25. Fourierovy řady. Diskrétní Fourierova transformace, její použití a interpretace. Spektrum signálu, FFT. Číslicové filtry FIR a IIR. Filtrace v čase nebo prostoru.

- Součtem harmonických signálů lze vytvořit prakticky libovolný periodický signál – **harmonická syntéza**.
- Platí i obrácené tvrzení: Libovolný periodický signál lze rozložit na jednotlivé harmonické složky - **harmonická analýza.**

Fourierovy řady (Fourierův rozvoj):

- umožňují **rozložit** a **složit** jakýkoliv **periodický spojitý** signál na harmonické složky, které jsou násobkem základní frekvence 1/T.
- Existují i jiné možné rozvoje (řady) – FŘ představují **nejlepší** aproximaci signálu při daném počtu složek.
- Pro výpočet rozkladu je nutné, aby byl signál popsán **analytickou funkcí**.

Trigonometrický tvar Fourierových řad:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \right]$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \qquad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

- ***a_0*** představuje stejnosměrnou složku signálu
- každá složka je popsána kombinací funkcí ***sin*** a ***cos***
- počet složek je v obecném případě nekonečný
- pro daný signál je nutné spočítat tří koeficienty: ***a_k*** a **b_k** *a* ***a_0*** – nevýhoda

Exponenciální tvar Fourierových řad:

$$x(t) = \sum_{k=-\omega}^{\infty} X_k \exp(jk\omega_0 t)$$

- X_k je komplexní koef., definován i pro záporná čísla k
- vede na koncept dvoustranného spektra – pro kladné i záporné frekvence
- složky se zápornou frekvencí mají význam kosinusovek s opačnou fází
- vztahy mezi koeficienty FŘ v různých tvarech:

$$X_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \qquad c_k = 2|X_k|$$

Polární tvar Fourierovy řady:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \varphi_k = \arctan(b_k / a_k)$$

Fourierova transformace:
Zobecnění na neperiodické funkce

FŘ $$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt$$

FT $$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

- FT rozšiřuje koncept FŘ na obecnou **neperiodickou** funkci, obecná funkce má periodu rovnou nekonečnu
- Spektrum určené pomocí FT u neperiodické funkce je **spojité,** ne čarové (bodové) jako u periodických funkcí
- FT aplikovaná na periodický signál **dá stejný výsledek** jako FŘ.

Diskrétní Fourierovy řady:
Pouze exponenciální tvar

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi nk / N)$$

- DFŘ - **diskrétní (číslicové) Fourierovy řady**
- aplikovatelné na **konečný** signál daný výčtem vzorků
- pokud těchto *N* vzorků tvoří právě jednu periodu, pak pro číslicový signál dostaneme stejný výsledek, jaký bychom dostali aplikací FŘ na původní spojitý signál
- **DFT** – diskrétní Fourierova transformace – používá se pro výpočet spektra libovolného signálu
- **FFT** – rychlá metoda výpočtu DFT

Poznámky:

1. Je-li signál popsán *N* vzorky, stačí spočítat pouze prvních *N/2* hodnot spektra a tyto násobit dvěma. Dalších *N/2* hodnot jsou čísla komplexně sdružená a není třeba je počítat (víc info, viz Shannonův teorém).
2. Výpočtem podle výše uvedeného vztahu dostaneme *diskrétní spektrum*, nebo také *vzorkované spektrum* s hodnotami komplexních koeficientů na frekvencích *k.Fs/N*.
3. Spektrum můžeme počítat i pro k > N, dostaneme však stejné hodnoty jako pro základní interval -N/2 < k < N/2. Spektrum číslicových signálů je totiž ***periodické*** s periodou Fs.

Diskrétní fourierova transformace
Při analýze neznámých signálů neznáme jejich periodu, signály navíc nemusí být ani periodické, prakticky vždy tedy dojde k rozmazaní spektra (objeví se neexistující složky). Vztah pro výpočet je stejný jako u DFŘ.

Zpětná (inverzní) DFT

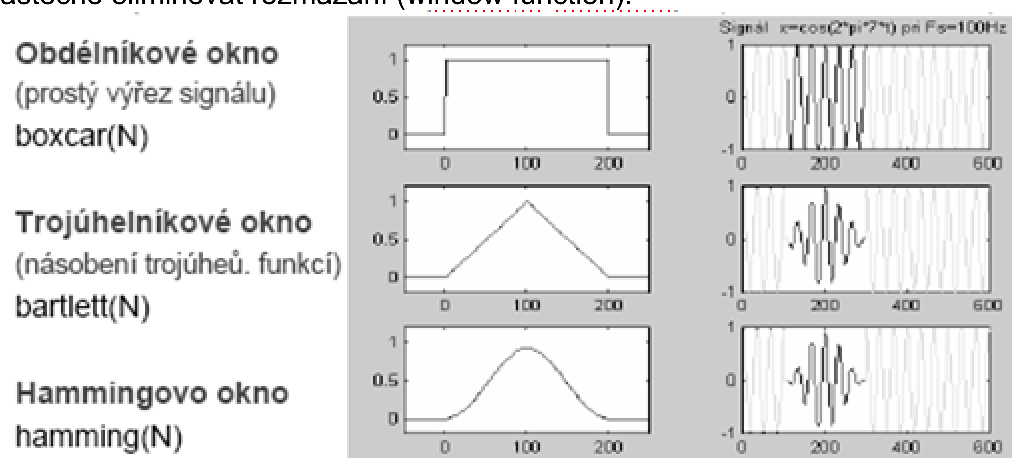
Převádí signál popsaný spektrem zpět do časové oblasti.

Vztahy pro DFT: a IDFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi nk / N) \qquad x[n] = \tfrac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] \exp(j2\pi nk / N)$$

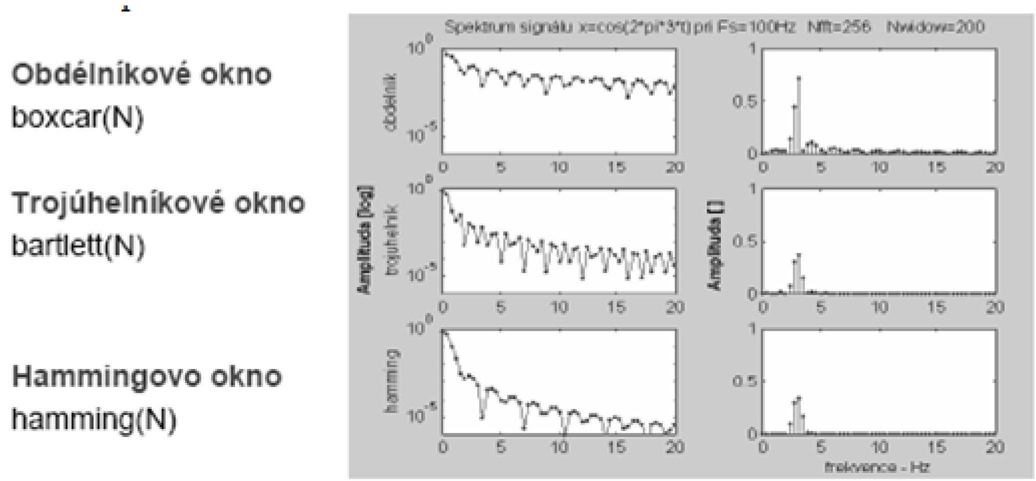
1. Vztah pro IDFT se liší od DFT pouze ve znaménku exponenciální funkce. Normalizační koeficient 1/N se někdy uvádí u DFT, jindy u FFT.
2. Zde uvádíme vztah používaný v Matlabu. Do IDFT vstupuje vždy N hodnot dvoustranného spektra, tj. nejenom N/2 hodnot jednostranného spektra.
3. Pokud na signál aplikujeme nejprve DFT a následně IDFT, dostaneme tentýž signál. Vyplývá z toho, že popis signálu v časové oblasti i ve frekvenční oblasti je ekvivalentní co do úplnosti informace. (Ve spektrální oblasti však musíme vždy uvažovat jak modul, tak i fázi.)

Okénkovací funkce – řeší otázku, jak nejlépe provést výřez neperiodického signálu a alespoň částečně eliminovat rozmazání (window function).



Vliv okénkovacích funkcí

Provést **výřez** části signálu znamená **násobit** signál obdélníkovou funkcí. **Násobení v čase se převádí na konvoluci ve spektru** (konvoluce spektra signálu se spektrem okna). Obdélníkové okno má z tohoto pohledu nejméně příznivé spektrum.



<u>FFT – optimalizovaný výpočet DFT</u>

FFT (Fast Fourier Transform) – rychlý algoritmus výpočtu DFT

- poskytuje úplně stejné hodnoty jako DFT, ale mnohem rychlejším způsobem
- vysoké rychlosti je dosaženo optimalizovaným výpočtem,
- ten bere v úvahu např. symetričnost exponenciálních členů *exp* $(-j2\pi nk/N)$
- dále podobnost mezi lichými a sudými koeficienty, atd.
- nejrychleji funguje v případech, že N je mocninou 2
- např. pro N = 1024 je FFT cca 200 rychlejší než DFT

Spektrum:

= závislost amplitud a fází harmonických složek na frekvenci

Amplitudové spektrum *A jako funkce f*

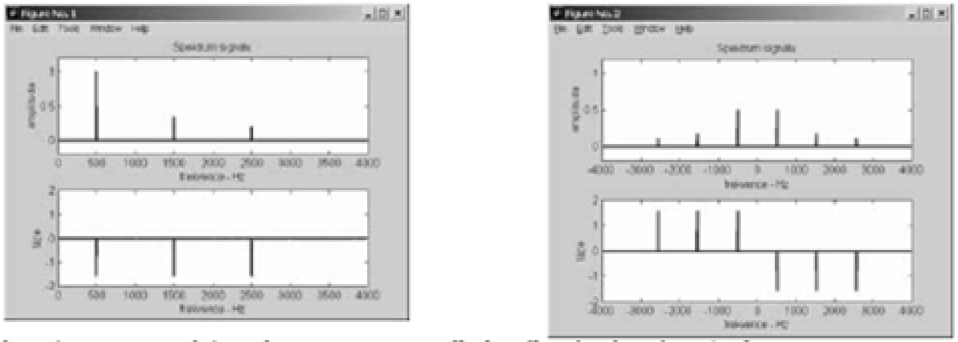
Fázové spektrum *Φ jako funkce f*

poznámka: fáze je vztažena vůči kosinové funkci!

Jednostranné spektrum vychází z polárního tvaru a zobrazuje pouze kladné frekvence.

Dvoustranné spektrum vychází z exponenciálního tvaru a zobrazuje kladné a záporné frekvence (signál o záporné frekvenci má oproti signálu s kladnou frekvencí opačnou fázi).

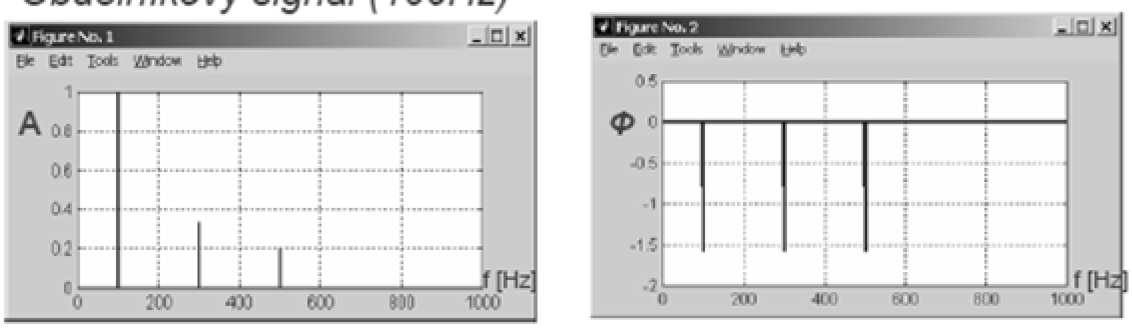
jednostranné spektrum dvoustranné spektrum



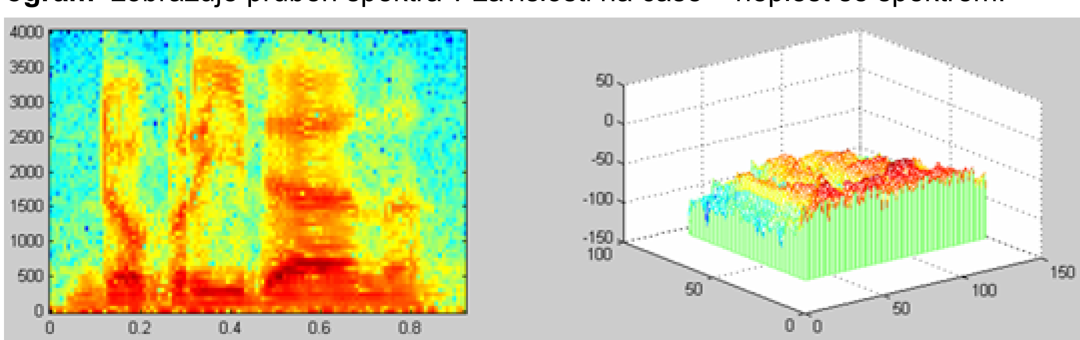
Oba typy spekter jsou samozřejmě ekvivalentní.

Příklady: $x(t) = \cos(2\pi ft - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3}\cos(2\pi 3 ft - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{5}\cos(2\pi 5 ft - \frac{\pi}{2})$

Obdélníkový signál (100Hz)



Spektrogram zobrazuje průběh spektra v závislosti na čase – neplést se spektrem!



číslicové filtry FIR a IIR

Systémy upravující signál požadovaným způsobem

- Např. typ DP, HP, PP, PZ, zpožďovač, derivátor, atd.

- Zasahují vždy do **časového** i **frekvenčního** průběhu signálu (zásah pouze do časové nebo pouze do frekvenční charakteristiky není možný).
- U analogových signálů je lze realizovat obvodově
- U číslicových signálů pomocí speciálních číslicových obvodů a signálových procesorů (DSP – digital signal processor) či čistě programově na běžném počítači.

Číslicový filtr lze sestavit ze tří bloků: spoždovačka, sčítačka, násobička

Systémy typu FIR (Final Impulse Response)
Systémy s **konečnou** impulzní odezvou, (na jednotkový impulz reagují signálem s konečným počtem vzorků).
FIR neobsahují zpětnou vazbu (aktuální stav výstupu nezávisí na jeho předchozích stavech), mají lineární fázi, což způsobuje konstantní skupinové zpoždění. Všechny složky signálu v kmitočtovém pásmu se dostanou na výstup se stejným zpožděním. K filtrům FIR nenalezneme ekvivalentní analogové řešení.

Časový popis pomocí diferenční rovnice:

$$y[n] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \cdots B_M x[n-M]$$

Časový popis pomocí impulzní odezvy:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k] x[n-k]$$

(Impulsní odezva trvá M vzorků)

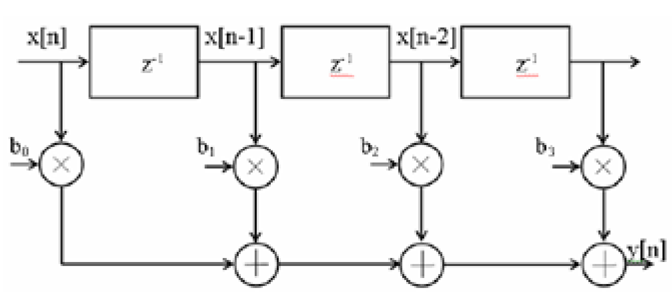
Popis pomocí přenosové funkce (Z-transformace) a frekvenční charakteristiky:

$$H(z) = B_0 + B_1 z^{-1} \cdots B_M z^{-M} \qquad H(F) = B_0 + B_1 e^{-j2\pi F} \cdots B_M e^{-j2\pi FM}$$

$$\text{platí že} \qquad B_k = h[k]$$

$$\mathbf{z = e^{j2\pi F}}$$

Bloková realizace:



Příklady FIR systémů:
zpožďovač: *y*[*n*] = *x*[*n* − *k*]
zesilovač: *y*[*n*] = *k*.*x*[*n*]
derivátor: *y*[*n*] = *x*[*n*] − *x*[*n* −1]
průměrovací filtr 3. řádu-nekauzální: *y*[*n*] = (*x*[*n* −1] + *x*[*n*] + *x*[*n* +1]) /3

průměrovací filtr 3. řádu-kauzální: $y[n] = (x[n] + x[n-1] + x[n-2])/3$
Průměrovací filtr 11. řádu – nekauzální:

$$y[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=0}^{10} x[n-k]$$

Analýza chování filtru (FIR) v Z-rovině:
FIR filtr:
Záporné mocniny lze eliminovat vytknutím z^{-M}

$$H(z) = z^{-M}(B_0 z^{M} + B_1 z^{M-1} \cdots B_M) = \frac{(B_0 z^{M} + B_1 z^{M-1} \cdots}{z^{M}}$$

Polynom v čitateli lze dále rozdělit na činitele (kořeny)

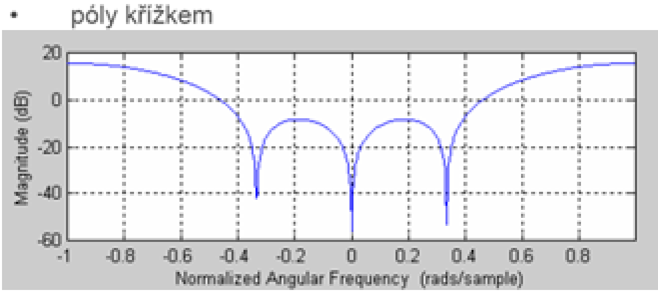
$$H(z) = z^{-M}(B_0 z^{M} + B_1 z^{M-1} \cdots B_M) = \frac{(B_0 z^{M} + B_1 z^{M-1} \cdots}{z^{M}}$$

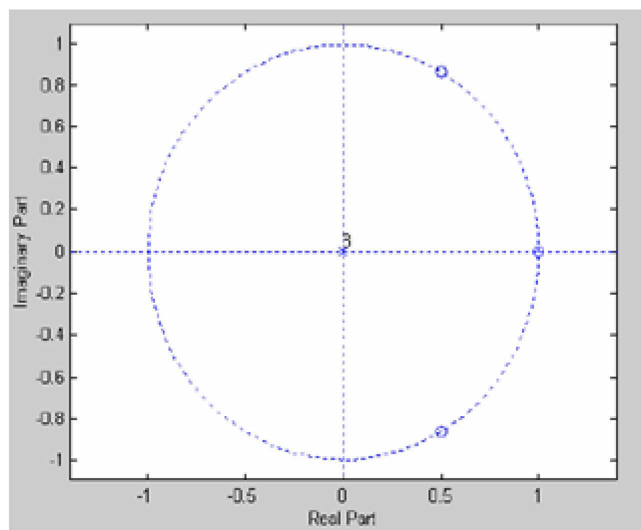
Funkce ve tvaru zlomku má „**nuly**“ v čitateli (*z=z1, z=z2*,..), kde nabývá nulové hodnoty a „**póly**“ ve jmenovateli (z=0), kde nabývá nekonečně velké hodnoty.
Jsou-li tyto nuly a póly poblíž jednotkové kružnice, ovlivňují výrazným způsobem přenosové a frekvenční charakteristiky systému (nuly – útlum, póly – zesílení).

Příklad: $H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}$

$$H(z) = \frac{(z-1)(z-e^{j\pi/3})(z-e^{-j\pi/3})}{z^3}$$

Funkce má 3 nuly a 1 trojnásobný pól v počátku
V MATLABu je snadno získáme funkcí **zplane**
- nuly jsou označeny kolečkem
- póly křížkem





Filtr IIR
Filtr s nekonečnou impulsní odezvou. Vyžadují alespoň jednu zpětnovazební smyčku (aktuální stav výstupu závisí i na předchozím stavu výstupu). Jsou to rekurzivní filtry. Přenos je tvořen podílem polynomů (viz přenosová funkce).

Časový popis pomocí diferenční rovnice:

$$y[n] + A_1 y[n-1] \cdots A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \cdots B_M x[n-M]$$

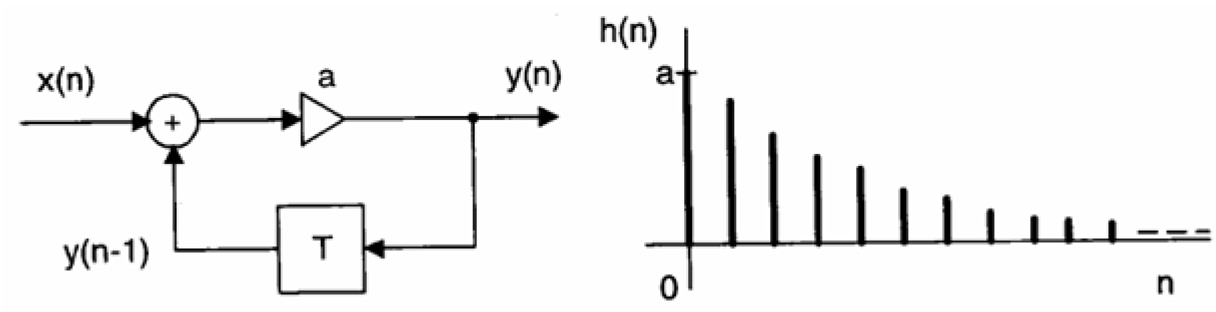
Přenosová funkce vyjádřená pomocí Z-transformace:

$$H(z)=\frac{B_0+B_1z^{-1}\cdots B_Mz^{-M}}{1+A_1z^{-1}\cdots A_Nz^{-N}}=z^{N-M}\frac{(z-z_1)(z-z_2)..(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)..(z-p_N)}$$

Frekvenční charakteristiky:

$$H(F)=\frac{B_0+B_1e^{-j2\pi F}\cdots B_Me^{-j2\pi FM}}{1+A_1e^{-j2\pi F}\cdots A_Ne^{-j2\pi FN}}$$

Bloková realizace:



Příklad IIR filtru a jeho impulsní charakteristiky.

IIR mají podstatně nižší řád než FIR. Takže reagují rychle.

Filtr IIR lze realizovat: Přímou formou
Kaskádní formou
Paralelní formou

Porovnání filtrů FIR s IIR:
FIR

Výhody:
- Vždy stabilní
- Mohou mít konstantní skupinové zpoždění (lineární průběh fázové char.)
- Jsou vhodné pro adaptivní algoritmy
- Filtry FIR jsou jednodušší pro návrh a realizaci

Nevýhody:
- Pro vysokou strmost nutný vysoký řád => mnoho koeficientů => náročnost na výpočet
- Velké zpoždění pří zpracovávání vstupního vzorku
- Velké nároky na paměť při výpočtu koeficientů a stavových proměnných
- Neexistuje analogový ekvivalent.
- Průběh je vzdálen ideálním filtrům

IIR

Výhody:
- Malé zpoždění při zpracovávání vstupního vzorku
- S filtry IIR lze dosáhnout **velmi strmé přechody** mezi propustným a nepropustným pásmem, a to i při malém řádu filtru.
- Malé nároky na paměť při výpočtu koeficientů a stavových prom.
- Metody návrhu využívající vlastností analogových filtrů

Nevýhody: - Filtr je **rekursivní** (se zpětnými vazbami), může být **nestabilní** (pro amplitudově omezený vstupní signál by generoval signál s neustále rostoucími amplitudami). Filtr IIR bude stabilní, pokud všechny jeho póly leží uvnitř jednotkové kružnice (póly = kořeny polynomu ve jmenovateli přenosové fce.)
- Nemohou mít lineární fázovou kmitočtovou charakteristiku v celém rozsahu.
- Spatně použitelné pro adaptivní zpracování

Vytvoření pásmové propusti (kaskádní forma) a pásmové zádrže (paralelní forma).