Chapter 6

下推自动机

6.1 下推自动机

正如正则表达式有一个等价的自动机 — 有穷自动机一样, 上下文无关文法也有其相应的机器 — 下推自动机. 这里的等价性不太令人满意, 因为下推自动机是一个非确定的装置, 对应的确定装置只能接受全部 CFL 的一个子集. 幸运的是这个子集包含了绝大多数的程序设计语言的文法.

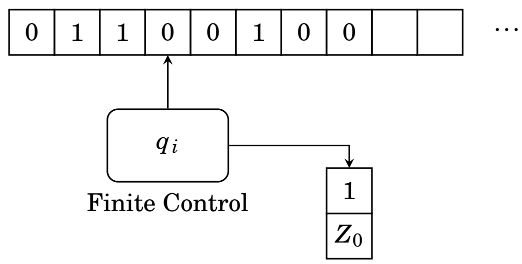
下推自动机实质上是一种能控制一条输入带和一个栈的有穷自动机, 可以看作带有栈的 ε-NFA. 工作方式类似 ε-NFA, 有一个有穷控制器, 并能够以非确定的方式进行状态转移, 并读入输入字符; 增加的堆栈, 用来存储无限的信息, 但只能以后进先出的方式使用.

$$\varepsilon\text{-NFA} + 栈 = \text{PDA}$$

ε-NFA: 有限状态, 非确定, ε 转移

栈: 后进先出, 只用栈顶, 长度无限

- *pop*: 仅弹出栈顶的一个符号
- *push*: 可压入一串符号



6.1.1 形式定义

定义. *下推自动机 (PDA, Pushdown Automata) P 为七元组*

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

1. Q, 有穷状态集;

2. Σ, 有穷输入符号集 (即字母表);

3. Γ, 有穷栈符号集 (或栈字母表);

4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$, 状态转移函数;

5. $q_0 \in Q$, 初始状态;

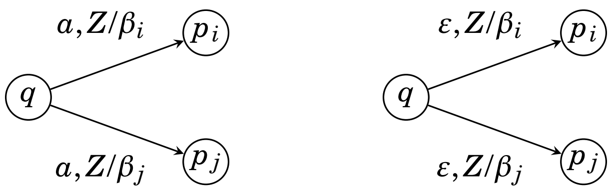
6. $Z_0 \in \Gamma - \Sigma$, 栈底符号, *PDA* 开始时, 栈中包含这个符号的一个实例, 用来表示栈底, 最初的栈底符号之下无任何内容;

7. $F \subseteq Q$, 接收状态集或终态集.

PDA 的动作和状态转移图

如果 $q, p_i \in Q\ (1 \le i \le m)$, $a \in \Sigma$, $Z \in \Gamma$, $\beta_i \in \Gamma^*$, 可以有动作:

$$\delta(q,a,Z) = \{(p_1,\beta_1), (p_2,\beta_2), \cdots, (p_m,\beta_m)\}, \text{或}$$
$$\delta(q,\varepsilon,Z) = \{(p_1,\beta_1), (p_2,\beta_2), \cdots, (p_m,\beta_m)\}.$$



如果 q 和 p_i 是状态 $(1 \le i \le m)$, 输入符号 $a \in \Sigma$, 栈符号 $Z \in \Gamma$, 栈符号串 $\beta_i \in \Gamma^*$, 那么

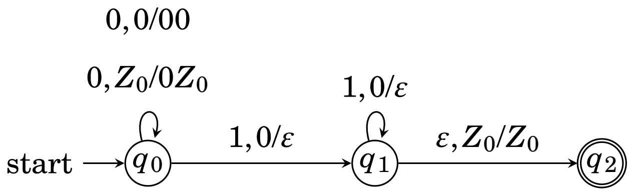
$$\delta(q,a,Z) = \{(p_1,\beta_1),(p_2,\beta_2),\cdots,(p_m,\beta_m)\}$$

的意思是: 输入符号是 a, 栈顶符号 Z 的情况下, 处于状态 q 的 PDA 能够进入状态 p_i, 且用符号串 β_i 替换栈顶的符号 Z, 这里的 i 是任意的, 然后输入头前进一个符号. (约定 β_i 的最左符号在栈最上.) 但是若 $i \neq j$, 不能同时选择 p_i 和 β_j. 而

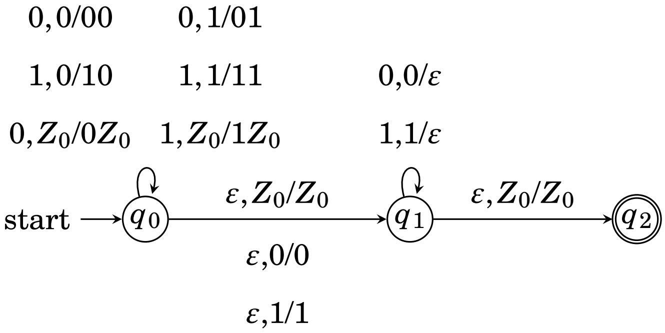
$$\delta(q,\varepsilon,Z) = \{(p_1,\beta_1),(p_2,\beta_2),\cdots,(p_m,\beta_m)\}$$

的意思是: 与扫描的输入符号无关, 只要 Z 是栈符号, 处于状态 q 的 PDA, 就可以进行上面的动作, 输入头不移动.

例 1. 设计识别 $L_{01} = \{ 0^n 1^n \mid n \ge 1 \}$ 的 PDA.



例 2. 设计识别 $L_{wwr} = \{ ww^R \mid w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^* \}$ 的 PDA.



1. 初始状态 q_0, 栈顶 Z_0, 无论输入 0 或 1 都直接压栈;
2. 继续压栈状态 q_0, 则对不同输入 (0/1) 和不同栈顶 (0/1), 都直接压栈;
3. 非确定的转到弹栈状态 q_1, 不论栈顶是 Z_0, 0, 或 1, 开始匹配后半部分;
4. 保持弹栈状态 q_1, 弹出的栈顶符号必须和输入一致;
5. 扫描到串结尾且只有看到栈底符号了, 才允许转移到接受状态 q_2.

6.1.2 瞬时描述和转移符号

定义. *为形式描述 PDA 在一个给定瞬间的格局 (Configuration), 定义 $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ 中三元组*

$$\big(q, w, \gamma\big)$$

为瞬时描述 (ID, Instantaneous Description), 表示此时 PDA 处于状态 q, 输入带上剩余输入串 w, 栈中的符号串为 γ.

定义. *在 PDA P 中如果 $(p,\beta) \in \delta\big(q,a,Z\big)$, 由 $(q,aw,Z\alpha)$ 到 $(p,w,\beta\alpha)$ 的变化, 称为 ID 的转移 $\vdash_P$, 记为*

$$(q,aw,Z\alpha) \vdash_P (p,w,\beta\alpha)$$

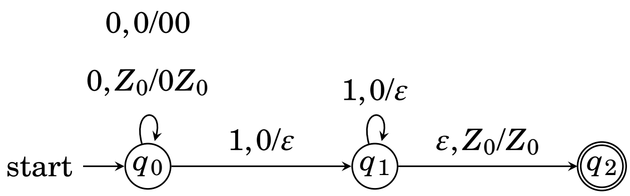
其中 $w \in \Sigma^*$, $\alpha \in \Gamma^*$.

若有 ID I, J 和 K, 递归定义 $\overset{*}{\vdash_P}$ 为:

1. *$I \overset{*}{\vdash_P} I$;*
2. *若 $I \vdash_P J$, $J \overset{*}{\vdash_P} K$, 则 $I \overset{*}{\vdash_P} K$.*

若 P 已知, 可省略, 记为 $\vdash$ 和 $\overset{*}{\vdash}$.

续例 1. 语言 $L_{01} = \{ 0^n 1^n \mid n \geq 1 \}$ 的 PDA, 识别 0011 时的 ID 序列.



有关 ID 的序列

对 PDA P 的一个合法 ID 序列 (计算):

1. 把相同字符串加到所有 ID 的输入串末尾, 得到的计算合法;
2. 把相同栈符号串加到所有 ID 的栈底之下, 得到的计算合法;
3. 把所有 ID 中都未消耗的部分输入串去掉, 得到的计算合法.

定理 23. *对 $\forall w \in \Sigma^*, \forall \gamma \in \Gamma^*$, 如果*

$$(q, x, \alpha) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (p, y, \beta),$$

那么

$$(q, xw, \alpha\gamma) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (p, yw, \beta\gamma).$$

定理 24. *对 $\forall w \in \Sigma^*$, 如果*

$$(q, xw, \alpha) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (p, yw, \beta),$$

那么

$$(q, x, \alpha) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (p, y, \beta).$$

6.2 下推自动机接受的语言

定义. *PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, 以两种方式接受语言:*

- *P 以终态方式接受的语言, 记为 $\mathbf{L}(P)$, 定义为*

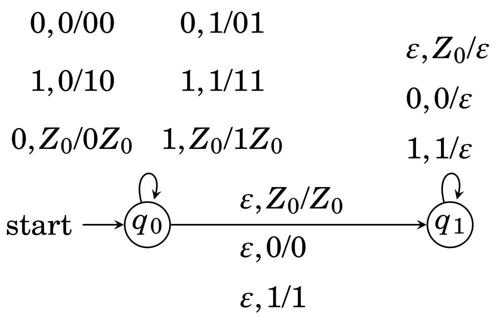
$$\mathbf{L}(P) = \{ w \mid (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \gamma),\ p \in F \}.$$

- *P 以空栈方式接受的语言, 记为 $\mathbf{N}(P)$, 定义为*

$$\mathbf{N}(P) = \{ w \mid (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon) \}.$$

续例 2. 识别 L_{wwr} 的 PDA P, 从终态方式, 改为空栈方式接受.

用 $\delta(q_1,\varepsilon,Z_0)=\{(q_1,\varepsilon)\}$ 代替 $\delta(q_1,\varepsilon,Z_0)=\{(q_2,Z_0)\}$ 即可.

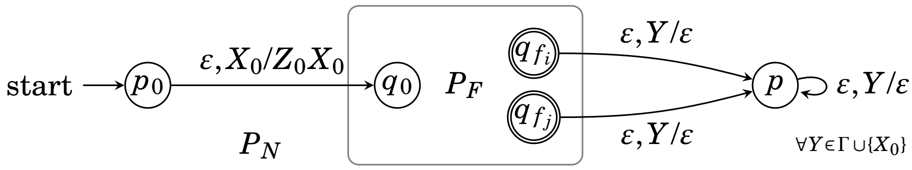


6.2.1 从终态方式到空栈方式

定理 25. *如果 PDA P_F 以终态方式接受语言 L, 则存在 PDA P_N 以空栈方式接受 L.*

证明: 设 $P_F=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta_F,q_0,Z_0,F)$, 构造 PDA P_N,

$$P_N=(Q\cup\{p_0,p\},\ \Sigma,\ \Gamma\cup\{X_0\},\ \delta_N,\ p_0,\ X_0,\ \varnothing).$$



其中 δ_N 定义如下:

1. P_N 首先将 P_F 的栈底符号压栈, 开始模拟 P_F:

$$\delta_N(p_0,\varepsilon,X_0)=\{(q_0,Z_0X_0)\};$$

2. P_N 模拟 P_F 的动作: $\forall q\in Q$, $\forall a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$, $\forall Y\in\Gamma$:

$$\delta_N(q,a,Y)\ \text{包含}\ \delta_F(q,a,Y)\ \text{的全部元素};$$

3. 从 $q_f\in F$ 开始弹出栈中符号, 即 $\forall q_f\in F$, $\forall Y\in\Gamma\cup\{X_0\}$:

$$\delta_N(q_f,\varepsilon,Y)\ \text{包含}\ (p,\varepsilon);$$

4. 在状态 p 时, 弹出全部栈中符号, 即 $\forall Y\in\Gamma\cup\{X_0\}$:

$$\delta_N(p,\varepsilon,Y)=\{(p,\varepsilon)\}.$$

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$
\begin{aligned}
w \in \mathbf{L}(P_F) &\Rightarrow (q_0,w,Z_0) \vdash_{P_F}^{*} (q_f,\varepsilon,\gamma) && \\
&\Rightarrow (q_0,w,Z_0X_0) \vdash_{P_F}^{*} (q_f,\varepsilon,\gamma X_0) && \text{定理23} \\
&\Rightarrow (q_0,w,Z_0X_0) \vdash_{P_N}^{*} (q_f,\varepsilon,\gamma X_0) && P_N\text{模拟}P_F \\
&\Rightarrow (p_0,w,X_0) \vdash_{P_N} (q_0,w,Z_0X_0) \vdash_{P_N}^{*} (q_f,\varepsilon,\gamma X_0) && \delta_N\text{构造}p_0\text{部分} \\
&\Rightarrow (p_0,w,X_0) \vdash_{P_N}^{*} (q_f,\varepsilon,\gamma X_0) \vdash_{P_N}^{*} (p,\varepsilon,\varepsilon) && \delta_N\text{构造}q_f\text{和}p\text{部分} \\
&\Rightarrow w \in \mathbf{N}(P_N)
\end{aligned}
$$

即 $\mathbf{L}(P_F) \subseteq \mathbf{N}(P_N)$.

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$
\begin{aligned}
w \in \mathbf{N}(P_N) &\Rightarrow (p_0,w,X_0) \vdash_{P_N}^{*} (p,\varepsilon,\varepsilon) && \text{其他状态不可能空栈} \\
&\Rightarrow (p_0,w,X_0) \vdash_{P_N} (q_0,w,Z_0X_0) \vdash_{P_N}^{*} (p,\varepsilon,\varepsilon) && \text{第一个动作必然到}q_0 \\
&\Rightarrow (q_0,w,Z_0X_0) \vdash_{P_N}^{*} (q_f,\varepsilon,\gamma X_0) \vdash_{P_N}^{*} (p,\varepsilon,\varepsilon) && \text{必经}q_f \in F\text{消耗完}w \\
&\Rightarrow (q_0,w,Z_0) \vdash_{P_N}^{*} (q_f,\varepsilon,\gamma) && P_N\text{中未用过栈底的}X_0 \\
&\Rightarrow (q_0,w,Z_0) \vdash_{P_F}^{*} (q_f,\varepsilon,\gamma) && \text{均为模拟}P_F \\
&\Rightarrow w \in \mathbf{L}(P_F)
\end{aligned}
$$

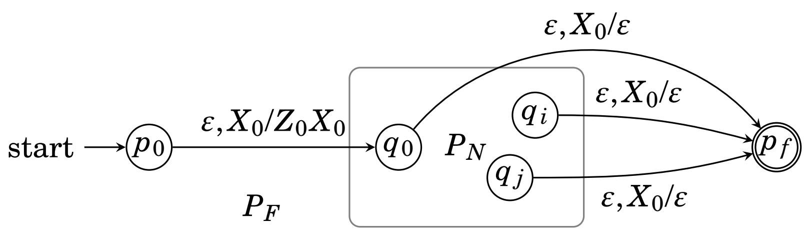
即 $\mathbf{N}(P_N) \subseteq \mathbf{L}(P_F)$. 所以 $\mathbf{N}(P_N) = \mathbf{L}(P_F)$. □

6.2.2 从空栈方式到终态方式

定理 26. *如果 PDA P_N 以空栈方式接受语言 L, 则存在 PDA P_F 以终态方式接受 L.*

证明: 设 $P_N = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta_N,q_0,Z_0,\varnothing)$. 构造 PDA P_F,

$$P_F = \big(Q \cup \{p_0,p_f\},\ \Sigma,\ \Gamma \cup \{X_0\},\ \delta_F,\ p_0,\ X_0,\ \{p_f\}\big)$$



其中 δ_F 定义如下:

1. P_F 开始时, 将 P_N 栈底符号压入栈, 并开始模拟 P_N,

$$\delta_F(p_0,\varepsilon,X_0) = \{(q_0,Z_0X_0)\};$$

2. P_F 模拟 P_N, $\forall q \in Q$, $\forall a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\forall Y \in \Gamma$:

$$\delta_F\big(q,a,Y\big) = \delta_N\big(q,a,Y\big);$$

3. 在 $\forall q \in Q$ 时, 看到 P_F 的栈底 X_0, 则转移到新终态 p_f:

$$\delta_F\big(q,\varepsilon,X_0\big) = \big\{(p_f,\varepsilon)\big\}.$$

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$\begin{aligned}
w \in \mathbf{N}(P_N) &\Rightarrow (q_0,w,Z_0) \vdash^*_{P_N} (q,\varepsilon,\varepsilon) && \\
&\Rightarrow (q_0,w,Z_0X_0) \vdash^*_{P_N} (q,\varepsilon,X_0) && \text{定理23} \\
&\Rightarrow (q_0,w,Z_0X_0) \vdash^*_{P_F} (q,\varepsilon,X_0) && P_F\,\text{模拟}\,P_N \\
&\Rightarrow (p_0,w,X_0) \vdash_{P_F} (q_0,w,Z_0X_0) \vdash^*_{P_F} (q,\varepsilon,X_0) && \delta_F\text{构造}, p_0\,\text{部分} \\
&\Rightarrow (p_0,w,X_0) \vdash^*_{P_F} (q,\varepsilon,X_0) \vdash_{P_F} (p_f,\varepsilon,\varepsilon) && \delta_F\text{构造}, p_f\,\text{部分} \\
&\Rightarrow (p_0,w,X_0) \vdash^*_{P_F} (p_f,\varepsilon,\varepsilon) && \\
&\Rightarrow w \in \mathbf{L}(P_F) &&
\end{aligned}$$

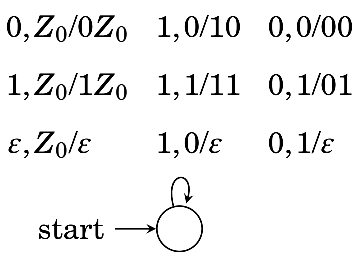
即 $\mathbf{N}(P_N) \subseteq \mathbf{L}(P_F)$.

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

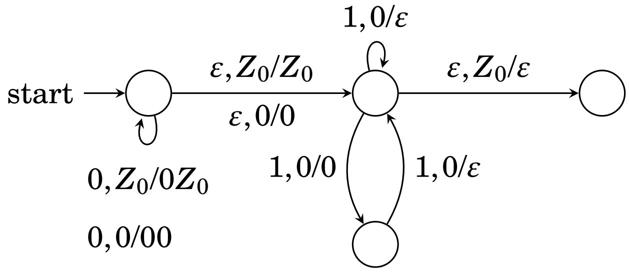
$$\begin{aligned}
w \in \mathbf{L}(P_F) &\Rightarrow (p_0,w,X_0) \vdash^*_{P_F} (p_f,\varepsilon,\varepsilon) && \\
&\Rightarrow (p_0,w,X_0) \vdash^*_{P_F} (q,\varepsilon,X_0) \vdash_{P_F} (p_f,\varepsilon,\varepsilon) && \text{经 } q \text{ 才可达 } p_f \\
&\Rightarrow (p_0,w,X_0) \vdash_{P_F} (q_0,w,Z_0X_0) \vdash^*_{P_F} (q,\varepsilon,X_0) && P_F\,\text{第一个动作} \\
&\Rightarrow (q_0,w,Z_0X_0) \vdash^*_{P_F} (q,\varepsilon,X_0) && \text{即上式} \\
&\Rightarrow (q_0,w,Z_0) \vdash^*_{P_N} (q,\varepsilon,\varepsilon) && P_N\,\text{与}\,X_0\,\text{无关} \\
&\Rightarrow w \in \mathbf{N}(P_N) &&
\end{aligned}$$

即 $\mathbf{N}(P_F) \subseteq \mathbf{L}(P_N)$. 所以 $\mathbf{L}(P_F) = \mathbf{N}(P_N)$. □

例 3. 接受 $L_{\text{eq}} = \big\{ w \in \{0,1\}^* \;\big|\; w \text{ 中字符 } 0 \text{ 和 } 1 \text{ 的数量相同} \big\}$ 的 PDA.



例 4. 接受 $L = \big\{ 0^n 1^m \;\big|\; 0 \le n \le m \le 2n \big\}$ 的 PDA.



课堂练习. Design PDA for $L=\{a^ib^jc^k \mid i,j,k\geq 0,\ j=i+k\}$.

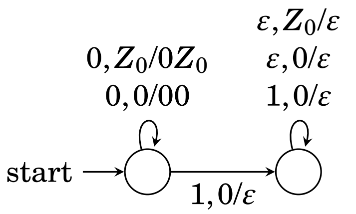
例. Design PDA for $L=\{a^ib^jc^k \mid i,j,k\geq 0,\ i=j \text{ or } j=k\}$.

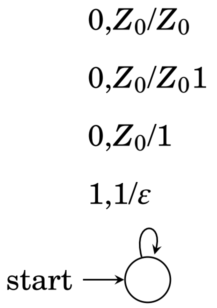
例. Design PDA for the set of strings of 0’s and 1’s such that no prefix has more 1’s than 0’s.

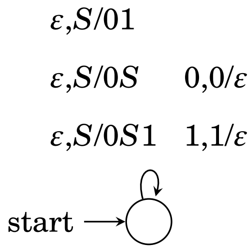
6.3 下推自动机与文法的等价性

6.3.1 由 CFG 到 PDA

例 5. 设计语言 $L=\{0^n1^m \mid 1\leq m\leq n\}$ 的 PDA.







CFG G:

$$S\to AB$$
$$A\to 0A\mid\varepsilon$$
$$B\to 0B1\mid 01$$

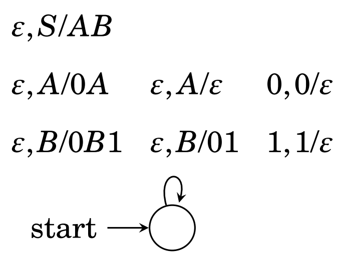
字符串 00011 的最左派生:

$$S \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} AB \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 0AB \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 0B \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 00B1 \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 00011$$

用 PDA 栈顶符号的替换, 模拟文法的最左派生:

PDA		CFG	
PDA 的 ID 转移	PDA 的动作	产生式	最左派生
$(q_0,\ 00011,\ S)$			S
$\vdash (q_0,\ 00011,\ AB)$	$\varepsilon, S/AB$	$S \to AB$	$\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} AB$
$\vdash (q_0,\ 00011,\ 0AB)$	$\varepsilon, A/0A$	$A \to 0A$	$\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 0AB$
$\vdash (q_0,\ 0011,\ AB)$	$0, 0/\varepsilon$		
$\vdash (q_0,\ 0011,\ B)$	$\varepsilon, A/\varepsilon$	$A \to \varepsilon$	$\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 0B$
$\vdash (q_0,\ 0011,\ 0B1)$	$\varepsilon, B/0B1$	$B \to 0B1$	$\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 00B1$
$\vdash (q_0,\ 011,\ B1)$	$0, 0/\varepsilon$		
$\vdash (q_0,\ 011,\ 011)$	$\varepsilon, B/01$	$B \to 01$	$\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} 00011$
$\vdash (q_0,\ 11,\ 11)$	$0, 0/\varepsilon$		
$\vdash (q_0,\ 1,\ 1)$	$1, 1/\varepsilon$		
$\vdash (q_0,\ \varepsilon,\ \varepsilon)$	$1, 1/\varepsilon$		

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \\
A &\to 0A \mid \varepsilon \\
B &\to 0B1 \mid 01
\end{aligned}
$$



想要证明 CFG 和 PDA 的等价性, 需要思考如何使用 PDA 模拟文法的推导. 对任意属于某 CFL 的串 w, 其文法的推导过程, 就是使用产生式去匹配 (产生) w, 如果 w 放在某 PDA 的输入带上, 我们的目的就是通过文法构造动作, 让 PDA 能从左到右的扫描输入串, 利用栈来模拟文法的最左派生过程即可.

定理 27. *任何 CFL L, 一定存在 PDA P, 使 $L = \mathbf{N}(P)$.*

构造与文法等价的 PDA

如果 CFG $G = (V, T, P', S)$, 构造 PDA

$$P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S, \varnothing),$$

其中 δ 为:

1. $\forall A \in V$:

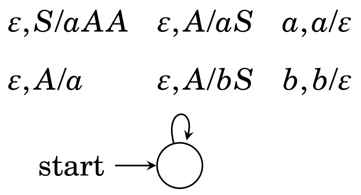
$$\delta(q, \varepsilon, A) = \{ (q, \beta) \mid A \to \beta \in P' \},$$

2. $\forall a \in T$:

$$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\},$$

那么 $\mathbf{L}(G) = \mathbf{N}(P)$.

例 6. 为文法 $S \to aAA$, $A \to aS \mid bS \mid a$ 构造 PDA.



证明:

PDF P 可以模拟 CFG G 的最左派生, 每个动作只根据栈顶的符号确定: 如果是终结符则与输入串匹配, 如果是非终结符用产生式来替换. 为了完成定理, 只需往证

$$S \overset{*}{\Rightarrow} w \Longleftrightarrow (q, w, S) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

最左派生 $S \underset{\text{lm}}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$ 的每个左句型都可写作 $xA\alpha$ 的形式, 其中 A 是最左变元, x 是它之前的所有终结符串, 而 α 是它右边的符号串. 而在 P 中, 每个左句型的 $A\alpha$ 部分都会出现在栈中, 并且当 A 处于栈顶时, x 刚好是输入带上被扫描过的 (消耗完的) 部分. 那么当 PDA 处于 ID $(q, y, A\alpha)$ 时, 刚好有 $xy = w$ 成立.

[充分性] 往证

$$S \underset{\text{lm}}{\overset{*}{\Rightarrow}} w \implies (q, w, S) \overset{*}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

设 $S \underset{\text{lm}}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$ 中第 i 个左句型为 $x_i A_i \alpha_i$, 其中 $x_i \in \Sigma^*$, $A_i \in V$, $\alpha_i \in (V \cup T)^*$. 并将 S 看作第 0 个左句型 $x_0 A_0 \alpha_0 = S$, 那么

$$x_0 = \varepsilon, A_0 = S, \alpha_0 = \varepsilon.$$

将 w 看作为第 n 个左句型 $x_n A_n \alpha_n = w$, 那么

$$x_n = w, A_n = \varepsilon, \alpha_n = \varepsilon.$$

再对派生步骤 i 归纳, 往证

$$S \underset{\text{lm}}{\overset{i}{\Rightarrow}} x_i A_i \alpha_i \wedge w = x_i y_i \Longrightarrow (q, w, S) \overset{*}{\vdash} (q, y_i, A_i \alpha_i).$$

归纳基础: 最左派生在第 0 步时, 显然成立

$$(q, w, S) \overset{*}{\vdash} (q, y_0, A_0 \alpha_0) = (q, w, S).$$

归纳递推: 假设第 i 步时成立, 当第 $i+1$ 步时, 一定是 $A_i \to \beta$ 应用到 $x_i A_i \alpha_i$

$$S \underset{\text{lm}}{\overset{i}{\Rightarrow}} x_i A_i \alpha_i \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} x_i \beta \alpha_i = x_{i+1} A_{i+1} \alpha_{i+1}.$$

即第 $i+1$ 个左句型的最左变元 A_{i+1} 一定在 $\beta\alpha_i$ 中, 设 A_{i+1} 之前的终结符为 x', 那么由

$$\begin{aligned} x_i\beta\alpha_i &= x_i x' A_{i+1}\alpha_{i+1} = x_{i+1}A_{i+1}\alpha_{i+1} \\ x_i y_i &= x_i x' y_{i+1} \qquad = x_{i+1}y_{i+1} = w \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \beta\alpha_i &= x'A_{i+1}\alpha_{i+1}, \\ y_i &= x'y_{i+1}. \end{aligned}$$

那么, 在 PDA 中从 ID $(q, y_i, A_i\alpha_i)$ 模拟最左派生, 用产生式 $A_i \to \beta$ 替换栈顶 A_i 后, 有

$$\begin{aligned} (q,w,S) &\overset{*}{\vdash} (q,y_i,A_i\alpha_i) && \text{归纳假设} \\ &\vdash (q,y_i,\beta\alpha_i) && A_i \to \beta \\ &= (q,x'y_{i+1},x'A_{i+1}\alpha_{i+1}) && \\ &\overset{*}{\vdash} (q,y_{i+1},A_{i+1}\alpha_{i+1}) && \text{弹出栈顶终结符} \end{aligned}$$

因此 $S \overset{n}{\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}} w \Longrightarrow (q,w,S) \overset{*}{\vdash} (q,y_n,A_n\alpha_n) = (q,\varepsilon,\varepsilon)$, 即充分性得证.

[必要性] 往证更一般的, 对任何变元 A, 都有:

$$(q,x,A) \overset{*}{\vdash} (q,\varepsilon,\varepsilon) \Longrightarrow A \overset{*}{\Rightarrow} x.$$

这个过程, 可以看作 “从输入带中消耗掉 x” 与 “从栈中弹出 A” 两种作用相互抵消. 对 ID 转移 $(q,x,A) \overset{i}{\vdash} (q,\varepsilon,\varepsilon)$ 的次数 i 归纳证明.

归纳基础: 当 $i=1$ 步时, 只能是 $x=\varepsilon$ 且 $A\to\varepsilon$ 为产生式, 所以 $A \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon$. 因为即使 $x=a$ 和产生式 $A\to a$, 也需要先替换栈顶 A 为 a 再弹出 a 两步才能清空栈.

归纳递推: 假设 $i \le n$ $(n \ge 1)$ 步时上式成立. 当 $i=n+1$ 时, 因为 A 是变元, 其第 1 步转移一定是应用某产生式 $A \to Y_1Y_2\cdots Y_m$

$$(q,x,A) \vdash (q,x,Y_1Y_2\cdots Y_m)$$

其中 Y_i 是变元或终结符. 而其余的 n 步转移

$$(q,x,Y_1Y_2\cdots Y_m) \overset{*}{\vdash} (q,\varepsilon,\varepsilon)$$

中每个 Y_i 从栈中被完全弹出时, 将消耗掉的那部分 x 记为 x_i, 那么显然有

$$x = x_1x_2\cdots x_m.$$

而每个 Y_i 从栈中被完全弹出时, 都不超过 n 步, 所以由归纳假设,

$$(q,x_i,Y_i) \overset{*}{\vdash} (q,\varepsilon,\varepsilon) \Longrightarrow Y_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i.$$

再由产生式 $A \to Y_1Y_2\cdots Y_m$, 有

$$
\begin{aligned}
A &\Rightarrow Y_1Y_2\cdots Y_m\\
&\overset{*}{\Rightarrow} x_1Y_2\cdots Y_m\\
&\overset{*}{\Rightarrow} x_1x_2\cdots Y_m\\
&\overset{*}{\Rightarrow} x_1x_2\cdots x_m = x.
\end{aligned}
$$

因此当 $A = S$, $x = w$ 时,

$$(q,w,S) \vdash^* (q,\varepsilon,\varepsilon) \Longrightarrow S \overset{*}{\Rightarrow} w$$

成立, 即必要性得证.

所以, 任何 CFL 都可由 PDA 识别. □

构造与 GNF 格式文法等价的 PDA

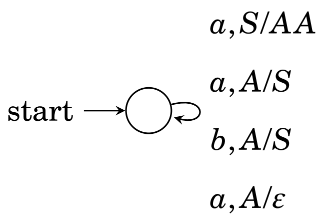
如果 GNF 格式的 CFG $G = (V, T, P', S)$, 那么构造 PDA

$$P = (\{q\},\ T,\ V,\ \delta,\ q,\ S,\ \varnothing),$$

为每个产生式, 定义 δ 为:

$$\delta(q,a,A) = \{\, (q,\beta) \mid A \to a\beta \in P' \,\}.$$

续例 6. 文法 $S \to aAA$, $A \to aS \mid bS \mid a$ 为 GNF 格式, 构造等价的 PDA.



6.3.2 由 PDA 到 CFG

定理 28. *如果 PDA P, 有 $L = \mathbf{N}(P)$, 那么 L 是上下文无关语言.*

构造与 PDA 等价的 CFG

如果 PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \varnothing)$, 那么构造 CFG $G = (V, \Sigma, P', S)$, 其中 V 和 P' 为

1. $V = \{\, [qXp] \mid p, q \in Q,\ X \in \Gamma \} \cup \{S\}$;
2. 对 $\forall p \in Q$, 构造产生式 $S \to [q_0Z_0p]$;

3. 对 $\forall(p, Y_1Y_2\cdots Y_n) \in \delta(q, a, X)$, 构造 $|Q|^n$ 个产生式

$$[qXr_n] \to a[pY_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{n-1}Y_nr_n]$$

其中 $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X, Y_i \in \Gamma$, 而 $r_i \in Q$ 是 n 次 $|Q|$ 种状态的组合; 若 $n = 0$, 为 $[qXp] \to a$.

证明: 通过以上方法所构造的文法中, $[qXp] \overset{*}{\Rightarrow} w$ 的含义, 可以理解为 PDA 从状态 q 将栈符号 X 完全弹出后, 转移到了状态 p, 同时从输入带上消耗掉了 w. 那么, 只需证明

$$(q, w, X) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon) \iff [qXp] \overset{*}{\Rightarrow} w.$$

并令 $X = Z_0$, $q = q_0$, 与开始符号 S 的产生式一起, 即可完成定理的证明.

[充分性] 对 PDA 中 $(q, w, X) \overset{i}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$ 的转移次数 i 归纳证明.

归纳基础: 当 $i = 1$ 时, P 的输入带上只能消耗不超过一个的字符, 即 $w = a$

$$(q, w, X) = (q, a, X) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon),$$

其中 $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ 且 $(p, \varepsilon) \in \delta(q, a, X)$, 则由文法的构造会有

$$[qXp] \to a,$$

因此 $[qXp] \overset{*}{\Rightarrow} a = w$.

归纳递推: 假设当 $i \le m$ $(m \ge 1)$ 时命题成立. 那么, 当 $i = m + 1$ 时, 转移的第 1 步, 一定由某个 $(r_0, Y_1Y_2\cdots Y_n) \in \delta(q, a, X)$ 开始

$$(q, ax, X) \vdash (r_0, x, Y_1Y_2\cdots Y_n),$$

其中 $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, w = ax$. 而其余的 m 步为

$$(r_0, x, Y_1Y_2\cdots Y_n) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

而这些转移, 会从栈中依次弹出 Y_i, 并相应的消耗掉输入带上的部分 x. 若分别记为 x_i, 则有

$$w = ax = ax_1x_2\cdots x_n.$$

若设从栈中完全弹出 Y_i(并消耗掉 x_i) 之前和之后的状态分别是 r_{i-1} 和 r_i, 这里 $i = 1, 2, \cdots n$, 那么有

$$(r_{i-1}, x_i, Y_i) \overset{*}{\vdash} (r_i, \varepsilon, \varepsilon),$$

且转移步数都不会超过 m. 那么, 由归纳假设有

$$(r_{i-1}, x_i, Y_i) \overset{*}{\vdash} (r_i, \varepsilon, \varepsilon) \implies [r_{i-1}Y_ir_i] \overset{*}{\Rightarrow} x_i.$$

而由动作 $(r_0, Y_1Y_2\cdots Y_n) \in \delta(q, a, X)$ 所构造的产生式会包含

$$[qXr_n] \to a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{n-1}Y_nr_n].$$

而显然弹出 X 后的状态 p 与弹出 Y_n 后的状态 r_n 是同一个, 所以

$$[qXp] = [qXr_n] \Rightarrow a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{n-1}Y_nr_n] \overset{*}{\Rightarrow} ax_1x_2\cdots x_n = w$$

因此充分性得证. 那么当 $X = Z_0, q = q_0$ 时有

$$(q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon) \Longrightarrow [q_0Z_0p] \overset{*}{\Rightarrow} w,$$

以及产生式 $S \to [q_0Z_0p]$ 有 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, 即 PDA 接受的串可由文法派生得到.

[必要性]: 略. □

例 7. 将 PDA $P = \big(\{p,q\},(0,1),\{X,Z\},\delta,q,Z\big)$ 转为 CFG, 其中 δ 如下:

(1) $\delta\big(q,1,Z\big) = \big\{(q,XZ)\big\}$

(2) $\delta\big(q,1,X\big) = \big\{(q,XX)\big\}$

(3) $\delta\big(q,0,X\big) = \big\{(p,X)\big\}$

(4) $\delta\big(q,\varepsilon,Z\big) = \big\{(q,\varepsilon)\big\}$

(5) $\delta\big(p,1,X\big) = \big\{(p,\varepsilon)\big\}$

(6) $\delta\big(p,0,Z\big) = \big\{(q,Z)\big\}$

解:

δ	产生式
(0)	$S \to [qZq]$
	$S \to [qZp]$
(1)	$[qZq] \to 1[qXq][qZq]$
	$[qZq] \to 1[qXp][pZq]$
	$[qZp] \to 1[qXq][qZp]$
	$[qZp] \to 1[qXp][pZp]$
(2)	$[qXq] \to 1[qXq][qXq]$
	$[qXq] \to 1[qXp][pXq]$
	$[qXp] \to 1[qXq][qXp]$
	$[qXp] \to 1[qXp][pXp]$
(3)	$[qXq] \to 0[pXq]$
	$[qXp] \to 0[pXp]$
(4)	$[qZq] \to \varepsilon$
(5)	$[pXp] \to 1$
(6)	$[pZp] \to 0[qZp]$
	$[pZq] \to 0[qZq]$

消除无用符号	重命名 (可选)
$S \to [qZq]$	$S \to A$
$[qZq] \to 1[qXp][pZq]$	$A \to 1BC$
$[qXp] \to 1[qXp][pXp]$	$B \to 1BD$
$[qXp] \to 0[pXp]$	$B \to 0D$
$[qZq] \to \varepsilon$	$A \to \varepsilon$
$[pXp] \to 1$	$D \to 1$
$[pZq] \to 0[qZq]$	$C \to 0A$

6.4 确定型下推自动机

定义. *如果 PDA* $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ *满足*

1. $\forall a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\delta(q, a, X)$ *至多有一个动作;*
2. $\exists a \in \Sigma$, *如果* $\delta(q, a, X) \neq \varnothing$, *那么* $\delta(q, \varepsilon, X) = \varnothing$.

则称 P 为确定型下推自动机 (DPDA).

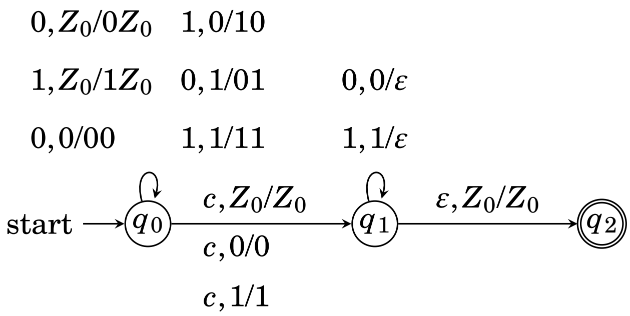
定义. *DPDA P 以终态方式接受的语言 $\mathbf{L}(P)$ 称为确定的上下文无关语言 (DCFL).*

- DPDA 中 $\forall (q, a, Z) \in Q \times \Sigma \times \Gamma$ 满足 $\left|\delta(q, a, Z)\right| + \left|\delta(q, \varepsilon, Z)\right| \le 1$

DPDA 与 PDA 不等价

例 8. 任何 DPDA 都无法接受 L_{wwr}, 但是可以接受

$$L_{wcwr} = \left\{ wcw^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \right\}.$$



DPDA 无法识别 L_{wwr}. 因为, 如果它想识别输入串 0^n110^n, 需要利用栈保存 n 个 0, 再根据 11 改变状态, 将栈弹出. 而这时如果输入带上还有 0^n110^n, 那么它还应该接受. 但如果接受 $0^n110^n0^n110^n$, 它同样会接受 $0^n110^n0^m110^m$. DPDA 使用栈无法同时记住 0^n 和 0^n110^n.

6.4.1 正则语言与 DPDA

定理 29. *如果 L 是正则语言, 那么存在 DPDA P 以终态方式接受 L, 即 $L = \mathbf{L}(P)$.*

证明: 显然, 因为 DPDA P 可以不用栈而模拟任何 DFA. □

- L_{wcwr} 显然是 CFL, 所以 DCFL 语言类真包含正则语言

- DPDA 无法识别 L_{wwr}, 所以 DCFL 语言类真包含于 CFL

定义. 如果语言 L 中不存在两个不同的字符串 x 和 y, 使 x 是 y 的前缀, 称语言 L 满足前缀性质.

定理 30. *如果有 DPDA P 且 $L=\mathbf{N}(P)$, 当且仅当 L 有前缀性质且存在 DPDA P' 使 $L=\mathbf{L}(P')$.*

证明:

[⇒] $\forall x \in \mathbf{N}(P)$ 会弹空 P 的栈, 所以不会接受以 x 为前缀的其他串; 而以定理26方式转为终态接受不改变确定性. [⇐] 到达终态则弹空栈, 即可. □

- DPDA P 的 $\mathbf{N}(P)$ 更有限, 即使正则语言 $\mathbf{0}^*$ 也无法接受

DPDA P 若以空栈方式接受, 能够接受的语言更有限, 仅能接受具有前缀性质的语言. 前缀性质是指, 这个语言中不存在不同的串 x 和 y 使 x 是 y 的前缀. 即使正则语言 $\mathbf{0}^*$ 也无法接受, 因为其任何两个串中都有一个是前缀. 但以空栈方式接受的语言, 却可以被另一个 DPDA 以终态方式接受.

6.4.2 DPDA 与无歧义文法

定理 31. *DPDA P, 语言 $L=\mathbf{N}(P)$, 那么 L 有无歧义的 CFG.*

证明: 利用定理 28 由 P 构造的文法 G 一定无歧义, 因为:

1. P 是确定的, 那么它接受 w 的 ID 序列也是确定的;
2. 而由 $\delta(q,a,X)=\{(p,Y_1\cdots Y_n)\}$ 继续弹出 Y_i 后的状态 r_i 也是确定的;
3. 那么由每个动作构造的一组产生式

   $$[qXr_n]\to a[pY_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{n-1}Y_nr_n]$$

   中, 仅会有一个是有效的;
4. 那么, G 中最左派生 $S\overset{*}{\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}}w$ 就是唯一的, 所以是无歧义的. □

定理 32. *DPDA P, 语言 $L=\mathbf{L}(P)$, 那么 L 有无歧义的 CFG.*

证明:

1. 设符号 \$ 不在 L 中出现, 令 $L'=\{w\$ \mid w\in L\}$, 则 L' 具有前缀性质;

2. 可修改 P 接受 L', 则由定理 30, 存在 DPDA P' 使 $\mathbf{N}(P') = L'$;

3. 由定理 31, 存在无歧义文法 G' 使 $\mathbf{L}(G') = L'$;

4. 将 \$ 看作变元, 增加产生式 $\$ \to \varepsilon$, 修改 G' 为文法 G;

5. 则文法 G 和 G' 一样无歧义, 且 $\mathbf{L}(G) = L$. □

DCFL/DPDA 的重要应用

- 程序设计语言的语法分析器

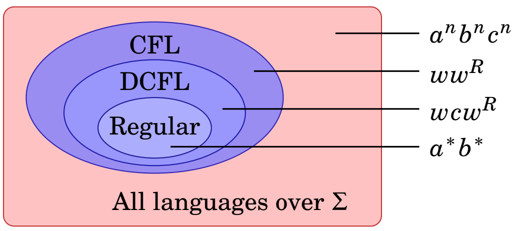
  如 LR(k) 文法, Yacc 的基础, 解析的时间复杂度为 $O(n)$ 的算法

- 非固有歧义语言的真子集

  如 L_{wwr} 有无歧义文法 $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon$

在任何情况下都不需要去选择可能的移动就是 DPDA, 以终态方式接受的语言也称为 DCFL. 虽然与 PDA 不等价, 但也有意义, 例如语法分析器通常都是 DPDA, DPDA 接受的语言是非固有歧义语言的真子集, Knuth 提出 LR(k) 文法的语言也恰好是 DPDA 接受语言的一个子集, 解析的时间复杂度为 $O(n)$, LR(k) 文法也是 YACC 的基础.

语言类之间的关系



6.5 练习题

1. [Exercise 6.2.1] Design a PDA to accept each of the following languages. You may accept either by final state or by empty stack, whichever is more convenient.

   a) $\{0^n1^n \mid n \geq 1\}$

   b) The set of all strings of 0's and l's such that no prefix has more l's than 0's.

   c) The set of all strings of 0's and l's with an equal number of 0's and 1's.

2. [Exercise 6.2.2] Design a PDA to accept each of the following languages.

a) $\{a^i b^j c^k | i = j \text{ or } j = k\}$. 略

b) The set of all strings with twice as many 0's and 1's. (0 的个数是 1 的两倍)

3. [Exercise 6.2.3] Design a PDA to accept each of the following languages.

a) $\{a^i b^j c^k | i \neq j \text{ or } j \neq k\}$.

b) The set of all strings of a's and b's that are *not* of the form ww, that is, not equal to any string repeated.

4. [Exercise 6.3.5] Below are some context-free languages. For each, devise a PDA that accepts the language by empty stack. You may, if you wish, first construct a grammar for the language, and then convert to a PDA.

a) $\{a^n b^m c^{2(n+m)} | n \geq 0, m \geq 0\}$.

b) $\{a^i b^j c^k | i = 2j \text{ or } j = 2k\}$.

c) $\{0^n 1^m | n \leq m \leq 2n\}$ 和 $\{0^n 1^m | n < m < 2n\}$

5. Construct pushdown automata for the following languages. Acceptance either by empty stack or by final state.

(a) $\{a^n b^m a^n \mid m, n \in \mathbf{N}\}$

(b) $\{a^n b^m c^m \mid m, n \in \mathbf{N}\}$

(c) $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbf{N},\ i > j\}$

(d) $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbf{N},\ i + j = k\}$

(e) $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbf{N},\ i + k = j\}$