Klaus Dahlheimer
ihr
Online-Dozent

Digitale Schaltalgebra

In der Digitaltechnik sind die Eingangsvariablen so miteinander zu verknüpfen, dass die Ausgangsvariable einen definierten Zustand annimmt, um damit einen Prozess zu steuern.

> So soll ein Fahrstuhl nur dann fahren, wenn eine Zieletage gewählt wurde, in der er zurzeit nicht steht, seine Tür vollständig geschlossen ist und von ihr nichts eingeklemmt wurde und die Kabine nicht überlastet ist.

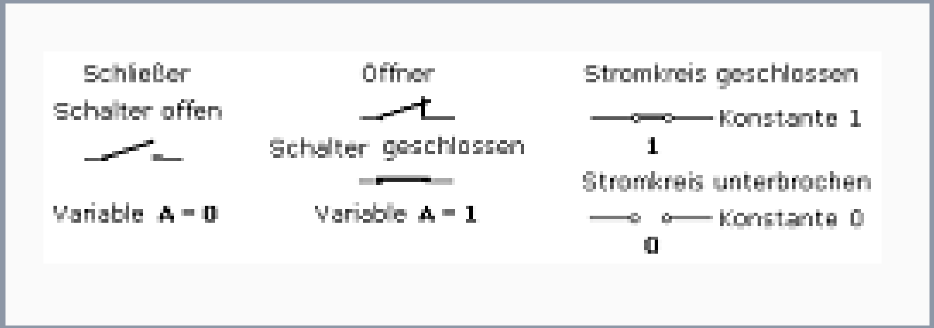
Man kann durch Kombinieren der beschriebenen digitalen Gatter und Ausprobieren bei einfacheren Aufgaben die eine oder andere Lösung finden. Das eigentliche Ziel ist es, eine wirtschaftliche Digitalschaltung zu entwickeln, die mit einem Minimum gleicher Gattertypen zum Ziel führt.

Der englische Mathematiker Georg Boole entwickelte eine Mengenalgebra, die in angepasster Weise als Boolesche Schaltalgebra bei der Problemlösung hilfreich ist. In der Schaltalgebra gibt es Variablen und Konstanten. Die binäre Digitaltechnik kommt mit zwei definierten logischen Zuständen, der 0 und 1 aus.

Digitale Schaltalgebra

Konstante
In der Schaltalgebra gibt es nur die zwei konstanten Größen 0 und 1. In der elektronischen Schaltung entspricht eine dauerhaft geschaltete Leitung der Konstanten mit dem Zustand 1. Die dauerhafte Unterbrechung eines Stromkreises steht für die Konstante mit dem Wert 0.

Variable
Veränderbare, schaltbare Eingangsgrößen und davon abhängige veränderliche Ausgangswerte werden als Variable bezeichnet. In der binären Digitaltechnik nehmen sie entweder den Zustand 0 oder 1 an. In elektronischen Schaltungen können sie mit einem Schalter verglichen werden. Der geöffnete Schalter entspricht einer Variablen mit dem Wert 0. Bei geschlossenem Schalter nimmt die Variable den Wert 1 an.



Digitale Schaltalgebra

Gesetze der Schaltalgebra

Die boolesche Schaltalgebra verwendet die drei Verknüpfungen UND, ODER, NICHT. Für die Verknüpfung von Konstanten gelten die nachfolgenden, mathematisch nicht beweisbaren Regeln oder Postulate:

UND-Verknüpfung konstanter Werte

In elektronischen Schaltungen entspricht die UND-Funktion einer Reihenschaltung der Elemente. Die vier Kombinationen stimmen mit der Wahrheitstabelle eines UND-Gatters überein. In der allgemeinen Algebra ist dieses UND mit der Multiplikation vergleichbar.

$0 \wedge 0 = 0 \quad 0 \wedge 1 = 0 \quad 1 \wedge 0 = 0 \quad 1 \wedge 1 = 1$

Digitale Schaltalgebra

ODER-Verknüpfung konstanter Werte

In elektronischen Schaltungen entspricht die ODER-Funktion einer Parallelschaltung der Elemente. Die vier Kombinationen stimmen mit der Wahrheitstabelle eines ODER-Gatters überein. In der allgemeinen Algebra ist dieses ODER mit der Addition vergleichbar, wobei in der binären Digitaltechnik keine Stelle einen größeren Wert als 1 haben kann.

$0 \vee 0 = 0 \qquad 0 \vee 1 = 1 \qquad 1 \vee 0 = 1 \qquad 1 \vee 1 = 1$

NICHT-Verknüpfung konstanter Werte

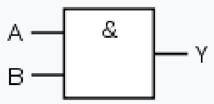
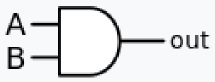
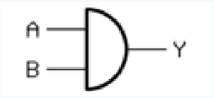
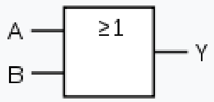
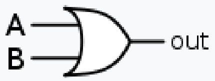
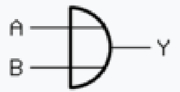
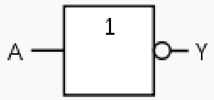
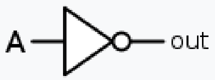
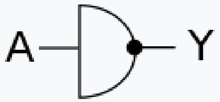
In elektronischen Schaltungen entspricht die NICHT-Funktion einem Inverter. Der Signalzustand wird umgekehrt.

$\neg 0 = \overline{0} = 1 \qquad \neg 1 = \overline{1} = 0$

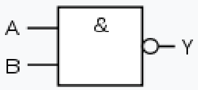
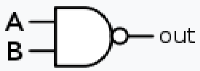
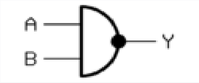
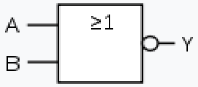
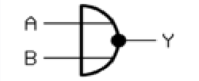
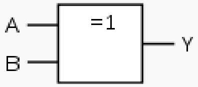
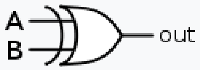
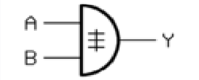
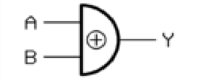
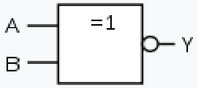
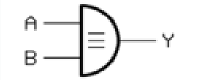
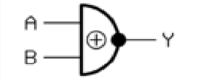
(¬ ASCII erweitert Alt0172)

Digitale Schaltalgebra

Logikgatter und Symbolik

<table>
<tr><th rowspan="2">Name</th><th rowspan="2">Funktion</th><th colspan="3">Symbol in Schaltplan</th><th rowspan="2">Wahrheits-
tabelle</th></tr>
<tr><th>IEC 60617-12 : 1997 & ANSI/IEEE Std 91/91a-1991</th><th>ANSI/IEEE Std 91/91a-1991</th><th>DIN 40700 (vor 1976)</th></tr>
<tr><td>Und-Gatter
(AND)</td><td>$Y = A \wedge B$
$Y = A \cdot B$
$Y = A B$
$Y = A \& B$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>
</td></tr>
<tr><td>Oder-Gatter
(OR)</td><td>$Y = A \vee B$
$Y = A + B$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>
</td></tr>
<tr><td>Nicht-Gatter
(NOT)</td><td>$Y = \overline{A}$
$Y = \neg A$
$Y = \tilde{A}$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
<table><tr><th>A</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>
</td></tr>
</table>

Digitale Schaltalgebra

NAND-Gatter (NICHT UND) (NOT AND)	$Y = \overline{A \wedge B}$ $Y = A \bar{\wedge} B$ $Y = \overline{A B}$ $Y = A \vert B$				A B Y 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
NOR-Gatter (NICHT ODER) (NOT OR)	$Y = \overline{A \vee B}$ $Y = A \bar{\vee} B$ $Y = \overline{A + B}$ $Y = A - B$				A B Y 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0
XOR-Gatter (Exklusiv-ODER, Antivalenz) (EXCLUSIVE OR)	$Y = A \underline{\vee} B$ $Y = A \oplus B$			 oder 	A B Y 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0
XNOR-Gatter (Exklusiv-Nicht-ODER, Äquivalenz) (EXCLUSIVE NOT OR)	$Y = \overline{A \underline{\vee} B}$ $Y = A \overline{\underline{\vee}} B$ $Y = \overline{A \oplus B}$ $Y = A \odot B$			 oder 	A B Y 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1

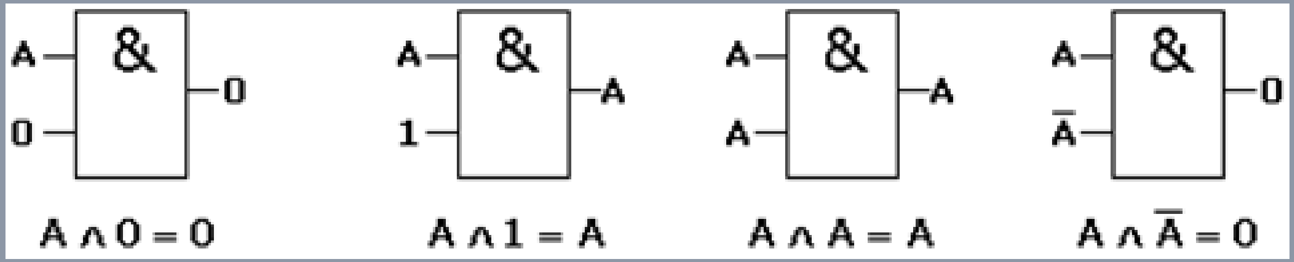
Früher waren auf dem europäischen Kontinent die deutschen Symbole (rechte Spalte) verbreitet; im englischen Sprachraum waren und sind die amerikanischen Symbole (mittlere Spalte) üblich. Die IEC-Symbole sind international auf beschränkte Akzeptanz gestoßen und werden in der amerikanischen Literatur (fast) durchgängig ignoriert.

Digitale Schaltalgebra

Gesetze der digitalen Schaltalgebra

- Theoreme:
  Theoreme sind die Verknüpfungsregeln einer Variablen mit einer Konstanten oder mit sich selbst. Die folgenden Ergebnisse lassen sich auch mithilfe der Wahrheitstabelle der jeweiligen Gatter mit zwei Eingangsgrößen nachweisen.

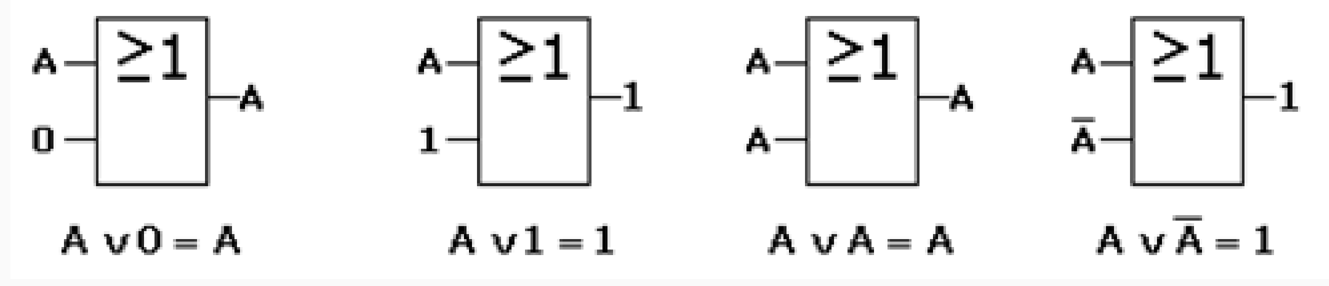
  Theoreme der UND-Verknüpfungen



Digitale Schaltalgebra

- Theoreme der ODER-Verknüpfungen

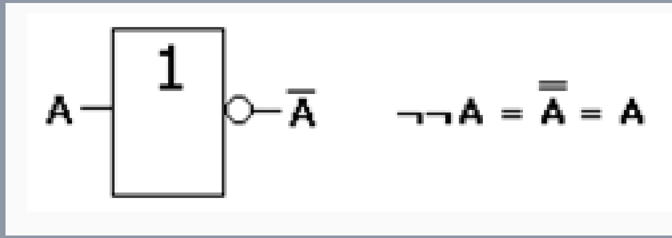
Werden die Eingangsgrößen als Schalterelemente dargestellt, so sind sie bei einer ODER Funktion parallel verschaltet. Unabhängig von A wird beim konstanten Eingang 1 die Ausgangsvariable immer 1 sein. Haben beide Eingänge den gleichen Zustand, dann muss die Ausgangsvariable genau diesen Wert annehmen. Sind die beiden Eingangsvariablen zueinander entgegengesetzt, so kann bei binären Zustandsgrößen der Ausgang nur konstant 1 sein.



Digitale Schaltalgebra

- Theoreme der NICHT-Verknüpfungen
-

  Die Negation eines binären Zustands ergibt sein Gegenteil. Steht für das Vorhandensein die 1, so ist die Negation die 0. Wird das Fehlen als 0 negiert, ist das Ergebnis die 1. Die doppelte Negation ergibt den Anfangswert. Zwei Negationsstriche über einer Variablen heben sich auf.



  Anders gesagt, werden beide Seiten einer Funktionsgleichung negiert, so ändert sich die Schaltfunktion nicht. Eine doppelte Negierung hebt sich auf

Digitale Schaltalgebra

- Kommutativgesetz

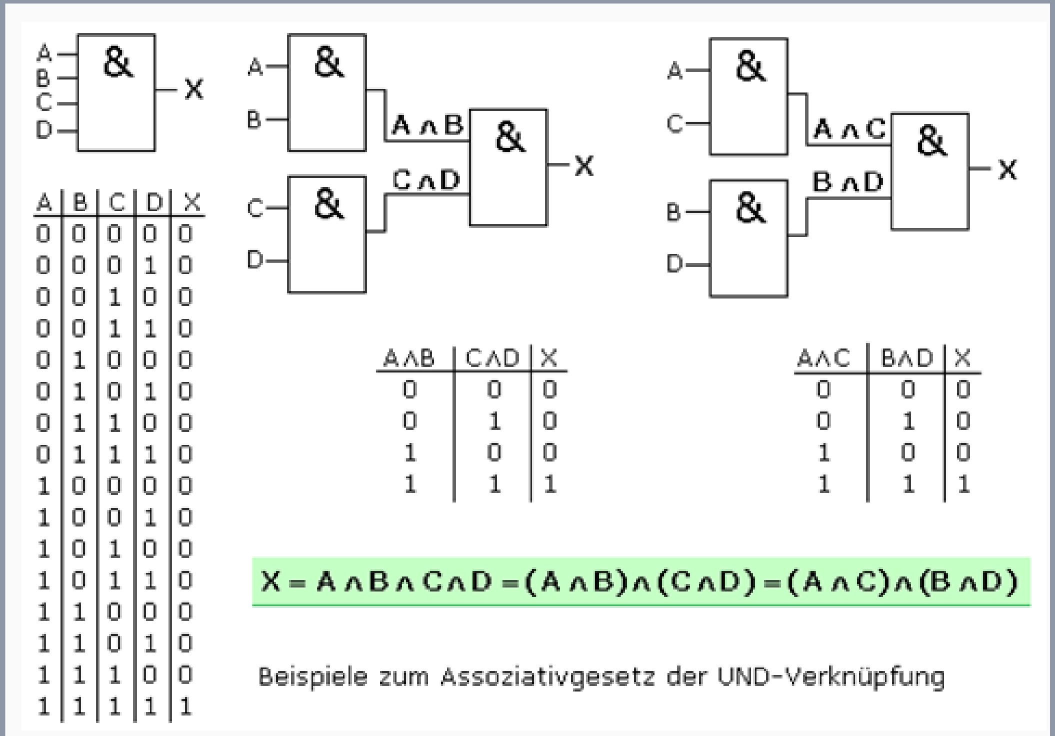
Das Kommutativ- oder Vertauschungsgesetz besagt, dass bei der UND sowie ODER Verknüpfung auch bei beliebiger Vertauschung der Reihenfolge der Eingangsvariablen das Ergebnis gleich bleibt.

UND	$X = A \wedge B \wedge C = C \wedge A \wedge B = B \wedge C \wedge A$
ODER	$X = A \vee B \vee C = C \vee A \vee B = B \vee C \vee A$

Digitale Schaltalgebra

- ## Assoziativgesetz

Das Assoziativ- oder Verbindungsgesetz besagt, dass bei einer UND- beziehungsweise ODER-Verknüpfung mit mehr als zwei Schaltvariablen die Verknüpfung auch stufenweise nacheinander in beliebiger Reihenfolge erfolgen kann.



A	B	C	D	X
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

A∧B	C∧D	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A∧C	B∧D	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$X = A \wedge B \wedge C \wedge D = (A \wedge B) \wedge (C \wedge D) = (A \wedge C) \wedge (B \wedge D)$

Beispiele zum Assoziativgesetz der UND-Verknüpfung

Anstelle des UND-Gatters mit vier Eingangsvariablen lassen sich zwei UND-Gatter mit zwei Eingängen verwenden. Die Variablen A, B, C, D werden einzeln beliebig mit den Eingängen verbunden. Die Ausgangsvariable der beiden UND-Gatter kann den Wert 0 oder 1 annehmen. Beide Ausgangsvariablen sind nochmals mit einem UND-Gatter zu verknüpfen, wobei sich wieder vier Eingangskombinationen ergeben. Nur wenn alle Eingangsvariablen 1 sind, wird der Ausgangszustand ebenfalls 1.

Digitale Schaltalgebra

- Assoziativgesetz

Das Assoziativgesetz gilt gleichermaßen für die ODER-Verknüpfung. Die Klammersetzung ist nicht notwendig und soll nur verschiedene Verteilungen besser erkennbar machen.

$$X = A \vee B \vee C \vee D = (A \vee B) \vee (C \vee D) = (A \vee C) \vee (B \vee D)$$

Digitale Schaltalgebra

- Distributivgesetz

  Das Distributiv- oder Verteilungsgesetz wird zur Vereinfachung von Verknüpfungsgleichung angewendet. Es ist vergleichbar mit dem Ausmultiplizieren und Ausklammern von Variablen der normalen Algebra. Da die logische UND-Verknüpfung der algebraischen Multiplikation entspricht, während die ODER- Verknüpfung mit der Addition vergleichbar ist, gibt es zwei unterschiedliche Distributivgesetze.

Digitale Schaltalgebra

- Konjunktives Distributivgesetz

Eine Variable wird mit UND verknüpft und auf den Folgeausdruck verteilt. Die Vorgehensweise entspricht dem aus der Algebra bekannten Ausmultiplizieren eines Klammerausdrucks mit einem Faktor. Im umgekehrten Fall kann eine Variable, die mit mehreren anderen Variablen verknüpft ist, ausgeklammert werden. Das bedeutet für den Schaltungsaufbau eine Einsparung an Gattern.

$$X = A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

⇨ Ausmultiplizieren
⇦ Ausklammern

$$X = A \wedge (A \vee B)$$
$$X = (A \wedge A) \vee (A \wedge B)$$
$$X = A \vee (A \wedge B) = A$$
$$X = A$$

UND		ODER		
A	B	A∧B	A	X
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Beim Ausklammern wird die Variable mit ihrem Verknüpfungszeichen, hier UND, vor die Klammer gesetzt. Die in der Klammer stehenden Variablen werden mit dem zuvor zwischen den Klammern stehenden ODER verknüpft.

Digitale Schaltalgebra

- Disjunktives Distributivgesetz

Eine Variable kann durch ein vergleichbares Ausmultiplizieren auf andere Ausdrücke verteilt werden oder bei mehrfachem Auftreten ausgeklammert werden. Beim Ausklammern wird das ODER Verknüpfungszeichen mit der Variablen vor die Klammer geschrieben.

$$X = A \lor (B \land C) = (A \lor B) \land (A \lor C)$$

$\Rightarrow$ Ausmultiplizieren
$\Leftarrow$ Ausklammern

$$X = A \lor (A \land B)$$
$$X = (A \lor A) \land (A \lor B)$$
$$X = A \land (A \lor B)$$
$$X = A$$

ODER		UND		
A	B	$A \lor B$	A	X
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Digitale Schaltalgebra

- ## De Morgansche Gesetze

Die boolesche Algebra wurde vom englischen Mathematiker De Morgan weiter entwickelt. Für die Schaltalgebra gibt es zwei De Morgansche Gesetze. Sie machen Aussagen zur Negation einer Verknüpfung und der Umkehr von Verknüpfungszeichen. Mit den De Morganschen Gesetzen lassen sich bei der Entwicklung von Digitalschaltungen Gatter gegeneinander austauschen, Schaltungen verkleinern oder mit nur einem Gattertyp verwirklichen. Das erste Gesetz ist für die NAND-Verknüpfung und das zweite Gesetz entsprechend für die NOR-Verknüpfung definiert.

$$X = \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

1. De Morgansche Gesetz

ODER

A	B	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	X
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

$$X = \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

2. De Morgansche Gesetz

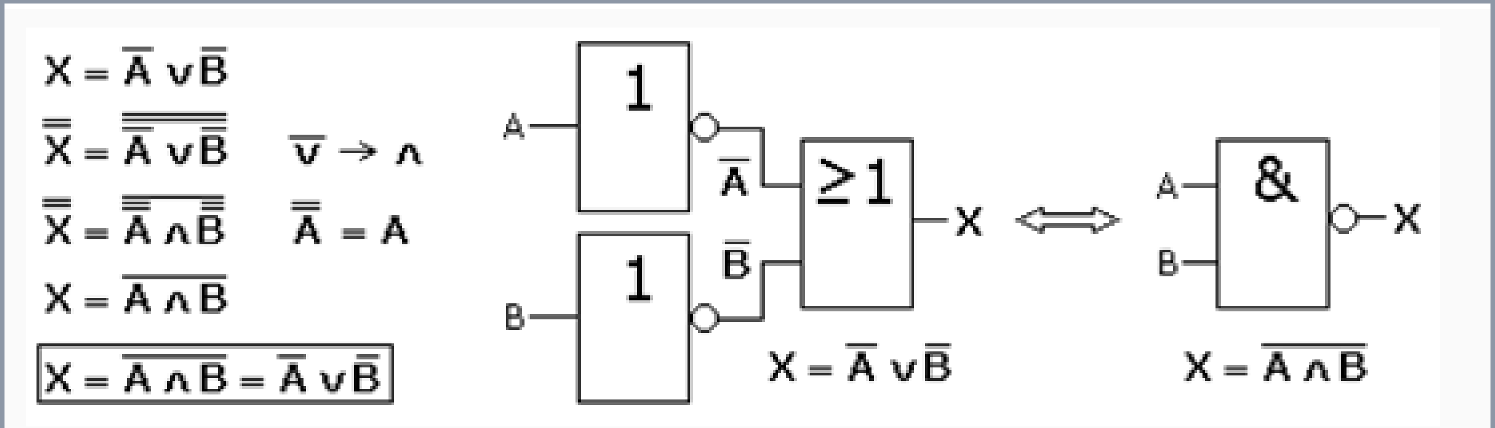
UND

A	B	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	X
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0

Ist eine Verknüpfung insgesamt negiert, so ist ihre Ausgangsvariable negiert. Die Negation kann auf die Einzelglieder aufgeteilt werden, wobei aus der Grundverknüpfung UND ein ODER beziehungsweise aus ODER ein UND wird. Eine doppelte Negation hebt sich auf. Getrennte Negationsstriche über Variablen bedeuten, dass die Eingangsvariablen negiert sind.

Digitale Schaltalgebra

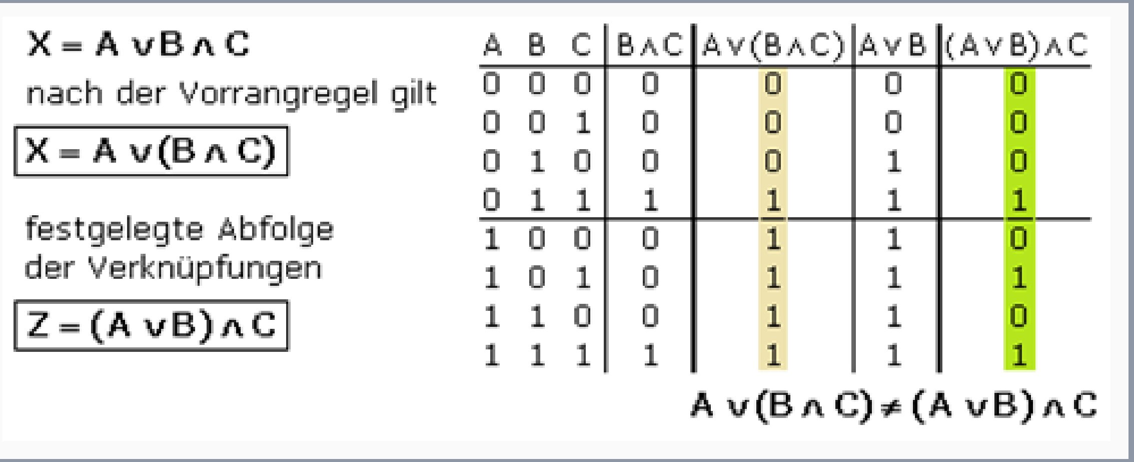
- Die zum 1. De Morganschen Gesetz gezeigte Verknüpfung kann schaltungstechnisch mit zwei NICHT- und einem ODER-Gatter verwirklicht werden. Wie zu erkennen ist, folgt das gleiche Ergebnis mit nur einem NAND-Gatter. Für das 2. De Morgansche Gesetz gilt die entsprechende Aussage. Zwei NICHT- und ein UND-Gatter reduzieren sich auf den Einsatz eines NOR-Gatters. Mit der doppelten Negation und den De Morganschen Gesetzen kann bei einer gegebenen Funktionsgleichung auf das Bestehen einer derartige Vereinfachung geprüft werden. Treten dabei mehrfache Negationen auf, so lassen sie sich von innen nach außen auflösen.



Digitale Schaltalgebra

- ## Vorrang- und Klammerregel

Wie in der Algebra ist auch in der Digitaltechnik auf eine bestimmte Reihenfolge der Operationen zu beachten. Die Negation sollte vor der Konjunktion (UND) und diese vor der Disjunktion (ODER) ausgeführt werden. Das ist vergleichbar mit der Aussage, dass die Multiplikation Vorrang vor der Addition hat.
Bei mehreren Variablen und unterschiedlichen Verknüpfungen kann eine Klammersetzung notwendig sein. Beachtet man die Vorrangregel, kann man auf viele Klammern verzichten. Ein Setzen zeigt sogleich eindeutig, welche der Variablen wie zu verknüpfen ist. Bei ODER sollte immer geklammert werden, ebenfalls beim Anwenden der De Morganschen Gesetze auf NAND- und NOR-Verknüpfungen.



$X = A \vee B \wedge C$

nach der Vorrangregel gilt

$\boxed{X = A \vee (B \wedge C)}$

festgelegte Abfolge der Verknüpfungen

$\boxed{Z = (A \vee B) \wedge C}$

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

$A \vee (B \wedge C) \neq (A \vee B) \wedge C$

Bei drei Eingangsvariablen und binären Zuständen gibt es $2^3 = 8$ Eingangskombinationen. Die Wahrheitstabelle zeigt bei definierter Klammersetzung oder Beachtung der Vorrangregel UND vor ODER unterschiedliche Ergebnisse.