6. Vlastní čísla a vlastní vektory matic. Způsob výpočtu a praktická interpretace.

Vlastní čísla a vektory - úvod + praktická interpretace

Wiki:
V matematice označuje *vlastní vektor* (anglicky eigenvector) dané transformace nenulový vektor, jehož směr se při transformaci nemění. Koeficient, o který se změní velikost vektoru, se nazývá *vlastní číslo* (anglicky eigenvalue) (*hodnota*) daného vektoru. Množina vlastních vektorů, které náleží stejnému vlastnímu číslu, se nazývá *vlastní prostor* transformace.

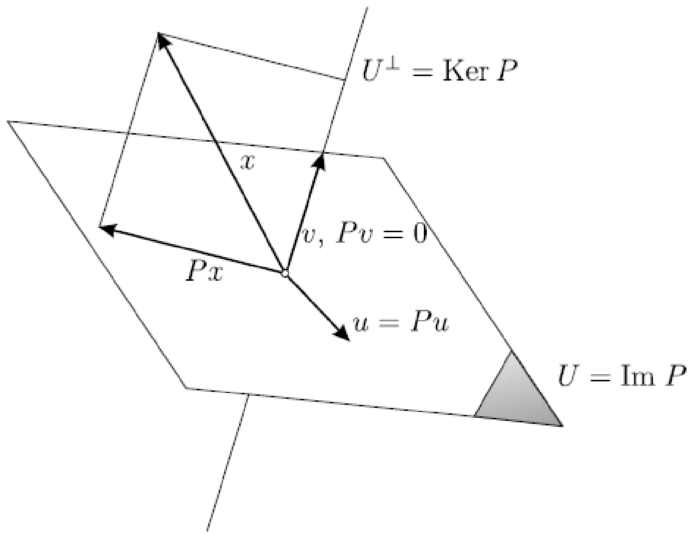
Skripta k předmětu ULA:
Je-li A: V -> V lineární zobrazení z prostoru V do prostoru V (někdy se takové zobrazení nazývá lineárním operátorem), pak je přirozeným požadavkem najít takovou bázi prostoru V , že je matice zobrazení A v této bázi co nejjednodušší, např. má následující strukturu

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & & \\ & & \boxed{A_3} & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

kde A_k jsou čtvercové matice malého řádu (nejlépe 1 nebo 2) a ostatní prvky matice jsou nulové. Problém najít bázi, aby v ní matice zobrazení měla diagonální tvar (kde A_k jsou skaláry), vede k pojmu vlastní číslo a vlastní vektor matice.

Definice: Nechť A je komplexní maticí typu n,n ($A \in C^{n,n}$). Jestliže platí $Ax = \lambda x$ pro jisté komplexní číslo λ a jistý nenulový vektor x (komplexní vektor typu n, $x \in C^n$) , potom číslo λ nazýváme
vlastním číslem matice A a vektor x vlastním vektorem příslušným k tomuto vlastnímu číslu. Množinu všech vlastních čísel nazýváme spektrem matice A.

Příklad popisující o co tam jde: Je-li P matice ortogonální projekce v prostoru R^3 na nějaký podprostor U (U je tedy buď rovina nebo přímka procházející počátkem), pak pro každý vektor $u \in U$ platí $Pu = u$, všechny vektory z U (s vyjímkou nulového vektoru) jsou vlastními vektory matice P příslušné vlastnímu číslu 1. Prostor $U^\perp$ je roven jádru projekce (nulovému prostoru matice P), a tedy každý vektor z ortogonálního doplňku U (s výjimkou nulového vektoru) je vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu 0.



Svými slovy bych to popsal (klidně mě kdokoli opravte, já to tak pochopil):
Máte matici která popisuje nějaký prostor (může to být rovina, přímka, nebo třeba kuželosečka) a hledá se takovej podprostor (ten je určenej vlastními vektory) prostoru ve kterém se nachází tak, že ho bude možné popsat pouze pomocí souřadnic na diagonále (vlastním čísly).
Prostě si to představte, že máte objekt ve 3D a snažíte se ho překreslit na 2D ty vektory, které zůstanou tak jak jsou k nim připadá vlastní číslo 1 (nebo jiné nenulové číslo v závislosti na tom jestli se neprotáhne nebo neotočí) a některé se zdeformují a ty mají vlastní číslo 0.
Osobně doufám, že se v tom nebudou moc šťourat a bude jim stačit vědět jak to vypočítat :)

Vlastní čísla a vektory - výpočet

Pro každý vlastní vektor čtvercové matice A platí Ax = λx, x != 0, a tedy po složkách máme soustavu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

kde $x_1,\dots, x_n$ jsou neznámé a λ parametr soustavy. Tato rovnice je ekvivalentní homogenní soustavě rovnic (A - λI)x = 0 s parametrem λ

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Protože je tato soustava homogenní, mohou nastat dvě možnosti:
a) matice je regulární a má tedy pouze triviální řešení. V takovém případě neexistuje nenulový vektor x != 0 takový, že by platilo Ax = λx; číslo λ není tedy vlastním číslem.
b) matice je singulární, a tedy její množina řešení obsahuje i nenulové vektory a její dimenze je nejméně 1. Číslo λ je tedy vlastním číslem matice a každý vektor z množiny řešení této homogenní soustavy je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu λ.

Hledáme-li vlastní čísla a vektory matice, musí být soustava s maticí A -λI singulární. Tento případ nastane právě když je nulový její determinant. Determinant matice

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

je polynom stupně n v proměnné λ, který nazýváme charakteristickým polynomem matice A. Je zřejmé, že vlastní čísla matice jsou jeho kořeny. Podle základní věty algebry má každý polynom n-tého stupně právě n (obecně komplexních kořenů), počítáme-li i jejich násobnosti.

Příklad A

Matice:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 8 & -1 & 6 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice A.

1) Výpočet charakteristicného polynomu:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ 8 & -1-\lambda & 6 \\ -4 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (5-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda) + 24 + 24 - 6(5-\lambda) \\ &- (-8)(-2-\lambda) - (-12)(-1-\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \end{aligned}$$

2) Určení vlastních čísel:
Dle definice jsou vlastními čísly, čísla která zaručí, že determinant bude roven 0.
Zde tedy: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ (= vlastní číslo 1 je dvojnásobné) a $\lambda_3 = 0$

3) Určení vlastních vektorů náležících k vlastním číslům:

Pro λ = 1:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Každý vektor x, pro který je Ax = x, musí splňovat podmínku x ϵ $[(0; 3; 1); (1; 4; 0)]_\lambda$ a tedy lineárně nezávislými vlastními vektory jsou například $x_1 = (1; 4; 0)$ a $x_2 = (0; 3; 1)$.

Postup lidskou řečí: hledáte v podstatě řešení soustavy lineárních rovnic, vzhledem k tomu, že na těch dvou spodních jsou samé nuly lze za ně doplnit parametr:

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

z = parametr u
y = parametr v
x = (v - 3u)/4

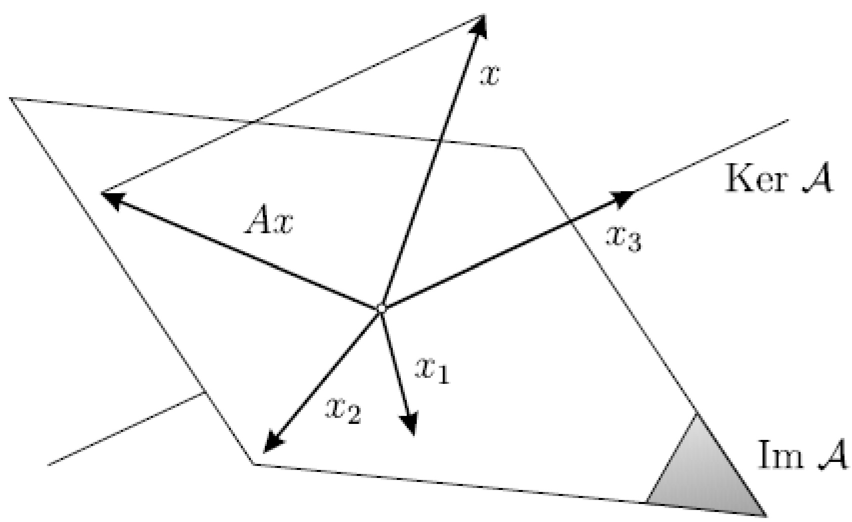
No a když to takhle máte tak jste získaly vektor (x,y,z) = ((v-3u)/4, v, u). Ale ten vám k ničemu není vy potřebujete dva konkrétní vektory, takže si za u i v dosadíte náhodný číslo a vypočítáte zbytek. Důležitý je aby ty vektory byly lineárně nezávislé = musíte dosadit taková čísla aby nešlo z jednoho vektoru ten druhej dopočítat.

Pro λ = 0:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 8 & -1 & 6 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jedním z možných řešení je vektor $x_3 = (1, 2, -1)$.

Geometrické interpretace:
Indukuje-li matice A zobrazení A (tato matice je maticí lineárního zobrazení A v standardních bázích), pak má matice zobrazení A v bázi x_1, x_2, x_3 diagonální tvar $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Tuto matici lze získat dosazením vlastních čísel na diagonálu nebo výpočtem $X*A*X^{-1}$, kde X je matice složená z vlastních vektorů.
Geometrická interpretace zobrazení A je, že se jedná o projekci na rovinu podél osy dané vektorem x_3.



Příklad B

Matice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

1) Charakteristický polynom: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$
2) Vlastní čísla: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
3) Vlastní vektory

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zde potřebujeme nalézt dva lineárně nezávislé vektory, nicméně to není možné jelikož ze spodní rovnice vyplývá že neznámá x se musí rovnat 0. Takže z rovnice lze vyčíst pouze vektor (0,1), další by na něm byly lineárně závislé. **Matice A není tedy diagonalizovatelná, nelze nalézt bázi, ve které by měla matice diagonální tvar.**

Specifické vlastnosti některých matic

Symetrické matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$$

Matice A se nazývá symetrická, jestliže $A^T = A$.
Symetrická matice má všechna **vlastní čísla reálná**.
Vlastní vektory příslušné navzájem různým vlastním číslům symetrické matice A jsou navzájem ortogonální (**kolmé**).

Ortogonální matice:
Matice A se nazývá ortogonální, jestliže $A^TA = I$.
1. Každá ortogonální matice A je regulární a platí $A^{-1} = A^T$
2. Sloupce ortogonální matice A tvoří ortonormální bázi prostoru R^n. Protože $A^TA = I$.
3. Podobně, řádky ortonormální matice tvoří ortonormální bázi R^n. Protože je $A^{-1} = A^T$, platí i vlastnost $AA^T = AA^{-1} = I$.

Ortogonální matice $A \in R^{n.n}$ má všechna **vlastní čísla** ležící **na jednotkové kružnici** $|\lambda| = 1$.

Příklad C - kuželosečka

Rovnice 5x2+6xy+5y2 = 8 popisuje nějakou kuželosečku v rovině a my máme vypočítat její typ a délky poloos.

Převedeme rovnici do standardní formy:

$$\frac{5}{8}x^2 + 2\frac{3}{8}xy + \frac{5}{8}y^2 = 1$$

pak ji lze psát pomocí symetrické matice jako výraz ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

nyní známým postupem (viz. výše) získáme vlastní čísla $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = ¼$ a vlastní vektory (1,-1) a (1,1). Vlastní čísla λ_1, λ_2 matice A určují typ kuželosečky a příslušné vlastní vektory x_1, x_2 určují směr hlavních poloos (asymptoty) kuželosečky. Tedy: