7. Pojem pravděpodobnost, náhodný jev. Podmíněná pravděpodobnost, nezávislost. Náhodná veličina – diskrétní, spojitá a jejich použití. Střední hodnota, kvantily, rozptyl.

Pravděpodobnost

Základní pojmy

Náhodným pokusem rozumíme takový pokus, jehož výsledek závisí na náhodě a který můžeme za stejných podmínek opakovat libovolně mnohokrát.
Z toho vyplývá, že náhodný pokus musí mít alespoň dva různé výsledky, neboť v opačném případě bychom nemohli tvrdit, že výsledek závisí na náhodě. Současně předpokládáme, že náhodný pokus může mít pouze jeden výsledek.
Výsledek náhodného pokusu nazýváme elementární jev. Množinu *S* všech elementárních jevů nazýváme základní prostor. Libovolnou podmnožinu *A* základního prostoru *S* nazýváme náhodný jev.

Klasická definice pravděpodobnosti

Klasická definice pravděpodobnosti (Laplaceova) vychází ze třech předpokladů, resp. požadavků kladených na náhodný pokus: 1. počet všech možných výsledků je konečný, 2. všechny výsledky jsou stejně možné a 3. všechny výsledky se vzájemně vylučují.
Nechť náhodný pokus se základním prostorem *S* má konečný počet výsledků *n* (*n* je z množiny všech přirozených čísel *N*) a nechť každý elementární jev má stejnou možnost nastat po vykonání náhodného pokusu. Nechť *A* je libovolný náhodný jev, tvořený *m* elementárními jevy. Potom pravděpodobnost *P(A)* náhodného jevu *A* definujeme jako podíl:

$$P(A) = m / n,$$

kde:
m je počet případů příznivých a
n je počet všech možných případů.

Geometrická definice pravděpodobnosti

Definice geometrické pravděpodobnosti je založena na porovnávání ploch, objemů nebo délek různých geometrických útvarů. Nechť náhodný pokus se základním prostorem *S* má nekonečně mnoho výsledků a každý z těchto výsledků má stejnou možnost nastat. Potom pravděpodobnost*P(A)* náhodného jevu *A* z množiny *S* definujeme jako podíl:

$$P(A) = m(A) / m(S),$$

kde:
m(A) je míra geometrického útvaru, reprezentujícího náhodný jev *A* a
m(S) je míra geometrického útvaru, reprezentujícího základní prostor *S*.

Statistická definice pravděpodobnosti

Uvažujeme náhodný pokus *P* a sledujme náhodný jev *A*, který může nastat po provedení pokusu *P*. Zopakujme náhodný pokus *P* *n*-krát za stejných podmínek. Nechť *m* udává, kolikrát v dané sérii pokusů nastal jev *A*. Tento poměr nazýváme relativní četností. Jestliže s rostoucím počtem opakování pokusu se relativní četnost blíží určitému číslu, potom toto číslo můžeme považovat za statistickou pravděpodobnost daného jevu. Statistickou pravděpodobnost jevu *A*tak definujeme jako limitu podílu:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} m / n$$

Pravděpodobnost události se obecně označuje reálným číslem od 0 do 1. Událost, která nemůže nastat, má pravděpodobnost 0, a naopak jistá událost má pravděpodobnost 1. Někdy se kvůli názornosti pravděpodobnost uvádí v procentech.

Příklady : http://www.e-matematika.cz/stredni-skoly/pravdepodobnost.php

Náhodný jev

Náhodný jev označuje výsledek náhodného pokusu, o kterém lze po provedení pokusu rozhodnout, zda nastal nebo nenastal. Náhodný jev představuje tedy událost, která za určitých podmínek buď nastane nebo nenastane. Je tedy možné vytvořit množinu všech náhodných jevů, které mohou za daných podmínek nastat.

Vlastnosti:

Pokud při náhodném pokusu nastane nějaký náhodný jev A pouze tehdy, pokud nastane jev B, pak říkáme, že jev A je částí jevu B a značíme $A \subset B$. Lze také použít slovního vyjádření, že jev A má za následek jev B. Také říkáme, že jev A **implikuje** jev B.

Je-li při daném náhodném pokusu jev A částí jevu B a současně je jev B částí jevu A, tzn. za daných podmínek oba jevy A a B buď současně nastanou, nebo současně nenastanou, pak jevy A,B označujeme jako **ekvivalentní.**

Pokud lze nějaký jev C vyjádřit prostřednictvím dvou jiných jevů A a B tak, že jev C nastane tehdy, když nastane jev A nebo B, pak jev C označujeme jako **sjednocení jevů** A a B a zapisujeme $C = A \cup B$.

Jestliže nějaký jev C můžeme vyjádřit prostřednictvím dvou jiných jevů A a B tak, že jev C nastane tehdy, když nastanou současně oba jevy A i B, pak jev C označujeme jako **průnik jevů** A a B a zapisujeme $C = A \cap B$.

Pokud lze nějaký jev C vyjádřit prostřednictvím dvou jiných jevů A a B tak, že jev C nastane tehdy, když nastane jev A a současně nenastane jev B, pak jev C označujeme jako **rozdíl jevů** A a B a zapisujeme C = A − B. Používá se také značení $C = A \backslash B$.

Příklad: Jako příklad náhodného jevu se nejčastěji uvádí hod hrací kostkou. Pokus spočívá v tom, že sledujeme čísla, resp. počty bodů, která na ní padnou. Idealizací pokusu je to, že nepřipouštíme, aby kostka padla na hranu a nebyl znám výsledek. Jevový prostor má šest elementárních jevů, kterými jsou čísla 1,2,3,4,5,6 na stranách kostky. Jev, že padne sudé číslo, je jevem **složeným**, který nastane tehdy a jen tehdy, nastane-li jeden ze tří elementárních jevů (padne 2, 4 nebo 6). Jev, že padne 0, je **nemožný jev**. Jev, že padne sudé nebo liché číslo, je **jistý jev**.

Podmíněná pravděpodobnost

Náhodný jev určujeme vždy k určitým podmínkám. Nejsou-li na výskyt daného jevu A kladeny žádné další podmínky, potom pravděpodobnost P(A) jevu A označujeme jako **nepodmíněnou** pravděpodobnost. Pokud se jev A může vyskytnout pouze tehdy, vyskytl-li se jev B, jehož pravděpodobnost je P(B) > 0, pak hovoříme o **podmíněné** pravděpodobnosti jevu A a označujeme ji P(A | B). Při P(B) > 0 lze pravděpodobnost jevu A, která je podmíněna výskytem jevu B vyjádřit jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Máme-li náhodné jevy A1,A2,...,An, pak pravděpodobnost jejich průniku je

$$P\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P\left(A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Speciálním případem tohoto vztahu je pravděpodobnost průniku dvou jevů A,B, tedy pravděpodobnost, že jevy A,B nastanou současně. Podle tohoto vztahu je tato pravděpodobnost rovna součinu pravděpodobnosti jednoho jevu a podmíněné pravděpodobnosti jevu druhého, tzn.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Bayesova věta (vzorec) je věta teorie pravděpodobnosti, která udává, jak podmíněná pravděpodobnost nějakého jevu souvisí s opačnou podmíněnou pravděpodobností. Bayesovu větu lze formulovat takto:

Mějme dva náhodné jevy A a B s pravděpodobnostmi P(A) a P(B), přičemž P(B) > 0. Potom platí

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)},$$

kde P(A|B) je podmíněná pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že nastal jev B, a naopak P(B|A) je pravděpodobnost jevu B podmíněná výskytem jevu A.

Příklad: http://nb.vse.cz/~ZELENYM/Bayes.doc

Nezávislé jevy

Řekneme, že jevy *A* a *B* jsou *nezávislé*, pokud jev *A* nezávisí na výskytu jevu *B* a současně pravděpodobnost výskytu jevu *B* nezávisí na jevu *A*. Pokud pravděpodobnost výskytu jevu *A* nezávisí na výskytu jevu *B*, pak musí platit *P*(*A* | *B*) = *P*(*A*). Podle vztahu pro podmíněnou pravděpodobnost tedy platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Vzhledem k tomu, že ani výskyt jevu *B* nezávisí na výskytu jevu *A*, musí současně platit *P*(*B* | *A*) = *P*(*B*), odkud však opět získáme vztah $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Uvedené tvrzení lze obrátit, tzn. jestliže platí $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, pak jsou jevy *A*,*B* nezávislé.

Podobně řekneme o jevech *A*1,*A*2,...,*An*, že jsou nezávislé, pokud platí

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

Nezávislost splňující tento vztah bývá označována jako *skupinová nezávislost jevů*. Každý jev je totiž nezávislý nejen na ostatních jevech, ale je také nezávislý na (libovolných) průnicích ostatních jevů. *Nezávislost jevů po dvou* je typ nezávislosti, kdy každý jev je nezávislý na ostatních jevech, nemusí však být nezávislý na průnicích jiných jevů.

Příklad: Mějme čtyři krabice, přičemž každá krabice má víko a uvnitř je koule. První krabice je bílá, uvnitř je bílá koule a víko krabice je také bílé. Druhá krabice je bílá, uvnitř je černá koule a víko je také černé. Třetí krabice je černá, uvnitř je černá koule a víko je bílé. Poslední krabice je černá, uvnitř je bílá koule a víko je černé.

Za náhodný jev *A* budeme považovat, že *náhodně vybraná krabice je černá*, za jev *B* vezmeme, že *náhodně vybraná krabice obsahuje černou kouli*, a jevem *C* bude, že *náhodně vybraná krabice má černé víko*.

Z předchozího lze zjistit

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

Pro současný výskyt dvojic jevů platí

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

Vzhledem k tomu, že neexistuje žádná černá krabice s černou koulí a černým víkem, bude

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

Je tedy vidět, že náhodné jevy *A*,*B*,*C* jsou *po dvou nezávislé*, avšak nejsou *nezávislé*.

Odkazy na příklady (v zadání příklady nejsou tak, snad to po nás nebudou chtít počítat):

http://nb.vse.cz/~kladivk/pravdepodobnost.pdf

http://cmp.felk.cvut.cz/cmp/courses/recognition/Lab_archive/RPZ_00-01s/probexam/

Náhodná veličina

Za **náhodnou veličinu** považujeme proměnnou, jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu.

Při opakování náhodného pokusu dochází v důsledku působení náhodných vlivů ke změnám náhodné veličiny. Hodnotu náhodné veličiny tedy není možné jednoznačně určit před provedením pokusu.

Náhodná veličina přiřazuje každému jevu jevového pole určité číslo a určitou pravděpodobnost. Náhodná veličina je určena rozdělením pravděpodobnosti.

Náhodné veličiny lze rozdělit na nespojité (diskrétní) a spojité. Diskrétní veličiny mohou nabývat pouze spočetného počtu hodnot (konečného i nekonečného), zatímco spojité veličiny nabývají hodnoty z nějakého intervalu (konečného nebo nekonečného). Obor všech hodnot náhodné veličiny nazýváme definičním oborem.

Náhodná veličina diskrétní

Diskrétní (nespojitá) náhodná veličina může nabývat pouze diskrétních (tj. od sebe oddělených) hodnot x1, x2, …, xk. Pravděpodobnostní rozdělení (a tím i distribuční funkce) je jednoznačně určena dvojicemi [xi, P(X = xi)], i = 1, 2, …, k, tj. tabulkou o dvou sloupcích a k řádcích. Této funkci P(X = xi) se říká pravděpodobnostní funkce.

Hodnoty distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny pak jsou určeny vztahem:

$$\mathrm{F(x)} = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Náhodná veličina spojitá

Spojitá náhodná veličina může nabývat všech reálných hodnot nebo alespoň všech hodnot z nějakého konečného intervalu. Možné hodnoty náhodné veličiny pokrývají interval hustě, tedy je jich nespočetně mnoho. Distribuční funkce spojité náhodné veličiny (také říkáme distribuční funkce spojitého rozdělení) se vyjádří vztahem:

$$\mathrm{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Střední hodnota

Střední hodnota je nejznámější míra polohy ve statistice. Často se nazývá *populační průměr*.

Střední hodnota náhodné veličiny *X* se značí E(X) nebo také <X>.

Definice:

Střední hodnota je parametr rozdělení náhodné veličiny, který je definován jako vážený průměr daného rozdělení. V řeči teorie míry se jedná o hodnotu

$$\mathrm{E}X = \int_R x \mathrm{d}P(x),$$

kde *P* je pravděpodobnostní míra určující rozdělení náhodné veličiny *X*. Pokud výraz na pravé straně nekonverguje absolutně, pak říkáme, že střední hodnota neexistuje.

Speciálně:

Má-li náhodná veličina *X* **spojité rozdělení** s hustotou rozdělení *f*(*x*), pak

$$\mathrm{E}X = \int_R x f(x)\mathrm{d}x$$
.

Má-li náhodná veličina *X* **diskrétní rozdělení** kde *P*[*X* = *si*] = *pi* pro i z I nejvýše spočetnou množinu různých výsledků, pak

$$\mathrm{E}X = \sum_I s_i p_i$$

Rozptyl

Rozptyl je definován jako střední hodnota kvadrátů odchylek od střední hodnoty. Odchylku od střední hodnoty, která má rozměr stejný jako náhodná veličina, zachycuje směrodatná odchylka.

Pro diskrétní náhodnou veličinu jej můžeme definovat vztahem

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - \mathrm{E}(X)]^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [\mathrm{E}(X)]^2$$
,

kde *xi* jsou hodnoty, kterých může náhodná veličina *X* nabývat (s pravděpodobnostmi *pi*) a E(X) je střední hodnota veličiny *X*.

Je-li pravděpodobnost všech diskrétních hodnot stejná, pak se předchozí vztah zjednoduší na

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{E}(x))^2$$

Mějme kostku a náhodnou veličinu *X*, která přiřadí každému z šesti možných jevů takové číslo, kolik puntíků je v daném jevu na horní straně kostky (čísla 1 až 6). Máme 6 jevů s pravděpodobností ⅙ a střední hodnota (průměr) je 3,5.

$$\sigma^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - 3,5)^2 = \frac{1}{6}((1-3,5)^2 + (2-3,5)^2 + (3-3,5)^2 + (4-3,5)^2 + (5-3,5)^2 + (6-3,5)^2) = \frac{17,5}{6} \doteq 2,92$$

Kvantily

Kvantily jsou ve statistice čísla (hodnoty), která dělí soubor seřazených (například naměřených) hodnot na několik zhruba stejně velkých částí. Kvantil je tedy míra polohy rozdělení pravděpodobnostináhodné veličiny. Popisují body, ve kterých distribuční funkce náhodné proměnné prochází danou hodnotou.

Speciální označení kvantilů

Kvantily pro některé význačné hodnoty jsou označovány zvláštními jmény a pro nejdůležitější rozdělení jsou hodnoty základních kvantilů uváděny v tabulkách.

Medián

Kvantil rozdělující statistický soubor na dvě stejně početné množiny se nazývá medián, tzn. jedná se o kvantil *Q*0,5.

Kvartil

Používají samostatná pojmenování pro tzv. kvartily, které oddělují ze statistického souboru čtvrtiny. Rozlišuje se *dolní kvartil Q*0,25 a *horní kvartil Q*0,75. spíše Q1 a Q3

Decil

Decil dělí statistický soubor na desetiny. Jako *k*tý decil označujeme *Qk* / 10.

Percentil

Percentil dělí statistický soubor na setiny. Jako *k*-tý percentil označujeme *Qk* / 100.