2. Derivace a diferenciál. Integrál. (Definice, výpočty, praktický význam.)

Derivace

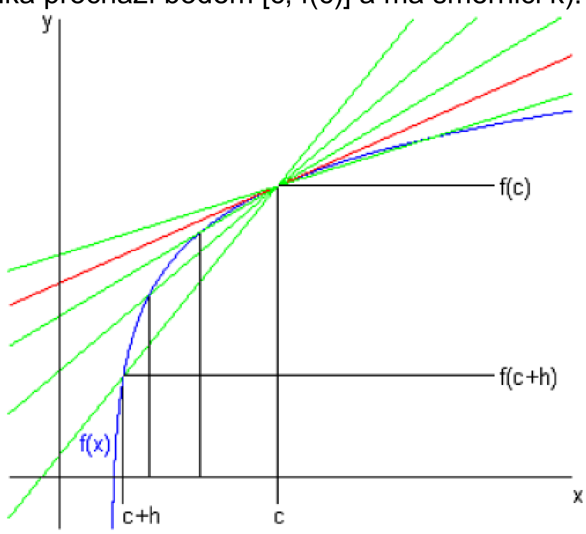
Definice:
Nechť je dána funkce f a zvolme bod [c; f(c)]. Nyní se pokusíme zavést pojem tečny ke křivce y = f(x) v bodě [c; f(c)]. Zvolíme-li na křivce y = f(x) další libovolný bod [c+h; f(c+h)], potom přímka procházející oběma body (sečna) má směrnici:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{(c+h)-c} = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Blíží-li se nyní bod [c + h; f(c + h)] k bodu [c; f(c)], tedy blíží-li se h k nule, potom na obrázku vidíme, že příslušná sečna se blíží k červeně znázorněné limitě. Existuje-li vlastní limita:

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

potom tečnou ke křivce y = f(x) v bodě [c; f(c)] budeme rozumět přímku určenou rovnicí y - f(c) = k(x - c) (tato přímka prochází bodem [c; f(c)] a má směrnici k).



Vzhledem k významu, který má $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ v matematice i fyzice, můžeme po motivačních úvahách z předešlého odstavce přistoupit k definici derivace:

Definice 5.1 *Nechť f je funkce a x číslo. Limitu*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

nazveme **derivací funkce f má v bodě x** *a označíme ji symbolem $f'(x)$. Obdobně nazýváme limitu*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad \left(\textit{resp.} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

derivací zprava (zleva) funkce f v bodě x. *Označovat je budeme symbolem $f'_+(x)$, (resp. $f'_-(x)$). Neexistuje-li první, (popř. druhá, popř. třetí) z těchto limit, říkáme, že* **funkce f nemá v bodě x derivaci, (popř. derivaci zprava, popř. derivaci zleva).** *Výše zmíněné limity mohou být vlastní nebo nevlastní, pak mluvíme o* **vlastní nebo nevlastní derivaci.**

Praktický význam:

Výpočet derivací se objevuje v obrovském množství situací, jak v matematice samé, tak i v jejích aplikacích, např. ve fyzice.

1. Výpočet rovnice tečny a normály ke křivce:
   tečna k funkci y = f(x) v bodě $[x_0, y_0]$ má rovnici **$y - y_0 = f'(x_0) * (x-x_0)$**,
   normála k funkci y = f(x) v bodě $[x_0, y_0]$ má rovnici **$y - y_0 = (1/f'(x_0)) * (x-x_0)$**.
2. Určení spojitosti funkce (má-li funkce v bodě a první derivaci je funkce v bodě a spojitá).
3. Určení lokálních extrémů (v bodě kde má funkce první derivaci rovnou nule se nachází tzv. stacionární bod který může a nemusí být extrémem, v bodě kde funkce derivaci nemá je nutné použít jiná kritéria).
4. Analýza chování funkce (
   v bodech, kde je první derivace kladná, je funkce rostoucí,
   v bodech, kde je první derivace záporná, je funkce klesající,
   v bodech, kde je druhá derivace kladná, je funkce konvexní,
   v bodech, kde je druhá derivace záporná, je funkce konkávní,
   v bodech, kde je druhá derivace nulová, se mohou vyskytovat inflexní body).
5. Fyzika (výpočet rychlosti (okamžitá rychlost), zrychlení, ryvu).
6. Diferenciální rovnice (viz. otázka č. 4 :))

Vzorce:

Věta 12.6. Základní vzorce pro derivování

1. $(c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R};$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad a \in \mathbb{R}, x > 0;$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, x \in \mathbb{R};$
4. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x;$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0;$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad x > 0, a > 0, a \neq 1;$
7. $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R};$
8. $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R};$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$
10. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq 0 + k\pi;$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1);$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1);$
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$
14. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Věta 12.7. Základní pravidla pro derivování

1. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R};$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$ **(derivace součinu);**
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2},$ **(derivace podílu);**
5. $(f[\varphi(x)])' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x),$ **(derivace složené funkce);**
6. $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(\mathrm{e}^{g(x) \cdot \ln f(x)}\right)'.$

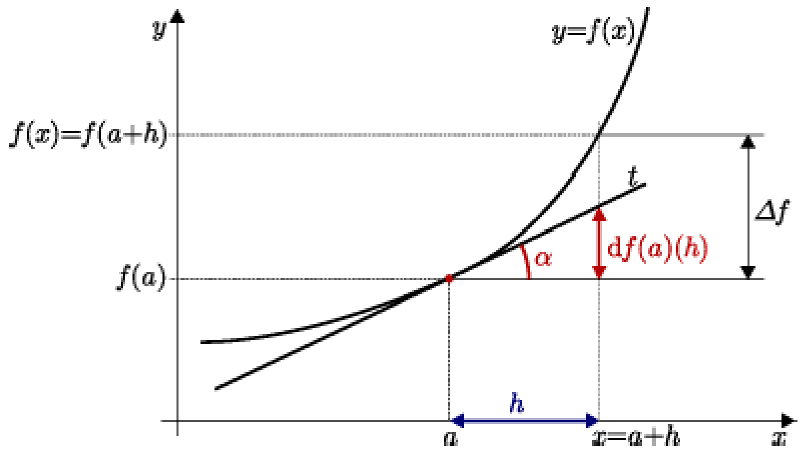
$f'(x_0) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x_0))}$ (O derivaci inverzní funkce.)

Příklady:

Řešené: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=780
Neřešené: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=870

Diferenciál

Definice:
Pojem diferenciálu funkce y = f(x) v bodě a lze nejnázorněji vysvětlit pomocí obrázku.



Jde o přírůstek funkční hodnoty na tečně. To vlastně znamená, že funkce je v okolí bodu a aproximována tečnou a k přibližnému stanovení funkční hodnoty v bodě "blízko" bodu a nám stačí určit hodnotu na tečně.
Definice: Nechť funkce y = f(x) má v bodě a spojitou derivaci (tj. existuje f'(a)). Diferenciálem funkce **f(x)** v bodě **a** při přírůstku **h** (reálné číslo) nazýváme číslo **df(a)(h) = f'(a)h**.

Pokud pro výpočet funkční hodnoty v bodě a + h použijeme diferenciál, dopustíme se určité chyby: $R(h) = |\Delta f(a) - \mathrm{d}f(a)(h)|$

a platí: $\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0.$

Praktický význam:
1. Odhad hodnot složitých na výpočet.
2. Určení chyby, které se dopustíme, počítáme-li hodnotu nějaké veličiny z jiné veličiny, která byla změřena s určitou chybou.

Ukázka: Výpočet hodnoty arctg(0,97):
Zvolíme určitou funkční hodnotu pro kterou je výpočet snadný a zároveň je co nejblíže hodnotě 0,97 v našem případě tedy bod a=1. Přírůstek h = x - a = 0,97 - 1 = -0,03.
Vypočteme diferenciál df(a)(h) = ½ * (-0,03).
Hodnota arctg(1) = π/4
Z toho tedy arctg(0,97) = π/4 + ½ * (-0,03) = cca 0,77
Příklady:
Jen první část, druhá je o Taylorově polynomu
Řešené: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=768
Neřešené: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=882

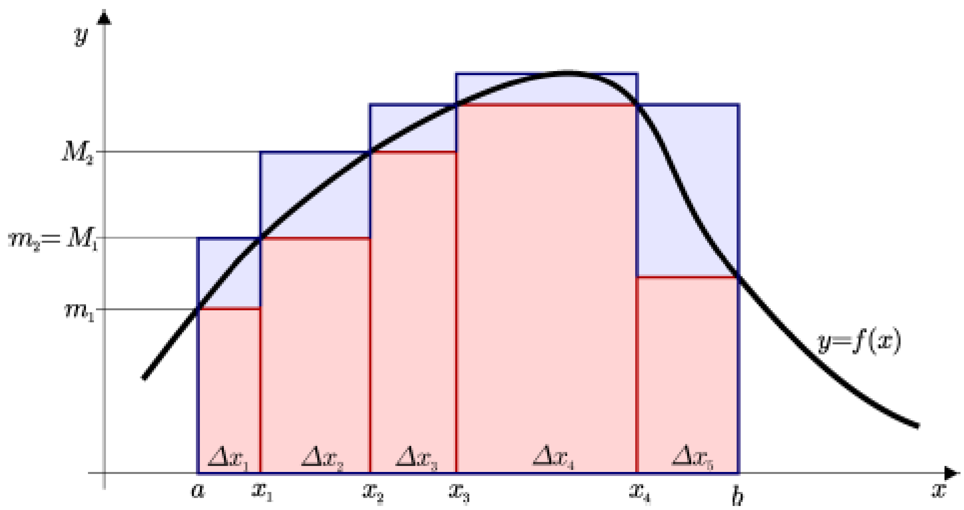
Integrál

Definice (neurčitý integrál):
Říkáme, že F(x) je v intervalu (a, b) ***primitivní funkcí*** k funkci f(x), jestliže pro všechna $x \epsilon (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$.
Ke každé funkci f(x) spojité na (a, b) existuje v (a, b) primitivní funkce. Je jich dokonce nekonečně mnoho. Je-li F(x) jedna z nich, pak všechny ostatní mají tvar F(x) + C, kde C je integrační konstanta, která je libovolná.
Používáme formální zápis

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

∫ f(x) dx znamená množinu všech primitivních funkcí k funkci f(x) a nazývá se neurčitý integrál funkce f(x).
Definice (určitý Riemannův integrál):
Nechť je dána funkce y = f(x), která je spojitá v uzavřeném intervalu ‹a, b›.

1. Rozdělme interval ‹a, b› body $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ na n podintervalů $\blacktriangle x_1, \blacktriangle x_2, \ldots, \blacktriangle x_n$, které nemusí mít stejnou délku. Toto dělení označme d. Délky těchto podintervalů označme stejně, tj. $\blacktriangle x_1, \blacktriangle x_2, \ldots, \blacktriangle x_n$.



2. Protože f(x) je spojitá v ‹a, b›, nabývá v něm své maximální hodnoty M a minimální hodnoty m. f(x) je ovšem spojitá také v každém podintervalu x_i a nabývá v něm své maximální hodnoty M_i a minimální hodnoty m_i (pro i = 1, 2,...,n-1). Platí: $m<m_i<M_i<M$.

3. Sestrojme k zavedenému dělení d tzv. horní integrální součet S(d)

$$S(d) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

   a dolní integrální součet s(d)

$$s(d) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

   Na obrázku je vidět, že S(d) je součet plošných obsahů modrých a s(d) je součet plošných obsahů červených obdélníků.
1. Poznamenejme, že hodnota S(d) a s(d) závisí na zvoleném dělení d. Zaveďme horní integrál z funkce f(x) na intervalu ‹a, b› jako infimum množiny všech horních součtů při všech možných děleních d

$$\inf_d S(d) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

   a dolní integrál z funkce f(x) na intervalu ‹a, b› jako supremum množiny všech dolních součtů při všech možných děleních d

$$\sup_d s(d) = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

   .
1. Je-li

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

   pak společné hodnotě těchto integrálů říkáme integrál z funkce f(x) v intervalu ‹a, b› a o funkci f(x) říkáme, že je v ‹a, b› integrovatelná (tj. integrace schopná) ve smyslu Riemannovy definice.

Vybrané vlastnosti Riemannova integrálu (zbytek viz. skripta Finěk)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Praktický význam:

Výpočty povrchů, objemů, obsahů, délek např.:

1. Obsah plochy vymezené grafem
2. Objem rotačního tělesa
3. Obsah rotační plochy

Vzorce:

Věta 18.6. Přehled základních integračních vzorců

1. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad x > 0, n \in \mathbf{R}, n \neq -1.$
2. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$
3. $\int e^x \, dx = e^x + C.$
4. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1.$
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + C, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}.$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$
9. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arccotg} x + C_2.$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2, \quad x \in (-1, 1).$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + C, \quad a > 0.$
12. $\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$
13. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)|.$

Integrační metody:

Věta 18.8. Existují-li k funkcím $f_1(x), f_2(x), f(x)$ primitivní funkce, pak

1. $\int (f_1(x) \pm f_2(x)) \, dx = \int f_1(x) \, dx \pm \int f_2(x) \, dx.$
2. $\int k \cdot f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx, \quad$ kde k je konstanta.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt \stackrel{c}{=} \int f(x) \, dx \stackrel{c}{=} F(x) \stackrel{c}{=} F(\varphi(t))$$ (O substituci.)

Věta 18.13. Metoda per partes (po částech)

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx.$$

Racionální lomenou funkci integrujeme pomocí rozkladu na parciální zlomky.

Parciální zlomky si můžeme rozdělit do tří skupin:

1) Je-li ve jmenovateli výraz ***ax + b***. Odpovídá mu rozklad na:

$$\frac{A}{ax+b}$$

2) Je-li ve jmenovateli výraz **(*ax + b*)*^k^***. Odpovídá mu rozklad na:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

3) Je-li ve jmenovateli výraz $ax^2 + bx + c$, kde $b^2 - 4ac < 0$. Odpovídá mu rozklad na:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Integrujeme-li goniometrické funkce, tj. $\int R(\sin x, \cos x)$, pak nejčastěji postupujeme substitucí. O vhodné volbě substituce rozhodneme až u konkrétního příkladu. Určitá pravidla ovšem platí obecně:

$R(\sin^n x, \cos^m x)$, kde m je sudé číslo a n je liché číslo ... substituce $\sin x = t$;

$R(\sin^n x, \cos^m x)$, kde m je liché číslo a n je sudé číslo ... substituce $\cos x = t$;

$R(\sin^n x, \cos^m x)$, kde m je liché číslo a n je liché číslo ... substituce $\operatorname{tg} x = t$. Ve všech případech lze využít tzv. univerzální substituci $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Příklady:

Neurčitý:

Řešené: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=748

Neřešené: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=885

Určitý:

Neřešené: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=886

Aplikace určitého integrálu:

Vzorce: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=226

Řešené: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=757

Neřešené: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=874