Výpočty v počítačové grafice

Petr Tobola

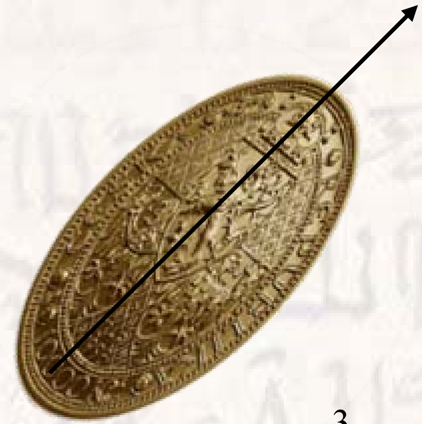
Masarykova Universita

Část I.

Algebra v počítačové grafice

Lineární algebra ve 2D

- Příprava
- Lineární zobrazení
- Lineární systémy
- Vlastní vektory



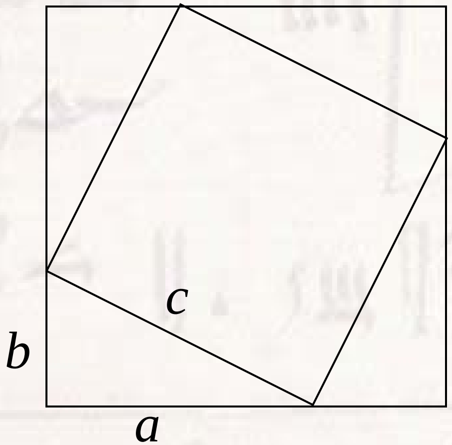
Příprava

- Body, vektory.
- Barycentrické souřadnice
  - Vážená suma bodů, kde suma koeficientů je rovna jedné se nazývá Barycentrická kombinace.
  - Koeficienty se nazývají Barycentrické souřadnice.
- Sčítání vektorů.
- Velikost vektoru. $\|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2$
- Normalizace.
- Lineární závislost (nezávislost) vektorů
  - Dva vektory popisují rovnoběžník. Pokud má nulovou plochu, pak jsou lineárně závislé.
- Lineární kombinace (lineárně nezávislých) vektorů
  - Dva lineárně nezávislé vektory mohou být použity k zápisu jiného vektoru u=*r*v + *s*w
- Skalární součin $u \cdot v = \left(u_1 v_1 + u_2 v_2\right)$

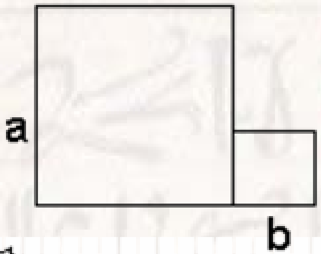
Příprava

Pythagorova věta

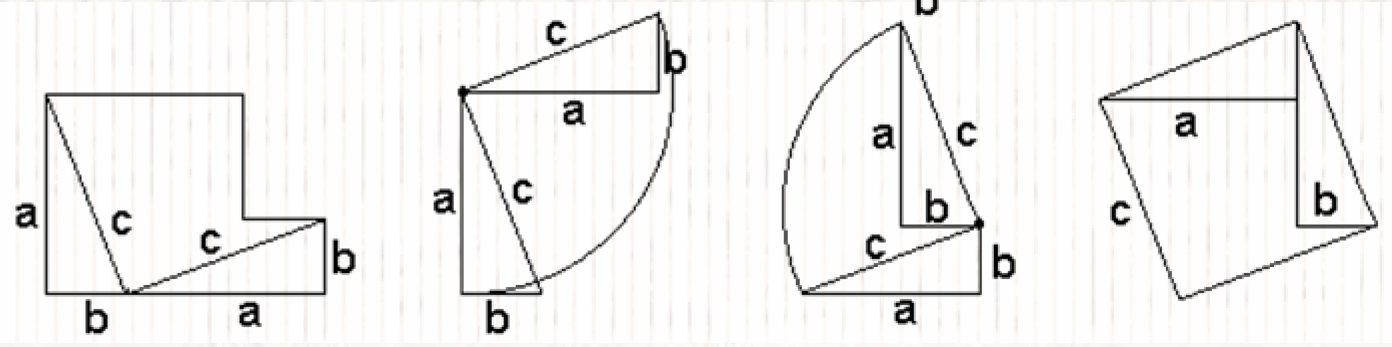
1)



$$(a+b)^2 = 4ab/2 + c^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$



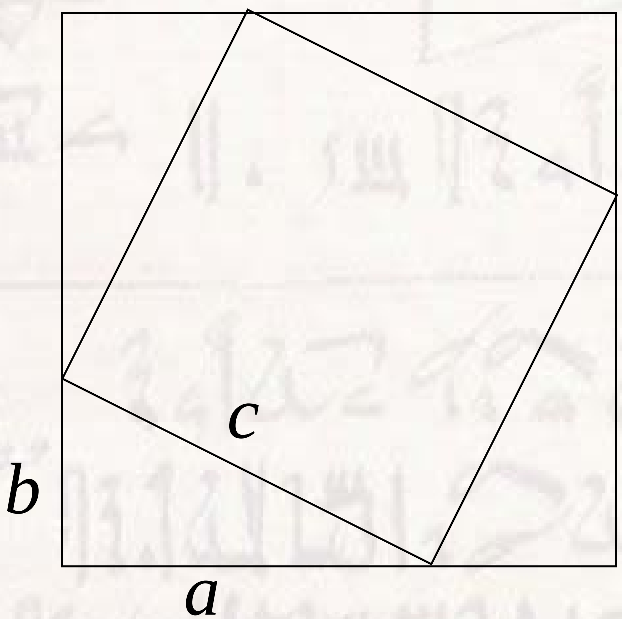
2)

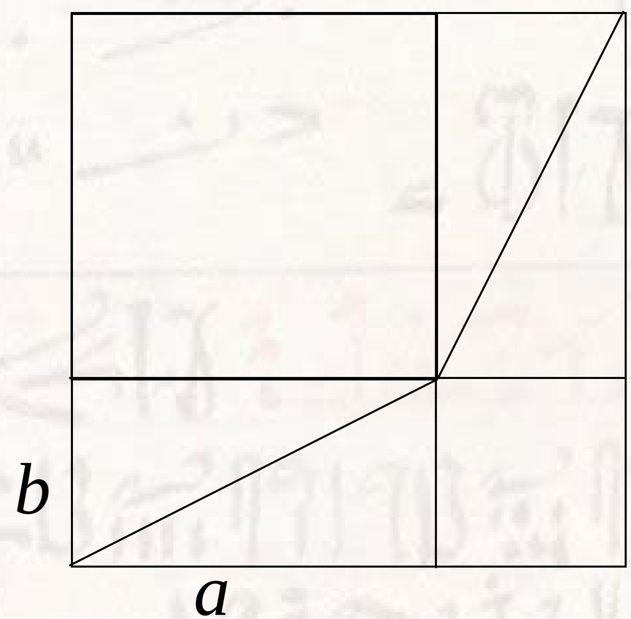


Příprava

Pythagorova věta

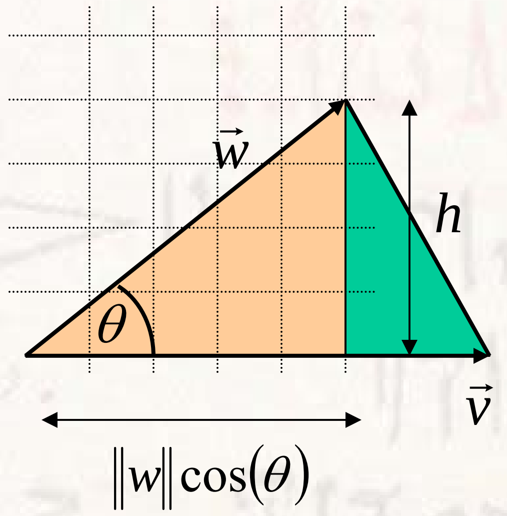
3)





Přípravа

- Skalární (scalar, dot, inner) součin.



Nejprve

$$h = \|w\|\sin(\theta)$$

$$h^2 = \|w\|^2 \sin^2(\theta)$$

Využijeme identity :

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Obdržíme :

$$h^2 = \|w\|^2 \left(1 - \cos^2(\theta)\right)$$

S využitím Pythagorovy v.

$$h^2 = \|v - w\|^2 - \left(\|v\| - \|w\|\cos(\theta)\right)^2$$

Dohromady :

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|\cos(\theta)$$

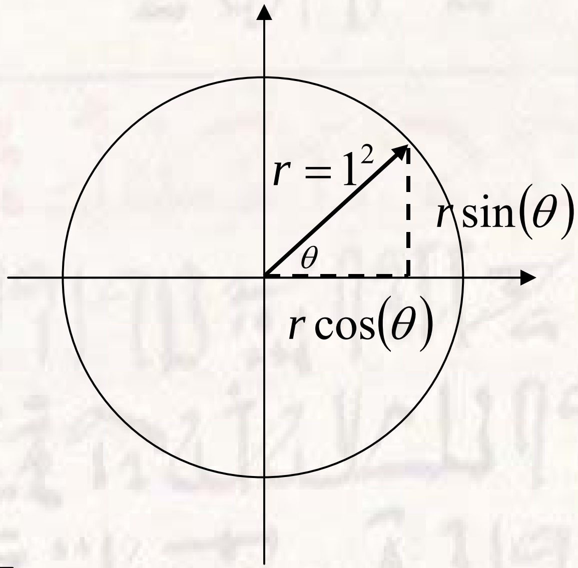
tj. Cosínová v.!!

$$\|v - w\|^2 = (v - w)\cdot(v - w)$$

$$= \|v\|^2 - 2v\cdot w + \|w\|^2$$

Spolu s Cosínovou v.

$$v \cdot w = \|v\|\|w\|\cos(\theta), \quad \cos(\theta) = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$$



Příprava

Dokončení:

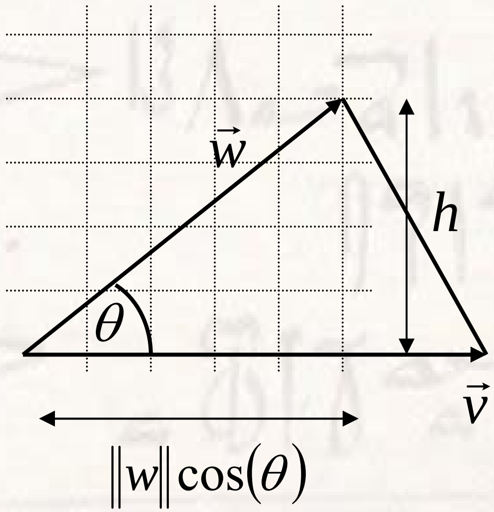
$$\|v-w\|^2 = (v-w)\cdot(v-w)$$

$$= (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2$$

$$= v_1^2 + w_1^2 - 2v_1 w_1 + v_2^2 + w_2^2 - 2v_2 w_2$$

$$= \left(v_1^2 + v_2^2\right) - 2\left(v_1 w_1 + v_2 w_2\right) + \left(w_1^2 + w_2^2\right)$$

$$= \|v\|^2 - 2v\cdot w + \|w\|^2$$



Ortogonální projekce:

$$u = \left(\|w\|\cos(\theta)\right)\frac{v}{\|v\|} = \frac{v\cdot w}{\|v\|^2}v$$

Příprava

Cauchy-Schwartzova nerovnost

$$v \cdot w = \|v\|\|w\|\cos(\theta)$$

$$(v \cdot w)^2 = \|v\|^2\|w\|^2 \cos^2(\theta)$$

$$0 \le \cos^2(\theta) \le 1$$

$$(v \cdot w)^2 \le \|v\|^2\|w\|^2$$

Trojúhelníková nerovnost

$$\|v + w\|^2 = (v + w)\cdot(v + w)$$

$$= v \cdot v + 2v \cdot w + w \cdot w$$

$$\le v \cdot v + 2|v \cdot w| + w \cdot w$$

$$\le v \cdot v + 2\|v\|\|w\| + w \cdot w$$

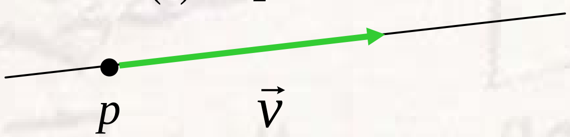
$$= \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2$$

$$= (\|v\| + \|w\|)^2$$

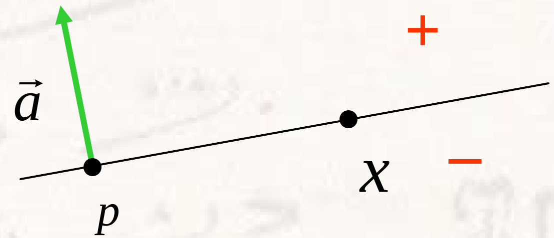
Příprava

Parametrická rovnice přímky

$$l(t) = p + t\vec{v}$$



Implicitní rovnice přímky

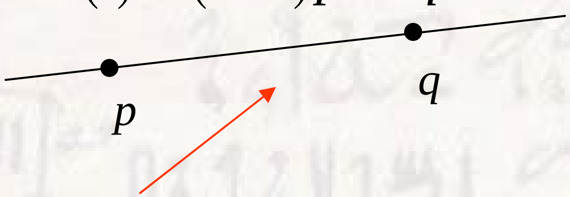


$$\vec{a} \cdot (x - p) = 0$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + (-a_1 p_1 - a_2 p_2) = 0$$

$$a_1 x_1 + b_2 x_2 + c = 0$$

$$l(t) = (1 - t)p + tq$$



Parametrické vyjádření pomocí barycentrických souřadnic (tzv. *lineární interpolace*)

$$a = a_1$$

$$b = a_2$$

$$c = -a_1 p_1 - a_2 p_2$$

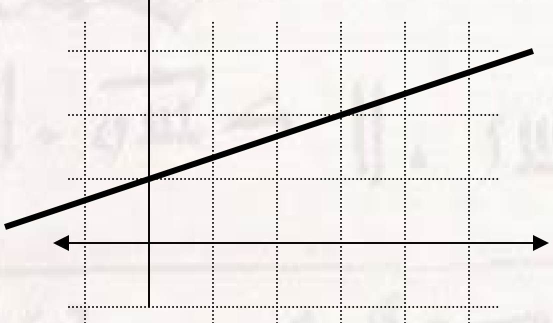
vzdálenost od přímky:

$$d = \frac{a x_1 + b x_2 + c}{\|a\|}$$

Příprava

Explicitní rovnice přímky

$$x_2 = \tfrac{1}{3} x_1 + 1$$



$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

$$x_2 = -\frac{a}{b} x_1 - \frac{c}{b}$$

$$x_2 = \hat{a} x_1 + \hat{b}$$

Konverze
parametrická -> implicitní

Máme: $l : l(t) = p + t\vec{v}$

Chceme: $l : ax_1 + bx_2 + c = 0$

1) Vytvoříme vektor kolmý na *v*

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad (\vec{v} \cdot \vec{a} = 0)$$

2) Dopočítáme koeficient *c*

$$c = -(a_1 p_1 + a_2 p_2)$$

Příprava

Konverze
implicitní -> parametrická

Máme: $l : ax_1 + bx_2 + c = 0$

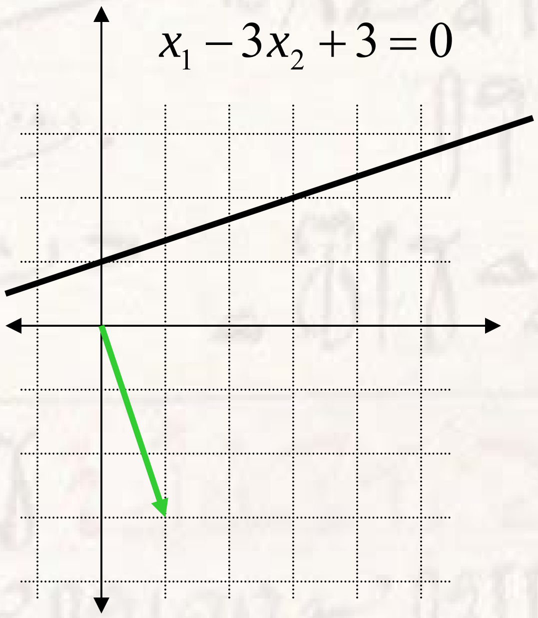
Chceme: $l : l(t) = p + t\vec{v}$

1) Vytvoříme vektor ležící na *l*

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$$

2) Nalezneme bod na přímce.
Kandidáty jsou průsečíky s e_1 nebo e_2

$$\begin{bmatrix} -c/a \\ 0 \end{bmatrix} \quad nebo \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -c/b \end{bmatrix}$$

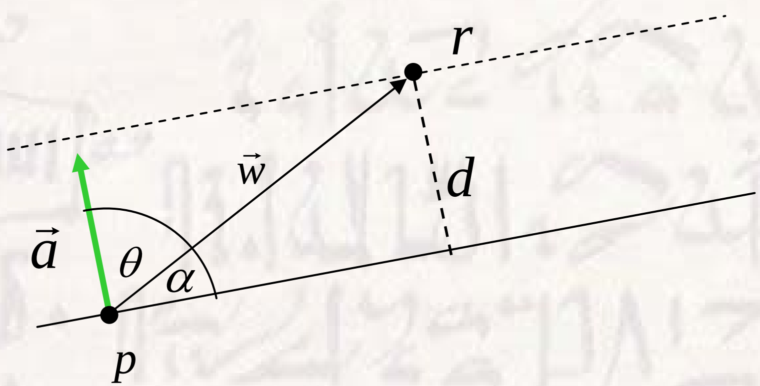


Příprava

Vzdálenost bodu od přímky implicitně

Máme: $l : ax_1 + bx_2 + c = 0, \quad r$

Chceme: $d(r, l)$



$$a \cdot (r - p) = x$$

$$víme:$$

$$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos(\theta)$$

$$x = a \cdot w = \|a\| \|w\| \cos(\theta)$$

$$z\ leva : \cos(\theta) = \frac{d}{\|w\|}$$

$$\mathrm{x} = \|\mathrm{a}\| d$$

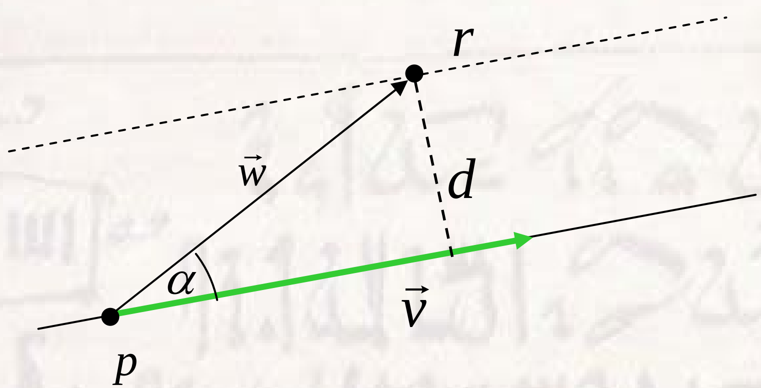
$$d = \frac{x}{\|a\|} = \frac{a \cdot (r - p)}{\|a\|} = \frac{ar_1 + br_2 + c}{\|a\|}$$

Příprava

Vzdálenost bodu od přímky parametricky

Máme: $l : l(t) = p + t\vec{v}, \quad r$

Chceme: $d(r, l)$



Vytvoříme vektor $\vec{w} = r - p$

$$d = \|w\| \sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$$

$$d = \|w\| \sqrt{1 - \left(\frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|} \right)^2}$$

Lze i lépe pomocí vektorového součinu…

Podobně se počítá „stopa bodu“ (tj. vzdálenost od průmětu bodu na přímku). Odvoďte si doma.

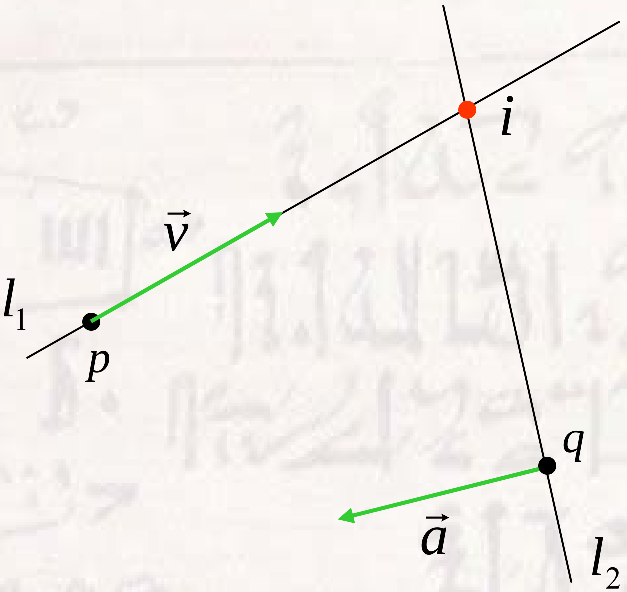
Příprava

Průsečíky
parametrický X implicitní

Máme: $l_1 : l_1(t) = p + t\vec{v}$

$$l_2 : ax_1 + bx_2 + c = 0$$

Chceme: průsečík l_1 x l_2



Řešení provedeme nalezením parametru *t* v rovnici l_1

$$a[p_1 + \hat{t}v_1] + b[p_2 + \hat{t}v_2] + c = 0$$

$$\hat{t} = \frac{-c - ap_1 - bp_2}{av_1 + bv_2}$$

$$\hat{t} = \frac{-c - ap_1 - bp_2}{\vec{a} \cdot \vec{v}}$$

Jmenovatel nesmí být roven nule!
pokud je, jsou přímky rovnoběžné.
Budeme testovat cosinus úhlu.

$$\cos(\theta) = \frac{a \cdot v}{\|a\|\|v\|}$$

Dosazením:

$$d = \frac{ap_1 + bp_2 + c}{\|a\|}$$

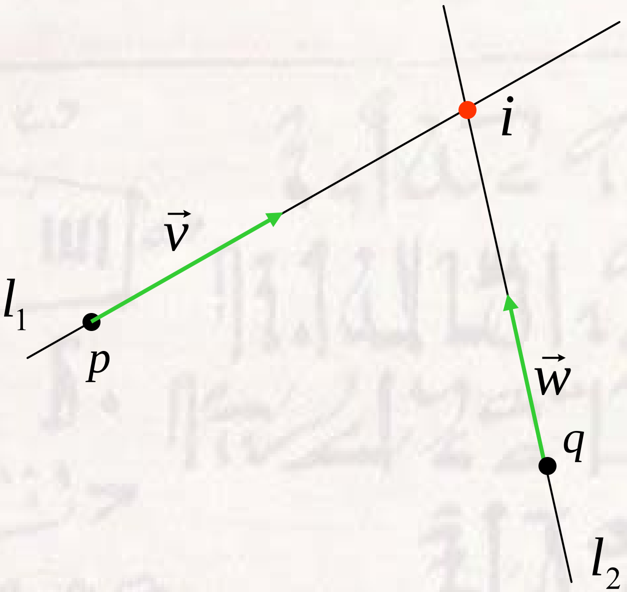
Příprava

Průsečíky
parametrický X parametrický

Máme: $l_1 : l_1(t) = p + t\vec{v}$

$l_2 : l_2(s) = q + s\vec{w}$

Chceme: průsečík l_1 x l_2



Řešení je triviální:

$$p + \hat{t}v = q + \hat{s}w$$

$$\hat{t}v - \hat{s}w = q - p$$

$$tj.$$

$$\hat{t}v_1 - \hat{s}w_1 = q_1 - p_1$$

$$\hat{t}v_2 - \hat{s}w_2 = q_2 - p_2$$

Pokud platí $\vec{v} = r\vec{w}$
pak systém nemá řešení

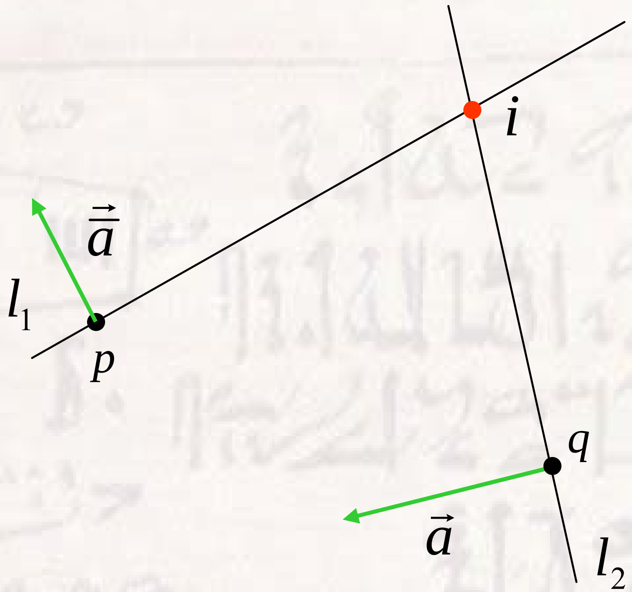
Příprava

Průsečíky
implicitní X implicitní

Máme: $l_1 : ax_1 + bx_2 + c = 0$

$$l_2 : \bar{a}x_1 + \bar{b}x_2 + \bar{c} = 0$$

Chceme: průsečík l_1 x l_2

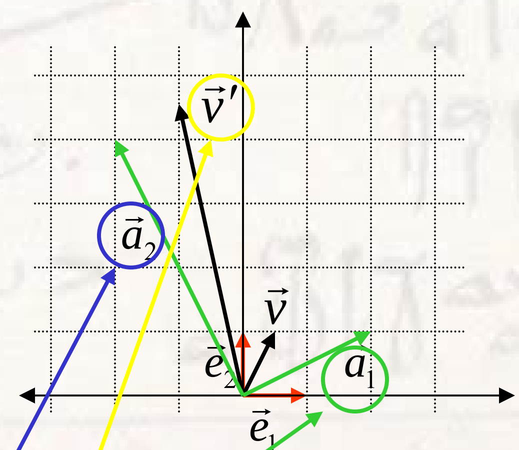


Řešení je ještě jednodušší:

$$a\hat{x}_1 + b\hat{x}_2 = -c$$
$$\bar{a}\hat{x}_1 + \bar{b}\hat{x}_2 = -\bar{c}$$

Lineární zobrazení

- Podíváme se na tu množinu zobrazení, které se říká lineární. Začneme s jednotkovými vektory e_1, e_2 a vektorem v.
- Budeme mapovat vektory na jiné vektory, zachováme počátek souřadnic. Místo určení cílového „boxu“ dvěma extrémními body použijeme dva vektory a_1, a_2 které nám určí systém [a_1, a_2]



$$\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}' = v_1 a_1 + v_2 a_2$$

Př: $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $v'_a = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v'_e = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9/2 \end{bmatrix}$

Lineární zobrazení

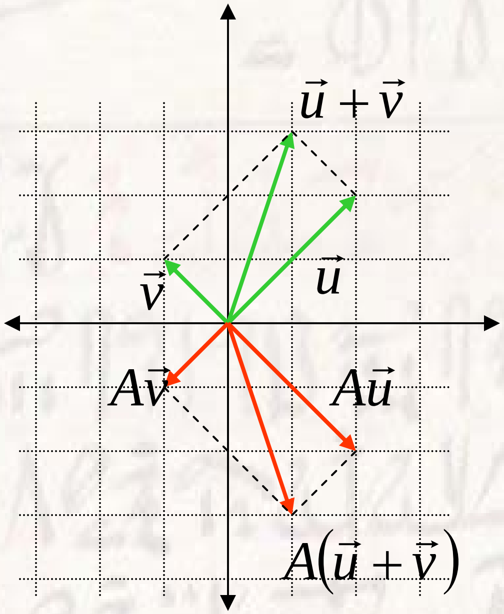
Matice
(poprvé H. Grassmann 1844)

$$\begin{bmatrix}-1\\9/2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$$

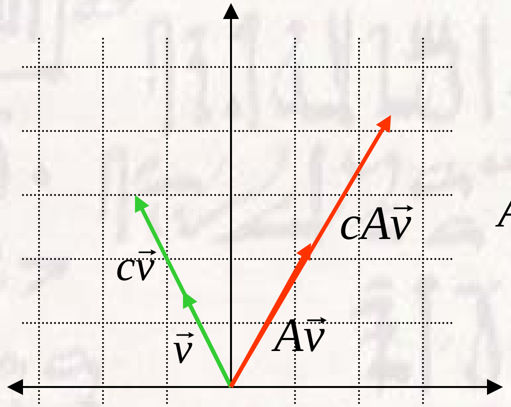
$$\begin{bmatrix}-1\\9/2\end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix}2 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1/2\\1\end{bmatrix}$$

Matice zachovávají součty
(distributivní zákon)

$$A(\vec{u}+\vec{v})=A\vec{u}+A\vec{v}$$



Matice zachovávají
linearitu násobení skalárem



$$A(c\vec{v})=cA\vec{v}$$

Lineární zobrazení

- Matice zachovávají lineární kombinace
  - $A(a\vec{u} + b\vec{v}) = aA\vec{u} + bA\vec{v}$
- Maticové sčítání
  - $A\vec{v} + B\vec{v} = (A + B)\vec{v}$
- Transpozice matic

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$[A + B]^T = A^T + B^T$$

$$A^{T^T} = A, \quad [cA]^T = cA^T$$

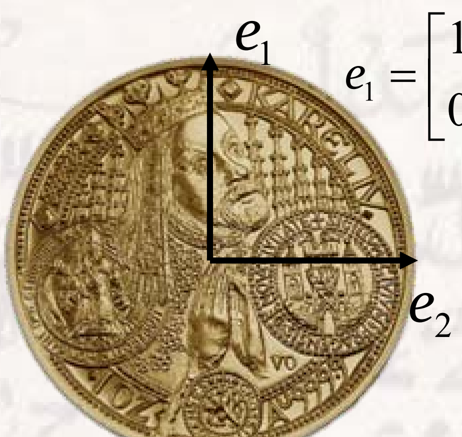
Lineární zobrazení

Změna měřítka (scaling)

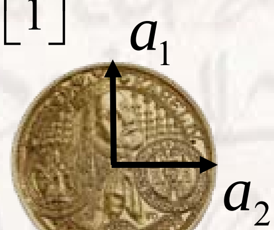
$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad v' = Av$$

$$v' = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1/2 \\ v_2/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$a_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Obecně:

$$v' = \begin{bmatrix} s_{1,1} & 0 \\ 0 & s_{2,2} \end{bmatrix} v$$

Lineární zobrazení

Reflexe (reflections)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v' = Av$$

$$v' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

- Zřejmě je reflexe speciálním případem scalingu.
- Obecnou formou reflexe je zrcadlení
- Nejběžnější reflexe je kolem základních os a kolem osy x = y

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lineární zobrazení

Reflexe (reflections)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad v' = Av$$

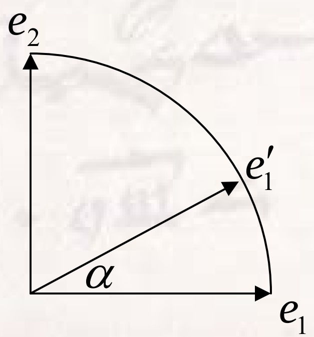
$$v' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix}$$

Reflexe kolem dvou os?

Reflexe kolem dvou os = rotace o 180 stupňů

Lineární zobrazení

Rotace (rotations)



$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow e_1' \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ r_{2,1} & r_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow e_2' \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ r_{2,1} & r_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$v \cdot v' = \|v\|^2 \cos(\alpha)$$

$$v' = \begin{bmatrix} v_1 \cos(\alpha) & -v_2 \sin(\alpha) \\ v_1 \sin(\alpha) & v_2 \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$v \cdot v' = v_1^2 \cos(\alpha) - v_1 v_2 \sin(\alpha) + v_1 v_2 \sin(\alpha) + v_2^2 \cos(\alpha)$$

$$= \left(v_1^2 + v_2^2\right) \cos(\alpha)$$

$$= \|v\|^2 \cos(\alpha)$$

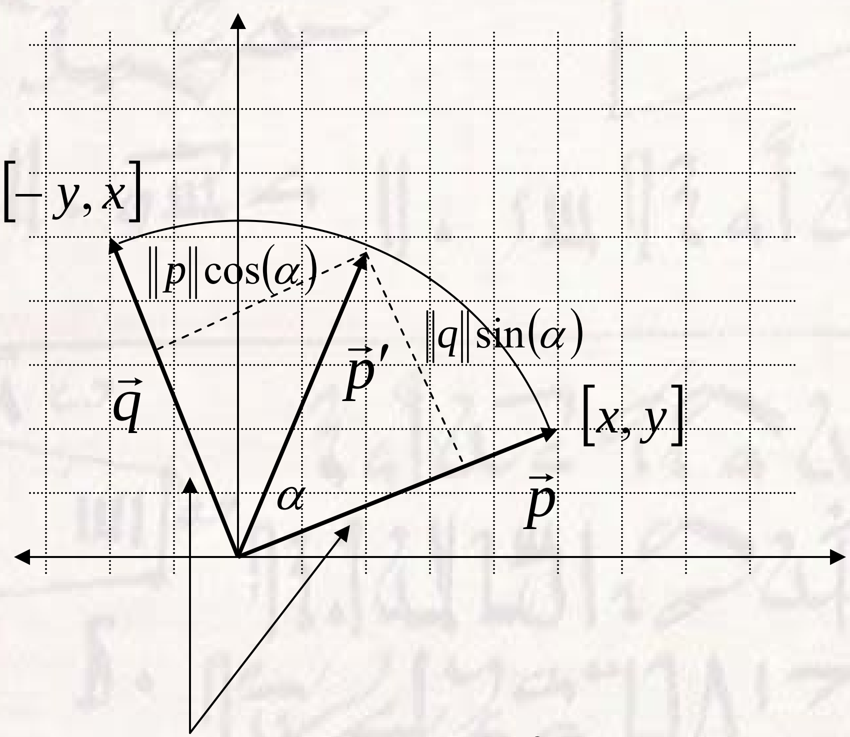
$$R = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Je nutné ověřit, že je to skutečně řešení obecného problému rotace!

Lineární zobrazení

Rotace (rotations)

$$\vec{p}' = \vec{p}\cos(\alpha) + \vec{q}\sin(\alpha)$$



Rotace o 90 stupňů

$$p'_x = p_x\cos(\alpha) - p_y\sin(\alpha)$$
$$p'_y = p_y\cos(\alpha) + p_x\sin(\alpha)$$

$$\vec{p}' = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \vec{p}$$