24. Signály a systémy. LTI systémy. Přenosová funkce, impulsní odezva. Konvoluce u číslicových signálů. Autokorelační funkce a její praktické využití.

Signály a systémy

Na rozdíl od analogových signálů, číslicové signály mají omezený rozsah frekvencí – pouze v intervalu 0 až Fs/2. Signály o frekvencích vyšších než Fs/2 jsou přeloženy do tohoto základního pásma. Nedodržení Shannonova vzorkovacího teorému způsobí nejen změnu frekvencí ale i zkreslení přenášené informace. Před vzorkováním a při zpětné rekonstrukci je nutné použít filtr potlačující frekvence nad Fs/2.

Příklady systémů

- Hudební nástroj lze považovat za systém generující zvuk
- Zesilovač, ekvalizér je systém, který modifikuje zvukový signál
- A/D a D/A převodník transformují jeden typ signálu na jiný
- Reproduktor převádí elektrický signál na akustický

Klasifikace systémů podle charakteru signálů

- S**pojité systémy** pracují se spojitými vstupními a výstupními signály.
- **Číslicové systémy** pracují s diskrétními signály.
- **Hybridní systémy** fungují jako převodníky mezi analogovými a číslicovými signály

Klasifikace systémů podle kauzality

Princip kauzality: odezva nemůže nastat dříve než buzení. Odezva **kauzálních systémů** závisí pouze na současných a minulých hodnotách. Odezva **nekauzálních systémů** závisí i na budoucích hodnotách. Nekauzální systémy nejsou realizovatelné v klasických (on-line) systémech. Jsou realizovatelné jen v off-line režimu, když je celý signál je v paměti. Příklad nekauzálního systému:

$$y(t) = [x(t-1)+x(t)+x(t+1)]/3$$

Klasifikace systémů podle linearity

Odezva na lineární kombinaci budících signálů je rovna lineární kombinaci odezev na jednotlivé budící signály. Z linearity vyplývá princip superpozice (odezvu systému lze složit s odezev na dílčí buzení).

Příklad **lineárních systémů** $y(t) = k \cdot x(t)$

Příklad **nelineárních systémů** $y(t) = x^2(t)$

Klasifikace systémů podle časové nezávislosti (stacionarity)

Pro časově nezávislý systém platí podmínka: . Je-li **vstupní signál zpožděn o čas** , musí být i **výstup zpožděn o čas** . Chování systému se nemění v čase.

Příklad **časově nezávislý**ch systémů y(t) = k . x(t)

Příklad **časově závislý**ch systémů y(t) = **t** . x(t)

LTI (Linear Time Invariant) systémy, přenosová funkce, impulsní odezva

LTI systémy vykazují vždy **stejnou odezvu na stejný signál**. Lineárně časově nezávislé systémy, relativně jednoduché pro popis, analýzu a syntézu. Jednoduché číslicové LTI systémy: **Systémy typu FIR** - systémy s konečnou impulzní odezvou-na jednotkový impulz reagují signálem s konečným počtem vzorků. Příklad číslicového LTI systému: **Filtry** – systémy modifikující vstupní signál.

Činnost LTI systému lze popsat několika způsoby:

- Pomocí diferenciální nebo diferenční rovnice
- Pomocí přenosové funkce
- Pomocí impulsní odezvy

1.2.1.1 Popis spojitých LTI systémů pomocí diferenciální rovnice

U spojitých signálů lze vystačit s diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \_ + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \_ + b_0 x(t)$$

1.2.1.2 Popis číslicových LTI systémů pomocí diferenční rovnice

U číslicových lze vystačit s diferenčními rovnicemi.

$$A_0 y(n) + A_1 y(n-1) \_ A_N y(n-N) = B_0 x(n) + B_1 x(n-1) \_ B_M x(n-M)$$

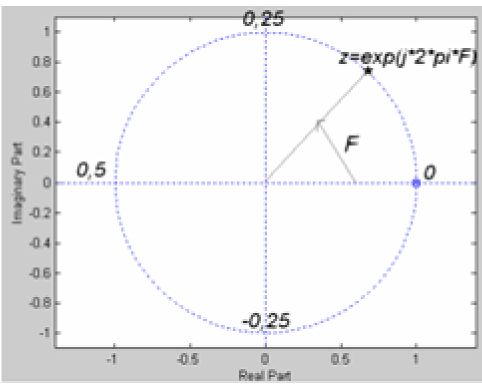
Přenosová funkce

Přenosová funkce (přenos) je definována jako podíl Laplaceových obrazů výstupní a vstupní veličiny systému při nulových počátečních podmínkách. Přenos získáme Z-transformací.

$H(z) = Y(z)/U(z) = [B_0 + B_1 z^{-1} + \ldots]/[A_0 + A_1 z^{-1} + \ldots]$

Vztah mezi přenosovou funkcí H(z) a frekvenční charakteristikou H(F):

$$H(F) = \frac{B_0 + B_1 e^{-j2\pi F} \cdots B_M e^{-j2\pi FM}}{1 + A_1 e^{-j2\pi F} \cdots A_N e^{-j2\pi FN}}$$



$$H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)..(z - z_M)}{z^M}$$

Funkce ve tvaru zlomku má „nuly“ (z = z1, z = z2..), kde nabývá nulové hodnoty a „póly“ (z=0) , kde nabývá nekonečně velké hodnoty. Jsou-li tyto nuly a póly poblíž jednotkové kružnice, ovlivňují výrazným způsobem přenosové a frekvenční charakteristiky systému.

Popis spojitých LTI systémů pomocí přenosové funkce

Prostřednictvím transformací a přenosových funkcí.

Laplace $\quad H(p) = Y(p)/X(p)$

Fourier $\quad H(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega)$

Popis číslicových LTI systémů pomocí přenosové funkce

Pomocí Laplaceovy transformace a Fourierovy transformace zpoždění postihuje „přenos dat“ mezi výstupem a vstupem.

$H(z) = [B_0 + B_1 z^{-1} + \ldots]/[A_0 + A_1 z^{-1} + \ldots]$ - zpoždění

Popisuje chování systému v komplexní rovině.

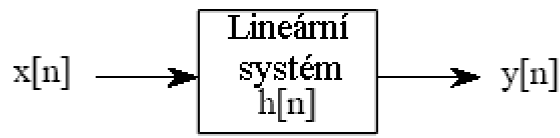
$H(w) = [B_0 + B_1e^{-jw} + ...]/[A_0 + A_1e^{-jw} + ...]$

Popis spojitých a číslicových LTI systémů pomocí impulsní odezvy

Impulsní odezva je odezva ustáleného systému na jednotkový impuls h(n) = F(P(n)) .
Impulzní odezva hraje klíčovou roli při realizaci číslicových systémů (filtrů).

Konvoluce u číslicových signálů

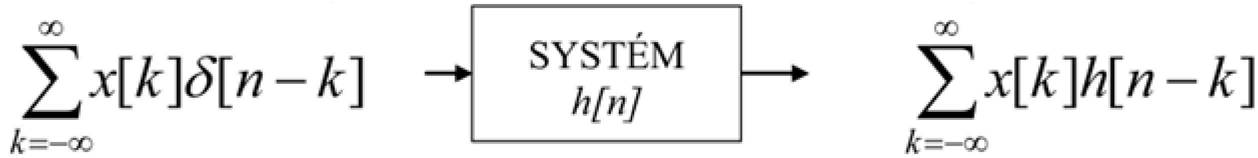
Konvoluce je matematická funkce postihující **interakci signálu a systému popsaného impulsní odezvou**. Při známé impulzní odezvě můžeme pomocí konvoluce stanovit odezvu na libovolnou vstupní posloupnost . Na vstup lineárního systému s impulsní charakteristikou je přiváděn vstupní signál , výsledkem je výstupní signál , který vznikl konvolucí.



$$x[n] * h[n] = y[n]$$

Libovolný vzorkovaný signál x[-n],...x[-1]...x[n] lze vyjádřit jako sled posunutých jednotkových pulsů násobených vždy příslušnou funkční hodnotou.

Potom odezva na signál musí být součet posunutých odezev na jednotlivé vzorky signálu.



Pro číslicové signály lze poměrně snadno spočítat metodou posuvného proužku, pomocí polynomiálního násobení nebo třeba v Matlabu. Příklad:

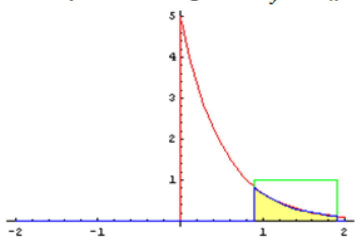
x[n] = 1 2 3 2 1, délka Nx = 5

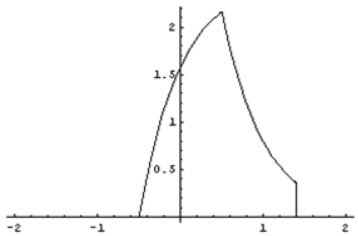
h[n] = 4 3 2 1 , , délka Nh = 4

$(1s^4+2s^3+3s^2+2s+1)\cdot(4s^3+3s^2+2s+1) = 4s^7+11s^6+20s^5+22s^4+18s^3+10s^2+4s+1$

počátek výsledného signálu: $S_y = S_x + S_h = 0 + 0 = 0$

délka výsledného signálu: $N_y = N_x + N_h - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$





Konvoluce u periodických signálů

Je-li signál periodický, výsledkem konvoluce je opět periodický signál se stejnou periodou.

Příklad: signál x = 2 1 3 2 1 3 2 1 3,

perioda Tx = 3 ,

funkce h = 5 6 3 4 1 2

1. Určíme konvoluci pro jednu periodu: (2 1 3).(5 6 3 4 1 2) = (10 17 27 29 15 17 5 6)

2. Konvoluci kompletního periodického signálu určíme „přeložením" výše uvedené sekvence do bloků délky .

10 17 27

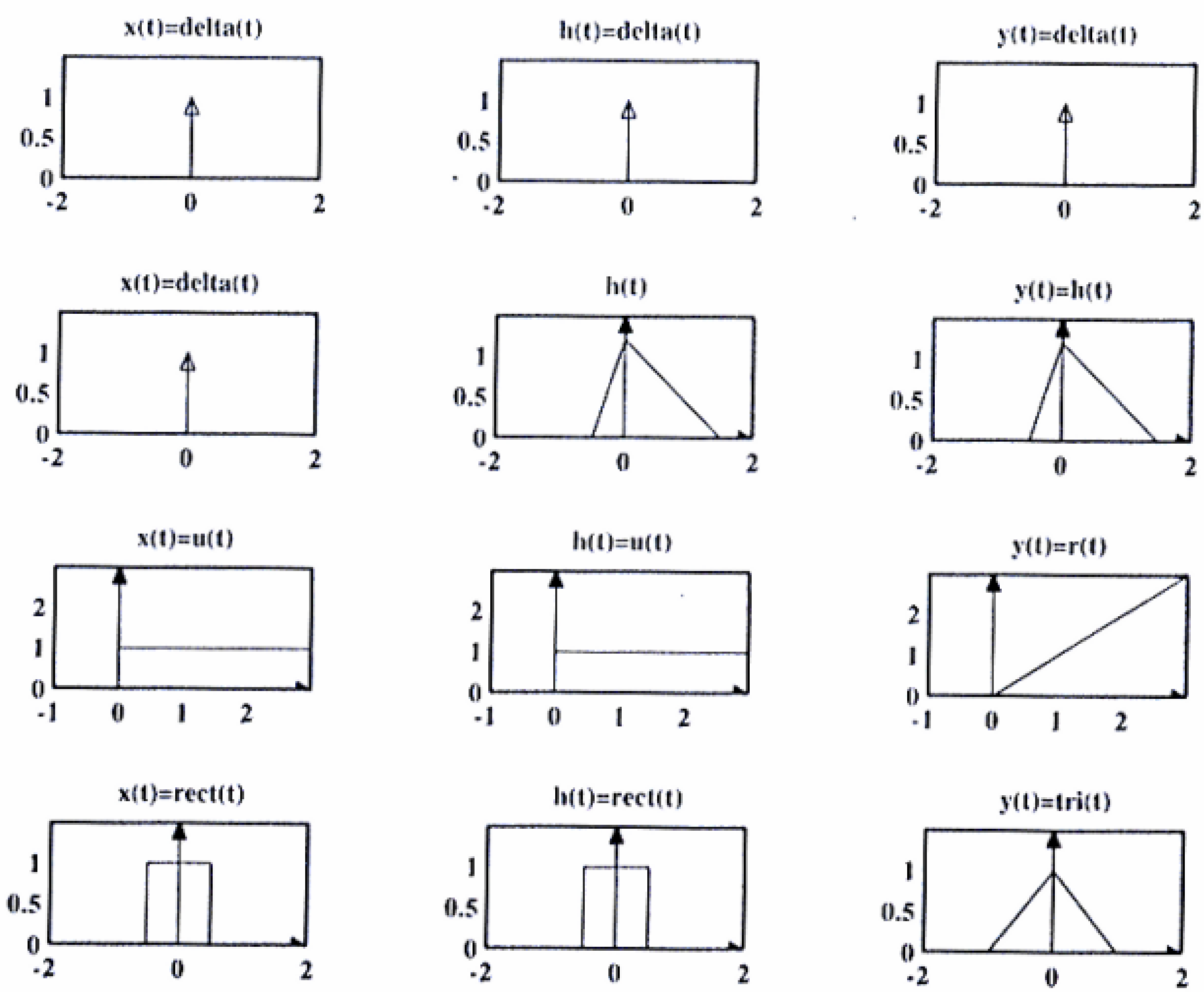
29 15 17

5 6

44 38 44 ← výsledný periodický signál

Některé důležité případy konvoluce

Je dobré si představit překrývání.



Autokorelační funkce

$$a[k] = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} x[n] * x[n+k]$$

Jde o **funkci - řadu hodnot** - závisejících na k. Není už to tedy jen jediný parametr, jako např. ZCR či energie. Ve výše uvedeném vztahu se počítá součin x[n] a x[n+1], tedy součin hodnot původního signálu a signálu posunutého o k vzorků. Díky autokorelační funkci lze odhalit periodicitu signálu. Autokorelační funkce u periodického signál o periodě N bude mít maxima pro k = N.

Korelační funkce aplikovaná na tentýž signál určuje míru podobnosti v rámci téhož signálu.

Je to funkce s parametrem t a představuje součet součinů vzorků signálu x s kopií téhož signálu posunutého o t.

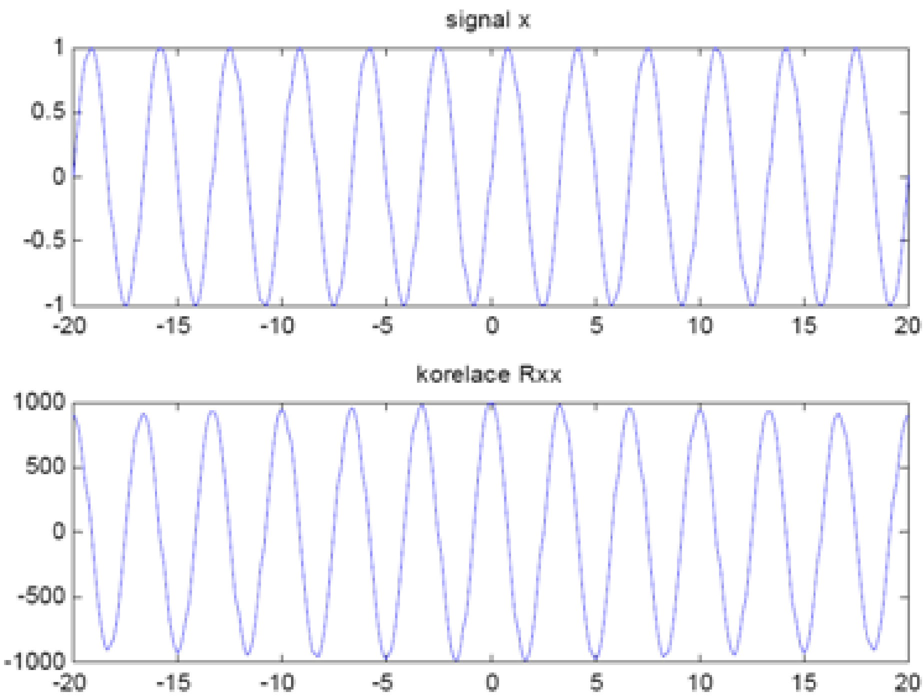
Pro spojité signály:

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)x(\lambda - t)d\lambda = x(t) * * x(t)$$

Pro číslicové signály:

$$R_{xx}(t) = \sum_{n=0}^{N} x(n)x(n-t) = x(n) * * x(n)$$

Ukázka autokorelační funkce periodického signálu



Autokorelační funkce je rovněž periodická, má maxima s periodou T. Signál je „sám sobě podobný“ vždy po každých T vzorcích. Autokorelační funkce je symetrická. Maximum má vždy pro t=0 . Periodická funkce má další maxima vzdálená vždy o T.

Praktické využití autokorelační funkce

- pro měření podobnosti dvou signálů,
- pro určení zpoždění t, při němž jsou si dva signály nejvíce podobné,
- při radarovém měření vzdálenosti objektů (princip: směrem k objektu se vyšle signál, přijme se jeho odraz, který ovšem není úplně totožný, korelační funkcí se zjistí, pro které t má korelační funkce maximum, z poloviny tohoto času se určí dráha uražená signálem),
- pro detekci skryté periodicity v zašuměných signálech.