(2016 年预赛第一(1)题)若$f(x)$在点$x=a$可导，且$f(a)\neq 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{n}=\underline{\qquad\qquad}.$$

解析：幂指函数的典型做法，

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{n}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]},$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\ln\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left|f\left(a+\frac{1}{n}\right)\right|-\ln|f(a)|}{\frac{1}{n}}\\&=(\ln|f(x)|)'\big|_{x=a}\\&=\frac{1}{f(a)}\cdot f'(a)\end{aligned}$$

综上，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{n}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

注：拜公式$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$所赐，我们不用讨论$f(a)$的正负了.