第六届《预赛》(非数学类)试卷及参考答案

考研竞赛数学 2016-07-28

点击上方"**考研实验数学**"可以订阅哦

★ **预赛试卷及参考答案**

(非数学类)第六届<预赛>试卷及参考答案

一、(共 5 小题,每小题 6 分,共 30 分)填空题:

(1) 已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解,则该微分方程是 $\underline{y''(x)-2y'(x)+y(x)=0.}$

【解】:由解的表达式可知微分方程对应的特征方程有二重根 $r=1$,故所求微分方程为 $y''(x)-2y'(x)+y(x)=0.$

(2) 设有曲面 $S: z = x^2+2y^2$ 和平面 $\pi: 2x+2y+z=0$,则与 π 平行的 S 的切平面方程是 $\underline{2x+2y+z+\frac{3}{2}=0.}$

【解】:设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 S 上一点,则 S 在点 P_0 的切平面方程为 $-2x_0(x-x_0)-4y_0(y-y_0)+(z-z_0)=0$。由于该切平面与已知平面 L 平行,则 $(-2x_0,-4y_0,1)$ 平行于 $(2,2,1)$,故存在常数 $k\neq 0$,使得 $(-2x_0,-4y_0,1)=k(2,2,1)$,故得 $x_0=-1, y_0=-\frac{1}{2}, z_0=\frac{3}{2}$,所以切平面方程就为

$$2x+2y+z+\frac{3}{2}=0.$$

(3) 设 $y=y(x)$ 由 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)dt$ 所确定,则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ $\underline{\ 3\ }$.

【解】:易知 $y(0)=1$,两边对变量 x 求导,则

$$1=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)(y'-1)\Rightarrow y'=\csc^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)+1$$

把 $x=0$ 代入可得 $y'=3.$

(4) 设 $x_n=\sum^{n}\frac{k}{\ldots}$,则 $\lim x_n = 1$

(4) 设 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$，则 $\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\ 1\ }$.

【解】：$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right]$

$$1 - \frac{1}{(n+1)!} \to 1.$$

(5) 已知 $\lim_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$，则 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \underline{\ 2\ }$.

【解】：由 $\lim_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$ 可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right) = 3.$$

于是 $\frac{1}{x}\ln\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right) = 3 + \alpha, \alpha \to 0\,(x \to 0)$，即有

$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{e^{3x+\alpha x} - 1}{x} - 1$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x+\alpha x} - 1}{x} - 1 = \lim_{x\to 0}\frac{3x + \alpha x}{x} - 1 = 2.$$

二、（本题 12 分）设 n 为正整数，计算

$$I = \int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|dx.$$

【解】：$I = \int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|dx = \int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos(\ln x)\right|dx$

$$= \int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin(\ln x)\right|\frac{1}{x}dx$$

令 $\ln x = u$，则有

$$I = \int_{-2n\pi}^{0}\left|\sin(u)\right|du = \int_{0}^{2n\pi}\left|\sin t\right|dt = 4n\int_{0}^{\pi/2}\left|\sin t\right|dt = 4n.$$

三、（本题 14 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且有正常数 A, B 使得 $|f(x)| \le A, |f''(x)| \le B$，证明：对于任意 $x \in [0,1]$，有 $|f'(x)| \le 2A + \frac{B}{2}$.

$$2$$

【证明】：由泰勒公式，有

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2, \xi\in(0,x)$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2, \eta\in(x,1)$$

上面两式相减，得到

$$f'(x)=f(1)-f(0)-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$$

由条件$|f(x)|\le A, |f''(x)|\le B$，得到

$$|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}\left[(1-x)^2+x^2\right]$$

由于$(1-x)^2+x^2$在$[0,1]$的最大值为 1，所以有

$$|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}.$$

四、(本题 14 分) (1) 设一球缺高为 h，所在球半径为 R。证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为 $2\pi Rh$.

(2) 设球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 12$ 被平面 $P: x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω。记球缺上的球冠为 Σ，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy.$$

【证明】(1)：设球缺所在球表面方程为 $x^2+y^2+z^2\le R^2$，球缺的中心线为 z 轴，且设球缺所在的圆锥顶角为 2α。

记球缺的区域为 Ω，则其体积为

$$\iiint_{\Omega} dV=\int_{R-h}^{R}dz\iint_{D_z}dxdy=\int_{R-h}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2.$$

由于球面的面积微元为 $dS=R^2\sin\theta d\theta$，故球冠的面积为

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}R^2\sin\theta d\theta=2\pi R^2(1-\cos\alpha)=2\pi Rh.$$

(2) 记球缺 Ω 的底面圆为 P_1，方向指向球缺外，且记

$$J=\iint_{P_1} xdydz+ydzdx+zdxdy.$$

由高斯公式，有 $I+J=\iiint_{\Omega}3dV=3V(\Omega)$ ，其中 $V(\Omega)$ 为 Ω 的体积。由于平面 P 的正向单位法向量为 $\frac{-1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ ，故

$$J=\frac{-1}{\sqrt{3}}\iint_{P_1}(x+y+z)dS=\frac{-6}{\sqrt{3}}\sigma(P_1)=-2\sqrt{3}\sigma(P_1),$$

其中 $\sigma(P_1)$ 为 P_1 的面积。故

$$I=3V(\Omega)-J=3V(\Omega)+2\sqrt{3}\sigma(P_1).$$

因为球缺底面圆心为 $Q(2,2,2)$ ，而球缺的顶点为 $D(3,3,3)$ ，故球缺的高度为 $h=|QD|=\sqrt{3}$.再由(1)所证并代入 $h=\sqrt{3}$ 和 $R=2\sqrt{3}$ 得

$$I=3\cdot\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2+2\sqrt{3}\pi\left(2Rh-h^2\right)=33\sqrt{3}\pi.$$

五、（本题 15 分）设 f 在 $[a,b]$ 上非负连续，严格单增，且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得 $\left[f(x_n)\right]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(x)\right]^n dx$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】：考虑特殊情形： $a=0,b=1$ 。下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

首先， $x_n\in[0,1]$ ，即 $x_n\le 1$ ，只要证明 $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1)$ ，$\exists N,\forall n>N$ 时， $1-\varepsilon<x_n$ 。由 f 在 $[0,1]$ 上严格单增，就是要证明 $f^n(1-\varepsilon)<\left[f(x_n)\right]^n=\int_0^1\left[f(x)\right]^n dx.$

由于 $\forall c\in(0,1)$ ，有

$$\int_c^1\left[f(x)\right]^n dx>f^n(c)(1-c).$$

现取 $c=1-\frac{\varepsilon}{2}$, 则 $f(1-\varepsilon)<f(c)$ ，即 $\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}<1$ ，于是有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n=0,$$

所以 $\exists N,\forall n>N$ 时有

所以$\exists N, \forall n > N$ 的有

$$\left[\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n < \frac{\varepsilon}{2} = 1-c.$$

即 $$f^n(1-\varepsilon) < [f(c)]^n (1-c) \le \int_c^1 [f(x)]^n dx$$

$$\le \int_0^1 [f(x)]^n dx = f^n(x_n).$$

从而$1-\varepsilon < x_n$，由ε的任意性得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1.$

再考虑一般情形。令$F(t) = f(a+t(b-a))$，由f在$[a,b]$上非负连续，严格单增，知F在$[0,1]$上非负连续，严格单增。从而$\exists t_n \in [0,1]$，使得$F^n(t_n) = \int_0^1 F^n(t)dt$，且$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 1$. 即

$$f^n(a+t_n(b-a)) = \int_0^1 f^n(a+t(b-a))dt.$$

记$x_n = a+t_n(b-a)$,则有

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n dx, \text{且} \lim_{n\to\infty} x_n = a+(b-a) = b.$$

六、（本题 15 分）设 $A_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$, **求** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{4} - A_n\right)$.

【解】：令$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$，因$A_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{1+i^2/n^2}$, 所以有

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

记$x_i = \dfrac{i}{n}$,则$A_n = \sum\limits_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)dx$, 故

$$J_n = n\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]dx.$$

由拉格朗日中值，存在$\zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$使得

$$J_n = n\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta)(x-x_i)dx.$$

记 m_i, M_i 分别是 $f'(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最大值和最小值

记 m_i, M_i 分别是 $f'(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最大值和最小值，

则 $m_i \le f'(\zeta_i) \le M_i$，故积分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta)(x-x_i)\,dx$ 介于

$$m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\,dx,\ M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\,dx$$

之间，所以存在 $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x-x_i)\,dx = -f'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})^2/2.$$

于是 有 $J_n = -\dfrac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} f'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})^2 = -\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n} f'(\eta_i)$. 从

而 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{4}-A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} J_n = -\dfrac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\left[f(1)-f(0)\right] = \frac{1}{4}$$