(2014 年预赛第一(4)题) 设$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______.

解析：(方法一)

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)=1-\frac{1}{(n+1)!},$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(方法二)

设$S(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{kx^{k-1}}{(k+1)!}$，其收敛半径为

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{(k+1)!}\cdot\frac{(k+2)!}{(k+1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{k(k+2)}{k+1}=+\infty.$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k}{(k+1)!}=S(1)$.

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^{k-1}}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^k}{(k+1)!}\right)'=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)!}\right)',$$

当$x\neq0$时，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{(k+1)!}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}=\dfrac{1}{x}(\mathrm{e}^x-1-x)$,

$$\left(\frac{1}{x}(\mathrm{e}^x-1-x)\right)'=\frac{1}{x^2}((\mathrm{e}^x-1)x-\mathrm{e}^x+1+x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)+1}{x^2},$$

因此，$S(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)+1}{x^2}$，$S(1)=1$.