(第四届国赛决赛第一(5)题)

过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\x+y-z=0\end{cases}$作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面，求此切平面的方程.

解析：(方法一)

直线l的方向向量为：

$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\10 & 2 & -2\\1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0\vec{i}+8\vec{j}+8\vec{k}=8\left(\vec{j}+\vec{k}\right)$. 设切平面的切点为$(x,y,z)$，则切平面的法向量为：$\vec{n}=\{6x,2y,-2z\}=2\{3x,y,-z\}$.

又知直线l上的一个定点$P\left(\frac{27}{8},0,\frac{27}{8}\right)$，得到方程组

$$\begin{cases}3x^2+y^2-z^2=27 & (1)\\y-z=0 & (2)\\\left(x-\frac{27}{8}\right)3x+y^2-\left(z-\frac{27}{8}\right)z=0 & (3)\end{cases}$$

由(1)和(3)，得$(3x^2+y^2-z^2)-\frac{27}{8}(3x-z)=0$，

$27-\frac{27}{8}(3x-z)=0$，$3x-z=8$　　(4).

由(1)、(2)可知，$x^2=9$，$x=3$或-3. 由(2)、(4)可知方程组有两组解：$\begin{cases}x=3\\y=1\\z=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=-3\\y=-17\\z=-17\end{cases}$.

对于切点$(3,1,1)$，切平面方程为：

$9(x-3)+(y-1)-(z-1)=0$，整理得$9x+y-z-27=0$.

对于切点$(-3,-17,-17)$，切平面方程为：

$-9(x+3)-17(y+17)+17(z+17)=0$，整理得，

$9x+17y-17z+27=0$.

(方法二)

过直线l的平面族为：

$(10x+2y-2z-27)+\lambda(x+y-z)=0$，整理得，

$(10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z-27=0$. 所求切平面属于这族平面，设切点为$P(x,y,z)$，切平面的法向量为$\vec{n}=\{3x,y,-z\}$，我们有方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{3x}{10+\lambda}=\dfrac{y}{2+\lambda}=\dfrac{z}{2+\lambda} & (1)\\ 3x^2+y^2-z^2=27 & (2)\\ (10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z-27=0 & (3)\end{cases}$$

由(1)，设$\dfrac{3x}{10+\lambda}=\dfrac{y}{2+\lambda}=\dfrac{z}{2+\lambda}=\dfrac{1}{t}$，则$\begin{cases}10+\lambda=3tx\\ 2+\lambda=ty\\ 2+\lambda=tz\end{cases}$.

因此，由(3)得$3tx^2+ty^2-tz^2-27=0$，即

$t(3x^2+y^2-z^2)-27=0$. 由(2)，得$27t-27=0$，所以$t=1$，

$\begin{cases}x=\dfrac{\lambda}{3}+\dfrac{10}{3}\\ y=\lambda+2\\ z=\lambda+2\end{cases}$. 代入(2)，得$3\left(\dfrac{\lambda}{3}+\dfrac{10}{3}\right)^2=27$，解得

$\lambda=-1$或-19. 由此，可得方程组的解$\begin{cases}x=3\\ y=1\\ z=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=-3\\ y=-17\\ z=-17\end{cases}$. 下面与方法一相同，不赘述.