第七届《预赛》(非数学类)试卷及参考答案

考研竞赛数学 2016-08-01

点击上方"**考研实验数学**"可以订阅哦

★ **预赛试卷及参考答案**

第七届《预赛》(非数学类)试卷及参考答案

一、(共 5 小题,每小题 6 分,共 30 分):

(1) **极限** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin 2\frac{\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=\underline{\dfrac{2}{\pi}}.$

【解】:由于 $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}.$$

所以由夹逼准则,可得原极限为 $\dfrac{2}{\pi}$.

(2) **设函数** $z=z(x,y)$ **由方程** $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ **所决定,其中** $F(u,v)$ **具有连续偏导数,且** $xF_u+yF_v\neq 0$ **,则(结果要求不显含有** F **及其偏导数)** $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{z-xy}.$

【解】:对等式两端关于 x,y 分别求偏导数,有

$$\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_u+\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^2}\right)F_v=0\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\left(zF_v-x^2F_u\right)}{xF_u+yF_v},$$

类似可得

类似可得

$$y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\left(zF_u-y^2F_v\right)}{xF_u+yF_v},$$

于是有

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xy\left(xF_u+yF_v\right)+z\left(xF_u+yF_v\right)}{xF_u+yF_v}=z-xy.$$

(3) 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为 $\underline{\frac{\pi}{2}}$.

【解】：曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面：

$$2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0,\text{即}z=2x-2y-1.$$

联立 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ z=2x-2y-1.\end{cases}$ 所围区域在 xOy 面上的投影 D 为：

$$D=\left\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y+1)^2\le 1\right\},$$

所求体积为

$$V=\iint\limits_D\left[(2x-2y-1)-\left(x^2+y^2\right)\right]d\sigma$$

$$=\iint\limits_D\left[1-(x-1)^2-(y+1)^2\right]d\sigma$$

令 $x-1=r\cos t,y+1=r\sin t$，则原积分为

$$V=\int_0^{2\pi}dt\int_0^1\left(1-r^2\right)rdr=\frac{\pi}{2}.$$

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}3,x\in[-5,0),\\0,x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数 $x=0$ 收敛的值 $\underline{\frac{3}{2}}$.

【解】：由狄利克雷收敛定理，容易得到 $s(0)=\frac{3}{2}$.

(5) 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt$ 则 $u(x)$ 的初等函数表达式为 $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

【解】：由于$u^2(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt\int_0^{+\infty}e^{-xs^2}ds$

$$=\iint\limits_{s\ge0,t\ge0}e^{-x(t^2+s^2)}dsdt$$

所以$u^2(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{+\infty}e^{-x\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{4x}\int_0^{+\infty}e^{-x\rho^2}d_\rho\left(x\rho^2\right)$

$$=-\frac{\pi}{4x}e^{-x\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=+\infty}=\frac{\pi}{4x}.$$

所以有$u(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

二、（本题 12 分）设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

【解】：显然$O(0,0,0)$为 M 的顶点，$A(1,0,0),B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$在 M 上。由 A,B,C 三点决定的平面 $x+y+z=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$的交线 L 是 M 的准线。

设 $P(x,y,z)$是 M 上的点，(u,v,w)是 M 的母线 OP 与 L 的交点，则 OP 的方程为

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w}=\frac{1}{t},\text{即}u=xt,v=yt,z=zt.$$

代入准线方程，得

$$\begin{cases}(x+y+z)t=1,\\ \left(x^2+y^2+z^2\right)t^2=1\end{cases}$$

消去 t ，得圆锥面 M 的方程为 $xy+yz+zx=0$.

三、（本题 12 分）设 $f(x)$在(a,b)内二次可导，且存在常数 α,β ，使得对于$\forall x\in(a,b)$ ，有 $f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$, 则 $f(x)$在(a,b)内无穷次可导。

【证明】：1. 若 $\beta=0$。对于$\forall x\in(a,b)$ ，有

$$f'(x)=\alpha f(x),f''(x)=\alpha f'(x)=\alpha^2 f(x),$$
$$\cdots,f^{(n)}(x)=\alpha^n f(x).$$

从而 $f(x)$在(a,b)内无穷次可导。

2. 若$\beta \neq 0$。对于$\forall x \in (a,b)$，有

$$f'(x)=\frac{f'(x)-\alpha f(x)}{\beta}=A_1 f'(x)+B_1 f(x), \quad (1)$$

其中$A_1=\frac{1}{\beta}, B_1=\frac{\alpha}{\beta}$.

因为(1)右端可导，从而有

$$f'''(x)=A_1 f''(x)+B_1 f'(x).$$

设$f^{(n)}(x)=A_1 f^{(n-1)}(x)+B_1 f^{(n-2)}(x), n>1$，则

$$f^{(n+1)}(x)=A_1 f^{(n)}(x)+B_1 f^{(n-1)}(x).$$

所以$f(x)$在(a,b)内无穷次可导。

四、（本题 14 分）求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$的收敛域与和函数。

【解】：因$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+2}{(n+1)(n^3+2)}=0$. 所以收敛半径为$R=+\infty$，即收敛域为$(-\infty,+\infty)$。由

$$\frac{n^3+2}{(n+1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n)!}+\frac{1}{(n+1)!}(n\geq 2)$$

及幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n)!}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$的收敛域都为$(-\infty,+\infty)$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$$

用$S_1(x), S_2(x), S_3(x)$分别表示上式右端三个幂级数的和，依据e^x的幂级数展开式可得到

$$S_1(x)=(x-1)^2\sum\frac{(x-1)^n}{\ldots}=(x-1)^2 e^{x-1}.$$

$$S_1(x)=(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=(x-1)e^{x-1},$$

$$S_2(x)=e^{x-1},$$

$$(x-1)S_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=e^{x-1}-1,$$

当$x\neq 1$时，有$S_3(x)=\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}$. 又由于$S_3(1)=1$.

综合以上讨论，最终幂级数的和函数为

$$S(x)=\begin{cases}(x^2-2x+2)e^{x-1}+\dfrac{1}{x-1}\left(e^{x-1}-1\right), & x\neq 1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$$

五、（本题 16 分）设函数 f 在$[0,1]$上连续，且

$$\int_0^1 f(x)dx=0,\int_0^1 xf(x)dx=1.$$

试证：(1) $\exists x_0\in[0,1]$**使得**$|f(x_0)|>4$,

(2) $\exists x_1\in[0,1]$**使得**$|f(x_1)|=4$.

【证明】: (1) 若$\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\le 4$，则

$$1=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)dx\le\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx$$

$$\le 4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1.$$

因此$\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx=1$. 而$4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1$, 故

$$\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\left(4-|f(x)|\right)dx=0.$$

所以对于任意的$\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|=4$，由连续性知

$$f(x)\equiv 4\text{或}f(x)\equiv -4。$$

这与条件$\int_0^1 f(x)dx=0$矛盾。所以$\exists x_0\in[0,1]$使得

$$|f(x_0)|>4.$$

(2) 先证$\exists x_2\in[0,1]$使得$|f(x_2)|<4$. 若不然，对于

$\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\ge 4$成立，则$f(x)\ge 4$或$f(x)\le -4$恒

$\forall x\in[0,1]$，$|f'(x)|\geq 4$ 成立，则 $f'(x)\geq 4$ 或 $f'(x)\leq -4$ 恒

成立，与 $\int_0^1 f(x)dx=0$ 矛盾。

再由 $f(x)$ 的连续性及(1)的结果，利用介值定理，可得 $\exists x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4.$

六、(本题 16 分)设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leq 1$ 上有连续的二阶导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leq M$。若 $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，

证明：

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)\,dxdy\right|\leq\frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$

【证明】：在点 $(0,0)$ 展开 $f(x,y)$ 得

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x,\theta y)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 f(\theta x,\theta y)$$

其中 $\theta\in(0,1)$。

记 $(u,v,w)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 f(\theta x,\theta y)$，则

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(ux^2+2vxy+wy^2\right).$$

由于 $\|(u,\sqrt{2}u,w)\|=\sqrt{u^2+2v^2+w^2}\leq\sqrt{M}$ 以及

$\|(x^2,\sqrt{2}xy,y^2)\|=x^2+y^2$，于是有

$$\left|(u,\sqrt{2}u,w)\cdot(x^2,\sqrt{2}xy,y^2)\right|\leq\sqrt{M}\left(x^2+y^2\right),$$

即 $|f(x,y)|\leq\frac{1}{2}\sqrt{M}\left(x^2+y^2\right)$. 从而

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)\,dxdy\right|\leq\frac{\sqrt{M}}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$