哈尔滨工业大学基础学部2017-2018学年数学竞赛(非数学类)试题

一. 填空题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}=$__________.

2. 对数螺线的极坐标方程为 $r=\mathrm{e}^{\theta}$，其在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right)$ 处切线的极坐标方程为________________.

3. 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是______________.

4. 计算积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3-x^2}{\ln x}\mathrm{d}x=$______________.

5. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(2x)=2f(x)$，且

$\displaystyle\int_1^2 xf(x)dx=a\int_0^1 xf(x)dx$，则 $a=$______.

6. 设 $f(x)=\cos^{2019}x$， $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅里叶级数，则 $a_{2018}=$_________.

二． 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}}{x^2}$.

三． 将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$展开成$x$的幂级数，并求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

四． 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导$(a>0)$，且$f(a)=0$. 证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

五． 判定数项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$的敛散性并证明之.

六． 函数$u(x,y)$具有连续的二阶偏导数，算子A定义为

$A(u)=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$. (1)求$A(u-A(u))$；(2)利用结论(1)，

以$\xi=\dfrac{y}{x}$，$\eta=x-y$为新的自变量，改变方程

$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$的形式.

七． 设曲面Σ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上的点$(x,y,z)$处的切平面为$\pi$，

$\lambda(x,y,z)$是坐标原点到π的距离. 计算：

（1）$I_1=\oiint\limits_{\Sigma}\lambda\,\mathrm{d}S$；

（2）$I_2=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{\lambda}$.

（提示：椭球$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$的体积为$\dfrac{4}{3}\pi abc$）