# Logika a regulární jazyky

Václav Brožek

10. listopad 2010

# Meta-poznámky

- dotazy a poznámky během přednášky vítány
- po přednášce rovněž vítány, např. na bleble@mail.muni.cz

# Meta-poznámky

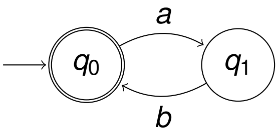
- dotazy a poznámky během přednášky vítány
- po přednášce rovněž vítány, např. na bleble@mail.muni.cz
- literatura:
  Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B: Formal Models and Sematics, 1990 (signatura R269 v knihovně FI)
  …a mnoho dalších

# Osnova

# Různé způsoby popisu jazyků

## Popis operací

1. Jsi-li na konci, akceptuj.
2. Čti *a*.
3. Čti *b*.
4. Jdi na 1.




## Popis výsledku

- První je *a*.
- Poslední je *b*.
- *a* a *b* se střídají.

?

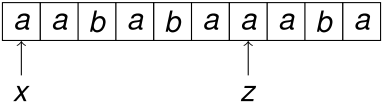
# Logika prvního řádu

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $a$ | $b$ | $a$ | $a$ | $a$ | $b$ | $a$ |
| $\uparrow$ | | | | | | $\uparrow$ | | | |
| $x$ | | | | | | $z$ | | | |

| | |
|---|---|
| $x, y, z \dots$ | pozice |
| $P_a(x)$ | na pozici $x$ je písmeno $a$ |
| $x < y$ | pozice $x$ je před $y$ |
| $\wedge, \vee, \neg$ | logické spojky (poznámka: negace víc podob) |
| $\forall x, \exists x$ | kvantifikace |

+ navíc rovnost $x = y$

# Logika prvního řádu



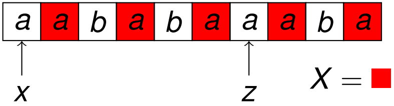

| | |
|---|---|
| $x, y, z \ldots$ | pozice |
| $P_a(x)$ | na pozici $x$ je písmeno $a$ |
| $x < y$ | pozice $x$ je před $y$ |
| $\wedge, \vee, \neg$ | logické spojky (poznámka: negace víc podob) |
| $\forall x, \exists x$ | kvantifikace |

+ navíc rovnost $x = y$

**Cvičení**

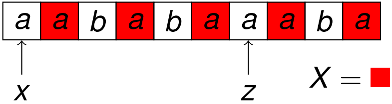
Co znamená $\exists x : P_a(x) \wedge (\forall z : z \not< x)$?

# Monadická logika druhého řádu (MSO)




| | | | |
|---|---|---|---|
| $x, y, z \dots$ | pozice | $X, Y, Z \dots$ | množiny pozic |
| $P_a(x)$ | na pozici $x$ je písmeno $a$ | $x \in X$ | $x$ leží v $X$ |
| $x < y$ | pozice $x$ je před $y$ | | |
| $\wedge, \vee, \neg$ | logické spojky | | |
| $\forall x, \exists x$ | kvantifikace | $\forall X, \exists X$ | |

# Monadická logika druhého řádu (MSO)




| | | | |
|---|---|---|---|
| $x, y, z \dots$ | pozice | $X, Y, Z \dots$ | množiny pozic |
| $P_a(x)$ | na pozici $x$ je písmeno $a$ | $x \in X$ | $x$ leží v $X$ |
| $x < y$ | pozice $x$ je před $y$ | | |
| $\wedge, \vee, \neg$ | logické spojky | | |
| $\forall x, \exists x$ | kvantifikace | $\forall X, \exists X$ | |

## Cvičení

$$\exists X : \quad \Big[\forall x, y : \big((x < y) \wedge (\forall z : x \not< z \vee z \not< y)\big) \implies (x \in X \iff y \notin X)\Big] \wedge \Big[\forall x : x \in X \implies (P_a(x) \wedge \exists y : y < x)\Big]$$

# Sentence a formule MSO

Proměnné ve formuli dvojího typu:

- vázané pomocí kvantifikátorů
- volné

$$\phi(y, Y) \equiv \exists X : \forall x : y \in X \vee x \in Y$$

Volné se zpravidla píší za jméno formule.

sentence = uzavřená formule = formule bez volných proměnných

# Jazyky zadané sentencí MSO

Sentence MSO $\phi$ = vlastnost slov.
Slovo $w \in \Sigma^*$ buď vlastnost $\phi$ má ($w \models \phi$), nebo nemá ($w \not\models \phi$).
Například:

$$aba \models \exists x : P_a(x) \wedge (\forall z : z \not< x)$$

$$bab \not\models \exists x : P_a(x) \wedge (\forall z : z \not< x)$$

$$\varepsilon \models \exists X : \forall x : \neg(\exists y : (x \in X \wedge y \notin X) \vee P_b(y))$$

**Definice**

$L(\phi) := \{w \in \Sigma^* \mid w \models \phi\}$

# Pravdivost formulí

Kdy má slovo $w$ vlastnost $\phi(X, Y, \ldots, x, y, \ldots)$?
Potřebujeme valuaci.

# Pravdivost formulí

Kdy má slovo $w$ vlastnost $\phi(X, Y, \ldots, x, y, \ldots)$?
Potřebujeme valuaci.

Valuace přiřadí hodnoty volným proměnným. Například pro:

$$\nu_1(x) = 1,\ \nu_1(y) = 1,\ \nu_1(X) = \{1, 3\}$$
$$\nu_2(x) = 3,\ \nu_2(y) = 1,\ \nu_2(X) = \emptyset$$

$$aba, \nu_1 \models P_a(x) \wedge (\forall z : z \not< x)$$
$$aba, \nu_2 \not\models P_a(x) \wedge (\forall z : z \not< x)$$
$$bab, \nu_1 \models \exists x, y : P_b(x) \wedge P_b(y) \wedge x < y \wedge x \in X \wedge y \in X$$
$$bab, \nu_2 \not\models \exists x, y : P_b(x) \wedge P_b(y) \wedge x < y \wedge x \in X \wedge y \in X$$

# Osnova

1. Konečná slova
   - Logický popis jazyků
   - Souvislost s automaty
   - Složitost
   - Důsledky
2. Nekonečná slova
   - Rozdíly a podobnosti
   - Souvislost s automaty
   - Důsledky

# Automaty = logika

**Věta**

*Regulární jazyky = jazyky definovatelné MSO.*

# Automaty = logika

nedeterm. konečné automaty = logika MSO

**Věta**

*Regulární jazyky = jazyky definovatelné MSO.*

# Automat $\rightarrow$ sentence MSO

$$\mathcal{A}: \quad \begin{tikzcd} {} \arrow[r] & q_0 \arrow[r, bend left, "a"] & q_1 \arrow[l, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

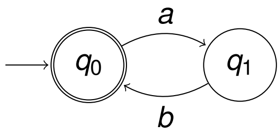
$$L(\mathcal{A}) = L((ab)^*)$$

$w \in L(\mathcal{A})$ právě když

*existuje akceptující běh $\mathcal{A}$ pod $w$.*

# Automat $\rightarrow$ sentence MSO

$\mathcal{A}$ :




$L(\mathcal{A}) = L((ab)^*)$

$w \in L(\mathcal{A})$ právě když

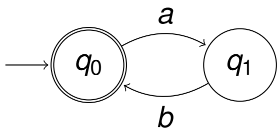
$\exists \varrho : \{1, \dots, |w|\} \to \{q_0, q_1\}$ tak, že

- $q_0 \xrightarrow{w(1)} \varrho(1)$
- pro všechna $i$, $1 < i \leq |w|$: $\varrho(i-1) \xrightarrow{w(i)} \varrho(i)$
- $\varrho(|w|) \in F = \{q_0\}$

(nebo $w = \varepsilon$.)

# Automat $\to$ sentence MSO

$\mathcal{A}:$




$L(\mathcal{A}) = L((ab)^*)$

$w \in L(\mathcal{A})$ právě když

$\exists X_0, X_1 : \forall x : x \in X_0 \iff x \notin X_1$ $\quad (\exists \varrho : \{1, \ldots, |w|\} \to \{q_0, q_1\})$

- $\wedge\ \forall x : \mathit{First}(x) \implies (P_a(x) \wedge x \in X_1)$ $\quad q_0 \xrightarrow{w(1)} \varrho(1)$
- $\wedge\ \forall x, y : \mathit{Succ}(x, y) \implies$
  $(x \in X_0 \wedge P_a(y) \wedge y \in X_1) \vee (x \in X_1 \wedge P_b(y) \wedge y \in X_0)$
  pro všechna $i$, $1 < i \leq |w|$: $\varrho(i{-}1) \xrightarrow{w(i)} \varrho(i)$
- $\wedge\ \forall x : \mathit{Last}(x) \implies x \in X_0$ $\quad \varrho(|w|) \in F = \{q_0\}$

## Cvičení

Zadefinujte následující formule (s volnými proměnnými) tak, aby pro každé slovo $w$ a valuaci $\nu$ platilo

- $w, \nu \models \mathit{First}(x)$ právě když $\nu(x)$ je první pozice
- $w, \nu \models \mathit{Last}(x)$ právě když $\nu(x)$ je poslední pozice
- $w, \nu \models \mathit{Succ}(x, y)$ právě když $\nu(y) = \nu(x) + 1$

# Automat $\rightarrow$ sentence MSO – obecný postup

NKA $\mathcal{A} = (Q, q_0, \stackrel{\cdot}{\longrightarrow}, F)$ $\rightarrow$ sentence MSO $\phi$ t.ž. $L(\mathcal{A}) = L(\phi)$.

$$\phi := \exists\{X_q \mid q \in Q\} : \Big(\forall x : \bigvee_{q \in Q} x \in X_q \wedge \bigwedge_{q \neq r \in Q} (x \in X_q \implies x \notin X_r)$$

$$\wedge \forall x : \mathit{First}(x) \implies \bigvee_{a \in \Sigma, q_0 \xrightarrow{a} q} P_a(x) \wedge x \in X_q$$

$$\wedge \forall x, y : \mathit{Succ}(x, y) \implies \bigvee_{a \in \Sigma, q \xrightarrow{a} r} x \in X_q \wedge P_a(x) \wedge y \in X_r$$

$$\wedge \forall x : \mathit{Last}(x) \implies \bigvee_{q \in F} x \in X_q \Big)$$

# Automat $\rightarrow$ sentence MSO – obecný postup

NKA $\mathcal{A} = (Q, q_0, \stackrel{\cdot}{\longrightarrow}, F)$ $\rightarrow$ sentence MSO $\phi$ t.ž. $L(\mathcal{A}) = L(\phi)$.

$$\begin{aligned}
\phi := \exists\{X_q \mid q \in Q\} : \Big(&\forall x : \bigvee_{q \in Q} x \in X_q \wedge \bigwedge_{q \neq r \in Q} (x \in X_q \implies x \notin X_r) \\
&\wedge \forall x : \mathit{First}(x) \implies \bigvee_{a \in \Sigma, q_0 \xrightarrow{a} q} P_a(x) \wedge x \in X_q \\
&\wedge \forall x, y : \mathit{Succ}(x, y) \implies \bigvee_{a \in \Sigma, q \xrightarrow{a} r} x \in X_q \wedge P_a(x) \wedge y \in X_r \\
&\wedge \forall x : \mathit{Last}(x) \implies \bigvee_{q \in F} x \in X_q \Big)
\end{aligned}$$

**Cvičení**

Najděte chybu.

# Automaty = logika

nedeterm.
konečné
automaty

=

logika
MSO

# Automaty = logika

nedeterm. konečné automaty = logika MSO

# Sentence MSO $\rightarrow$ automat

Chceme zkonstruovat pro každou

sentenci MSO $\phi$

nedeterministický KA $\mathcal{A}$

tak, že $L(\phi) = L(\mathcal{A})$, indukcí ke struktuře $\phi$.

# Sentence MSO $\rightarrow$ automat

Chceme zkonstruovat pro každou

sentenci MSO $\phi$

nedeterministický KA $\mathcal{A}$

tak, že $L(\phi) = L(\mathcal{A})$, indukcí ke struktuře $\phi$.

Ale podformule $\phi$ nemusí být sentence!
$\exists x : x < x$ má podformuli $x < x$.

# Formule MSO $\rightarrow$ automat

Chceme zkonstruovat pro každou

formuli MSO $\phi(X, \ldots, x, \ldots)$

nedeterministický KA $\mathcal{A}$

tak, že $L(\phi(X, \ldots, x, \ldots)) = L(\mathcal{A})$, indukcí ke struktuře $\phi$.

# „Čistá" MSO – logika bez prvního řádu

Pro zjednodušení konstrukce odstraníme proměnné 1. řádu:

| MSO | | „Čistá" MSO | |
|---|---|---|---|
| $x, X \ldots$ | proměnné | $X \ldots$ | proměnné (jen 2. řádu) |
| $P_a(x)$ | $a$ na pozici $x$ | $P_a(X)$ | $a$ na všech pozicích z $X$ |
| $x \in X$ | $x$ leží v $X$ | $X \subseteq Y$ | $X$ podmnožina $Y$ |
| $x < y$ | pozice $x$ je před $y$ | $X < Y$ | něco z $X$ je před $Y$ |
| $\wedge, \vee, \neg$ | logické spojky | $\wedge, \vee, \neg$ | logické spojky |
| $\forall x, \exists X$ | kvantifikace | $\exists X$ | kvantifikace (jen 2. řád) |
| | | $Sng(X)$ | $\|X\| = 1$ |

# Ekvivalence MSO a čisté MSO

Zápis čisté MSO v MSO:

$$P_a(X) \equiv \forall x : x \in X \implies P_a(x)$$
$$X \subseteq Y \equiv \forall x : x \in X \implies x \in Y$$
$$Sng(X) \equiv \exists x : x \in X \wedge \forall y : y = x \vee y \notin X$$
$$X < Y \equiv \exists x : x \in X \wedge (\forall y : y \in Y \implies x < y)$$

Zápis MSO v čisté MSO:
Každou $x$ nahradíme $S_x$ a přidáme $\wedge Sng(S_x)$.

$$P_a(x) \equiv P_a(S_x)$$
$$x \in X \equiv S_x \subseteq X$$
$$x < y \equiv S_x < S_y$$

# Formule čisté MSO $\rightarrow$ automat

Chceme zkonstruovat pro každou

formuli čisté MSO $\phi(X, \ldots)$

nedeterministický KA $\mathcal{A}$

tak, že $L(\phi(X, \ldots)) = L(\mathcal{A})$, indukcí ke struktuře $\phi$.

# Co je $L(\phi(X, \ldots))$? Aneb kódování valuací

Pro formuli $\phi(X_1, \ldots, X_k)$ a slovo $w \in \Sigma^*$ zakódujeme valuaci $\nu$ jako slovo $w_\nu \in (\Sigma \times \{0,1\}^k)^*$. Například:

$k = 2$, $w = abc$, $\nu : X_1 \mapsto \{1,3\}, X_2 \mapsto \{2\}$ dá

$$w_\nu = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Co je $L(\phi(X, \ldots))$? Aneb kódování valuací

Pro formuli $\phi(X_1, \ldots, X_k)$ a slovo $w \in \Sigma^*$ zakódujeme valuaci $\nu$ jako slovo $w_\nu \in (\Sigma \times \{0,1\}^k)^*$. Například:

$k = 2$, $w = abc$, $\nu : X_1 \mapsto \{1,3\}, X_2 \mapsto \{2\}$ dá

$$w_\nu = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

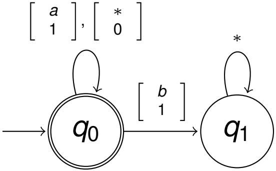
**Definice**

$$L(\phi(X_1, \ldots, X_k)) := \{w_\nu \in (\Sigma \times \{0,1\}^k)^* \mid w, \nu \models \phi(X_1, \ldots, X_k)\}$$

# Formule čisté MSO → automat

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \stackrel{\cdot}{\longrightarrow}, F)$.
Bázové kroky:

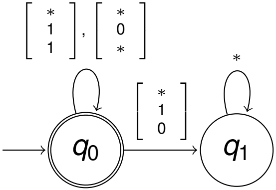
$P_a(X_1)$



# Formule čisté MSO $\rightarrow$ automat

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \stackrel{\cdot}{\longrightarrow}, F)$.
Bázové kroky:

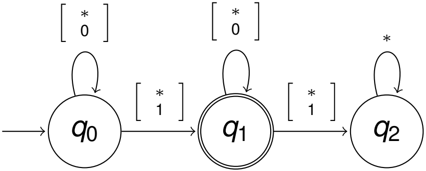
$X_1 \subseteq X_2$



# Formule čisté MSO → automat

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \stackrel{\cdot}{\longrightarrow}, F)$.
Bázové kroky:

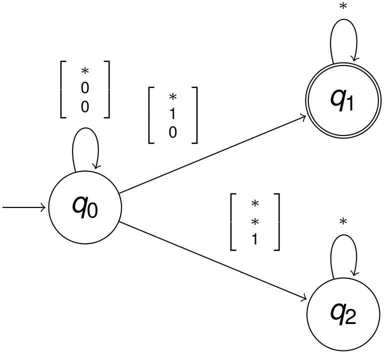
$Sng(X_1)$



# Formule čisté MSO $\to$ automat

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$.
Bázové kroky:

$X_1 < X_2$



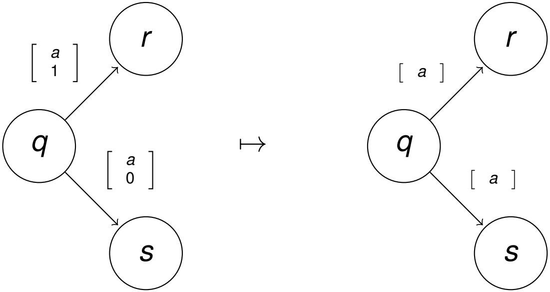
# Formule čisté MSO $\to$ automat

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$.
Logické operace $\vee, \wedge, \neg$ přejdou na $\cup$, $\cap$ a komplement.

# Formule čisté MSO $\rightarrow$ automat

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$.
Kvantifikace:

$\exists X_1 : \phi(X_1)$



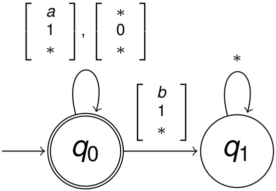
# Příklad

$$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2))$$

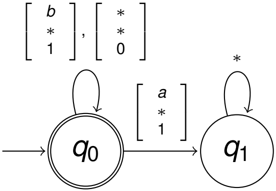
# Příklad

$$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2))$$

$P_a(X_1)$



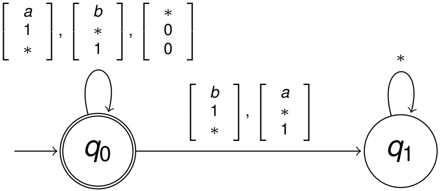

$P_b(X_2)$



# Příklad

$$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \land P_b(X_2))$$

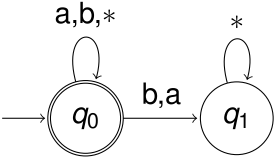
$P_a(X_1) \land P_b(X_2)$



# Příklad

$$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2))$$

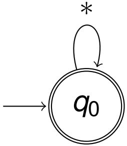
$$\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2)$$



# Příklad

$$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2))$$

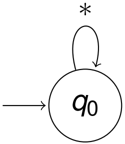
$\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2)$



# Příklad

$$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2))$$

$$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2))$$



# Poznámky

Existuje i alternativní důkaz přes *rank* formulí.

- Rank formule = maximální počet zanoření kvantifikátorů.
- Existuje jen konečně mnoho formulí ranku $\leq k$ až na ekvivalenci – třída ekvivalentních formulí = *typ*.
- Existuje automat počítající typy pro fixní rank.

Tento důkaz se vyhne indukci na formulích, ale nedává vhled do detailů převodu.

# Poznámky

- Aplikací převodů: sentence $\rightarrow$ automat $\rightarrow$ sentence dostaneme pro každou $\phi$ její normální formu:

  $$\phi \equiv \exists X_1, \ldots, X_k : \psi(X_1, \ldots, X_k)$$

  kde $\psi$ je bez kvantifikátorů druhého řádu.

# Poznámky

- Aplikací převodů: sentence $\rightarrow$ automat $\rightarrow$ sentence dostaneme pro každou $\phi$ její normální formu:

  $$\phi \equiv \exists X_1, \dots, X_k : \psi(X_1, \dots, X_k)$$

  kde $\psi$ je bez kvantifikátorů druhého řádu.
- splnitelnost pro MSO rozhodnutelná nejen nad slovy, ale i nad stromy. Ovšem už pro acyklické grafy je nerozhodnutelná.

# Osnova

1. Konečná slova
   - Logický popis jazyků
   - Souvislost s automaty
   - Složitost
   - Důsledky

2. Nekonečná slova
   - Rozdíly a podobnosti
   - Souvislost s automaty
   - Důsledky

# Kolik stojí převod

$$|\phi| = \mathit{poly}(|\mathcal{A}|)$$

nedeterm.
konečné
automaty

$=$

logika
MSO

$$|\mathcal{A}| = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{|\phi|}}}}}}\Bigg\}\mathcal{O}(|\phi|)$$

# Kolik stojí převod

$$|\phi| = poly(|\mathcal{A}|)$$

nedeterm. konečné automaty **=** logika MSO

$$|\mathcal{A}| = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{|\phi|}}}}}} \Big\} \mathcal{O}(|\phi|)$$

$$\neg(\exists X_1 : \neg(\exists X_2 : \neg(\ldots \neg(\exists X_k : \phi(X_1, X_2, \ldots, X_k)) \ldots)))$$

- $\exists$ vytváří nedeterminismus
- $\neg$ = komplementace $\rightarrow$ exponenciální nárust

# Drahý převod: formule $\rightarrow$ automat

## Definice

$G(1) := 1$, *a pro všechna* $n > 1$*:* $G(n) := G(n-1) \cdot 2^{G(n-1)}$

# Drahý převod: formule $\to$ automat

## Definice

*$G(1) := 1$, a pro všechna $n > 1$: $G(n) := G(n-1) \cdot 2^{G(n-1)}$*

## Cvičení

Dokažte: $\forall n \geq 1 : 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \Big\}^{n+1} > G(n) \geq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \Big\}^{n}$.

# Drahý převod: formule $\rightarrow$ automat

## Definice

*$G(1) := 1$, a pro všechna $n > 1$: $G(n) := G(n-1) \cdot 2^{G(n-1)}$*

## Cvičení

Dokažte: $\forall n \geq 1 : 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Big\}{n+1} > G(n) \geq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Big\}{n}$.

## Věta (Stockmeyer & Meyer, 1974)

*Existuje posloupnost MSO sentencí $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že:*

- $|\phi_n| \in \mathcal{O}(2^n)$
- *pro každý nedeterministický KA $\mathcal{A}_n$:*
  $L(\mathcal{A}_n) = L(\phi_n) \implies |\mathcal{A}_n| \geq G(n)$

# Důkaz

Definujeme:

$$L_n := \{\overbrace{aaa\cdots a}^{G(n)}\}$$

# Důkaz

Definujeme:

$$L_n := \{\overbrace{aaa\cdots a}^{G(n)}\}$$

## Cvičení

Dokažte:

1. $L_n$ je regulární.

# Důkaz

Definujeme:

$$L_n := \{\overbrace{aaa\cdots a}^{G(n)}\}$$

## Cvičení

Dokažte:

1. $L_n$ je regulární.
2. pro každý *nedeterministický* KA $\mathcal{A}_n$:
   $L(\mathcal{A}_n) = L_n \implies |\mathcal{A}_n| \geq G(n)$

# Důkaz

Definujeme:

$$L_n := \{\overbrace{aaa\cdots a}^{G(n)}\}$$

## Cvičení

Dokažte:

1. $L_n$ je regulární.
2. pro každý *nedeterministický* KA $\mathcal{A}_n$:
   $L(\mathcal{A}_n) = L_n \implies |\mathcal{A}_n| \geq G(n)$

Zbývá najít formuli $\phi_n$ tak, aby

- $|\phi_n| \in \mathcal{O}(2^n)$
- $L_n = L(\phi_n)$

- Indukcí na $n$ sestrojíme formule $\theta_n(x, y)$ tak, že

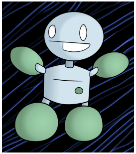
$$w, \nu \models \theta_n(x, y) \quad \text{právě když} \quad \nu(y) - (\nu(x) - 1) = G(n).$$

- Pak $\phi_n := \exists x, y : \mathit{First}(x) \wedge \mathit{Last}(y) \wedge \theta_n(x, y)$.

- Indukcí na $n$ sestrojíme formule $\theta_n(x, y)$ tak, že

$$w, \nu \models \theta_n(x, y) \quad \text{právě když} \quad \nu(y) - (\nu(x) - 1) = G(n).$$

- Pak $\phi_n := \exists x, y : \mathit{First}(x) \wedge \mathit{Last}(y) \wedge \theta_n(x, y)$.



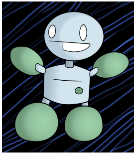
- indukční báze je jednoduchá:

$$\theta_1(x, y) := x = y$$

- Indukcí na $n$ sestrojíme formule $\theta_n(x,y)$ tak, že

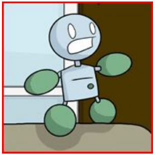
$$w, \nu \models \theta_n(x,y) \quad \text{právě když} \quad \nu(y) - (\nu(x) - 1) = G(n).$$

- Pak $\phi_n := \exists x, y : \mathit{First}(x) \wedge \mathit{Last}(y) \wedge \theta_n(x,y)$.



- indukční báze je jednoduchá:

$$\theta_1(x,y) := x = y$$



questionablecontent.net

indukční krok je složitější...

$$\begin{aligned}\theta_{n+1}(x,y) := \exists Y : \; & Y \text{ zadává intervaly na } \{x,\dots,y\} \\ & \wedge \text{ tyto intervaly jsou délky } G(n) \\ & \wedge \text{ intervalů je } 2^{G(n)}\end{aligned}$$

$$\theta_{n+1}(x,y) := \exists Y : Y \text{ zadává intervaly na } \{x,\dots,y\}$$
$$\wedge \text{ tyto intervaly jsou délky } G(n)$$
$$\wedge \text{ intervalů je } 2^{G(n)}$$

Kódování intervalů pomocí množiny pozic $Y$:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

$Y =$ ◤

zadané intervaly: $\{1,2,3\}$, $\{4\}$, $\{5,6,7,8,9,10\}$.
Formule $Int(r,s,Y)$ testuje, že $\{r,\dots,s\}$ je interval dle $Y$:

$$Int(r,s,Y) := r \in Y \wedge r \leq s$$
$$\wedge (\forall z : Succ(s,z) \implies z \in Y)$$
$$\wedge (\forall z : r < z \leq s \implies z \notin Y)$$

$$Y \text{ zadává intervaly na } \{x, \ldots, y\}$$

$$\equiv$$

$$x \in Y \wedge \forall z : Succ(y, z) \implies z \in Y$$

$$\text{tyto intervaly jsou délky } G(n)$$

$$\equiv$$

$$\forall r, s : (x \leq r, s \leq y \wedge Int(r, s, Y)) \implies \theta_n(r, s)$$

intervalů je $2^{G(n)}$

$$\equiv$$

$$
\begin{aligned}
\exists J:\ & \text{první interval kóduje } 0 \\
& \wedge \text{ poslední interval kóduje } 2^{G(n)} - 1 \\
& \wedge \text{ po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení } 1
\end{aligned}
$$

intervalů je $2^{G(n)}$

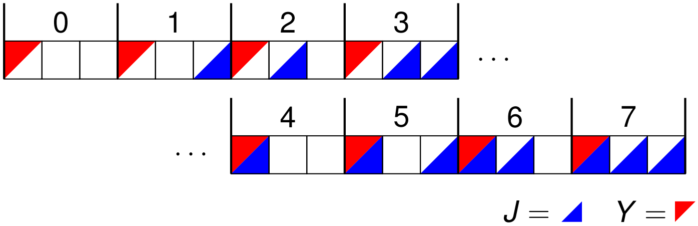
$$\equiv$$

$\exists J$ : první interval kóduje 0

$\wedge$ poslední interval kóduje $2^{G(n)} - 1$

$\wedge$ po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení 1

Kódování čísel pomocí množiny $J$:



první interval kóduje 0

$$\equiv$$

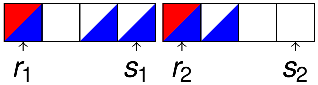
$$\forall s, t : (Int(x, s, Y) \wedge x \leq t \leq s) \implies t \notin J$$

poslední interval kóduje $2^{G(n)} - 1$

$$\equiv$$

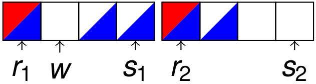
$$\forall r, t : (Int(r, y, Y) \wedge r \leq t \leq y) \implies t \in J$$

po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení 1



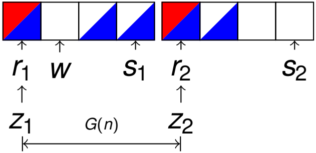

$$\forall r_1, s_1, r_2, s_2 : \Big( x \leq r_1, s_1, r_2, s_2 \leq y$$
$$\wedge\ Int(r_1, s_1, Y) \wedge Int(r_2, s_2, Y) \wedge Succ(s_1, r_2) \Big)$$

po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení 1



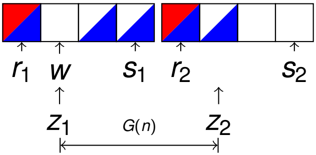

$$\forall r_1, s_1, r_2, s_2 : \Big(x \leq r_1, s_1, r_2, s_2 \leq y$$
$$\wedge\, Int(r_1, s_1, Y) \wedge Int(r_2, s_2, Y) \wedge Succ(s_1, r_2)\Big)$$
$$\Longrightarrow\ \exists w : \Big[r_1 \leq w \leq s_1 \wedge w \notin J \wedge (\forall z : w < z \leq s_1 \implies z \in J)$$

po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení 1



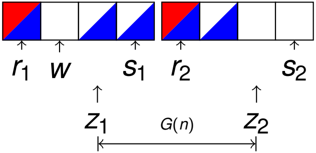

$$
\begin{aligned}
&\forall r_1, s_1, r_2, s_2 : \Big( x \le r_1, s_1, r_2, s_2 \le y \\
&\quad \wedge Int(r_1, s_1, Y) \wedge Int(r_2, s_2, Y) \wedge Succ(s_1, r_2) \Big) \\
&\Longrightarrow \exists w : \Big[ r_1 \le w \le s_1 \wedge w \notin J \wedge (\forall z : w < z \le s_1 \implies z \in J) \\
&\quad \wedge \forall z_1, z_2 : \Big( (r_1 \le z_1 \le s_1 \wedge \exists t : (\theta_n(z_1, t) \wedge Succ(t, z2))) \\
&\qquad \Longrightarrow \big( (z_1 < w \wedge (z_1 \in J \iff z_2 \in J)) \\
&\qquad \vee (z_1 = w \wedge z_2 \in J) \vee (z_1 > w \wedge z_2 \notin J) \big) \Big) \Big]
\end{aligned}
$$

po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení 1




$$
\begin{aligned}
&\forall r_1, s_1, r_2, s_2 : \Big(x \leq r_1, s_1, r_2, s_2 \leq y \\
&\quad \wedge Int(r_1, s_1, Y) \wedge Int(r_2, s_2, Y) \wedge Succ(s_1, r_2)\Big) \\
&\implies \exists w : \Big[r_1 \leq w \leq s_1 \wedge w \notin J \wedge (\forall z : w < z \leq s_1 \implies z \in J) \\
&\qquad \wedge \forall z_1, z_2 : \Big((r_1 \leq z_1 \leq s_1 \wedge \exists t : (\theta_n(z_1, t) \wedge Succ(t, z2))) \\
&\qquad\qquad \implies ((z_1 < w \wedge (z_1 \in J \iff z_2 \in J)) \\
&\qquad\qquad\qquad \vee (z_1 = w \wedge z_2 \in J) \vee (z_1 > w \wedge z_2 \notin J))\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení 1




$$\forall r_1, s_1, r_2, s_2 : \Big(x \leq r_1, s_1, r_2, s_2 \leq y$$

$$\wedge\, Int(r_1, s_1, Y) \wedge Int(r_2, s_2, Y) \wedge Succ(s_1, r_2)\Big)$$

$$\implies \exists w : \Big[r_1 \leq w \leq s_1 \wedge w \notin J \wedge (\forall z : w < z \leq s_1 \implies z \in J)$$

$$\wedge \forall z_1, z_2 : \Big(\big(r_1 \leq z_1 \leq s_1 \wedge \exists t : (\theta_n(z_1, t) \wedge Succ(t, z2))\big)$$

$$\implies \big((z_1 < w \wedge (z_1 \in J \iff z_2 \in J))$$

$$\vee (z_1 = w \wedge z_2 \in J) \vee (z_1 > w \wedge z_2 \notin J)\big)\Big)\Big]$$

# Poznámky k důkazu

$$\begin{aligned}\theta_{n+1}(x,y) := \exists Y :\ & Y \text{ zadává intervaly na } \{x,\dots,y\} \\ & \wedge \text{ tyto intervaly jsou délky } G(n)\ (\dots\theta_n\dots) \\ & \wedge \text{ intervalů je } 2^{G(n)}\ (\dots\theta_n \implies \dots)\end{aligned}$$

- velikost formule exponenciální v $n$
- vnořená negace $((\theta_n \implies \alpha) \equiv (\neg\theta_n \vee \alpha))$

# Přehled složitostí

| nedeterministické KA | | MSO | |
|---|---|---|---|
| $L(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \emptyset$ | NLOG-úplné | $L(\phi) \stackrel{?}{=} \emptyset$ | non-elementary |
| $L(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \Sigma^*$ | PSPACE-úplné | $L(\phi) \stackrel{?}{=} \Sigma^*$ | |
| $L(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} L(\mathcal{B})$ | PSPACE-úplné | $L(\phi) \stackrel{?}{=} L(\psi)$ | |
| $L(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\subseteq} L(\mathcal{B})$ | PSPACE-úplné | $L(\phi) \stackrel{?}{\subseteq} L(\psi)$ | |

# Osnova

# Podtřídy regulárních jazyků

Jazyky definované logikou prvního řádu (FO) tvoří podtřídu MSO jazyků uzavřenou na Booleovské operace.

Jazyky definované regulárními výrazy bez Kleeneho $^*$, ale s komplementem, tvoří podtřídu MSO jazyků uzavřenou na Booleovské operace, star-free jazyky.

# Podtřídy regulárních jazyků

Jazyky definované logikou prvního řádu (FO) tvoří podtřídu MSO jazyků uzavřenou na Booleovské operace.

Jazyky definované regulárními výrazy bez Kleeneho $^*$, ale s komplementem, tvoří podtřídu MSO jazyků uzavřenou na Booleovské operace, star-free jazyky.

**Věta (McNaughton-Pappert)**

*Jazyk $L$ je star-free právě když je FO definovatelný.*

# Podtřídy regulárních jazyků

Jazyky definované logikou prvního řádu (FO) tvoří podtřídu MSO jazyků uzavřenou na Booleovské operace.

Jazyky definované regulárními výrazy bez Kleeneho $^*$, ale s komplementem, tvoří podtřídu MSO jazyků uzavřenou na Booleovské operace, star-free jazyky.

**Věta (McNaughton-Pappert)**

*Jazyk L je star-free právě když je FO definovatelný.*

**Věta (Schützenberger)**

*Jazyk L je star-free právě když jeho syntaktický monoid neobsahuje podgrupu velikosti* $\geq 2$.

# Syntaktický monoid – definice přes Google

Monoid podle Google Image search:

# Syntaktický monoid – definice pro matematiky

Syntaktická ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$$u \equiv_L v \overset{\text{def}}{\iff} \forall p, q : p \cdot u \cdot q \in L \iff p \cdot v \cdot q \in L$$

# Syntaktický monoid – definice pro matematiky

Syntaktická ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$u \equiv_L v \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall p, q : p \cdot u \cdot q \in L \iff p \cdot v \cdot q \in L$

Monoid $\mathcal{M}_L$ pro $L$:

- prvky = $\Sigma^* / \equiv_L$
- operace: $[u]_{\equiv_L} \cdot [v]_{\equiv_L} = [u \cdot v]_{\equiv_L}$
- neutrální prvek: $[\varepsilon]_{\equiv_L}$

# Syntaktický monoid – definice pro matematiky

Syntaktická ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$$u \equiv_L v \overset{\text{def}}{\iff} \forall p, q : p \cdot u \cdot q \in L \iff p \cdot v \cdot q \in L$$

Monoid $\mathcal{M}_L$ pro $L$:

- prvky = $\Sigma^* / \equiv_L$
- operace: $[u]_{\equiv_L} \cdot [v]_{\equiv_L} = [u \cdot v]_{\equiv_L}$
- neutrální prvek: $[\varepsilon]_{\equiv_L}$

$\mathcal{M}_L$ je konečný, právě když $L$ je regulární.

# Syntaktický monoid – definice přes sousední balkon

Prefixová ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$$u \approx_L v \overset{\text{def}}{\iff} \forall w : u \cdot w \in L \iff v \cdot w \in L$$

# Syntaktický monoid – definice přes sousední balkon

Prefixová ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$$u \approx_L v \overset{\text{def}}{\iff} \forall w : u \cdot w \in L \iff v \cdot w \in L$$

Automat $\mathcal{A}_L$ pro $L$:

- stavy: $Q := \Sigma^* / \approx_L$
- přechody: $[u]_{\approx_L} \xrightarrow{a} [u \cdot a]_{\approx_L}$
- iniciální stav: $[\varepsilon]_{\approx_L}$
- koncové stavy: $[u]_{\approx_L}, u \in L$

# Syntaktický monoid – definice přes sousední balkon

Prefixová ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$$u \approx_L v \overset{\text{def}}{\iff} \forall w : u \cdot w \in L \iff v \cdot w \in L$$

Automat $\mathcal{A}_L$ pro $L$:

- stavy: $Q := \Sigma^* / \approx_L$
- přechody: $[u]_{\approx_L} \xrightarrow{a} [u \cdot a]_{\approx_L}$
- iniciální stav: $[\varepsilon]_{\approx_L}$
- koncové stavy: $[u]_{\approx_L}, u \in L$

$\mathcal{A}_L$ je deterministický automat, a je konečný, právě když $L$ je regulární (pak je $\mathcal{A}_L$ minimální).

# Syntaktický monoid – definice přes sousední balkon

Prefixová ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$$u \approx_L v \overset{\text{def}}{\iff} \forall w : u \cdot w \in L \iff v \cdot w \in L$$

Automat $\mathcal{A}_L$ pro $L$:

- stavy: $Q := \Sigma^* / \approx_L$
- přechody: $[u]_{\approx_L} \xrightarrow{a} [u \cdot a]_{\approx_L}$
- iniciální stav: $[\varepsilon]_{\approx_L}$
- koncové stavy: $[u]_{\approx_L}, u \in L$

$\mathcal{A}_L$ je deterministický automat, a je konečný, právě když $L$ je regulární (pak je $\mathcal{A}_L$ minimální).

$\mathcal{M}_L \cong T(\mathcal{A}_L)$, což je transformační monoid $\mathcal{A}_L$

- prvky: z $Q \to Q$, tvaru $f_w$, kde $f_w(q) = r$ tak, že $q \xrightarrow{w} r$
- operace: $f_v \circ f_u = f_{u \cdot v}$
- neutrální prvek: $f_\varepsilon$

## Cvičení

Najděte MSO formuli pro $L((aa)^*)$.
Popište jeho syntaktický monoid.
Rozhodněte, zda je tento jazyk definovatelný v FO.

## Cvičení

Najděte MSO formuli pro $L((ab)^*)$.
Popište jeho syntaktický monoid.
Rozhodněte, zda je tento jazyk definovatelný v FO.

# Poznámka

Logika nabízí ještě jemnější klasifikaci:
hloubka alternací FO kvantifikátorů odpovídá
hloubce alternací booleovských operací a řetězení v
regulárních výrazech (s negací a bez $*$).

Viz: W. Thomas, Classifying regular events in symbolic logic, J. Comput. System Sci., 1982

# wS1S

Změníme trochu uvažovanou logiku:

**Syntax:** místo relace $<$ (následník) máme relaci *Succ* (bezprostřední následník).

**Sémantika:**

- vyhodnocování nad $\mathbb{N}$ místo nad konečnými slovy
- kvantifikace jen přes konečné množiny

# wS1S

Změníme trochu uvažovanou logiku:

**Syntax:** místo relace $<$ (následník) máme relaci *Succ* (bezprostřední následník).

**Sémantika:**

- vyhodnocování nad $\mathbb{N}$ místo nad konečnými slovy
- kvantifikace jen přes konečné množiny

wS1S (Weak Second-order + 1 Successor)
=
množina všech sentencí pravdivých na $(\mathbb{N}, +1)$

# Příklady

- $\exists x : \forall y : \exists z : y = x \vee Succ(z, y) \in$ wS1S
  Existuje číslo $x$ tak, že každé číslo jiné než $x$ má předchůdce.

# Příklady

- $\exists x : \forall y : \exists z : y = x \vee Succ(z, y) \in$ wS1S
  Existuje číslo $x$ tak, že každé číslo jiné než $x$ má předchůdce.
- $\exists X : \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \implies y \in X \in$ wS1S
  Existuje nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.

# Příklady

- $\exists x : \forall y : \exists z : y = x \vee Succ(z, y) \in$ wS1S
  Existuje číslo $x$ tak, že každé číslo jiné než $x$ má předchůdce.
- $\exists X : \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \implies y \in X \in$ wS1S
  Existuje nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.
- $\exists X : ((\exists x : x \in X) \wedge \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \Rightarrow y \in X) \notin$ wS1S
  Existuje neprázdná nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.

# Příklady

- $\exists x : \forall y : \exists z : y = x \vee Succ(z, y) \in$ wS1S
  Existuje číslo $x$ tak, že každé číslo jiné než $x$ má předchůdce.
- $\exists X : \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \implies y \in X \in$ wS1S
  Existuje nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.
- $\exists X : ((\exists x : x \in X) \wedge \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \Rightarrow y \in X)$ $\notin$ wS1S
  Existuje neprázdná nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.

**Cvičení**

Zadefinujte $<$ pomocí *Succ*.

# Příklady

- $\exists x : \forall y : \exists z : y = x \vee Succ(z, y) \in$ wS1S
  Existuje číslo $x$ tak, že každé číslo jiné než $x$ má předchůdce.
- $\exists X : \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \implies y \in X \in$ wS1S
  Existuje nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.
- $\exists X : ((\exists x : x \in X) \wedge \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \Rightarrow y \in X)$ $\notin$ wS1S
  Existuje neprázdná nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.

**Cvičení**

Zadefinujte $<$ pomocí *Succ*.

- $\forall X : \exists t : \forall x : x \in X \implies x < t \in$ wS1S
  Každá (*konečná*) množina je konečná. :-)

# Rozhodnutelnost wS1S

**Věta (Büchi)**

*Lze rozhodnout, zda $\phi \in$ wS1S.*

# Rozhodnutelnost wS1S

**Věta (Büchi)**

*Lze rozhodnout, zda $\phi \in wS1S$.*

Důkaz:

1. nahradíme *Succ* ekvivalentní definicí pomocí $<$
   + protože nepotřebujeme predikáty $P_a$, máme $|\Sigma| = 1$
2. uvědomíme si, že pro všechny formule $\psi(X_1, \ldots, X_k)$ a valuace $\nu$ přiřazující jen konečné množiny:
   $\exists w_\nu \in (\Sigma \times \{0, 1\}^k)^* : w_\nu \in L(\mathcal{A}_\psi)$
   právě když
   $\mathbb{N}, \nu \models \psi(X_1, \ldots, X_k)$
3. otestujeme $\varepsilon \in L(\mathcal{A}_\phi)$

# Presburgerova aritmetika – $(\mathbb{N}, +)$

Jak rozhodovat následující problém?

**Vstup:** prvořádová formule $\phi$ se sčítáním
**Výstup:** Platí $\phi$ na $(\mathbb{N}, +)$?

# Presburgerova aritmetika – $(\mathbb{N}, +)$

Jak rozhodovat následující problém?

**Vstup:** prvořádová formule $\phi$ se sčítáním
**Výstup:** Platí $\phi$ na $(\mathbb{N}, +)$?

Redukcí na wS1S.

- Čísla z P.A. však kódujeme množinami čísel – jejich binárními zápisy.
- Příklady: $6 \mapsto \{2, 3\}$, $11 \mapsto \{1, 2, 4\}$.
- Binární sčítání pak lze vyjádřit v MSO.

# Poznámky

- Rozhodování wS1S je non-elementary.
- Pressburgerova aritmetika je v 3EXPTIME.

# Poznámky

- Rozhodování wS1S je non-elementary.
- Pressburgerova aritmetika je v 3EXPTIME.
- $(\mathbb{N}, .)$ (Skolemova a.) je rozhodnutelná, ale $(\mathbb{N}, ., +1)$, $(\mathbb{N}, ., <)$, $(\mathbb{N}, ., +)$ (Peanova a.) už jsou nerozhodnutelné (a ve skutečnosti ekvivalentní)
  viz např. [A. Bes: A Survey of Arithmetical Definability, 2002]