形式语言与自动机理论

下推自动机

王春宇

chunyu@hit.edu.cn

计算学部

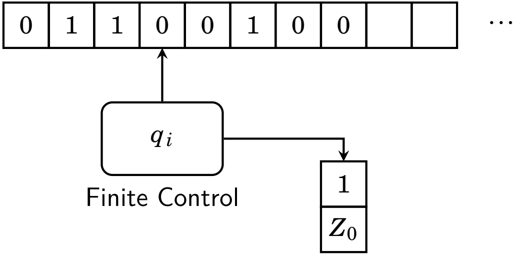
哈尔滨工业大学

2022 年 2 月

下推自动机

- 下推自动机
  - 形式定义
  - 瞬时描述和转移符号
- 下推自动机接受的语言
- 下推自动机与文法的等价性
- 确定型下推自动机

下推自动机



下推自动机的形式定义

定义

下推自动机(*PDA, Pushdown Automata*) P 为七元组

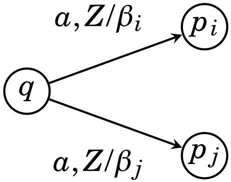
$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

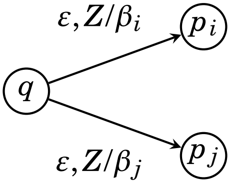
1. Q, 有穷状态集;
2. Σ, 有穷输入符号集;
3. Γ, 有穷栈符号集;
4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$, 状态转移函数;
5. $q_0 \in Q$, 初始状态;
6. $Z_0 \in \Gamma - \Sigma$, 栈底符号;
7. $F \subseteq Q$, 接收状态集或终态集.

PDA 的动作和状态转移图

如果 $q, p_i \in Q\,(1 \le i \le m)$, $a \in \Sigma$, $Z \in \Gamma$, $\beta_i \in \Gamma^*$, 可以有动作:

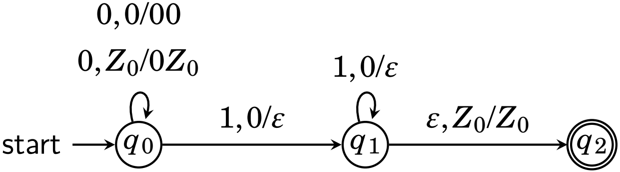
$$\delta\big(q, a, Z\big) = \big\{(p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2), \cdots, (p_m, \beta_m)\big\}, \text{ 或}$$
$$\delta\big(q, \varepsilon, Z\big) = \big\{(p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2), \cdots, (p_m, \beta_m)\big\}.$$





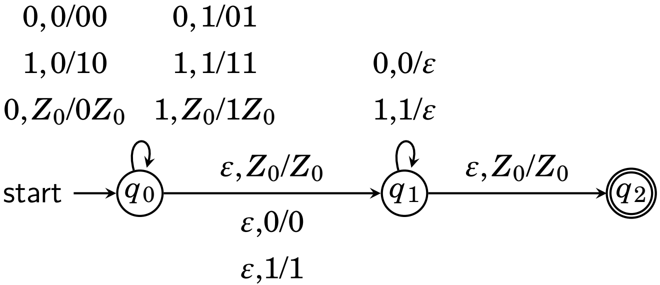
例 1. 设计识别 $L_{01} = \{ 0^n 1^n \mid n \geq 1 \}$ 的 PDA.

例 1. 设计识别 $L_{01} = \left\{ 0^n 1^n \,\middle|\, n \geq 1 \right\}$ 的 PDA.

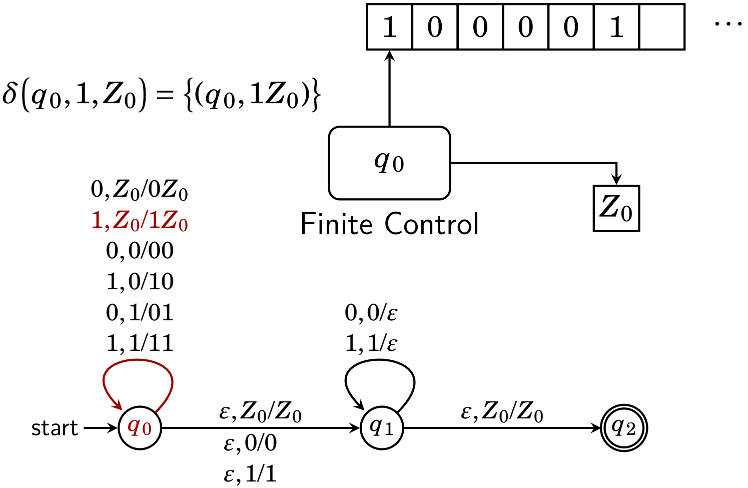


例 2. 设计识别 $L_{wwr} = \{\, ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \,\}$ 的 PDA.

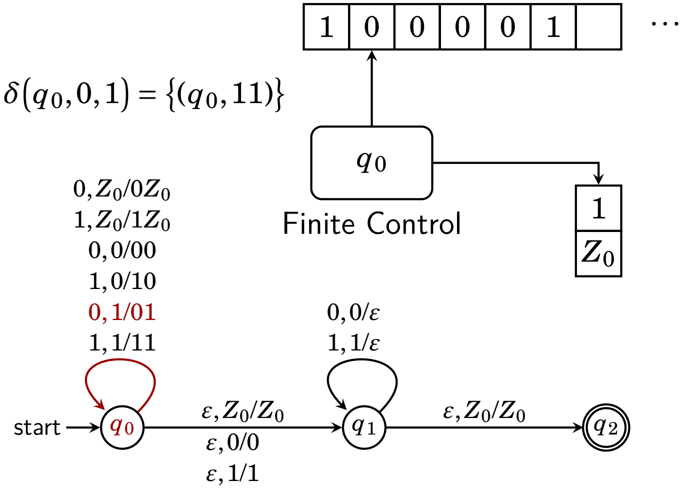
例 2. 设计识别 $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}$ 的 PDA.



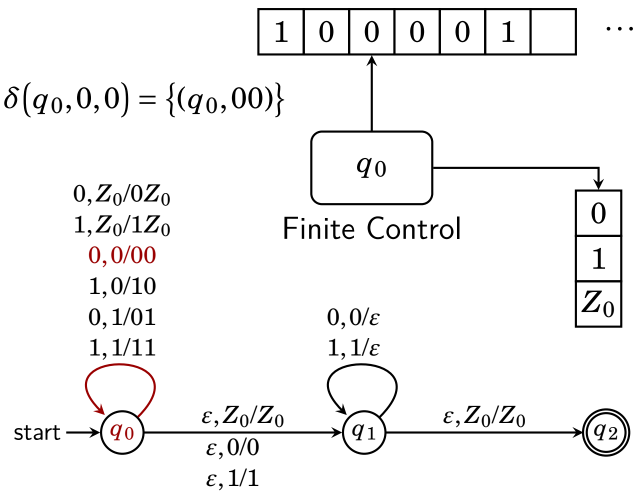
续例 2. $L_{wwr} = \{\, ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \,\}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



续例 2. $L_{wwr} = \{\, ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \,\}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.

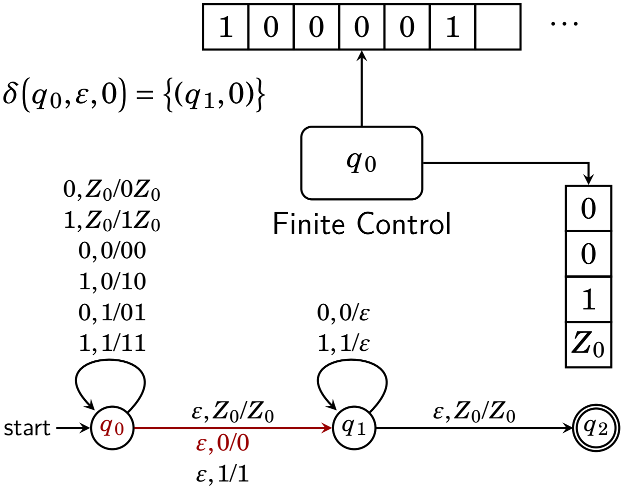


续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.

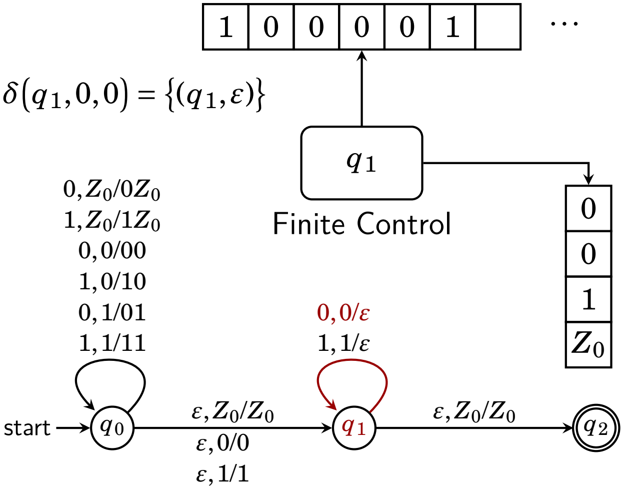


续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.

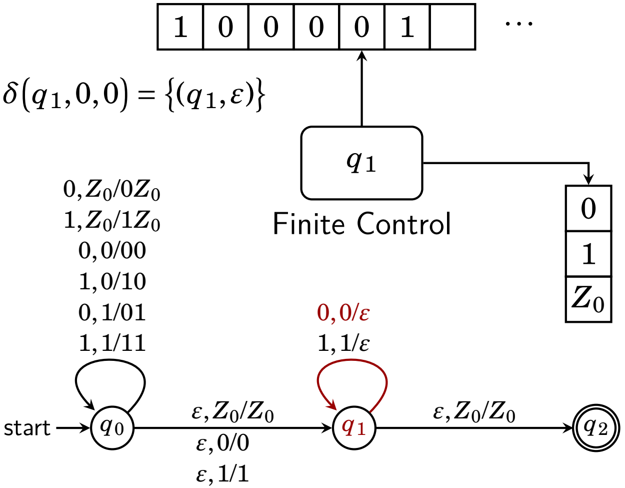
$\delta(q_0, \varepsilon, 0) = \{(q_1, 0)\}$



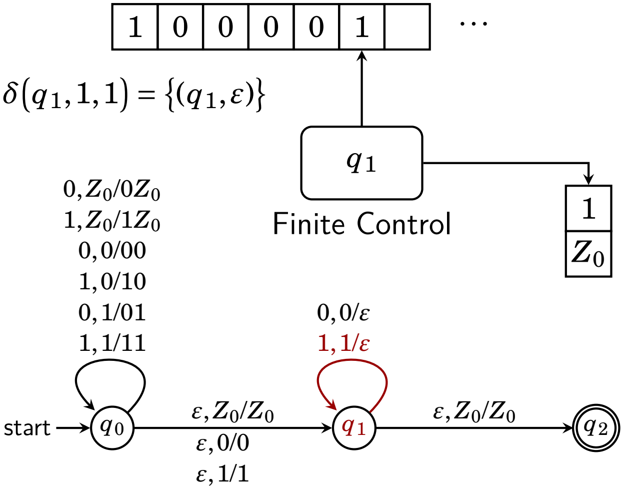
续例2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



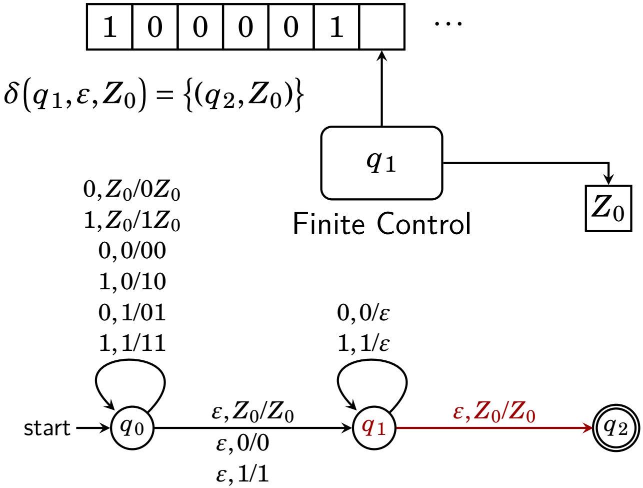
续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



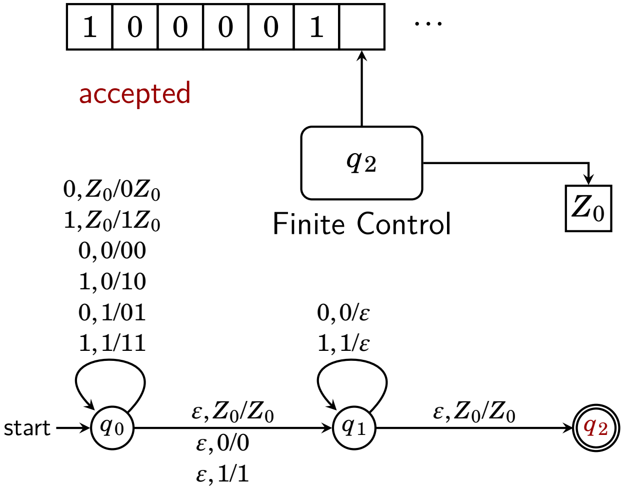
续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



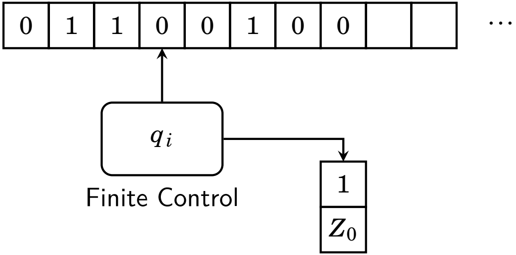
瞬时描述

定义

为描述 *PDA* 瞬间的格局，定义 $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ 中三元组

$$(q, w, \gamma)$$

为瞬时描述(*ID*, *Instantaneous Description*)，表示此时 *PDA* 处于状态 q，剩余输入串 w，栈为 γ.



转移符号

定义

在 *PDA* P 中如果 $(p,\beta)\in\delta(q,a,Z)$, 由 $(q,aw,Z\alpha)$ 到 $(p,w,\beta\alpha)$ 的变化, 称为 *ID* 的**转移** $\vdash_P$, 记为

$$(q,aw,Z\alpha)\vdash_P(p,w,\beta\alpha)$$

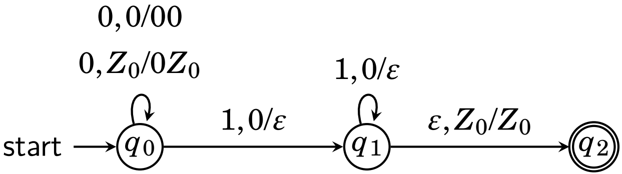
其中 $w\in\Sigma^*$, $\alpha\in\Gamma^*$.

若有 *ID* I, J 和 K, 递归定义 $\vdash_P^*$ 为:

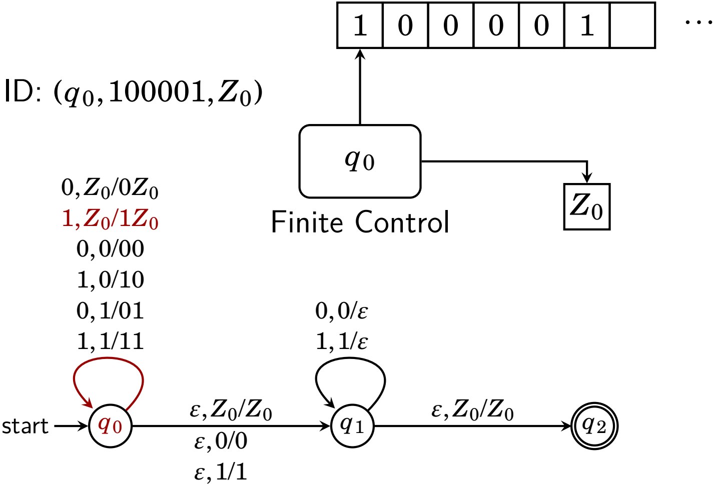
1. $I\vdash_P^* I$;
2. 若 $I\vdash_P J$, $J\vdash_P^* K$, 则 $I\vdash_P^* K$.

若 P 已知, 可省略, 记为 $\vdash$ 和 $\vdash^*$.

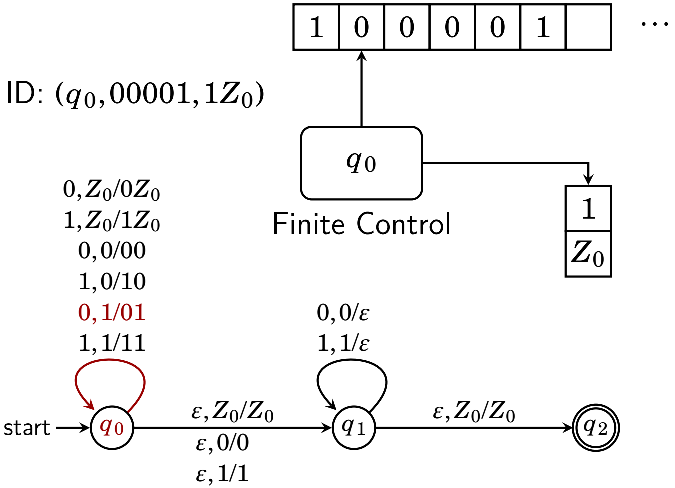
续例1. 语言 $L_{01} = \{ 0^n 1^n \mid n \geq 1 \}$ 的 PDA, 识别 0011 时的 ID 序列.



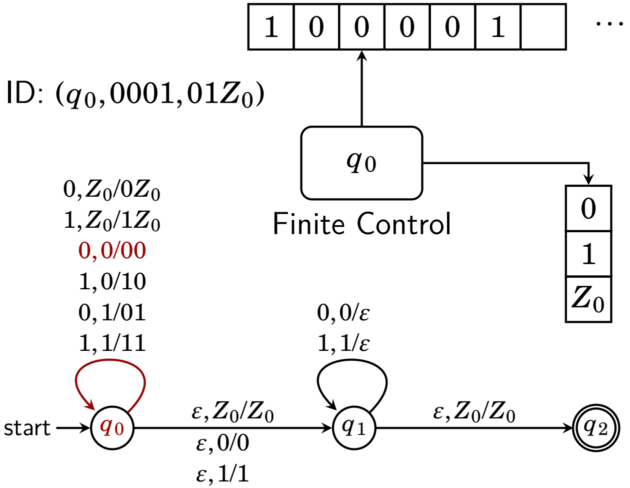
续例 2. $L_{wwr} = \{\, ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \,\}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



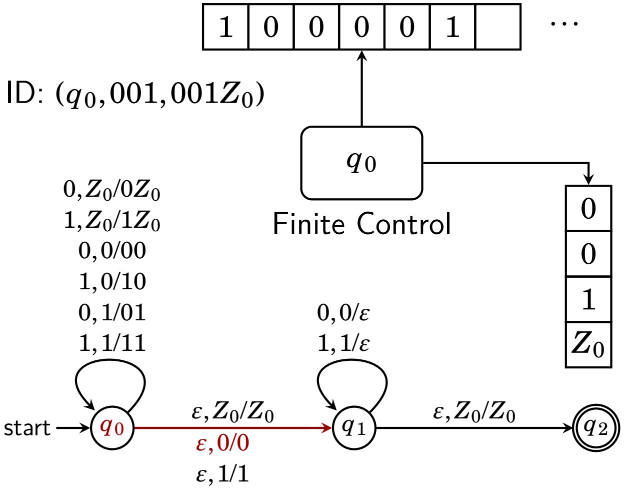
续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



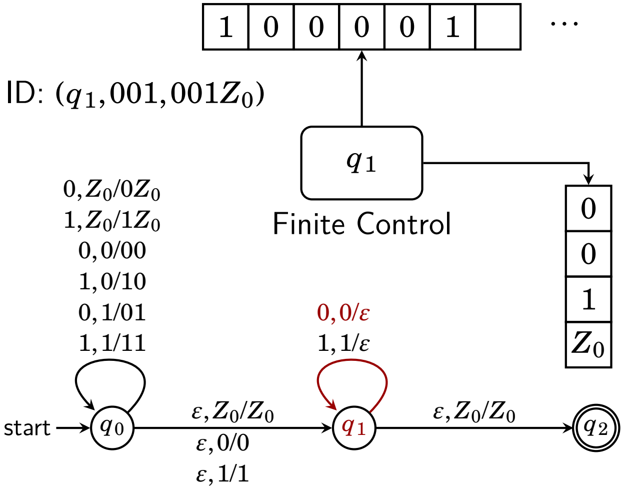
续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



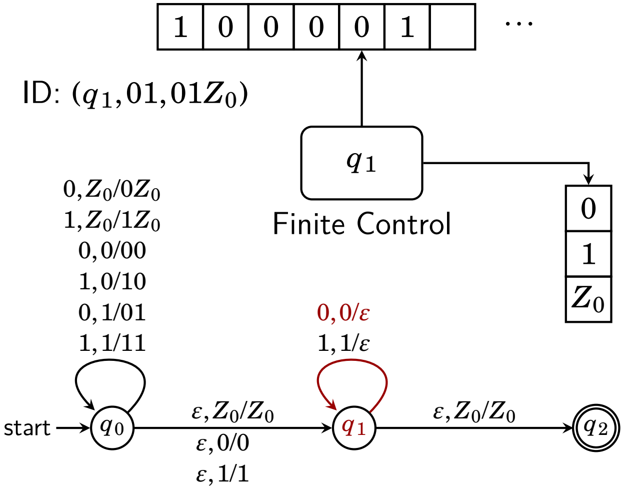
续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



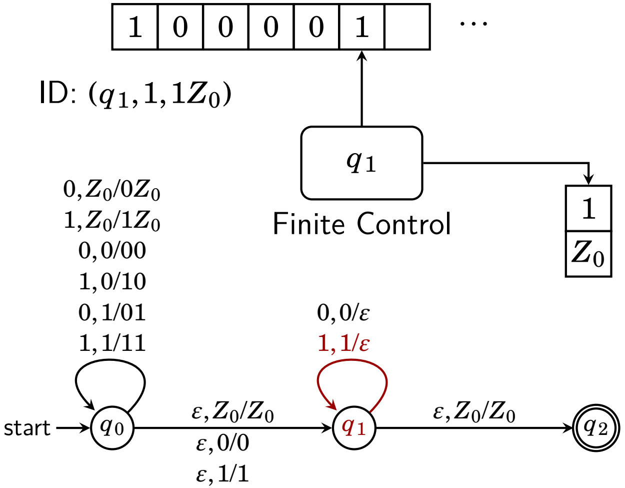
续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



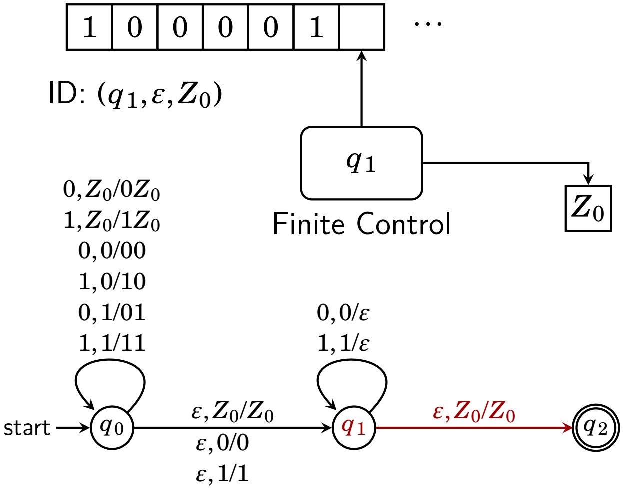
续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



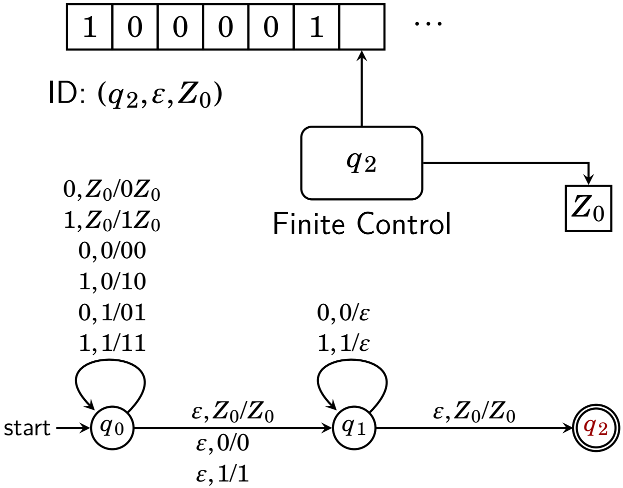
续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



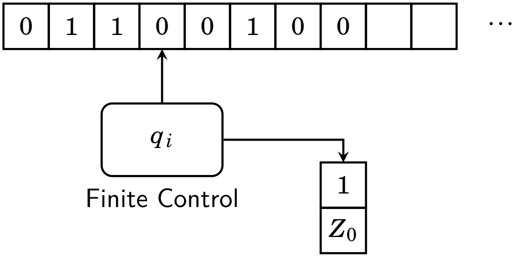
续例 2. $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA 识别串 100001 的过程.



有关 ID 的序列

对 PDA P 的一个合法 ID 序列 (计算):

1. 把相同字符串加到所有 ID 的输入串末尾, 得到的计算合法;
2. 把相同栈符号串加到所有 ID 的栈底之下, 得到的计算合法;
3. 把所有 ID 中都未消耗的部分输入串去掉, 得到的计算合法.



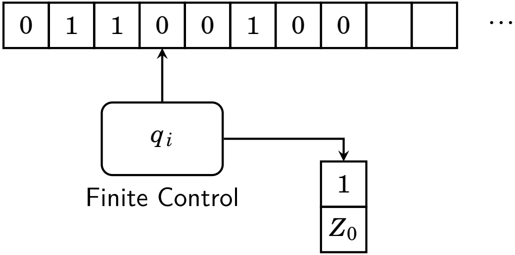
定理 23

对 $\forall w \in \Sigma^*, \forall \gamma \in \Gamma^*$, 如果

$$(q, x, \alpha) \vdash_P^* (p, y, \beta),$$

那么

$$(q, xw, \alpha\gamma) \vdash_P^* (p, yw, \beta\gamma).$$



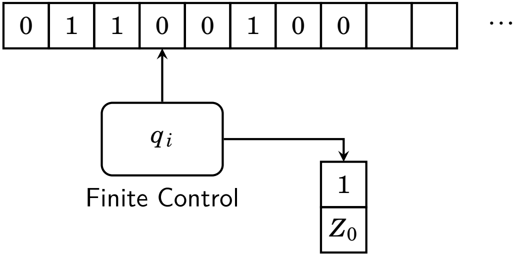
定理 24

对 $\forall w \in \Sigma^*$, 如果

$$(q, xw, \alpha) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (p, yw, \beta),$$

那么

$$(q, x, \alpha) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (p, y, \beta).$$



下推自动机

- 下推自动机
- 下推自动机接受的语言
  - 从终态方式到空栈方式
  - 从空栈方式到终态方式
- 下推自动机与文法的等价性
- 确定型下推自动机

下推自动机接受的语言

定义

PDA $P=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$, 以两种方式接受语言:

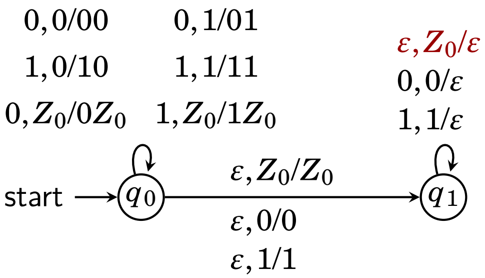
- P 以终态方式接受的语言, 记为$\mathbf{L}(P)$, 定义为

$$\mathbf{L}(P)=\{w \mid (q_0,w,Z_0)\vdash^{*}(p,\varepsilon,\gamma),\ p\in F\}.$$

- P 以空栈方式接受的语言, 记为$\mathbf{N}(P)$, 定义为

$$\mathbf{N}(P)=\{w \mid (q_0,w,Z_0)\vdash^{*}(p,\varepsilon,\varepsilon)\}.$$

续例 2. 识别 L_{wwr} 的 PDA P, 从终态方式, 改为空栈方式接受.
用 $\delta(q_1,\varepsilon,Z_0)=\{(q_1,\varepsilon)\}$ 代替 $\delta(q_1,\varepsilon,Z_0)=\{(q_2,Z_0)\}$ 即可.



从终态方式到空栈方式

定理 25

如果 PDA P_F 以终态方式接受语言 L, 则存在 PDA P_N 以空栈方式接受 L.

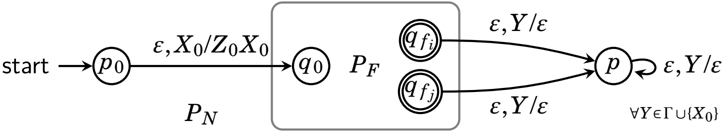
从终态方式到空栈方式

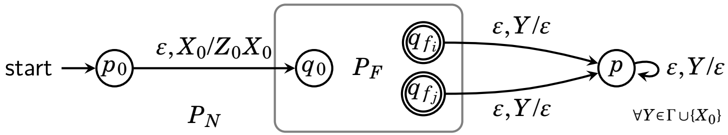
定理 25

如果 *PDA* P_F 以终态方式接受语言 L, 则存在 *PDA* P_N 以空栈方式接受 L.

证明: 设 $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$, 构造 PDA P_N,

$$P_N = (Q \cup \{p_0, p\},\ \Sigma,\ \Gamma \cup \{X_0\},\ \delta_N,\ p_0,\ X_0,\ \varnothing).$$





其中 δ_N 定义如下:

1. P_N 首先将 P_F 的栈底符号压栈, 开始模拟 P_F:
$$\delta_N\big(p_0, \varepsilon, X_0\big) = \{(q_0, Z_0X_0)\};$$

2. P_N 模拟 P_F 的动作: $\forall q \in Q$, $\forall a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\forall Y \in \Gamma$:
$$\delta_N\big(q, a, Y\big) \text{ 包含 } \delta_F\big(q, a, Y\big) \text{ 的全部元素};$$

3. 从 $q_f \in F$ 开始弹出栈中符号, 即 $\forall q_f \in F$, $\forall Y \in \Gamma \cup \{X_0\}$:
$$\delta_N\big(q_f, \varepsilon, Y\big) \text{ 包含 } (p, \varepsilon);$$

4. 在状态 p 时, 弹出全部栈中符号, 即 $\forall Y \in \Gamma \cup \{X_0\}$:
$$\delta_N\big(p, \varepsilon, Y\big) = \{(p, \varepsilon)\}.$$

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$
\begin{aligned}
w \in \mathbf{L}(P_F) &\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \mathop{\vdash}\limits^{*}_{P_F} (q_f, \varepsilon, \gamma) && \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0X_0) \mathop{\vdash}\limits^{*}_{P_F} (q_f, \varepsilon, \gamma X_0) && \text{定理23} \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0X_0) \mathop{\vdash}\limits^{*}_{P_N} (q_f, \varepsilon, \gamma X_0) && P_N\text{模拟}P_F \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \mathop{\vdash}\limits_{P_N} (q_0, w, Z_0X_0) \mathop{\vdash}\limits^{*}_{P_N} (q_f, \varepsilon, \gamma X_0) && \delta_N\text{构造}p_0\text{部分} \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \mathop{\vdash}\limits^{*}_{P_N} (q_f, \varepsilon, \gamma X_0) \mathop{\vdash}\limits^{*}_{P_N} (p, \varepsilon, \varepsilon) && \delta_N\text{构造}q_f\text{和}p\text{部分} \\
&\Rightarrow w \in \mathbf{N}(P_N)
\end{aligned}
$$

即 $\mathbf{L}(P_F) \subseteq \mathbf{N}(P_N)$.

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$
\begin{aligned}
w \in \mathbf{N}(P_N) &\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_N}^{*} (p, \varepsilon, \varepsilon) && \text{其他状态不可能空栈} \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_N} (q_0, w, Z_0X_0) \vdash_{P_N}^{*} (p, \varepsilon, \varepsilon) && \text{第一个动作必然到}\, q_0 \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0X_0) \vdash_{P_N}^{*} (q_f, \varepsilon, \gamma X_0) \vdash_{P_N}^{*} (p, \varepsilon, \varepsilon) && \text{必经}\, q_f \in F \,\text{消耗完}\, w \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \vdash_{P_N}^{*} (q_f, \varepsilon, \gamma) && P_N \,\text{中未用过栈底的}\, X_0 \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \vdash_{P_F}^{*} (q_f, \varepsilon, \gamma) && \text{均为模拟}\, P_F \\
&\Rightarrow w \in \mathbf{L}(P_F)
\end{aligned}
$$

即 $\mathbf{N}(P_N) \subseteq \mathbf{L}(P_F)$. 所以 $\mathbf{N}(P_N) = \mathbf{L}(P_F)$. $\square$

从空栈方式到终态方式

定理 26

如果 PDA P_N 以空栈方式接受语言 L, 则存在 PDA P_F 以终态方式接受 L.

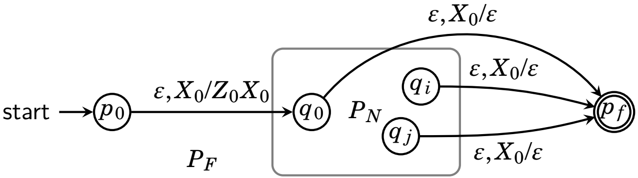
从空栈方式到终态方式

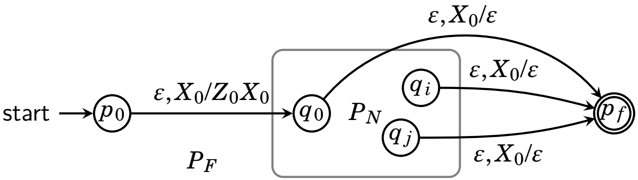
定理 26

如果 *PDA* P_N 以空栈方式接受语言 L, 则存在 *PDA* P_F 以终态方式接受 L.

证明: 设 $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0, \varnothing)$. 构造 PDA P_F,

$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\},\ \Sigma,\ \Gamma \cup \{X_0\},\ \delta_F,\ p_0,\ X_0,\ \{p_f\})$$





其中 δ_F 定义如下:

1. P_F 开始时, 将 P_N 栈底符号压入栈, 并开始模拟 P_N,

$$\delta_F(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\};$$

2. P_F 模拟 P_N, $\forall q \in Q$, $\forall a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\forall Y \in \Gamma$:

$$\delta_F(q, a, Y) = \delta_N(q, a, Y);$$

3. 在 $\forall q \in Q$ 时, 看到 P_F 的栈底 X_0, 则转移到新终态 p_f:

$$\delta_F(q, \varepsilon, X_0) = \{(p_f, \varepsilon)\}.$$

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$
\begin{aligned}
w \in \mathbf{N}(P_N) &\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \vdash_{P_N}^{*} (q, \varepsilon, \varepsilon) && \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0X_0) \vdash_{P_N}^{*} (q, \varepsilon, X_0) && \text{定理23} \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0X_0) \vdash_{P_F}^{*} (q, \varepsilon, X_0) && P_F\text{模拟}P_N \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_F} (q_0, w, Z_0X_0) \vdash_{P_F}^{*} (q, \varepsilon, X_0) && \delta_F\text{构造}, p_0\text{部分} \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_F}^{*} (q, \varepsilon, X_0) \vdash_{P_F} (p_f, \varepsilon, \varepsilon) && \delta_F\text{构造}, p_f\text{部分} \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_F}^{*} (p_f, \varepsilon, \varepsilon) && \\
&\Rightarrow w \in \mathbf{L}(P_F) &&
\end{aligned}
$$

即 $\mathbf{N}(P_N) \subseteq \mathbf{L}(P_F)$.

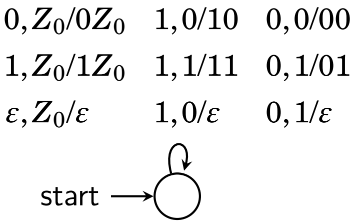
对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$
\begin{aligned}
w \in \mathbf{L}(P_F) &\Rightarrow (p_0, w, X_0) \overset{*}{\underset{P_F}{\vdash}} (p_f, \varepsilon, \varepsilon) \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \overset{*}{\underset{P_F}{\vdash}} (q, \varepsilon, X_0) \underset{P_F}{\vdash} (p_f, \varepsilon, \varepsilon) && \text{经 } q \text{ 才可达} p_f \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \underset{P_F}{\vdash} (q_0, w, Z_0X_0) \overset{*}{\underset{P_F}{\vdash}} (q, \varepsilon, X_0) && P_F \text{第一个动作} \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0X_0) \overset{*}{\underset{P_F}{\vdash}} (q, \varepsilon, X_0) && \text{即上式} \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\underset{P_N}{\vdash}} (q, \varepsilon, \varepsilon) && P_N \text{与} X_0 \text{无关} \\
&\Rightarrow w \in \mathbf{N}(P_N)
\end{aligned}
$$

即 $\mathbf{N}(P_F) \subseteq \mathbf{L}(P_N)$. 所以 $\mathbf{L}(P_F) = \mathbf{N}(P_N)$. □

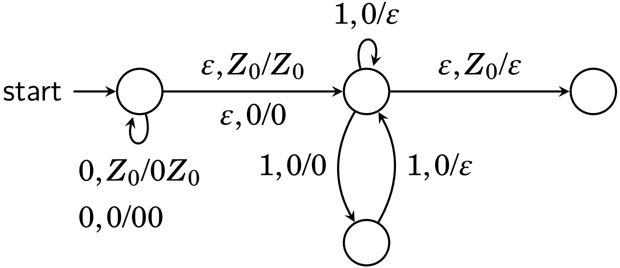
例 3. 接受 $L_{\mathrm{eq}} = \left\{ w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, w \text{ 中字符 0 和 1 的数量相同} \right\}$ 的 PDA.

例 3. 接受 $L_{\mathrm{eq}} = \left\{ w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, w \text{ 中字符 0 和 1 的数量相同} \right\}$ 的 PDA.



例 4. 接受 $L = \left\{ 0^n 1^m \,\middle|\, 0 \le n \le m \le 2n \right\}$ 的 PDA.

例 4. 接受 $L = \{ 0^n 1^m \mid 0 \le n \le m \le 2n \}$ 的 PDA.



课堂练习. Design PDA for $L = \left\{ a^i b^j c^k \;\middle|\; i, j, k \geq 0,\ j = i + k \right\}$.

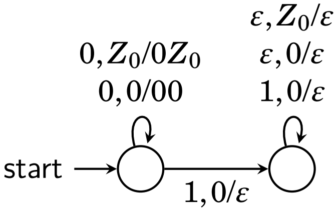
下推自动机

- 下推自动机
- 下推自动机接受的语言
- 下推自动机与文法的等价性
  - 由 CFG 到 PDA
  - 由 PDA 到 CFG
- 确定型下推自动机

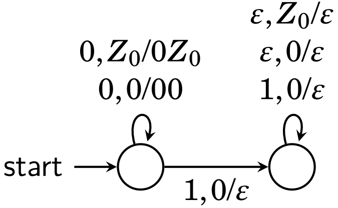
由 CFG 到 PDA

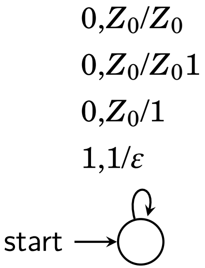
例 5. 设计语言 $L = \left\{ 0^n 1^m \,\middle|\, 1 \le m \le n \right\}$ 的 PDA.

例 5. 设计语言 $L = \{ 0^n 1^m \mid 1 \le m \le n \}$ 的 PDA.



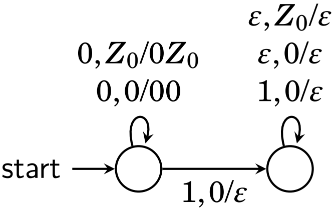
例 5. 设计语言 $L = \{ 0^n 1^m \mid 1 \le m \le n \}$ 的 PDA.

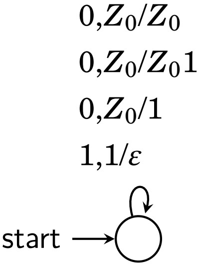


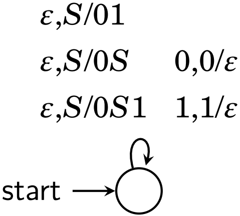


由 CFG 到 PDA

例 5. 设计语言 $L = \{ 0^n 1^m \mid 1 \le m \le n \}$ 的 PDA.







续例 5. 设计语言 $L = \{ 0^n 1^m \mid 1 \le m \le n \}$ 的 CFG.

CFG G:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \\
A &\to 0A \mid \varepsilon \\
B &\to 0B1 \mid 01
\end{aligned}
$$

字符串 00011 的最左派生:

$$S \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} AB \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 0AB \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 0B \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 00B1 \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 00011$$

续例 5. 语言 $L = \{ 0^n 1^m \mid 1 \le m \le n \}$.

用 PDA 栈顶符号的替换, 模拟文法的最左派生:

PDA		CFG	
PDA 的 ID 转移	PDA 的动作	产生式	最左派生
$(q_0, 00011, S)$			S
$\vdash (q_0, 00011, AB)$	$\varepsilon, S/AB$	$S \to AB$	$\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} AB$
$\vdash (q_0, 00011, 0AB)$	$\varepsilon, A/0A$	$A \to 0A$	$\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 0AB$
$\vdash (q_0, 0011, AB)$	$0, 0/\varepsilon$		
$\vdash (q_0, 0011, B)$	$\varepsilon, A/\varepsilon$	$A \to \varepsilon$	$\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 0B$
$\vdash (q_0, 0011, 0B1)$	$\varepsilon, B/0B1$	$B \to 0B1$	$\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 00B1$
$\vdash (q_0, 011, B1)$	$0, 0/\varepsilon$		
$\vdash (q_0, 011, 011)$	$\varepsilon, B/01$	$B \to 01$	$\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 00011$
$\vdash (q_0, 11, 11)$	$0, 0/\varepsilon$		
$\vdash (q_0, 1, 1)$	$1, 1/\varepsilon$		
$\vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$	$1, 1/\varepsilon$		

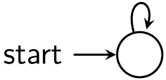
续例 5. 语言 $L = \{\, 0^n 1^m \mid 1 \le m \le n \,\}$.

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \\
A &\to 0A \mid \varepsilon \\
B &\to 0B1 \mid 01
\end{aligned}
$$

$\varepsilon, S/AB$

$\varepsilon, A/0A \quad \varepsilon, A/\varepsilon \quad 0, 0/\varepsilon$

$\varepsilon, B/0B1 \quad \varepsilon, B/01 \quad 1, 1/\varepsilon$



定理 27

任何 *CFL* L, 一定存在 *PDA* P, 使 $L = \mathbf{N}(P)$.

构造与文法等价的 PDA

如果 CFG $G = (V, T, P', S)$, 构造 PDA

$$P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S, \varnothing),$$

其中 δ 为:

1. $\forall A \in V$:

$$\delta(q, \varepsilon, A) = \{ (q, \beta) \mid A \to \beta \in P' \},$$

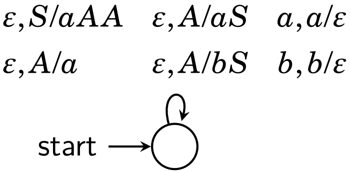
2. $\forall a \in T$:

$$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\},$$

那么 $\mathbf{L}(G) = \mathbf{N}(P)$.

例 6. 为文法 $S \to aAA$, $A \to aS \mid bS \mid a$ 构造 PDA.

例 6. 为文法 $S \to aAA$, $A \to aS \mid bS \mid a$ 构造 PDA.



证明: 往证

$$S \overset{*}{\Rightarrow} w \Longleftrightarrow (q, w, S) \underset{\mathrm{P}}{\overset{*}{\vdash}} (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

[充分性] 往证

$$S \underset{\mathrm{lm}}{\overset{*}{\Rightarrow}} w \implies (q, w, S) \overset{*}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

设 $S \underset{\mathrm{lm}}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$ 中第 i 个左句型为 $x_i A_i \alpha_i$, 其中 $x_i \in \Sigma^*$, $A_i \in V$, $\alpha_i \in (V \cup T)^*$. 并将 S 看作第 0 个左句型 $x_0 A_0 \alpha_0 = S$, 那么

$$x_0 = \varepsilon, A_0 = S, \alpha_0 = \varepsilon.$$

将 w 看作为第 n 个左句型 $x_n A_n \alpha_n = w$, 那么

$$x_n = w, A_n = \varepsilon, \alpha_n = \varepsilon.$$

再对派生步骤 i 归纳, 往证

$$S \underset{\mathrm{lm}}{\overset{i}{\Rightarrow}} x_i A_i \alpha_i \wedge w = x_i y_i \Longrightarrow (q, w, S) \overset{*}{\vdash} (q, y_i, A_i \alpha_i).$$

归纳基础: 最左派生在第 0 步时, 显然成立

$$(q,w,S) \vdash^{*} (q,y_0,A_0\alpha_0) = (q,w,S).$$

归纳递推: 假设第 i 步时成立, 当第 $i+1$ 步时, 一定是 $A_i \to \beta$ 应用到 $x_iA_i\alpha_i$

$$S \xRightarrow[\text{lm}]{i} x_iA_i\alpha_i \xRightarrow[\text{lm}]{} x_i\beta\alpha_i = x_{i+1}A_{i+1}\alpha_{i+1}.$$

即最左变元 A_{i+1} 一定在 $\beta\alpha_i$ 中, 设 A_{i+1} 之前的终结符为 x', 那么由

$$\begin{aligned} {\color{blue}x_i}\beta\alpha_i &= {\color{blue}x_i}x'{\color{red}A_{i+1}\alpha_{i+1}} &= x_{i+1}{\color{red}A_{i+1}\alpha_{i+1}} \\ {\color{blue}x_i}y_i &= {\color{blue}x_i}x'{\color{red}y_{i+1}} &= x_{i+1}{\color{red}y_{i+1}} = w \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \beta\alpha_i &= x'A_{i+1}\alpha_{i+1}, \\ y_i &= x'y_{i+1}. \end{aligned}$$

那么, 在 PDA 中从 ID $(q,y_i,A_i\alpha_i)$ 模拟最左派生, 用产生式 $A_i \to \beta$ 替换栈顶 A_i 后, 有

$$\begin{aligned}
(q,w,S) &\overset{*}{\vdash} (q,y_i,A_i\alpha_i) && \text{归纳假设}\\
&\vdash (q,y_i,\beta\alpha_i) && A_i \to \beta\\
&= (q,x'y_{i+1},x'A_{i+1}\alpha_{i+1}) &&\\
&\overset{*}{\vdash} (q,y_{i+1},A_{i+1}\alpha_{i+1}) && \text{弹出栈顶终结符}
\end{aligned}$$

因此 $S \overset{n}{\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}} w \Longrightarrow (q,w,S) \overset{*}{\vdash} (q,y_n,A_n\alpha_n) = (q,\varepsilon,\varepsilon)$, 即充分性得证.

[必要性] 往证更一般的, 对任何变元 A, 都有:

$$(q,x,A) \overset{*}{\vdash} (q,\varepsilon,\varepsilon) \Longrightarrow A \overset{*}{\Rightarrow} x.$$

对 ID 转移 $(q,x,A) \overset{i}{\vdash} (q,\varepsilon,\varepsilon)$ 的次数 i 归纳证明.

归纳基础: 当 $i=1$ 步时, 只能是 $x=\varepsilon$ 且 $A\to\varepsilon$ 为产生式, 所以 $A\overset{*}{\Rightarrow}\varepsilon$.

归纳递推: 假设 $i\le n\,(n\ge 1)$ 步时上式成立. 当 $i=n+1$ 时, 因为 A 是变元, 其第 1 步转移一定是应用某产生式 $A\to Y_1Y_2\cdots Y_m$

$$(q,x,A)\vdash(q,x,Y_1Y_2\cdots Y_m)$$

其中 Y_i 是变元或终结符. 而其余的 n 步转移

$$(q,x,Y_1Y_2\cdots Y_m)\overset{*}{\vdash}(q,\varepsilon,\varepsilon)$$

中每个 Y_i 从栈中被完全弹出时, 将消耗掉的那部分 x 记为 x_i, 那么显然有

$$x=x_1x_2\cdots x_m.$$

而每个 Y_i 从栈中被完全弹出时, 都不超过 n 步, 所以由归纳假设,

$$(q,x_i,Y_i)\overset{*}{\vdash}(q,\varepsilon,\varepsilon)\Longrightarrow Y_i\overset{*}{\Rightarrow}x_i.$$

再由产生式 $A \to Y_1Y_2\cdots Y_m$, 有

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow Y_1Y_2\cdots Y_m \\ &\overset{*}{\Rightarrow} x_1Y_2\cdots Y_m \\ &\overset{*}{\Rightarrow} x_1x_2\cdots Y_m \\ &\overset{*}{\Rightarrow} x_1x_2\cdots x_m = x. \end{aligned}$$

因此当 $A = S$, $x = w$ 时,

$$(q, w, S) \overset{*}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon) \Longrightarrow S \overset{*}{\Rightarrow} w$$

成立, 即必要性得证.

所以, 任何 CFL 都可由 PDA 识别. $\square$

构造与 GNF 格式文法等价的 PDA

如果 GNF 格式的 CFG $G=(V,T,P',S)$, 那么构造 PDA

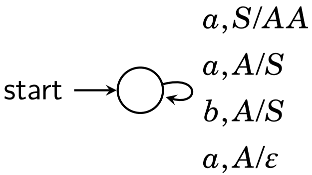
$$P=(\{q\},\ T,\ V,\ \delta,\ q,\ S,\ \varnothing),$$

为每个产生式, 定义 δ 为:

$$\delta(q,a,A)=\{\,(q,\beta)\,\big|\,A\to a\beta\in P'\,\}.$$

续例 6. 文法 $S \to aAA$, $A \to aS \mid bS \mid a$ 为 GNF 格式, 构造等价的 PDA.

续例 6. 文法 $S \to aAA$, $A \to aS \mid bS \mid a$ 为 GNF 格式, 构造等价的 PDA.



由 PDA 到 CFG

定理 28

如果 *PDA* P, 有 $L = \mathbf{N}(P)$, 那么 L 是上下文无关语言.

构造与 PDA 等价的 CFG

如果 PDA $P=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,\varnothing)$, 那么构造 CFG $G=(V,\Sigma,P',S)$, 其中 V 和 P' 为

1. $V=\{[qXp]\,|\,p,q\in Q,\ X\in\Gamma\}\cup\{S\}$;
2. 对 $\forall p\in Q$, 构造产生式 $S\to[q_0Z_0p]$;
3. 对 $\forall(p,Y_1Y_2\cdots Y_n)\in\delta(q,a,X)$, 构造 $|Q|^n$ 个产生式

$$[qXr_n]\to a[pY_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{n-1}Y_nr_n]$$

   其中 $a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$, $X,Y_i\in\Gamma$, 而 $r_i\in Q$ 是 n 次 $|Q|$ 种状态的组合;
   若 $n=0$, 为 $[qXp]\to a$.

证明: 只需证明

$$(q,w,X)\overset{*}{\vdash}(p,\varepsilon,\varepsilon) \iff [qXp]\overset{*}{\Rightarrow}w.$$

并令 $X=Z_0$, $q=q_0$, 与开始符号 S 的产生式一起, 即可完成定理的证明.

[充分性] 对 PDA 中 $(q,w,X)\overset{i}{\vdash}(p,\varepsilon,\varepsilon)$ 的转移次数 i 归纳证明.

归纳基础: 当 $i=1$ 时, P 只能消耗不超过一个的字符, 即 $w=a$

$$(q,w,X)=(q,a,X)\vdash(p,\varepsilon,\varepsilon),$$

其中 $a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$ 且 $(p,\varepsilon)\in\delta\big(q,a,X\big)$, 则由文法的构造会有

$$[qXp]\to a,$$

因此 $[qXp]\overset{*}{\Rightarrow}a=w$.

归纳递推: 假设当 $i \le m\,(m \ge 1)$ 时命题成立. 当 $i = m+1$ 时, 转移的第 1 步, 一定由某个 $(r_0, Y_1Y_2\cdots Y_n) \in \delta\big(q, a, X\big)$ 开始

$$(q, ax, X) \vdash (r_0, x, Y_1Y_2\cdots Y_n),$$

其中 $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, w = ax$. 而其余的 m 步为

$$(r_0, x, Y_1Y_2\cdots Y_n) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

而这些转移, 会从栈中依次弹出 Y_i 并消耗掉部分 x. 若分别记为 x_i, 则有

$$w = ax = ax_1x_2\cdots x_n.$$

若设弹出 Y_i 之前和之后的状态分别是 r_{i-1} 和 r_i, 这里 $i = 1, 2, \cdots n$, 那么有

$$(r_{i-1}, x_i, Y_i) \overset{*}{\vdash} (r_i, \varepsilon, \varepsilon),$$

且转移步数都不会超过 m. 那么, 由归纳假设有

$$(r_{i-1}, x_i, Y_i) \overset{*}{\vdash} (r_i, \varepsilon, \varepsilon) \implies [r_{i-1}Y_ir_i] \overset{*}{\Rightarrow} x_i.$$

而由动作 $(r_0, Y_1Y_2\cdots Y_n) \in \delta\big(q, a, X\big)$ 所构造的产生式会包含

$$[qXr_n] \to a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{n-1}Y_nr_n].$$

而显然弹出 X 后的状态 p 与弹出 Y_n 后的状态 r_n 是同一个, 所以

$$[qXp] = [qXr_n] \Rightarrow a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{n-1}Y_nr_n] \overset{*}{\Rightarrow} ax_1x_2\cdots x_n = w$$

因此充分性得证. 那么当 $X = Z_0, q = q_0$ 时有

$$(q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon) \Longrightarrow [q_0Z_0p] \overset{*}{\Rightarrow} w,$$

以及产生式 $S \to [q_0Z_0p]$ 有 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, 即 PDA 接受的串可由文法派生得到.

[必要性]: 略. $\square$

例 7. 将 PDA $P=\left(\{p,q\},(0,1),\{X,Z\},\delta,q,Z\right)$ 转为 CFG, 其中 δ 如下:

(1) $\delta\left(q,1,Z\right)=\left\{(q,XZ)\right\}$

(2) $\delta\left(q,1,X\right)=\left\{(q,XX)\right\}$

(3) $\delta\left(q,0,X\right)=\left\{(p,X)\right\}$

(4) $\delta\left(q,\varepsilon,Z\right)=\left\{(q,\varepsilon)\right\}$

(5) $\delta\left(p,1,X\right)=\left\{(p,\varepsilon)\right\}$

(6) $\delta\left(p,0,Z\right)=\left\{(q,Z)\right\}$

δ	产生式
(0)	$S \to [qZq]$
	$S \to [qZp]$
(1)	$[qZq] \to 1[qXq][qZq]$
	$[qZq] \to 1[qXp][pZq]$
	$[qZp] \to 1[qXq][qZp]$
	$[qZp] \to 1[qXp][pZp]$
(2)	$[qXq] \to 1[qXq][qXq]$
	$[qXq] \to 1[qXp][pXq]$
	$[qXp] \to 1[qXq][qXp]$
	$[qXp] \to 1[qXp][pXp]$
(3)	$[qXq] \to 0[pXq]$
	$[qXp] \to 0[pXp]$
(4)	$[qZq] \to \varepsilon$
(5)	$[pXp] \to 1$
(6)	$[pZp] \to 0[qZp]$
	$[pZq] \to 0[qZq]$

消除无用符号	重命名 (可选)
$S \to [qZq]$	$S \to A$
$[qZq] \to 1[qXp][pZq]$	$A \to 1BC$
$[qXp] \to 1[qXp][pXp]$	$B \to 1BD$
$[qXp] \to 0[pXp]$	$B \to 0D$
$[qZq] \to \varepsilon$	$A \to \varepsilon$
$[pXp] \to 1$	$D \to 1$
$[pZq] \to 0[qZq]$	$C \to 0A$

下推自动机

- 下推自动机
- 下推自动机接受的语言
- 下推自动机与文法的等价性
- 确定型下推自动机
  - 正则语言与 DPDA
  - DPDA 与无歧义文法

确定型下推自动机

定义

如果 *PDA* $P=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ 满足

1. $\forall a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$, $\delta(q,a,X)$ 至多有一个动作;
2. $\exists a\in\Sigma$, 如果 $\delta(q,a,X)\neq\varnothing$, 那么 $\delta(q,\varepsilon,X)=\varnothing$.

则称 P 为确定型下推自动机(*DPDA*).

定义

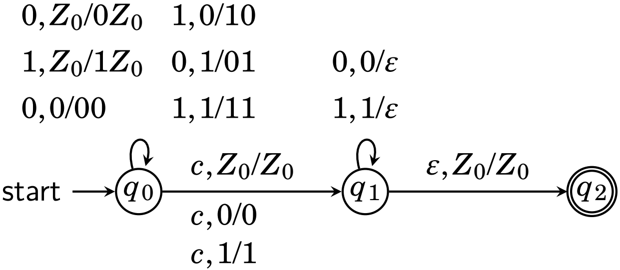
DPDA P 以终态方式接受的语言 $\mathbf{L}(P)$ 称为确定的上下文无关语言(*DCFL*).

- DPDA 中 $\forall(q,a,Z)\in Q\times\Sigma\times\Gamma$ 满足 $|\delta(q,a,Z)|+|\delta(q,\varepsilon,Z)|\leq 1$

DPDA 与 PDA 不等价

例 8. 任何 DPDA 都无法接受 L_{wwr}，但是可以接受

$$L_{wcwr} = \{ wcw^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \}.$$



正则语言与 DPDA

定理 29

如果 L 是正则语言, 那么存在 *DPDA* P 以终态方式接受 L, 即 $L = \mathbf{L}(P)$.

证明: 显然, 因为 DPDA P 可以不用栈而模拟任何 DFA. □

- L_{wcwr} 显然是 CFL, 所以 DCFL 语言类真包含正则语言
- DPDA 无法识别 L_{wwr}, 所以 DCFL 语言类真包含于 CFL

定义

如果语言 L 中不存在两个不同的字符串 x 和 y, 使 x 是 y 的前缀, 称语言 L 满足前缀性质.

定理 30

如果有 *DPDA* P 且 $L = \mathbf{N}(P)$, 当且仅当 L 有前缀性质且存在 *DPDA* P' 使 $L = \mathbf{L}(P')$.

证明:
[⇒] $\forall x \in \mathbf{N}(P)$ 会弹空 P 的栈, 所以不会接受以 x 为前缀的其他串; 而以定理26方式转为终态接受不改变确定性. [⇐] 到达终态则弹空栈, 即可. □

- DPDA P 的 $\mathbf{N}(P)$ 更有限, 即使正则语言 $\mathbf{0}^*$ 也无法接受

DPDA 与无歧义文法

定理 31

DPDA P, 语言 $L = \mathbf{N}(P)$, 那么 L 有无歧义的 CFG.

证明: 利用定理 28 由 P 构造的文法 G 一定无歧义, 因为:

1. P 是确定的, 那么它接受 w 的 ID 序列也是确定的;
2. 而由 $\delta\big(q,a,X\big) = \{(p,Y_1\cdots Y_n)\}$ 继续弹出 Y_i 后的状态 r_i 也是确定的;
3. 那么由每个动作构造的一组产生式

$$[qXr_n] \to a[pY_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{n-1}Y_nr_n]$$

   中, 仅会有一个是有效的;
4. 那么, G 中最左派生 $S \overset{*}{\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}} w$ 就是唯一的, 所以是无歧义的. □

定理 32

DPDA P, 语言 $L=\mathbf{L}(P)$, 那么 L 有无歧义的 CFG.

证明:

1. 设符号 $\$$ 不在 L 中出现, 令 $L'=\{w\$ \mid w\in L\}$, 则 L' 具有前缀性质;
2. 可修改 P 接受 L', 则由定理 30, 存在 DPDA P' 使 $\mathbf{N}(P')=L'$;
3. 由定理 31, 存在无歧义文法 G' 使 $\mathbf{L}(G')=L'$;
4. 将 $\$$ 看作变元, 增加产生式 $\$\to\varepsilon$, 修改 G' 为文法 G;
5. 则文法 G 和 G' 一样无歧义, 且 $\mathbf{L}(G)=L$. □

DCFL/DPDA 的重要应用

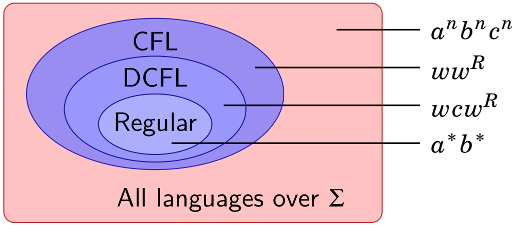
- 程序设计语言的语法分析器

  如 LR(k) 文法, `Yacc` 的基础, 解析的时间复杂度为 $O(n)$ 的算法

- 非固有歧义语言的真子集

  如 L_{wwr} 有无歧义文法 $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon$

语言类之间的关系



哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

chunyu@hit.edu.cn
http://iilab.net/chunyu