5. Maticová algebra, typy matic, inverzní matice, determinant.

Matice

Matice typu m,n je matice složená z n*m (m >= 1, n >= 1) reálných (komplexních) čísel uspořádaných do m řádků a n sloupců:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$R^{m,n}$ (resp. $C^{m,n}$) je množina matic typu m,n složená z reálných (resp. komplexních) čísel
matice značíme velkými písmeny A, B...
koeficienty matice značíme a_{ij}

Maticová algebra

- Matice A a B se rovnají (A = B) pokud jsou stejného typu a $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna i a j

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Jsou-li matice A a B stejného typu m,n poté je jejich součtem matice C (také typu m,n), kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

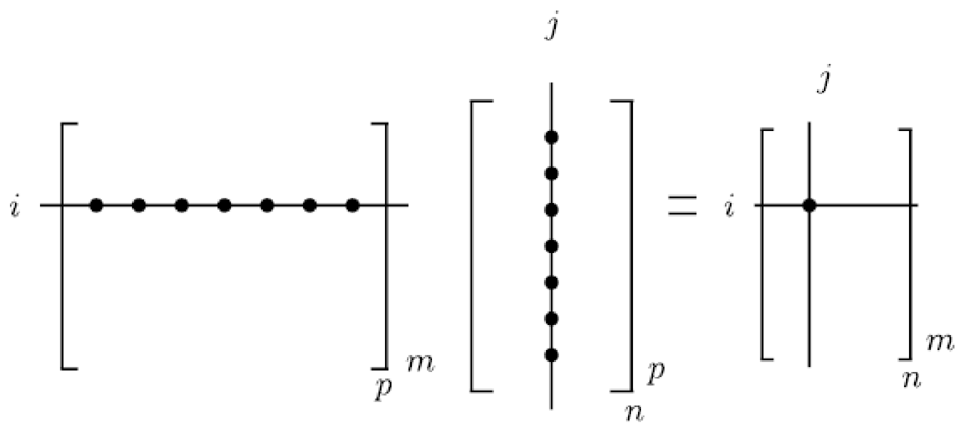
  pokud jsou matice A a B různého typu **není** součet **definován**
- Máme-li matici A typu m,n a číslo (skalár) α je možné matici tímto skalárem vynásobit (získáme matici C) a to takto $c_{ij} = \alpha a_{ij}$

$$2 \odot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

- **Zmíněné operace mají následující vlastnosti**: A, B, C jsou matice typu m,n a α, β skaláry. Potom platí následující vztahy:
  1. A + B = B + A (komutativní zákon)
  2. (A + B) + C = A + (B + C) (asociativní zákon)
  3. α(A + B) = αA + αB (distributivní zákon vzhledem ke sčítání matic)
  4. (α + β)A = αA + βA (distributivní zákon vzhledem k násobení matic skaláry)
- Je-li matice A typu m,p a matice B typu p,n je možné tyto matice vynásobit a získat matici C typu m,n a to pro

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Graficky:



$A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ $\quad$ $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ $\quad$ $AB \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Pokud se počet sloupců matice A nerovná počtu řádků matice B **není** součin **definován**.
Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 9 + 3\cdot 11 & 1\cdot 8 + 2\cdot 10 + 3\cdot 12 \\ 4\cdot 7 + 5\cdot 9 + 6\cdot 11 & 4\cdot 8 + 5\cdot 10 + 6\cdot 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7+18+33 & 8+20+36 \\ 28+45+66 & 32+50+72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ není definován.}$$

Pro čtvercové matice A a B platí: AB != BA viz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Typy matic

- **Čtvercová matice** je matice typu m,n, kde m = n
- **Obdélníková matice** je matice typu m,n, kde m != n
- **Hlavní diagonální matice** a **vedlejší diagonální matice** jsou matice, které mají nenulové prvky pouze na hlavní/vedlejší diagonále

vedlejší diag.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

hlavní diagonála

- **Nulová matice** typu m,n:

$$\Theta_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots 0 \end{bmatrix}$$

Pro nulovou matici platí: $A + \Theta_{m,n} = \Theta_{m,n} + A = A$

- **Jednotková matice** je čtvercová matice řádu n,n s jedničkami na diagonále a nulami mimo diagonálu

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Pro jednotkovou matici platí: $I_m A = A I_n = A$

- **N-rozměrný vektor** je matice typu n,1

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

  vektory se značí malými písmeny, množina vektorů se značí R^n (místo $R^{n,m}$) a jednotlivé hodnoty x_i vektoru se nazývají složky vektoru (místo koeficient matice)
- **Regulární/singulární matice**:
  pokud soustava Ax = 0
  má pouze jedno řešení x = 0 nazývá se matice A regulární,
  pokud má řešení x != 0 nazývá se matice A singulární

Inverzní matice

Věta o inverzní matici: Ke každé regulární matici A typu n,n existuje jiná matice typu n,n (označuje se A^{-1}), která splňuje vlastnost:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I\text{(jednotková matice)}$$

Taková matice A^{-1} je nazývá inverzní.

POZN: Tvrzení lze i obrátit, tedy existuje-li k matici A jiná matice splňující $AA^{-1} = A^{-1}A$ je matice A regulární.
Důkazy k té větě nepřikládám, páč si troufám tvrdit, že by si je stejně nikdo nepamatoval (pokud se pletu napište si a já vám pošlu dokument s důkazy)

Vlastnosti inverzní matice:
A a B jsou regulární matice typu n,n

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Výpočet inverzní matice:
Při výpočtu inverzní matice postupujeme následujícím způsobem:
1. Dána čtvercová matice A.
2. Sestavení matice (A | I).
3. Použití Gaussovy eliminace k převedení na horní stupňovitý tvar.
4. Je-li hodnost h(A) menší než n: A je singulární a nemá inverzi.
   Hodnost matice A je určena počtem nenulových řádků.
5. Použití dalších ekvivalentních úprav k převedení na tvar (I | X), kde $X = A^{-1}$.

Příklad:
Dokažte, že následující matice je regulární a nalezněte k ní matici inverzní.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{(-2)(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \overset{(-6)(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

z čehož vyplývá, že je matice A regulární

TEDY:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

OVĚŘENÍ:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinant

Determinant matice A označujeme det(A).
Má-li matice A nenulový determinant je regulární. Naopak pokud má matice A determinant nulový je singulární.

Výpočet:
Matice A typu n,n která je regulární

1. pro n = 1
   det(A) = a_{11}
1. pro n = 2
   det(A) = a_{11}*a_{22} - a_{12}*a_{21}
2. pro n = 3, tedy:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

   lze vypočítat determinant pomocí Sarusova pravidla, tedy:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad -a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{aligned}$$

   Sarusovo pravidlo se nedá použít na počítání determinantu matic čtvrtého a vyšších řádů.
1. pro vyšší řády pomocí Gaussovi eliminace:
   1) Matici je nutné převést do trojúhelníkového tvaru (pod hlavní diagonálou má pouze nulové prvky)

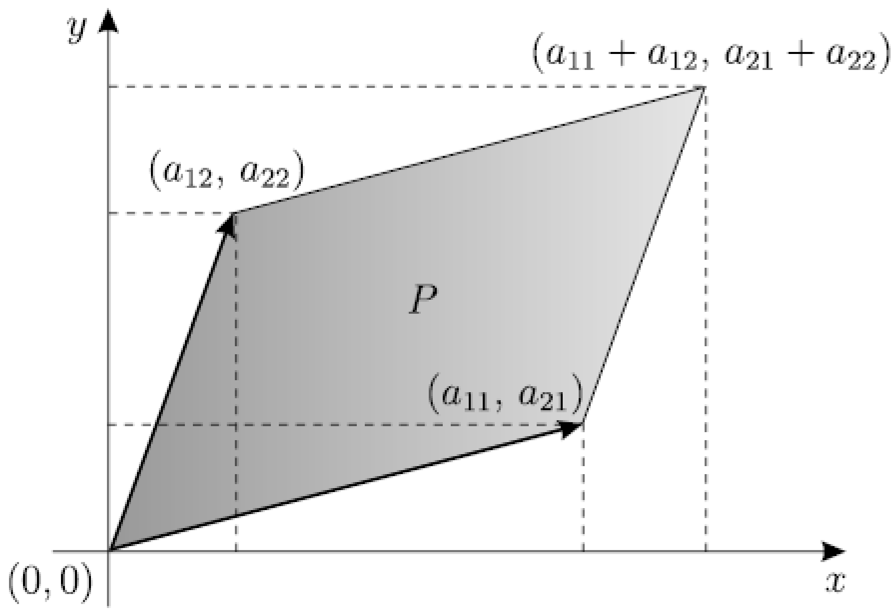
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   2) determinant je poté roven det(A) = a_{11}*a_{22}*...*a_{nn}, pokud tedy bude kterýkoli z těchto koeficientů roven 0, bude determinant roven 0
   3) z tohoto vyplývá, že determinantem jednotkové matice je vždy det(I) = 1

Geometrická interpretace

Pro n = 2 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

lze determinant geometricky interpretovat jako plochu rovnoběžníka, který je určen vektory $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$, pokud jsou vektory rovnoběžné bude plocha rovna 0, v opačném případě je plocha rovnoběžníka až na znaménko dána determinantem.



Pro n = 3 lze determinant geometricky interpretovat jako objem rovnoběžnostěnu (opět mimo znaménka).

Obecně pro regulární matici A typu n,n je absolutní hodnota z determinantu rovna objemu n-rozměrného rovnoběžnostěnu P daného popisem:

$$P = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k | 0 \leq \alpha_k \leq 1, k = 1, \ldots, n \right\}$$