(2009SQ01)(第一届)-非数学类-赛区赛试卷及解答

考研竞赛数学 2016-06-03

★ **参考课件**

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷及解答

（非数学类，2009）

一、填空题（每小题 5 分，共 20 分）.

(1) 计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dxdy=$____________，其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则 $f(x)=$________________.

(3) 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是____________________.

(4) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$________________.

【答案】：(1) $\frac{16}{15}$，**(2)** $3x^2-\frac{10}{3}$，**(3)** $2x+2y-z-5=0$，

(4) $-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

二、（5 分）求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 n 是给定的正整数.

【解】：原式 $=\lim_{x\to 0}\exp\{\frac{e}{x}\ln(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})\}$

$$=\exp\{\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}\}$$

其中大括号内的极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，由 $L'Hospital$ 法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^x+2e^x+\cdots+ne^{nx})}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{e(1+2+\cdots+n)}{n}=(\frac{n+1}{2})e$$

于是 原式= $e^{(\frac{n+1}{2})e}$.

三、(15 分) 设函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$ ，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ ，A 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】：由题设，知 $f(0)=0$ ，$g(0)=0$. 令 $u=xt$ ，得

$$g(x)=\frac{\int_0^x f(u)du}{x}\ (x\neq 0)\ ,\quad g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\quad (x\neq 0)$$

由导数定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0)$$

从而知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

四、(15 分) 已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi\ ,0\le y\le\pi\}$ ，L 为 D 的正向边界，试证：

(1) $\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$ ；

(2) $\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge\frac{5}{2}\pi^2$.

【证法一】：由于区域 D 为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

左边 $=\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$ ，

右边 $=\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$ ，

所以 $\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$.

由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge 2+\sin^2 x$ ，

$$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge\frac{5}{2}\pi^2 .$$

【证法二】：(1) 根据格林公式，有

$$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint\limits_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\delta$$

$$\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint\limits_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})d\delta$$

因为 关于 $y=x$ 对称，所以

$$\iint\limits_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\delta=\iint\limits_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})d\delta ,$$

故 $\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$.

(2) 由 $e^t+e^{-t}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n}}{(2n)!}\ge 2+t^2$ ，

$$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint\limits_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\delta$$

$$=\iint\limits_D(e^{\sin x}+e^{-\sin x})d\delta\ge\frac{5}{2}\pi^2$$

五、(10 分) 已知

$y_1=xe^x+e^{2x}$ ， $y_2=xe^x+e^{-x}$ ， $y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$

是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

【解】:根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知：e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次的一个特解.因此可以用下述两种解法。

【解法一】: 故此方程式 $y''-y'-2y=f(x)$。将 $y=xe^x$ 代入上式，得

$f(x)=(xe^x)''-(xe^x)'-2xe^x=2e^x+xe^x-e^x-xe^x-2xe^x=e^x-2xe^x$ ，

因此所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

【解法二】：故 $y=xe^{x}+c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ ，是所求方程的通解，由

$y'=e^x+xe^x+2c_1e^{2x}-c_2e^{-x}$ ，$y''=2e^x+xe^x+4c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ ，

消去 c_1,c_2 得所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

六、(10 分)设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\le x\le 1$ 时，$y\ge 0$ ，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c, 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

【解】：因抛物线过原点，故 $c=1$ ，由题设有

$$\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}.\text{即 } b=\frac{2}{3}(1-a) \quad ,$$

而

$$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=\pi[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2]$$

$$=\pi[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2].$$

令 $\frac{dv}{da}=\pi[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)]=0$ ，

得 $a=-\frac{5}{4}$ ，代入 b 的表达式 得 $b=\frac{3}{2}$. 所以 $y\ge 0$ ，又因

$$\frac{d^2v}{da^2}\Big|_{a=-\frac{5}{4}}=\pi[\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}]=\frac{4}{135}\pi>0$$

及实际情况，当 $a=-\frac{5}{4}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=1$ 时，体积最小.

七、(15 分)已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$ (n 为正整数)，且 $u_n(1)=\frac{e}{n}$ ，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

【解】：先解一阶常系数微分方程，求出 $u_n(x)$ 的表达式，然后再求 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和.

由已知条件可知 $u_n'(x)-u_n(x)=x^{n-1}e^x$ 是关于 $u_n(x)$ 的一个一阶常系数线性微分方程，故其通解为

$$u_n(x)=e^{\int dx}(\int x^{n-1}e^xe^{-\int dx}dx+c)=e^x(\frac{x^n}{n}+c) \quad ,$$

由条件 $u_n(1)=\frac{e}{n}$，得$c=0$，故$u_n(x)=\frac{x^n e^x}{n}$，

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n e^x}{n}=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，其收敛域为 $[-1,\ 1)$，当 $x\in(-1,\ 1)$时，有

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

故$s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$。当$x=-1$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^{-1}\ln 2.$$

于是，当 $-1\le x<1$时，有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^x\ln(1-x)$.

八、(10分) 求$x\to1-$ 时，与$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

【解】: $\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt\le\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\le 1+\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt$，

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$