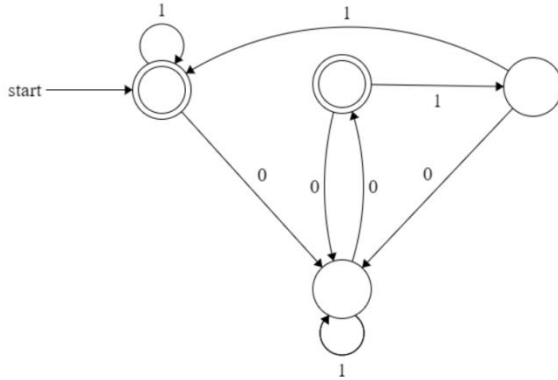


2022 形式语言自动机期末模拟试卷

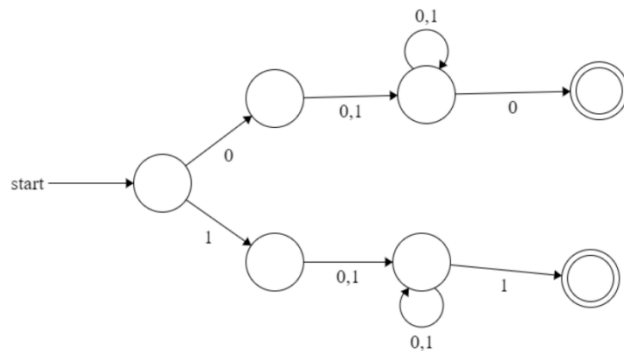
****题型仅供参考，与期末考试不一定相同，**

1. Give a DFA accepting the language that meets the following requirements over the alphabet $\{0,1\}$.

The number of 0s is even and don't end in 01

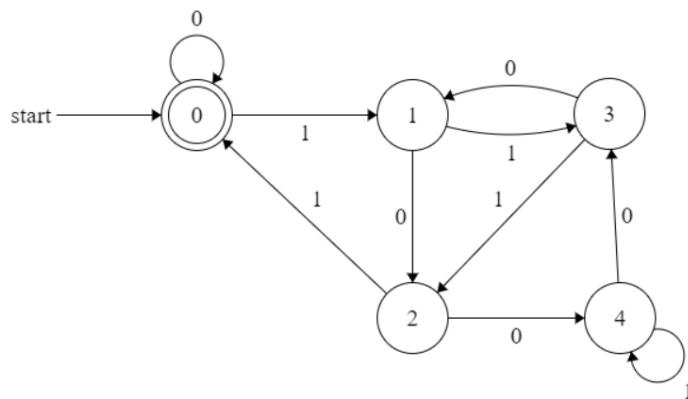


2. Give a NFA accepting the following language. $\{xwx^R | x, w \in \{0,1\}^+\}$



3. Write a regular expression accepting the strings that represent a number divisible by 5 in binary.

思路：设计 dfa，再转 re



$$\begin{aligned} & (0 + 1(10)^*(0+11) \cdot (01^*01 + 01^*00(10)^*(0+11))^* \cdot 1)^+ \\ & (0 + 1(10 + (0+11)(01^*01)^*0100)^* \cdot (0+11)(01^*01)^*1)^+ \end{aligned}$$

4. Prove that the language $\{a^m b^n c^{2k} d^{2z} \mid z \neq m + n + k\}$ is not regular with pumping lemma.

思路一. 直接使用泵引理

可取 $m = N$, $n = N$, $k = N$, $z = 3N + N!$,

则分为 xyz 后, $y = a^s$, $1 < s < n$,

则对于 $xy^f z$, $m = N + (f-1)s$, $n = N$, $k = N$, $z = 3N + N!$,

取 $(f-1) = \frac{N!}{s}$ 即可

思路二. 利用封闭性和泵引理

$$L1 = \{a^m b^n c^{2k} d^{2z} \mid z, m, n, k \text{ 非负}\}$$

$$L2 = \{a^m b^n c^{2k} d^{2z} \mid z = m + n + k\}$$

$$L3 = \{a^m b^n c^{2k} d^{2z} \mid z \neq m + n + k\}$$

由泵引理易证 $L2$ 非正则, 则若 $L3$ 正则, 由 $L1 - L3 = L2$ 可知 $L2$ 为正则, 矛盾! 所以 $L3$ 非正则

5. Convert to a DFA the following NFA:

		0	1	2
Start	q0	{q0, q1}	{q0, q2}	{q0, q2}
	q1	{q0, q3}	\emptyset	{q2}
	q2	\emptyset	{q1, q3}	{q1, q2}
*	q3	{q2, q3}	{q3}	{q0}

	0	1	2
$S \rightarrow \{q_0\}$ 1	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_1\}$ 2	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_2\}$ 3	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$ 4	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$ 5	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_2, q_3\}$ 6	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ 7	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$

6. Give a context-free grammar over $\{1, 2, 3, +, *, (,), \emptyset, \epsilon\}$ for all regular expressions over alphabet $\{1, 2, 3\}$.

答案:

这题考察通过正则表达式的定义来构造 CFG

$$S \rightarrow \emptyset | \epsilon | 1 | 2 | 3 | S + S | S^* | SS | (S)$$

7. Construct CNF equivalent to the following grammar:

$$S \rightarrow aBB|bAA$$

$$B \rightarrow aBa|aa|\epsilon$$

$$A \rightarrow bbA|\epsilon$$

答案:

首先去除空产生式:

观察 A 和 B 是可空的, 所以对 A 和 B 进行替换

$$S \rightarrow a|aB|aBB|b|bA|bAA$$

$$B \rightarrow aBa|aa$$

$$A \rightarrow bbA|bb$$

接着将其转化为乔姆斯基范式 ($A \rightarrow BC$ 或者 $A \rightarrow a$ 的形式)

$$S \rightarrow a|S_1B|S_1S_2|b|S_3A|S_3S_4$$

$$S_1 \rightarrow a$$

$$S_2 \rightarrow BB$$

$$S_3 \rightarrow b$$

$$S_4 \rightarrow AA$$

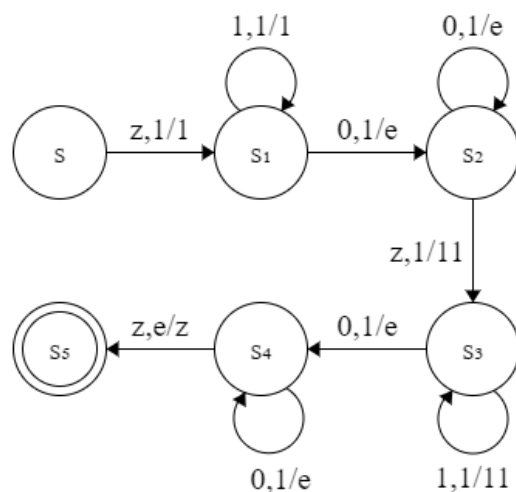
$$B \rightarrow S_1B_2|S_1S_1$$

$$B_2 \rightarrow BS_1$$

$$A \rightarrow S_3A_2|S_3S_3$$

$$A_2 \rightarrow S_3 A$$

8. Design a PDA for $L(M) = \{1^n 0^n | n \geq 1\} \{1^n 0^{2n} | n \geq 1\}$



答案:

其中, $S \rightarrow S_2$ 是判断 $\{1^n 0^n | n \geq 1\}$ 的过程, $S_2 \rightarrow S_4$ 是判断 $\{1^n 0^{2n} | n \geq 1\}$ 的过程, S_5 为判断结束的最终状态。

9. Prove the language $L = \{x \# y | x, y \in \{0, 1\}^* \text{ and } y \text{ is a substring of } x\}$ is not CFL with pumping lemma;

答案:

假设 L 是 CFL, N 为泵引理所说的正整数, 取字符串 $1^N 0^N \# 1^N 0^N$ 在 L 中

由泵引理存在 $z = uvwxy$ 满足 (1) $|vwx| \leq N$; (2) $|vx| \geq 1$ (3) $|vu^i wx^i y| \in L, i =$

$0, 1, 2, \dots$

若 vwx 在 $\#$ 前取 $i=0$, 显然不成立

若 vwx 在 $\#$ 后取 $i \geq 2$, 也不成立

若 vwx 包含 $\#$ 号

若 $\#$ 在 vx 中, 取 $i=0$ 新字符串不包含 $\#$ 显然不成立

若 $\#$ 不在 vx 中取,

若 $|x| \neq 0$, 则 $x_1 \neq 0$

取 $i=0$ 由于 $|vwx| \leq N$ 字符串变为 $1^N 0^{N-x_1} \# 1^{N-x_2} 0^N$, 此时 $1^{N-x_2} 0^N$ 不是 $1^N 0^{N-x_1}$ 的子串, 也不成立

若 $|v| \neq 0$, 则 $x_2 \neq 0$

取 $i=2$ 由于 $|vwx| \leq N$ 字符串变为 $1^N 0^{N+x_1} \# 1^{N+x_2} 0^N$, 此时 $1^{N+x_2} 0^N$ 不是 $1^N 0^{N+x_1}$ 的子串, 也不成立

所以 L 不是 CFG

10. Design Turing machine to compute n^2 . (start from 0^n to 0^{n^2})

答案: 起初是 $00 \dots 00$

S0→S1 变为 00...00A

S1→S3 将 A 左边的第一个 0 变成 1 之后返回到 A 的位置，开始一次加 n 操作，
S3, S4, S5 循环是将 A 右边 0 的个数加上 A 左边字符的个数，用 3 暂时代替 1，2
暂时代替 0，代表该数字已经被复制到右边。

变化过程： 00...0011...11A00...00

00...0033...33A00...0000...00 (此时 1 已经全部复制到右边)

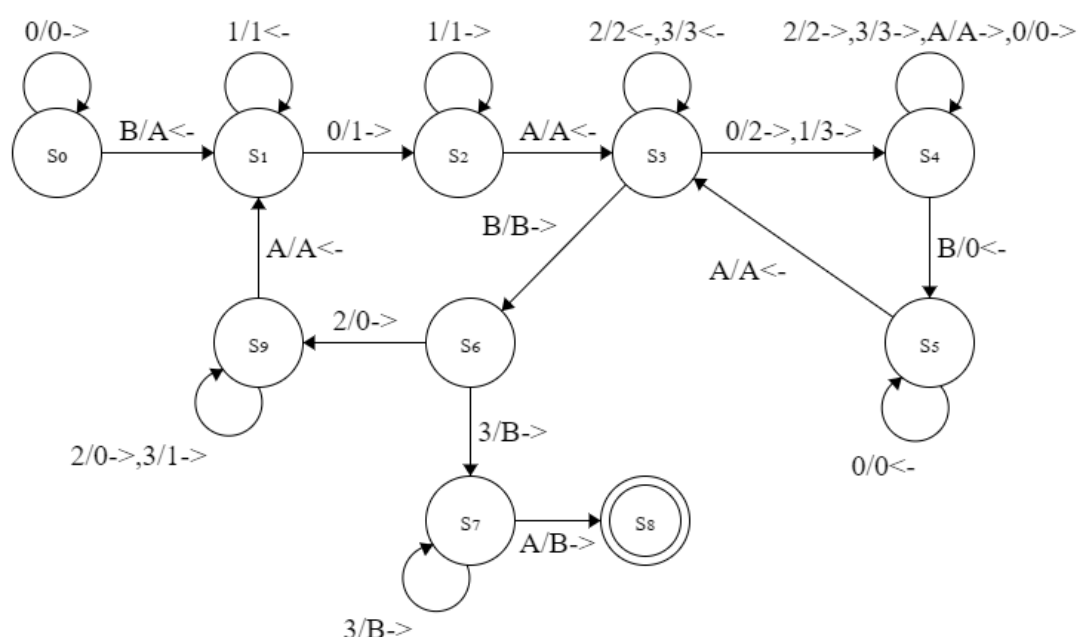
22...2233...33A00...0000...00 (此时 A 右边的 0 已经全部复制到右边)

S3→S6 发现 S 右边的 0，1 已经全部被替换为 2，3

S6→S7 发现 串此时为 33...33A00...0，说明右边已经进行了 n 次加 n 的操作，可以结束了，这时把 3 和 A 从串里边删去就行了

S6→S9→S1 把 2，3 还原为 0，1 开始下一轮的加 n 操作

$M = (\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9\}, \{0\}, \{A, 1, 2, 3\}, \delta, s_0, B, \{s_8\})$ 如下图：



(其实 A 状态是可以省略的，但是为了理解和讨论方便，我还是加上了)

命题人：计算学部讲师团形式语言自动机命题组

命制时间：2022. 5. 4