第九届《预赛》(非数学类)试题及参考答案

考研竞赛数学 2017-10-30

点"**考研竞赛数学**"↑可每天"涨姿势"哦!

第九届全国数学竞赛预赛(非数学类)试题及参考答案

一、填空题(总分 42 分,共 6 小题,每小题 7 分)

计算题第 1 题:已知可导函数 $f(x)$ 满足

$$f\left(x\right)\cos x+2\int_0^x f\left(t\right)\sin t\,\mathrm{d}\,t=x+1,$$

则 $f(x)=$ ________.

解: 在方程两边求导得

$f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1$, $f'(x)+f(x)\tan x=\sec x$.

$$从而 f(x)=e^{-\int\tan x\,\mathrm{d}\,x}\left(\int\sec x e^{\int\tan x\,\mathrm{d}\,x}\mathrm{d}\,x+C\right)$$

$$=e^{-\ln\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}e^{-\ln\cos x}dx+C\right)$$

$$=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+C\right)$$

$$=\cos x\left(\tan x+C\right)=\sin x+C\cos x$$

由于 $f(0)=1$,故 $f(x)=\sin x+\cos x$。

计算题第 2 题:求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

解:由于 $\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$

$$=\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)\to 1。$$

计算题第 3 题:设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,且

$u=x-cy,\ v=x+cy$，其中 c 为非零常数，则

$w_{xx}-\dfrac{1}{c^2}w_{yy}=$________。

解: $w_x=f_1+f_2$，$w_{xx}=f_{11}+2f_{12}+f_{22}$，

$w_y=c(f_2-f_1)$，

$$w_{yy}=c\frac{\partial}{\partial y}\left(f_2-f_1\right)=c\left(cf_{11}-cf_{12}-cf_{21}+cf_{22}\right)。$$

$$=c^2\left(f_{11}-2f_{12}+f_{22}\right)$$

所以 $w_{xx}-\dfrac{1}{c^2}w_{yy}=4f_{12}$。

计算题第 4 题： 设 $f(x)$ 有二阶导数连续，且

$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$______

解： $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+o\left(x^2\right)$

$$=3x^2+o\left(x^2\right)$$

$$f(\sin^2 x)=3\sin^4 x+o\left(\sin^4 x\right)。$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^4 x+o\left(\sin^4 x\right)}{x^4}=3。$$

计算题第 5 题： 不定积分 $I=\displaystyle\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x=$_____.

解: 由于 $I=2\displaystyle\int\frac{e^{-\sin x}\sin x\cos x}{(1-\sin x)^2}dx$

$$\overset{\sin x=v}{=}2\int\frac{ve^{-v}}{(1-v)^2}dv=2\int\frac{(v-1+1)e^{-v}}{(1-v)^2}dv$$

$$=2\int\frac{e^{-v}}{v-1}dv+2\int\frac{e^{-v}}{(v-1)^2}dv$$

$$=2\int\frac{e^{-v}}{v-1}dv-2\int e^{-v}d\frac{1}{v-1}$$

$$=2\int\frac{e^{-v}}{v-1}dv-2\left(e^{-v}\frac{1}{v-1}+\int\frac{e^{-v}}{v-1}dv\right)$$

$$=-\frac{2e^{-v}}{v-1}+C=\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C\text{。}$$

计算题第 6 题：记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成空间区域为 V，则三重积分 $\iiint\limits_V zdxdydz=$______.

解：使用球面坐标

$$I=\iiint\limits_V zdxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^2\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^2=2\pi$$

二（本题满分 14 分）：设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数. 对任何角度 α，定义一元函数

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha).$$

若对任何 α 都有 $\dfrac{dg_\alpha(0)}{dt}=0$ 且 $\dfrac{d^2g_\alpha(0)}{dt^2}>0$. 证明 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值.

解： 由于 $\dfrac{dg_\alpha(0)}{dt}=\left(f_x,f_y\right)_{(0,0)}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=0$ 对一切 α 成立，故 $(f_x,f_y)_{(0,0)}=(0,0)$，即 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点.

记 $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ \cdots\end{pmatrix}$，则

$$\frac{d^2 g_\alpha(0)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[(f_x, f_y)\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right]_{(0,0)}.$$

$$= (\cos\alpha, \sin\alpha) H_f(0,0)\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix} > 0$$

上式对任何单位向量 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 成立，故 $H_f(0,0)$ 是一个正定阵, 而 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 极小值.

三 (本题满分 14 分)：设曲线 Γ 为在

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + z = 1, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\ ,$$

上从 $A(1,0,0)$ 到 $B(0,0,1)$ 的一段. 求曲线积分

$$I = \int_\Gamma y\,\mathrm{d}\,x + z\,\mathrm{d}\,y + x\,\mathrm{d}\,z$$

解: 记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段, 则

$$x = t, y = 0, z = 1 - t, 0 \leq t \leq 1\ ,$$

$$\int_{\Gamma_1} ydx + zdy + xdz = \int_0^1 td(1-t) = -\frac{1}{2}.$$

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 Σ ，方向按右手法则. 由 Stokes 公式得到

$$\left(\int_\Gamma + \int_{\Gamma_1}\right) ydx + zdy + xdz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

$$= -\iint_\Sigma dydz + dzdx + dxdy$$

右边三个积分都是 Σ 在各个坐标面上的投影面积，而 Σ 在 zx 面上投影面积为零. 故

$$I+\int_{\Gamma_1} = -\iint_{\Sigma} dydz + dxdy.$$

曲线Γ在xy面上投影的方程为

$$\frac{(x-1/2)^2}{(1/2)^2}+\frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2}=1.$$

又该投影(半个椭圆)的面积得知$\iint_{\Sigma} dxdy=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. 同理，

$\iint_{\Sigma} dydz=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. 这样就有$I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

四(本题满分 15 分)：设函数$f(x)>0$且在实轴上连续，若对任意实数t，有$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|}f(x)dx \le 1$，则

$$\forall a,b(a<b)\text{，}\int_a^b f(x)dx \le \frac{b-a+2}{2}\text{。}$$

证：由于$\forall a,b(a<b)$，有

$$\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|}f(x)dx \le 1\text{。}$$

因此$\int_a^b dt\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)dx \le b-a$。

然而

$$\int_a^b dt\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)dx=\int_a^b f(x)\left(\int_a^b e^{-|t-x|}dt\right)dx\text{，}$$

其中

$$\int_a^b e^{-|t-x|}dt=\int_a^x e^{t-x}dt+\int_x^b e^{x-t}dt.$$
$$=2-e^{a-x}-e^{x-b}$$

这样就有 $\int_a^b f(x)(2-e^{a-x}-e^{x-b})dx \le b-a$

$$\int_a^b f(x)dx \le \frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\left[\int_a^b e^{a-x}f(x)dx+\int_a^b e^{x-b}f(x)dx\right].$$

注意到 $\int_a^{+\infty} e^{a-x} f(x)dx = \int_a^{+\infty} e^{-|a-x|} f(x)dx \le 1$ 和

$\int_a^b f(x)e^{x-b}dx \le 1$。把以上两个式子代入，即得结论。

五(本题满分 15 分)：设 $\{a_n\}$ 为一个数列，p 为固定的正整数。若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，其中 λ 为常数，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}。$$

证明：对于 $i=0,1,\ldots,p-1$，记

$$A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}。$$

由题设 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^{(i)}=\lambda$，从而

$$\lim_{n}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda。$$

而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$。由题设知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}\frac{n}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}$$

对正整 m，设 $m=np+i$，其中 $0,1,\ldots,p-1$，从而可以把正整数依照 i 分为 p 个子列类。考虑任何这样的子列，下面极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_m}{m}=\frac{\lambda}{p}$

相关推荐

关于**这套试题的解析视频**请点击本文左下角的**阅读原文**直接进入在线课堂!