(2011 年预赛第二题)设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$为数列，a,λ为有限数，求证：

(1)　如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

(2)　如果存在正整数p，使得$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

证明：(1)因为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，所以数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$有界，即存在$M>0$，满足$\forall n\in\mathbb{N}$，$|a_n|\leqslant M$. 且$\forall\varepsilon>0$，存在$N_1\in\mathbb{N}$，当$n>N_1$时，$|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 另取$\mathbb{N}\ni N_2>N_1$，使得$n>N_2$时$\dfrac{N_1(M+|a|)}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是，当$n>N_2$时，

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\\
=&\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)+(a_{N_1+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|\\
\leqslant&\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\
\leqslant&\frac{N_1(M+|a|)}{n}+\frac{(n-N_1)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

(2)设$D_n=a_{n+p}-a_n$，$D_k^{(i)}=a_{kp+i}-a_{(k-1)p+i}\ (i=0,1,2,\cdots,p-1)$，则$D_k^{(i)}=D_{(k-1)p+i}$，即$\{D_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$是$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}D_n=\lambda$，所以$\lim\limits_{k\to\infty}D_k^{(i)}=\lambda$. 又因为

$$
\begin{aligned}
&D_1^{(i)}+D_2^{(i)}+\cdots+D_k^{(i)}\\
=&a_{p+i}-a_i+a_{2p+i}-a_{p+i}+\cdots+a_{kp+i}-a_{(k-1)p+i}\\
=&a_{kp+i}-a_i
\end{aligned}
$$

由(1)可知，$\forall i\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$，

$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{D_1^{(i)}+D_2^{(i)}+\cdots+D_k^{(i)}}{k}=\lambda$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_{kp+i}-a_i}{k}=\lambda$. 因为

$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_i}{k}=0$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_{kp+i}}{k}=\lambda$. 设 $k(n)=\left[\dfrac{n}{p}\right]$，因为 $\{D_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$，

$i=0,1,2,\cdots,p-1$ 是取遍数列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 项的 p 个(有限个)子列，所

以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{k(n)}=\lambda$. 又因为 $k(n)p<n<k(n)p+p$，所以

$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{n}<\dfrac{k(n)}{n}<\dfrac{1}{p}$，由夹挤原理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k(n)}{n}=\dfrac{1}{p}$. 因此,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{k(n)}\cdot\frac{k(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{k(n)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$