3. Soustava lineárních rovnic a metody jejich řešení.

Způsoby řešení známé ze SŠ:

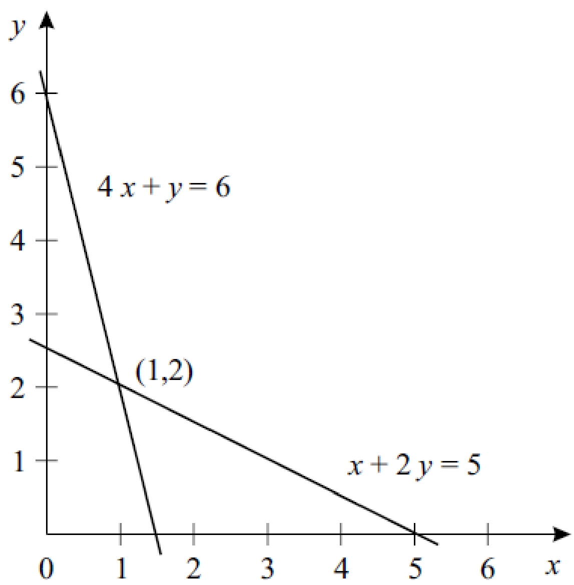
1. Geometricky
2. Postupné dosazování
3. Násobení rovnic konstantami a jejich vzájemné sčítání či odčítání

Příklad:

$x + 2y = 5$
$4x + y = 6$

1) Geometricky:

$ax + by + c = 0$ ….. rovnice přímky
hledá se průsečík přímek:



2) Postupné dosazování:

$x + 2y = 5$ .... $x = 5 - 2y$
$4x + y = 6$ .... $4(5 - 2y) + y = 6$ .... $-7y = -14$ .... $y = 2$
$x = 5 - 2*2 = 1$

3) Násobení rovnic konstantami a jejich vzájemné sčítání či odčítání

$x + 2y = 5$ ...	* 4	$4x + 8y = 20$ ...		$4x + 8y = 20$ ...		$4x + 8y = 20$	
$4x + y = 6$		$4x + y = 6$	1.-2.	$0x + 7y = 14$	/ 7	$0x + 1y = 2$	* 8

$4x + 8y = 20$ …	1.-2.	$4x + 0y = 4$ ...	/4	$1x + 0y = 1$ …	výsledek	$x = 1$
$0x + 8y = 16$		$0x + 8y = 16$	/8	$0x + 1y = 2$	výsledek	$y = 2$

Definice: Soustavou M lineárních rovnic o M neznámých nazveme systém rovnic:

$a_{11}*x_1 + a_{12}*x_2 + a_{13}*x_3$ .... $a_{1M}*x_M = b_1$
$a_{21}*x_1 + a_{22}*x_2 + a_{23}*x_3$ .... $a_{2M}*x_M = b_2$

$a_{31}*x_1 + a_{32}*x_2 + a_{33}*x_3$ …............... $a_{3M}*x_M = b_3$
….
….
….
$a_{M1}*x_1 + a_{M2}*x_2 + a_{M3}*x_3$ …............... $a_{MM}*x_M = b_M$

kde:

x_1; x_2; …... x_M	jsou neznámé
b_1; b_2; …... b_M	jsou koeficienty druhé strany
a_{11}; a_{12}; …... a_{MM}	jsou koeficienty soustavy

Homogenní soustava lin. rovnic
splňuje $b_1 = b_2 =$ …... $= b_M = 0$
tato soustava má alespoň jedno (triviální) řešení (0,0,0,0,......,0)
pokud je (x_1; x_2; …... x_M) a (y_1; y_2; …... y_M) řešením homogenní soustavy je řešením také:

- (x_1+y_1;x_2+y_2; …... x_M+y_M)
- ($a*x_1$; $a*x_2$; …... $a*x_M$), kde a je libovolné (komplexní) číslo

další vlastností řešení homogenní soustavy je že pokud ho přičteme k řešení nehomogenní soustavy je tento součet stále řešením nehomogenní soustavy.

Gaussova eliminační metoda

Dal bych sem pouze příklad, ale vzhledem k tomu, že nevěřím, že by nám tam komise “vyfrkla” příklad a počítejte tak sem dám i nějakou teorii:

Ekvivalence soustav

Dvě soustavy lineárních rovnic se nazývají ekvivalentní, mají-li stejné množiny řešení.
Množina řeěení soustavy lineárních rovnic se tedy nemění, provedeme li na ní libovolnou z následujících tzv. ekvivalentních úprav:

1. záměna pořadí dvou rovnic nebo neznámých soustavy
2. vynásobení libovolné rovnice soustavy nenulovým číslem
3. přičtení libovolného násobku některé rovnice k libovolné jiné rovnici
4. odstranění nulového řádku

Horní stupňovitý tvar soustavy lin. rovnic

Matice je v horním stupňovitém tvaru pokud:

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{1k_1} & & & & & & & \\
0 & 0 & a_{2k_2} & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & a_{pk_p} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
a_{i,k_i} \neq 0 & i = 1, \ldots, p, & k_1 < k_2 < \cdots < k_p, \\
a_{i,j} = 0, & j = 1, \ldots, k_i - 1, & i = 1, \ldots, p, \\
a_{i,j} = 0, & i = p+1, \ldots, m, & j = 1, \ldots, n.
\end{array}$$

Postup

Každou soustavu lin. rovnic lze pomocí ekvivalentních úprav převést do horního stupňovitého tvaru. Následně lze z tohoto tvaru snadno vypočítat všechna řešení.

Příklad

Máme řešit soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
4x_1 + x_2 &= -2 \\
-2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7
\end{aligned}$$

Převedeme na matici a následně do horního stupňovitého tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \overset{|.(-2).(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \overset{|.(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Z posledního tvaru vyplývá:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_2 - 2x_3 &= -4 \\ -4x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Vypočteme tedy:

$$-4x_3 = -4 \iff x_3 = 1 \Rightarrow$$
$$-x_2 - 2x_3 = -4 \iff -x_2 = -4 + 2x_3 = -4 + 2 \cdot 2 = -2 \iff x_2 = 2 \Rightarrow$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \iff 2x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - 2 - 1 = -2 \iff x_1 = -1$$

Soustava má tedy jednoznačné řešení $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 2, 1)$.

Výjimky

1) Pokud vyjde následující tvar soustava rovnic nemá řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Důvod: kdo najde řešení rovnice č.4 (úplně spodní) dostane 2 bludišťáky

2) Pokud vyjde následující tvar nebo má-li soustava více rovnic než neznámých má nekonečně mnoho řešení:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ty lze vyjádřit, pokud za neznámé x_5 a x_2 dosadíme parametr (zde u a v):

$x_5 = u \Rightarrow$

$x_4 - 2x_5 = 1 \iff x_4 - 2u = 1 \iff x_4 = 1 + 2u \Rightarrow$

$x_3 + x_4 - x_5 = -3 \iff x_3 + (1 + 2u) - u = -3 \iff x_3 = -4 - u \Rightarrow$

$x_2 = v \Rightarrow$

$2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_5 = 4 \iff 2x_1 - 2v - 4 - u + 3u = 4$

$\iff x_1 = 4 - u + v$