)u=f(u),\text{即}\frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{1}{u}\Rightarrow\left(\ln f(u)\right)'=\left(\ln u\right)'.$$

所以有

$$\ln f(u)=\ln u+C_1, f(u)=cu.$$

再由初值条件得 $f(u)=2u$. 所以当 $x>0$ 时，有 $f(x)=2x$.

4 . 设 $f(x)=e^x\sin 2x$，求 $f^{(4)}(0)$.

【解】：由带皮亚诺余项余项的麦克劳林公式，有

$$f(x)=\left[1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)\right]\cdot\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o\left(x^4\right)\right]$$

所以 $f(x)$ 展开式的 4 次项为 $-\frac{1}{3!}\left(2x^3\right)\cdot x+\frac{2}{3!}x^4=-x^4$，即有

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=-1\text{，故}f^{(4)}(0)=-24.$$

5 . 求曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程。

【解】：该曲面在点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面的法向量为 $(x_0,2y_0,-1)$。又该切平面与已知平面平行，从而两平面的法向量平行，所以有

$$\frac{x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{-1}{-1}.$$

从而 $x_0=2, y_0=1$ ，得 $z_0=3$ ，所以切平面方程为

$$2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0 \text{ ，即 } 2x+2y-z=3.$$

二(满分 14 分)设 $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上可导，** $f(0)=0$ **，且当** $x\in(0,1)$ **，** $0<f'(x)<1$ **. 试证：当** $a\in(0,1)$ **时，有**

$$\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2>\int_0^a f^3(x)dx.$$

【证明】：设 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)dt$ ，则 $F(0)=0$ 且要证明 $F'(x)>0$.

设 $g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)$ ，则 $F'(x)=f(x)g(x)$.由于 $f(0)=0, f'(x)>0$ ，故 $f(x)>0$ ，从而只要证明 $g(x)>0, x>0$. 而 $g(0)=0$ ，因此只要证明 $g'(x)>0, 0<x<a.$ 而

$$g'(x)=2f(x)\left[1-f'(x)\right]>0 \text{ .得证。}$$

三(满分 14 分)某物体所在的空间区域为

$$\Omega: x^2+y^2+2z^2\le x+y+2z \text{ ，}$$

密度函数为 $x^2+y^2+z^2$ **，求质量**

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz.$$

【解】：由于

$$\Omega:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\le 1$$

是一个椭球，它的体积为$V=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

做变换$u=x-\dfrac{1}{2},v=y-\dfrac{1}{2},w=\sqrt{2}\left(z-\dfrac{1}{2}\right)$，将区域变成单位球$\sum:u^2+v^2+w^2\le 1$，而雅可比行列式为$\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\sqrt{2}$，所以$dudvdw=\sqrt{2}dxdydz$且

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_{\Sigma}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\right]dudvdw$$

因一次项积分都为 0，故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_{\Sigma}\left[u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right]dudvdw+A$$

其中$A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$。

记$I=\displaystyle\iiint_{\Sigma}\left[u^2+v^2+w^2\right]dudvdw$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\theta dr=\frac{4\pi}{5}.$$

由于u^2,v^2,w^2在Σ上积分都是$\dfrac{I}{3}$，故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)I+A=\frac{5\sqrt{2}}{6}\pi.$$

四(满分 14 分)设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上具有连续导数，

$f(0)=0,f(1)=1$. **证明：**

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = -\frac{1}{2}.$$

【证明】：将区间$[0,1]$分成n等份，设分点$x_k=\frac{k}{n}$，则$\Delta x_k=\frac{1}{n}$，且

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x)-f(x_k)\right]dx\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}(x-x_k)\,dx\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\,dx\right)$$，其中$\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\,dx\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\left[-\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})^2\right]\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)(x_k-x_{k-1})\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx=-\frac{1}{2}.$$

五（满分 14 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且

$I=\int_0^1 f(x)dx\neq 0$. **证明：在$(0,1)$内存在不同的两点x_1,x_2，使得**

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}.$$

【证明】：设$F(x)=\frac{1}{I}\int_0^x f(t)dt$，则$F(0)=0,F(1)=1$. 由介值定理，存在$\xi\in(0,1)$，使得$F(\xi)=\frac{1}{2}$. 在两个子区间$(0,\xi),(\xi,1)$上分别应用拉格朗日中值定理：

$$F'(x_1)=\frac{f(x_1)}{I}=\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi-0}=\frac{1/2}{\xi},x_1\in(0,\xi),$$

$$F'(x_2)=\frac{f(x_2)}{I}=\frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi}=\frac{1/2}{1-\xi},x_2\in(\xi,1),$$

$$\frac{I}{f(x_1)}+\frac{I}{f(x_2)}=\frac{1}{F'(x_1)}+\frac{1}{F'(x_2)}=\frac{\xi}{1/2}+\frac{1-\xi}{1/2}=2.$$

六(满分 14 分)设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且

$$f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right),$$

用 Fourier 级数理论证明$f(x)$为常数。

【证明】：由$f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right)$可知，$f$是以$2,\sqrt{3}$为周期的函数，所以它的傅里叶系数为

$a_n=\int_{-1}^1 f(x)\cos n\pi x dx, b_n=\int_{-1}^1 f(x)\sin n\pi x dx$

由于$f(x)=f\left(x+\sqrt{3}\right)$，所以

$a_n=\int_{-1}^1 f(x)\cos n\pi x dx=\int_{-1}^1 f\left(x+\sqrt{3}\right)\cos n\pi x dx$

$$=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi\left(t-\sqrt{3}\right)dt$$

$$=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\left[\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi\right]dt$$

$$=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi t dt+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\sin n\pi t dt$$

$$=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1} f(t)\cos n\pi t dt+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t dt$$

所以$a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi$；同理可得

$b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi$.

联立，有

$$\begin{cases} a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi \\ b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi \end{cases}$$

得$a_n=b_n=0(n=1,2,\cdots)$.

而f可导，其 Fourier 级数处处收敛于$f(x)$，所以有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2},$$

其中$a_0=\int_{-1}^{1} f(x)dx$为常数。