形式语言与自动机理论

课程简介与基础知识

王春宇
chunyu@hit.edu.cn

计算学部
哈尔滨工业大学

2022 年 2 月

课程简介与基础知识

- 课程简介
- 基础知识

计算理论

核心问题

计算机的基本能力和限制是什么?

1. 究竟哪些问题, 可通过计算解决? — 可计算性理论
2. 解决可计算的问题, 究竟需要多少资源? — 计算复杂性理论
3. 为了研究计算, 要使用哪些计算模型? — 形式语言与自动机理论

什么是自动机理论?

自动机理论: 研究抽象机器及其所能解决问题的理论.

- 图灵机
- 有限状态机
- 文法, 下推自动机

什么是形式语言?

形式语言: 经数学定义的语言.

		自然语言		形式语言	
		English	中文	化学分子式	C 语言
语言	字符	A,a,B,b,...	天, 地,...	A-Z,a-z,0-9 ...	`A-Z,a-z,0-9 ...`
	单词	apple	苹果	H_2O	`char`
	句子	How're you?	早上好!	$2H_2+O_2=2H_2O$	`char a = 10;`
	语法	Grammar	语法规则	精确定义的规则	

计算理论研究的意义

不同时间复杂度的计算时间比较 (假设每条指令 1 μs)

$T(n)$	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 1000$
$\log_2 n$	3.3 μs	5.6 μs	6.4 μs	9.9 μs
n	10.0 μs	50.0 μs	100.0 μs	1.0 ms
n^2	100.0 μs	2.5 ms	10.0 ms	1.0 s
2^n	1.0 ms	35.8 y	4.0e16 y	3.4e287 y
3^n	59.0 ms	2.3e10 y	1.6e34 y	4.2e463 y
$n!$	3.6 s	9.7e50 y	3.0e144 y	1.3e2554 y

布尔可满足性 (SAT)

- 判断给定布尔公式是否可满足, 第一个被证明属于 NP 完全的问题
- 解决 3-SAT 的最好算法

$O(1.32793^n)$	Liu [2018][1]
$O(1.3303^n)$	Makino, Tamaki and Yamamoto [2011, 2013]
$O(1.3334^n)$	Moser and Scheder [2011]
$O(1.439^n)$	Kutzkov and Scheder [2010]
$O(1.465^n)$	Scheder [2008]
$O(1.473^n)$	Brueggemann and Kern [2004]
$O(1.481^n)$	Dantsin, Goerdt, Hirsch, Kannan, *et al* [2002]
$O(1.497^n)$	Schiermeyer [1996]
$O(1.505^n)$	Kullmann [1999]
$O(1.6181^n)$	Monien and Speckenmeyer [1979, 1985]
$O(2^n)$	Brute-force search

[1] Sixue Liu. *Chain, Generalization of Covering Code, and Deterministic Algorithm for k-SAT*. In: 45th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming.

运算最快的计算机 – www.top500.org

- PFLOP: PetaFLOP, 每秒 10^{15} 次浮点运算

	Machine	PFLOPs
2020-11	Fugaku	442.01
2020-06	Fugaku	415.53
2019-06	Summit	148.60
2018-11	Summit	143.50
2018-06	Summit	122.30
2016-06	Sunway TaihuLight	93.01
2013-06	Tianhe-2	33.86
2012-06	Blue Gene/Q	16.32
2011-06	K computer	8.16

模拟计算 3-SAT 问题

- 计算机: 使用不同时期最快的
- 算法: 使用目前最快的 – $O(1.32793^n)$

	Machine	PFLOPs	$n = 150$	$n = 200$	$n = 400$
2020-11	Fugaku	442.01	6.8 s	113.0 d	1.3e24 y
2020-06	Fugaku	415.53	7.2 s	120.2 d	1.4e24 y
2019-06	Summit	148.60	20.1 s	336.1 d	4.0e24 y
2018-11	Summit	143.50	20.8 s	348.1 d	4.1e24 y
2018-06	Summit	122.30	24.5 s	1.1 y	4.8e24 y
2016-06	Sunway TaihuLight	93.01	32.2 s	1.5 y	6.4e24 y
2013-06	Tianhe-2	33.86	1.5 m	4.1 y	1.7e25 y
2012-06	Blue Gene/Q	16.32	3.1 m	8.4 y	3.6e25 y
2011-06	K computer	8.16	6.1 m	16.8 y	7.3e25 y

模拟计算 3-SAT 问题

- 计算机: 使用目前最快的 – 442.01 PFLOPs
- 算法: 使用不同时期最快的

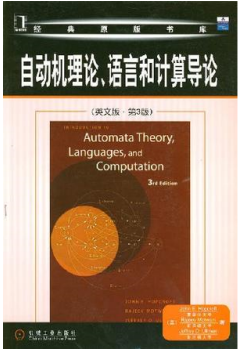
	Complexity	$n = 150$	$n = 200$	$n = 400$
2018	$T(1.32793^n)$	7.2 s	120.2 d	1.4e24 y
2013	$T(1.3303^n)$	9.4 s	172 d	2.9e24 y
2011	$T(1.3334^n)$	13.3 s	273.5 d	7.3e25 y
2010	$T(1.439^n)$	14.2 d	3.1e6 y	1.3e38 y
2008	$T(1.465^n)$	209.1 d	1.1e8 y	1.7e41 y
–	$T(2^n)$	1.1e20 y	1.3e35 y	2.0e95 y

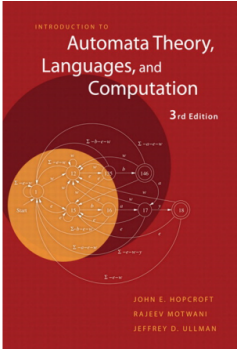
课程内容

- 正则语言
  - 有穷自动机
  - 正则表达式
  - 正则语言的性质
- 上下文无关语言
  - 上下文无关文法
  - 下推自动机
  - 上下文无关语言的性质
- 计算导论
  - 图灵机及其扩展
  - 不可判定性

教材

- *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation* – 3rd Ed.
  - 作者 John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman
  - `http://infolab.stanford.edu/~ullman/ialc.html`
  - 影印版《自动机理论、语言和计算导论》机械工业出版社





参考书

- *Models of Computation*, by Jeff Erickson — `http://algorithms.wtf`
- *Introduction to the Theory of Computation*, 3ed, by Michael Sipser

课程简介与基础知识

- 课程简介
- 基础知识
  - 基本概念
  - 语言和问题
  - 形式化证明

基本概念

1. 字母表: 符号 (或字符) 的非空有穷集.

基本概念

1. 字母表: 符号 (或字符) 的非空有穷集.

$$\Sigma_1 = \{0, 1\},$$
$$\Sigma_2 = \{a, b, \ldots, z\},$$
$$\Sigma_3 = \{x \mid x \text{ 是一个汉字}\}.$$

2. 字符串: 由某字母表中符号组成的有穷序列.

3. 空串: 记为 ε, 有 0 个字符的串.

   字母表 Σ 可以是任意的, 但都有 $\varepsilon \notin \Sigma$.

4. 字符串的长度: 字符串中符号所占位置的个数, 记为 $|\sqcup|$.

4. 字符串的长度: 字符串中符号所占位置的个数, 记为 $|\sqcup|$.
若字母表为 Σ, 可递归定义为:

$$|w| = \begin{cases} 0 & w = \varepsilon \\ |x| + 1 & w = xa \end{cases},$$

其中 $a \in \Sigma$, w 和 x 是 Σ 中字符组成的字符串.

4. 字符串的长度: 字符串中符号所占位置的个数, 记为 $|\sqcup|$.
若字母表为 Σ, 可递归定义为:

$$|w| = \begin{cases} 0 & w = \varepsilon \\ |x| + 1 & w = xa \end{cases},$$

其中 $a \in \Sigma$, w 和 x 是 Σ 中字符组成的字符串.

★. 符号使用的一般约定:

- 字母表: $\Sigma, \Gamma, \Delta, \ldots$
- 字符: $a, b, c, \ldots$
- 字符串: $\ldots, w, x, y, z$
- 集合: $A, B, C, \ldots$

5. 字符串 x 和 y 的连接: 将首尾相接得到新串的运算, 记为 $x \cdot y$ 或 xy.

5. 字符串 x 和 y 的连接: 将首尾相接得到新串的运算, 记为 $x \cdot y$ 或 xy. 同样, 可递归定义为

$$x \cdot y = \begin{cases} x & y = \varepsilon \\ (x \cdot z)a & y = za \end{cases},$$

其中 $a \in \Sigma$, 且 x, y, z 都是字符串.

5. 字符串 x 和 y 的连接: 将首尾相接得到新串的运算, 记为 $x \cdot y$ 或 xy. 同样, 可递归定义为

$$x \cdot y = \begin{cases} x & y = \varepsilon \\ (x \cdot z)a & y = za \end{cases},$$

其中 $a \in \Sigma$, 且 x, y, z 都是字符串.

对任何字符串 x, 有 $\varepsilon \cdot x = x \cdot \varepsilon = x$.

连接运算的符号 "$\cdot$" 一般省略.

6. 字符串 x 的 n 次幂$(n \geq 0)$, 递归定义为

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon & n = 0 \\ x^{n-1}x & n > 0 \end{cases} .$$

7. 集合 A 和 B 的连接, 记为 $A\cdot B$ 或 AB, 定义为

$$A\cdot B=\{w\mid w=x\cdot y,\ x\in A\text{ 且 }y\in B\}.$$

8. 集合 A 的 n 次幂$(n \geq 0)$, 递归定义为

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & n = 0 \\ A^{n-1}A & n \geq 1 \end{cases}.$$

8. 集合 A 的 n 次幂$(n \geq 0)$, 递归定义为

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & n = 0 \\ A^{n-1}A & n \geq 1 \end{cases}.$$

那么, 若 Σ 为字母表, 则 Σ^n 为 Σ 上长度为 n 的字符串集合.
如果 $\Sigma = \{0,1\}$, 有

$$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$$
$$\Sigma^1 = \{0,1\}$$
$$\Sigma^2 = \{00,01,10,11\}$$
$$\Sigma^3 = \{000,001,010,011,100,101,110,111\}$$
$$\vdots$$

9. 克林闭包(*Kleene Closure*):

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i.$$

9. 克林闭包(*Kleene Closure*):

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i.$$

10. 正闭包(*Positive Closure*):

$$\Sigma^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma^i.$$

显然,

$$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}.$$

9. 克林闭包(*Kleene Closure*):

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i.$$

10. 正闭包(*Positive Closure*):

$$\Sigma^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma^i.$$

显然,

$$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}.$$

其他概念如有向图, 树, 字符串的前缀, 后缀等定义这里省略.

语言

定义

若 Σ 为字母表且 $\forall L \subseteq \Sigma^*$, 则 L 称为字母表 Σ 上的语言.

语言

定义

若 Σ 为字母表且 $\forall L \subseteq \Sigma^*$, 则 L 称为字母表 Σ 上的语言.

- 自然语言, 程序设计语言等
- $\left\{ 0^n 1^n \,\middle|\, n \geq 0 \right\}$
- The set of strings of 0's and 1's with an equal number of each:

$$\{\varepsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1100, \ldots\}$$

- $\varnothing$, $\{\varepsilon\}$ 和 Σ^* 都是任意字母表 Σ 上的语言, 但注意 $\varnothing \neq \{\varepsilon\}$

语言

定义

若 Σ 为字母表且 $\forall L \subseteq \Sigma^*$, 则 L 称为字母表 Σ 上的语言.

- 自然语言, 程序设计语言等
- $\left\{ 0^n 1^n \,\middle|\, n \geq 0 \right\}$
- The set of strings of 0's and 1's with an equal number of each:

$$\{\varepsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1100, \ldots\}$$

- $\varnothing$, $\{\varepsilon\}$ 和 Σ^* 都是任意字母表 Σ 上的语言, 但注意 $\varnothing \neq \{\varepsilon\}$

关于语言

唯一重要的约束就是所有字母表都是有穷的.

问题

典型问题

判断给定的字符串 w 是否属于某个具体的语言 L,

$$w \in L?$$

- 任何所谓问题, 都可以转为语言成员性的问题
- 语言和问题其实是相同的

形式化证明: 演绎法, 归纳法和反证法

例 1. 若 x 和 y 是 Σ 上的字符串, 请证明 $|xy| = |x| + |y|$.

证明: 通过对 $|y|$ 的归纳来证明

1. 基础: 当 $|y| = 0$, 即 $y = \varepsilon$

$$
\begin{aligned}
|x\varepsilon| &= |x| && \text{连接的定义} \\
&= |x| + |\varepsilon| && \text{长度的定义}
\end{aligned}
$$

2. 递推: 假设 $|y| = n\,(n \geq 0)$ 时命题成立,
   那么当 $|y| = n + 1$, 即 $y = wa$

$$
\begin{aligned}
|x(wa)| &= |(xw)a| && \text{连接的定义} \\
&= |xw| + 1 && \text{长度的定义} \\
&= |x| + |w| + 1 && \text{归纳假设} \\
&= |x| + |wa| && \text{长度的定义}
\end{aligned}
$$

□

形式化证明: 演绎法, 归纳法和反证法

例 1. 若 x 和 y 是 Σ 上的字符串, 请证明 $|xy| = |x| + |y|$.

证明: 通过对 y 的结构归纳来证明

1. 基础: $y = \varepsilon$ 时

$$
\begin{aligned}
|x\varepsilon| &= |x| && \text{连接的定义} \\
&= |x| + |\varepsilon| && \text{长度的定义}
\end{aligned}
$$

2. 递推: 假设 $y = w\,(w \in \Sigma^*)$ 时命题成立, 那么当 $y = wa$ 时

$$
\begin{aligned}
|x(wa)| &= |(xw)a| && \text{连接的定义} \\
&= |xw| + 1 && \text{长度的定义} \\
&= |x| + |w| + 1 && \text{归纳假设} \\
&= |x| + |wa| && \text{长度的定义}
\end{aligned}
$$

□

哈爾濱工業大學

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

chunyu@hit.edu.cn

http://iilab.net/chunyu