第五届《预赛》(非数学类)试卷及参考答案

考研竞赛数学 2016-07-24

点击上方"**考研实验数学**"可以订阅哦

★ **预赛试卷及参考答案**

（非数学类）第五届<预赛>试卷及参考答案

一、（共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）解答下列各题：

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$．

【解】：因为 $\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)$

$$=\sin\frac{\pi}{\pi\sqrt{1+4n^2}+2n\pi}.$$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{\pi\sqrt{1+4n^2}+2n\pi}\right)^n$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\pi\sqrt{1+4n^2}+2n\pi}\right)\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\pi\sqrt{1+4n^2}+2n\pi}\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\pi\sqrt{1+4n^2}+2n\pi}\right]=e^{\frac{1}{4}}.$$

2．证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ **不是绝对收敛的。**

【证明】：$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$，只要证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散。

因为 $a_n\geq\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,dx$

$$=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{(n+1)\pi}.$$

而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{(n+1)\pi}$发散，故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$发散。

3．设函数$y=y(x)$由$x^3+3x^2y-2y^3=2$所确定，求$y(x)$的极值。

【解】：方程两边对x求导，得

$$3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0\Rightarrow y'=\frac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$$

令$y'(x)=0\Rightarrow x=0,x=-2y$。

将$x=0,x=-2y$代入所给方程，得

$$x=0,y=-1;\ \ x=-2,y=1.$$

又有

$$y''=\frac{\left(2y^2-x^2\right)\left(2x+2xy'+2y\right)+\left(x^2+2xy\right)\left(4yy'-2x\right)}{\left(2y^2-x^2\right)^2}$$

从而有$y''\Big|_{\substack{x=0\\y=-1\\y'=0}}=-1<0, y''\Big|_{\substack{x=-2\\y=1\\y'=0}}=1>0.$所以，$y(0)=-1$为极大值，$y(-2)=1$为极小值。

4．过曲线$y=\sqrt[3]{x}\,(x\geq 0)$上的点A作切线，使得该切线与曲线及x轴所围成的平面图形的面积为$\dfrac{3}{4}$。求点A的坐标。

【解】：设切点A的坐标为$\left(t,\sqrt[3]{t}\right)$，曲线过A点的切线为

$$y-\sqrt[3]{t}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x-t)。$$

令$y=0$，可得切线与x轴交点的横坐标为$x_0=-2t$. 因此平面图形的面积$S=\Delta Ax_0t$的面积-曲边梯形OtA的面积

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\cdot 3t-\int_0^t\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\frac{3}{4}\Rightarrow t=1。$$

所以A的坐标为$(1,1)$。

二、（12分）计算定积分$I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx.$

【解】：$I=\displaystyle\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$

$$=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{x}}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\arctan e^{-x}+\arctan e^{x}\right)\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\arctan\left(\cos x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{8}.$$

三、（12 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.

【证明】：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 则

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.$$

应用洛必达法则，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2(x-0)}=\frac{1}{2}f''(0).$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}f''(0).$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。

四、（10 分）设 $\left|f(x)\right|\le\pi, f'(x)\ge m>0\left(a\le x\le b\right)$，证明：

$$\left|\int_a^b\sin f(x)dx\right|\le\frac{2}{m}.$$

【证明】:因为 $f'(x)\ge m>0\left(a\le x\le b\right)$,所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$

上严格单调增加，从而有反函数。设 $A=f(a),B=f(b),\varphi$ 是 f 的反函数，则

$$0<\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\le\frac{1}{m}$$

又 $|f(x)|\le\pi$，则 $-\pi\le A<B\le\pi$，所以

$$\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right| \underline{\underline{x=\varphi(y)}} \left|\int_A^B \varphi'(y)\sin y dy\right| \le \int_0^\pi \frac{\sin y}{m}dy=\frac{2}{m}.$$

五、(14 分) 设 Σ 是一个光滑封闭曲面，方向朝外，给定第二型的曲面积分

$$I=\iint(x^3-x)dydz+(2y^3-y)dzdx+(3z^2-z)dxdy$$

试确定曲面 Σ，使得积分 I 的值最小，并求该最小值。

【解】：设 Σ 围成的立体的体积为 V，则由高斯公式，有

$$I=\iiint_V(3x^2+6y^2+9z^2-3)dV$$
$$=3\iiint_V(x^2+2y^2+3z^2-1)dV$$

为了使得 I 达到最小，就是要求 V 使得 $x^2+2y^2+3z^2-1\le0$ 的最大空间区域，即

$$V=\{(x,y,z)\mid x^2+2y^2+3z^2\le1\}$$

所以 V 是一个椭球，Σ 是椭球 V 的表面时，积分 I 最小。

为了求该最小值，做变换

$$x=u,y=v/\sqrt2,z=w/\sqrt3,\quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\sqrt6}$$

$$I=\frac{3}{\sqrt6}\iiint_{u^2+v^2+w^2\le1}(u^2+v^2+w^2-1)dV$$
$$=\frac{3}{\sqrt6}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi d\theta\int_0^1(r^2-1)r^2\sin\theta dr=-\frac{4\sqrt6}{15}\pi.$$

六、(14 分) 设 $I_a(r)=\int_C\frac{ydx-xdy}{(x^2+y^2)^a}$，其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$，取正向。求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$.

【解】：作变换$x=\dfrac{u-v}{\sqrt{2}},y=\dfrac{u+v}{\sqrt{2}}$. 曲线$C$变为$uOv$平面上的$\Gamma:\dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{1}{2}v^2=r^2$, 也是取正向且有$x^2+y^2=u^2+v^2$，

$$ydx-xdy=vdu-udv,\quad I_a(r)=\int_\Gamma\frac{vdu-udv}{\left(u^2+v^2\right)^a}.$$

作变换$u=\sqrt{\dfrac{2}{3}}r\cos\theta,v=\sqrt{2}r\sin\theta$, 则有

$$vdu-udv=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^2d\theta$$

$$I_a(r)=-\frac{2r^{2(1-a)}}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta\right)^a}=-\frac{2r^2}{\sqrt{3}}J_a$$

其中$J_a=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta\right)^a},0<J_a<+\infty.$

因此当$a>1$和$a<1$，所求极限分别为0和$-\infty$。

当$a=1$，

$$J_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta}=\sqrt{3}\pi.$$

所求极限为

$$\lim_{r\to+\infty}I_a(r)=\begin{cases}0,a>1,\\-\infty,a<1,\\-2\pi,a=1.\end{cases}$$

七、（14分）判断级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$的敛散性，若收敛，求其和。

【解】：(1) 记

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)},\quad n=1,2,\cdots。$$

因为n充分大时

$$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln n<\sqrt{n}$$

$$0 < a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n < \sqrt{n}$$

所以$u_n \le \dfrac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)} < \dfrac{1}{n^{3/2}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

(2) $a_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{k} (k = 1, 2, \cdots)$，则

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{k+1} - \frac{a_k}{k+2} \right) = \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{3} \right) + \left(\frac{a_2}{3} - \frac{a_2}{4} \right) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{a_{n-1}}{n+1} \right) + \left(\frac{a_n}{n+1} - \frac{a_n}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{3} (a_2 - a_1) + \frac{1}{4} (a_3 - a_2) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n+1} (a_n - a_{n-1}) - \frac{1}{n+1} a_n$$

$$= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} \right) - \frac{1}{n+2} a_n$$

$$= 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} a_n .$$

因为$0 < a_n < 1 + \ln n$，所以$0 < \dfrac{a_n}{n+2} < \dfrac{1 + \ln n}{n+2}$且

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + \ln n}{n+2} = 0$, 所以$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{n+2} = 0$. 于是

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = 1 - 0 - 0 =$$