第四届《预赛》(非数学类)试卷及参考答案

考研竞赛数学 2016-07-20

★ **预赛试卷及参考答案**

(非数学类)第四届<预赛>试卷及参考答案

一、(本题共 5 小题,每小题 6 分,共 30 分)解答下列各题:

(1) **求极限** $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

【解】:因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$,而

$$\frac{1}{n^2}\ln(n!)\le\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right),\text{且}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0.$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)=0.$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(n!)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1.$$

(2) **求通过直线** $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0,\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ **的两个相互垂直的平面** π_1,π_2 **,使其中一个平面过点** $(4,-3,1)$**。**

【解】:过直线 L 的平面束方程为

$$\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0\ ,$$

即 $(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y-(3\lambda+4\mu)z+2\lambda+3\mu=0.$

若平面 π_1 过点 $(4,-3,1)$,代入得 $\lambda+\mu=0$,即 $\mu=-\lambda$,从而 π_1 的方程为 $3x+4y-z+1=0$. 若平面束中的平面 π_2 与 π_1 垂直,则 $3(2\lambda+5\mu)+4(\lambda+5\mu)+1(3\lambda+4\mu)=0$. 解得 $\lambda=-3\mu$, 从而平面 π_2 的方程为 $x-2y-5z+3=0$.

(3) **已知函数** $z=u(x,y)e^{ax+by}$, **且** $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$ **,确定常数** a,b **,使函数** $z=z(x,y)$ **满足方程** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0.$

$\partial x\partial y \quad \partial x \quad \partial y$

【解】：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{ax+by}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}+au(x,y)\right]$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{ax+by}\left[\dfrac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y)\right]$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{ax+by}\left[b\dfrac{\partial u}{\partial x}+a\dfrac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)\right]$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z$$

$$=e^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)\right],$$

若是上式等于 0，只有

$$(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)=0 \text{ ,}$$

由此可得 $a=b=1$.

(4) 设函数 $u=u(x)$ **连续可微，** $u(2)=1$ **，且**

$$\int_L (x+2y)udx+\left(x+u^3\right)udy$$

在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$.

【解】：由 $\dfrac{\partial\left[(x+2y)u\right]}{\partial y}=\dfrac{\partial\left[u\left(x+u^3\right)\right]}{\partial x}$ ，得

$\left(x+4u^3\right)u'=u$ ，即 $\dfrac{dx}{du}-\dfrac{1}{u}x=4u^2$ ，这是一个一阶线性微分方程，于是由公式有通解为

$$x=e^{\ln u}\left(\int 4u^2e^{-\ln u}du+C\right)=u\left(\int 4udu+C\right)=u\left(2u^2+C\right)$$

由 $u(2)=1$ 得 $C=0$ ，所以 $u=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/3}$.

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt$.

【解】：因为当 $x>1$ 时，

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\ldots}\right|\le\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{1}{\ldots}$$

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt\right| \le \sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$$

$$\le 2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0\left(x\to+\infty\right)$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt=0.$

二、（本题 10 分）计算 $\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx.$

【解】：由于 $\int_0^{n\pi}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin x dx$$

应用分部积分法，有

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin x dx=\frac{1}{5}e^{-2k\pi}\left(1+e^{2\pi}\right)$$

所以有 $\int_0^{n\pi}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\frac{1}{5}\left(1+e^{2\pi}\right)\sum\limits_{k=1}^{n}e^{-2k\pi}$

$$=\frac{1}{5}\left(1+e^{2\pi}\right)\frac{e^{-2\pi}-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}}$$

当 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$ 时，

$$\int_0^{n\pi}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx\le\int_0^{x}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx\le\int_0^{(n+1)\pi}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx$$

当 $n\to\infty$，由两边夹法则，得

$$\int_0^{\infty}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\lim_{x\to\infty}\int_0^{x}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$$

【注】如果最后不用夹逼准则，而用

$$\int_0^{\infty}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$$

需要先说明 $\int_0^{\infty}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx$ 收敛。

三、（本题 10 分）求方程 $x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$ 的近似解，精确到 0.001。

【解】：由泰勒公式 $\sin t=t-\frac{\sin(\theta t)}{2}t^2\ (0<\theta<1)$， 2

令$t=\dfrac{1}{x}$得$\sin\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sin\left(\dfrac{\theta}{x}\right)}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$，代入原方程，得

$$x-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)=2x-501\text{即}x=501-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)。$$

由此知$x>500, 0<\dfrac{\theta}{x}<\dfrac{1}{500}$，所以有

$$|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right|\le\frac{1}{2}\frac{\theta}{x}<\frac{1}{1000}=0.001$$

即当$x=501$即为满足题设条件的解。

四、（本题 12 分）设函数$y=f(x)$二阶可导，且$f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3u}$，其中$u$是曲线$y=f(x)$上点$P(x,f(x))$处切线在$x$轴上的截距。

【解】：曲线$y=f(x)$上点$P(x,f(x))$处切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)\left(X-x\right)$$

令$Y=0$，$X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，由此得$u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$且有

$$\lim_{x\to0}u=\lim_{x\to0}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]=-\lim_{x\to0}\left[\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}\right]$$

$$=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0.$$

由$f(x)$在$x=0$处的二阶泰勒公式，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$

可得$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u}{x}=1-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{xf'(x)}$

$$=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f''(0)+o(1)}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)\right)}{u^3\left(\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}=2.$$

五、（本题 12 分）求最小实数 C，使得满足 $\int_0^1 |f(x)|\,dx=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有 $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx\le C$.

【解】：由于 $\int_0^1\left|f\left(\sqrt{x}\right)\right|dx=\int_0^1\left|f(t)\right|2t\,dt\le 2\int_0^1\left|f(t)\right|dt=2$,

另一方面，取 $f_n(x)=(n+1)x^n$ ，则有

$$\int_0^1\left|f_n(x)\right|dx=\int_0^1 f_n(x)\,dx=1$$

而 $\int_0^1 f_n\left(\sqrt{x}\right)dx=2\int_0^1 tf_n\left(t\right)dt=2\frac{n+1}{n+2}$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\to 2\left(n\to\infty\right)$$

因此最小的实数为 $C=2$。

六、（本题 12 分）设 $f(x)$ 为连续函数，$t>0$。区域 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2(t>0)$ 所围成起来的部分。定义 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$ ，求 $F'(t)$。

【解法 1】：即 $g=g(t)=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$ ，则 Ω 在 xOy 面上的投影为 $x^2+y^2\le g$ 。在曲线 $S:\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+y^2+z^2=t^2 \end{cases}$ 上任取一点 (x,y,z) ，则圆雕到点的射线和 z 轴的夹角为

$$\theta_t=\arccos\frac{z}{t}=\arccos\frac{g}{t}。$$

取 $\Delta t>0$ ，则 $\theta_t>\theta_{t+\Delta t}$ 。对于固定的 $t>0$ ，考虑积分差 $F(t+\Delta t)-F(t)$ ，这是一个在厚度为 Δt 的球壳上的积分。原点到球壳边缘上的点的射线和 z 轴的夹角在 $\theta_t,\theta_{t+\Delta t}$ 之间。用球坐标计算积分，由积分的连续性可知，存在 $\alpha=\alpha\left(\Delta t\right)$,

$\theta_{t+\Delta t} \le \alpha \le \theta_t$ 使得

$$F(t+\Delta t)-F(t)=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} d\theta \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 \sin\theta dr$$

即 $F(t+\Delta t)-F(t)=2\pi\left(1-\cos\alpha\right)\int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 dr.$

当 $\Delta t \to 0^+$,

$$\cos\alpha \to \cos\theta_t = \frac{g(t)}{t}, \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 dr \to t^2 f(t^2).$$

故 $F(t)$ 的右导数为

$$2\pi\left(1-\frac{g(t)}{t}\right)t^2 f(t^2)=\pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)tf(t^2).$$

当 $\Delta t<0$ ，考虑 $F(t+\Delta t)-F(t)$ 可得到同样的左导数，因此

$$F'(t)=\pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)tf(t^2).$$

【解法 2】：令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$ ，则区域 Ω 表示为 $\Omega: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le a, r^2\le z\le\sqrt{t^2-r^2}$ ，其中 a 满足 $a^2+a^4=t^2, a=\frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$ ，有

$$F(t)=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2+z^2) dz$$

$$=2\pi\int_0^a\left[\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2+z^2) dz\right] r dr$$

从而有

$$F'(t)=2\pi\left[a\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}} f(a^2+z^2) dz \frac{da}{dt} + \int_0^a r f(r^2+t^2-r^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}} dr\right]$$

注意到 $\sqrt{t^2-a^2}=a^2$ ，第一个积分为 0，所以有

$$F'(t)=2\pi t f\left(t^2\right)\int_0^a \frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}} dr = -\pi t f\left(t^2\right)\int_0^a \frac{d\left(t^2-r^2\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

所以 $F'(t)=2\pi t f(t^2)\left(t-a^2\right)=\pi t f(t^2)\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right).$

七、(本题 14 分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数，

(1)若 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2)若 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

【证明】：(1)设 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，对于任意的 $n\ge N$ 时，

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta,\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1},a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$$

$$\sum_{n=N}^{m} a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\le\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\le\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N},$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有上界，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

(2) 若 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<\delta<0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，对于任意的 $n\ge N$ 时，$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{b_n}{b_{n+1}}$，有

$$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1},$$

于是由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，得到 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。