Karnaugh-Veitch-Diagramm: Beispiele (Teil 2)

Inhaltsverzeichnis

Drei logische Variablen

Für drei Variablen hat das KV-Diagramm 8 Felder. Zu beachten ist, dass die sich gegenüberliegenden Variablen (hier A und C) unterschiedlich angeordnet sind (Negation an unterschiedlicher Stelle), so dass sich für jedes der 8 Felder ein anderer logischer Ausdruck ergibt.

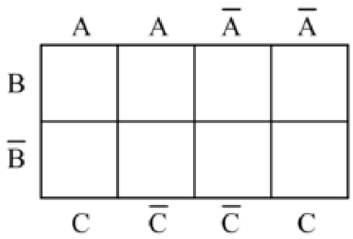

Bild 3-1

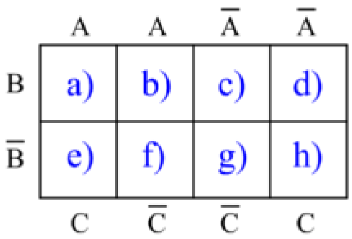

Bild 3-2

Zur Einsparung unnötiger Schreibarbeit kann das Eintragen der Nullen weggelassen werden.

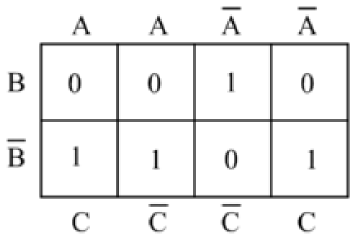

Bild 3-3

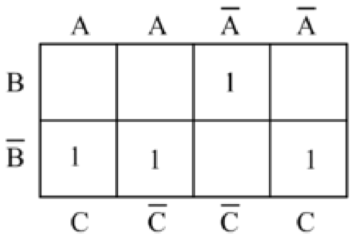

Bild 3-4

Als Besonderheit kommt hier eine zyklische Eigenschaft des KV-Diagramms zum Vorschein. Die Gruppenbildung kann über den Rand hinweg zur anderen Seite fortgesetzt werden. In Bild 3-5 ist eine solche zulässige Gruppe markiert. Bild 3-6 veranschaulicht die zyklische Eigenschaft des KV-Diagramms.

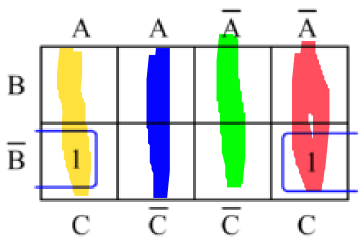

Bild 3-5

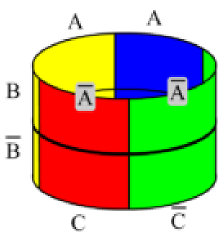

Bild 3-6

Auch größere Gruppen, die über beide Ränder hinausreichen sind zulässig (Bild 3-7). Die beiden Zweiergruppen (Bild 3-8) sollten besser zu einer einzigen Vierergruppe zusammengefasst werden, um den kleinstmöglichen logischen Ausdruck als Lösung zu erhalten.

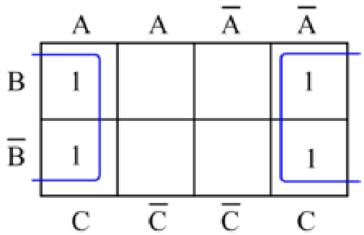

Bild 3-7

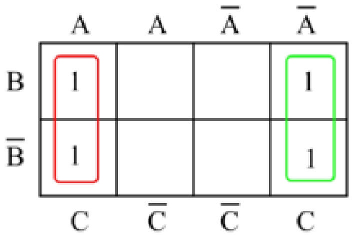

Bild 3-8

Allerdings sind auch weiterhin nur Gruppen mit einer bestimmten Größe zulässig. Die Größe muss eine Zweierpotenz sein: 2, 4, 8. Erst bei größeren KV-Diagrammen kommen 16 und 32 als Grenzen in Betracht. Die in Bild 3-9 und 3-10 gezeigten Gruppen sind also nicht zulässig, da sie sechs Einsen umfasst.

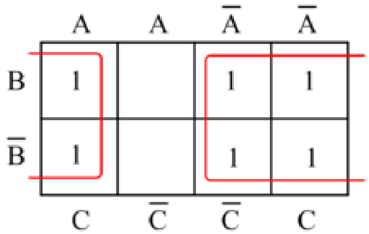

Bild 3-9

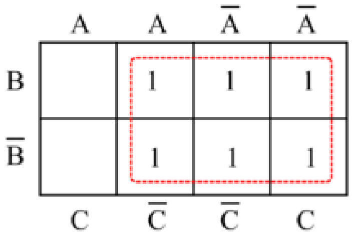

Bild 3-10

Die unkorrekten Sechsergruppen aus Bild 3-9 und 3-10 müssen in kleinere Gruppen mit 2 und 4 Einsen aufgeteilt werden (Bild 3-11 und 3-12).

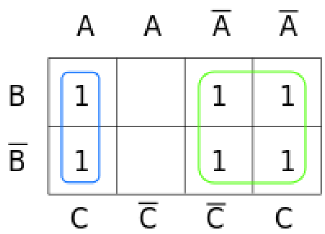

Bild 3-11

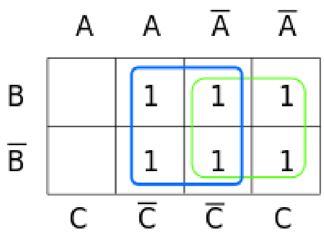

Bild 3-12

Bild 3-13 zeigt eine alternative Gruppenbildung zu Bild 3-12, die aber ebenso wie die Gruppenbildung bei Bild 3-11 leider nicht ganz korrekt ist. Bisher wurde eine zusätzlich Regel noch nicht weiter vertieft: „Die Gruppen müssen so groß wie möglich sein“. Nur so lässt sich eine maximale Minimierung erzielen. Bei Zuwiderhandlungen ist das Ergebnis jedoch nicht fehlerhaft, sondern nur nicht so stark minimiert.

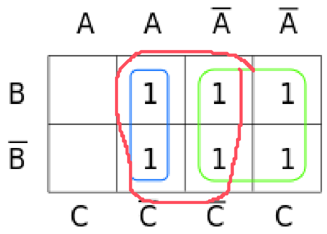

Bild 3-13

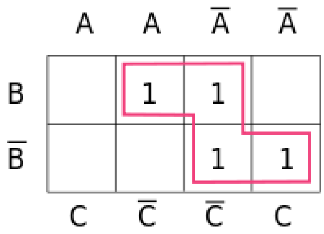

Bild 3-14

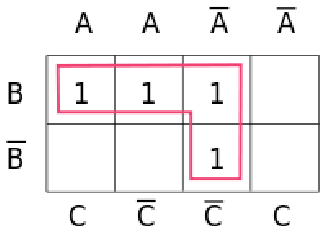

Bild 3-15

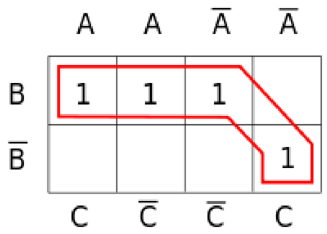

Bild 3-16

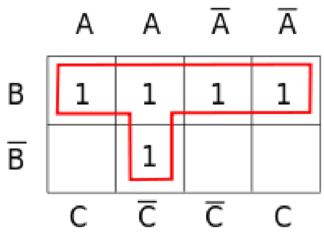

Bild 3-17

Wie bei allen KV-Diagrammen sind Gruppen, die„um die Ecke“ gehen, nicht erlaubt. Die Gruppen in Bild 3-14, 3-15, 3-16 und 3-17 sind deshalb unzulässig.

Auch Bild 3-18 zeigt eine unkorrekte Gruppenbildung, da die rote Gruppe 3 Einsen umfasst. Korrekt ist dagegen die Gruppenbildung in Bild 3-19. Oft gibt es mehrere Möglichkeiten korrekte Gruppen zu bilden (Bild 3-20). Allerdings greift hier eine weitere, bisher noch nicht weiter vertiefte Regel: „Alle Einsen sind in Gruppen zusammenzufassen“. Die einzelne nicht erfasste Eins bildet also eine separate Gruppe (Bild 3-21). Jedoch greift eine weitere Regel: „Es sind so wenig Gruppen wie möglich zu bilden“. Nur so lässt sich eine maximale Reduzierung des logischen Ausdrucks erreichen. Die Regeln „Die Gruppen müssen so groß wie möglich sein“ und „Es sind so wenig Gruppen wie möglich zu bilden“ ergänzen sich oft und bewirken das gleiche – wenige und große Gruppen. Deshalb ist die Gruppierung in Bild 3-19 gegenüber 3-21 vorzuziehen, da in Bild 3-19 nur drei Gruppen gebildet werden müssen, während in Bild 3-21 vier Gruppen gebildet werden müssen.

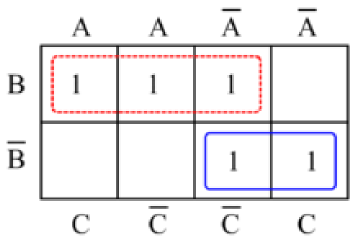

Bild 3-18

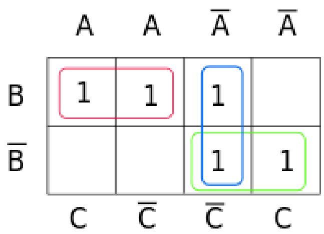

Bild 3-19

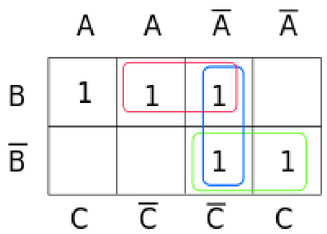

Bild 3-20

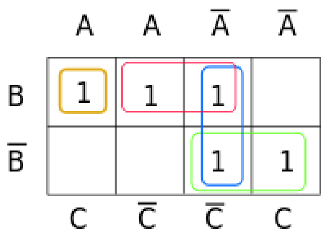

Bild 3-21

In Bild 3-22 sind die 6 Einsen für folgenden, in DNF vorliegenden, Ausdruck eingetragen (von links nach rechts, erst die obere Zeile, dann die untere):
ABC ∨ AB¬C ∨ ¬ABC ∨ A¬BC ∨ A¬B¬C ∨ ¬A¬BC.
Daraus können zwei Gruppen gebildet werden. In der roten Gruppe heben sich B und ¬B auf, sowie C und ¬C, so dass nur A übrig bleibt. In der blauen Gruppe

heben sich B und ¬B auf, so dass ¬AC bleibt. Die „rote“ und „blaue“ Teillösung ergeben zusammen den Term **A ∨ ¬AC**. Eine Vereinfachung zu einem Minterm **A ∨ C** ist durch Einbeziehung der 2 Einsen der linken Spalte in den blauen Block möglich (Bilder 3-22a).

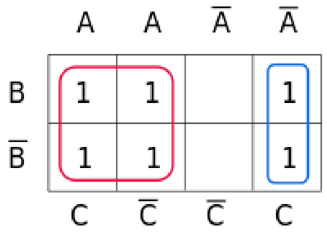

Bild 3-22

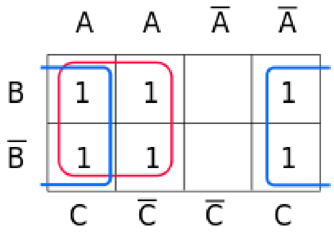

Bild 3-22a

In Bild 3-23 ist der folgende Ausdruck in das KV-Diagramm eingetragen (untere Zeile von links nach rechts, dann obere Zeile):
A¬BC ∨ A¬B¬C ∨ ¬A¬B¬C ∨ ¬A¬BC ∨ ¬AB¬C.
Es können zwei Gruppen gebildet werden. Die blaue Gruppe vereinfacht man zu ¬B, da A (wegen A ∨ ¬A = 1) und C (wegen C ∨ ¬C = 1) wegfallen. Die rote Gruppe vereinfacht man zu ¬A¬C, da B (wegen B ∨ ¬B = 1) wegfällt. So erhält man als Minterm **¬B ∨ ¬A¬C**.

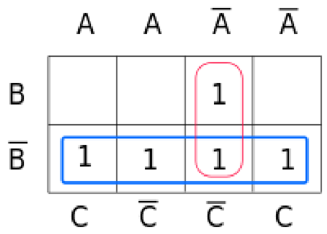

Bild 3-23

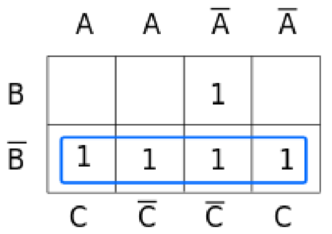

Bild 3-24

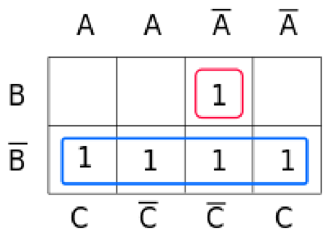

Bild 3-25

Eine andere denkbare Lösung wäre, nur eine blaue Gruppe zu bilden und die rote Gruppe nicht zu bilden (Bild 3-24). Eine Regel besagt aber: „Alle Einsen sind in Gruppen zusammenzufassen“ – also muss aus der einzelnen Eins auch noch eine Gruppe gebildet werden (Bild 3-25). Das verstieße aber gegen die Regel: „Die Gruppen müssen so groß wie möglich sein“. Deshalb ist die Bildung der Gruppen in Bild 3-23 die einzige richtige Lösung.

In Bild 3-26 bzw. 3-27 ist der folgende Ausdruck in das KV-Diagramm eingetragen (von links nach rechts, zuerst obere Zeile, dann untere Zeile):
AB¬C ∨ ¬AB¬C ∨ ¬ABC ∨ A¬B¬C ∨ ¬A¬B¬C ∨ ¬ABC.

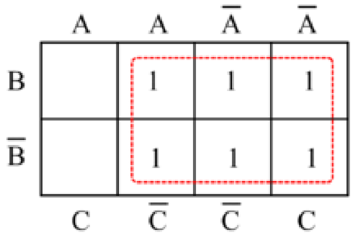

Bild 3-26

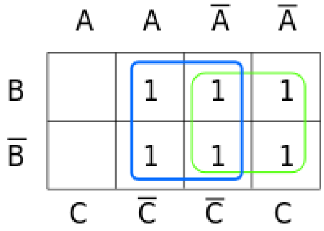

Bild 3-27

Die in Bild 3-26 dargestellte Gruppenbildung ist nicht zulässig. Stattdessen werden, wie in Bild 3-27 gezeigt, 2 sich überlappende Gruppen gebildet. Die mittleren Einsen gehören zu beiden Gruppen. Die linke Gruppe (blau) vereinfacht sich zu ¬C und die rechte Gruppe (grün) zu ¬A. Als Minterm erhält man so die Lösung **¬C ∨ ¬A**.

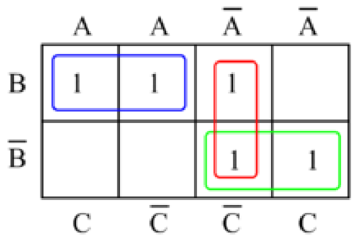

Bild 3-28

In Bild 3-28 ist der folgende Ausdruck in das KV-Diagramm eingetragen (von links nach rechts, zuerst obere Zeile, dann untere Zeile):
ABC ∨ AB¬C ∨ ¬AB¬C ∨ ¬A¬B¬C ∨ ¬A¬BC.
Die blaue Gruppe vereinfacht sich zu AB, die rote zu ¬A¬C und die grüne zu ¬A¬B, so dass man als Minterm **AB ∨ ¬A¬C ∨ ¬A¬B** erhält.

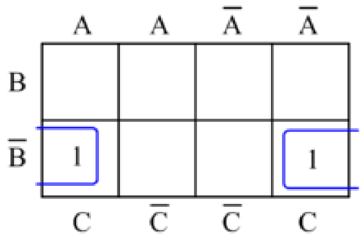

Bild 3-29

In Bild 3-29 ist der Ausdruck **A¬BC ∨ ¬A¬BC** eingetragen. Wegen der zyklischen Eigenschaft des KV-Diagramms lässt sich eine Gruppe bilden, die über die Ränder hinausreicht und die dann zu **¬BC** vereinfacht werden kann.

Bild 3-30: **ABC ∨ ¬ABC ∨ A¬BC ∨ ¬A¬BC** vereinfacht sich zu **C**.
In Bild 3-31 wird gegen die Regel „Die Gruppen müssen so groß wie möglich sein" verstoßen. Trotzdem wird der dazugehörige logische Term zu Demonstrationszwecken hier angeführt: **ABC ∨ ¬ABC ∨ A¬BC ∨ ¬A¬BC** vereinfacht sich zu AC (rote Gruppe) und ¬AC (grüne Gruppe). Lösung: **AC ∨ ¬AC**. Durch Ausklammern von C erhält man **C ∧ (A ∨ ¬A)**. Das ist identisch mit **C ∧ 1** und somit identisch mit **C**. Diese Lösung ist bereits aus Bild 3-30 bekannt. Dort wurde sie allerdings ohne zusätzliche algebraische Umformung erreicht.

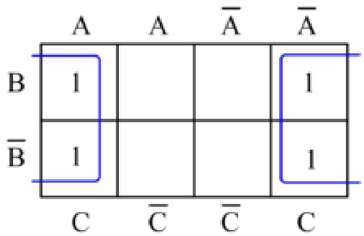

Bild 3-30

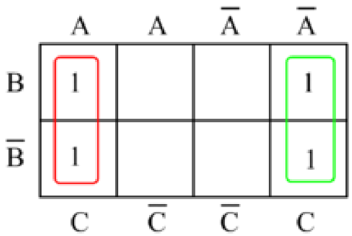

Bild 3-31

Nicht immer ist ersichtlich, ob sich ein Ausdruck weiter kürzen lässt. Erst das Eintragen der Einsen schafft in manchen Fällen Gewissheit, dass keine Gruppen gebildet werden können. Obwohl man gerade bei langen Ausdrücken vermutet, dass sie gekürzt werden können.

In Bild 3-32 ist folgende DNF eingetragen:

AB ¬C ∨ A ¬BC ∨ ¬ABC ∨ ¬A ¬B ¬C

Da sich die Felder mit den Einsen nur an den Ecken berühren, können nur Gruppen mit je einem Feld gebildet werden (Bild 3-33). In diesem Fall lässt sich der Term nicht weiter kürzen. Die DNF ist auch gleichzeitig der Minterm.

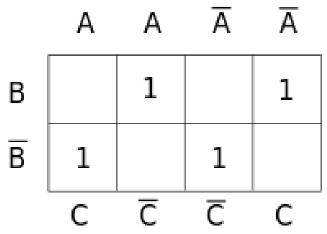

Bild 3-32

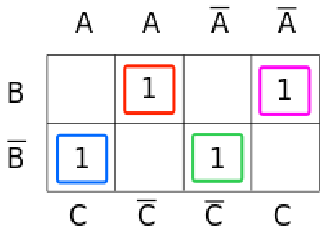

Bild 3-33

Bild 3-33 zeigt eine andere mögliche Darstellung für ein KV-Diagramm mit 3 Variablen.

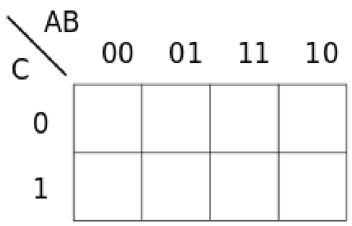

Bild 3-33

Vier logische Variablen

Bei vier logischen Variablen benötigt das KV-Diagramm 16 Felder (Bild 4-1). Auf jede Seite des Diagramms schreibt man je eine Variable – jeweils in normaler und verneinter Form. Die Reihenfolge von verneinter und normaler Form ist so zu wählen, dass sich für jedes Feld ein anderer logischer Wert ergibt (zur Veranschaulichung in Bild 4-2 eingetragen) und so, dass sich von Nachbarfeld zu Nachbarfeld jeweils nur die Negation einer einzigen Variable ändert. Beispielsweise ist die direkte Nachbarschaft von AB und ¬A¬B nicht erlaubt, während auf AB die Kombination ¬AB folgen darf. Natürlich muss jede mögliche Variablenkombination genau einmal in den 16 Feldern vertreten sein. Einzelheiten dazu siehe unter Gray-Code.

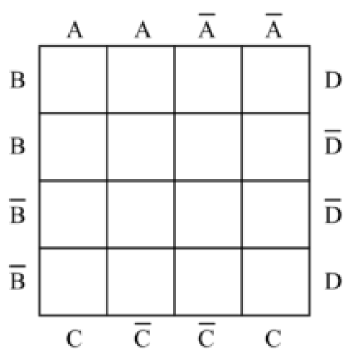

Bild 4-1

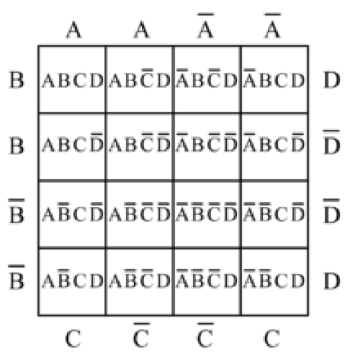

Bild 4-2

Es gibt mehrere Möglichkeiten die Variablen und ihre Verneinung am Rand des Feldes einzutragen (Bild 4-3 und 4-4).

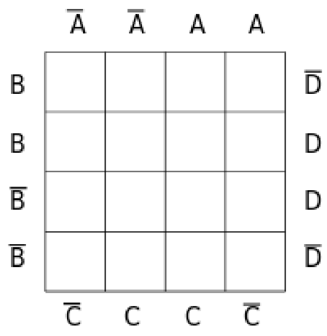

Bild 4-3

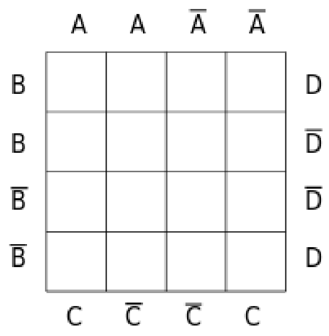

Bild 4-4

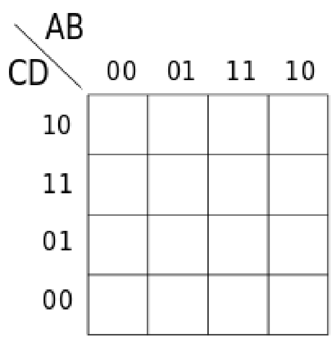

Bild 4-5

Eine andere Möglichkeit der Beschriftung der Felder ist in Bild 4-5 dargestellt. Das ist die von Karnaugh eingeführte Version des Diagramms. Während die Version von Veitch in den Bildern 4-1, 4-3 und 4-4 zu sehen ist. In der Version von Karnaugh ist der Gray-Code, der beiden Versionen zu Grunde liegt, wesentlich klarer zu erkennen.

Die Bilder 4-6 bis 4-8 demonstrieren den logischen Zusammenhang zwischen der Diagrammversion von Veitch und der Version von Karnaugh.

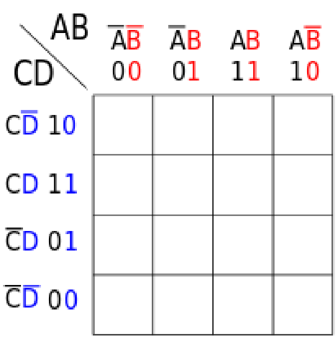

Bild 4-6

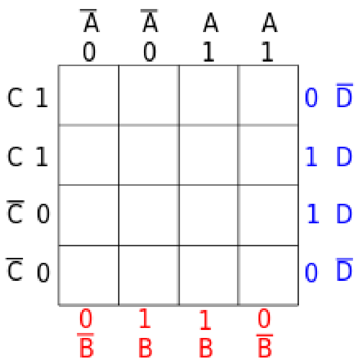

Bild 4-7

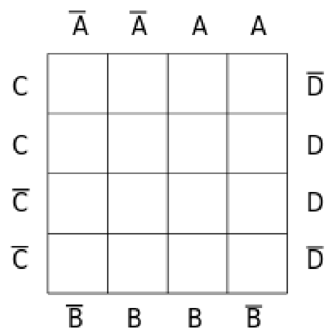

Bild 4-8

Eine weitere gebräuchliche Version des 4x4-Diagramms zeigt Bild 4-9. Die dicken Striche dienen für die Markierung der nicht verneinten Variablen. Bild 4-10 verdeutlicht nochmals die Belegung der Variablen. Diese ausführliche Schreibweise in Bild 4-10 entfällt aber in der praktischen Anwendung dieser Diagrammart. Statt der Variablen A, B, C und D für die Eingabevariablen sind auch indizierte Variablen (X_0, X_1, X_2, X_3) gebräuchlich (Bild 4-11).

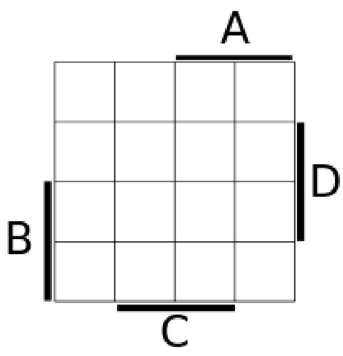

Bild 4-9

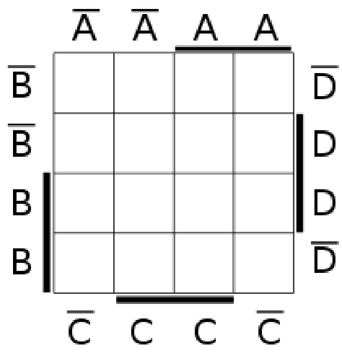

Bild 4-10

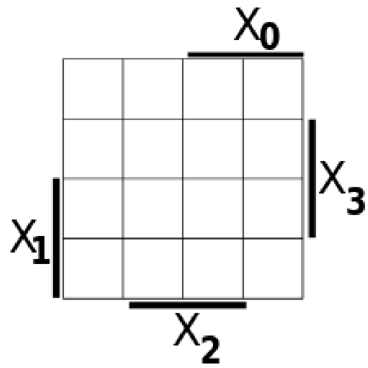

Bild 4-11

Wie bereits bei den KV-Diagrammen mit drei Variablen sind auch hier Gruppen erlaubt, die den Rand überschreiten. Egal, ob in horizontaler (rot) oder vertikaler (grün) Richtung – Bild 4-12. Die zyklische Eigenschaft des KV-Diagramms sowohl horizontal (Bild 4-13) als auch vertikal (Bild 4-14) beruht auf dem Gray-Code, der speziell für das KV-Diagramm ausgewählt wurde.

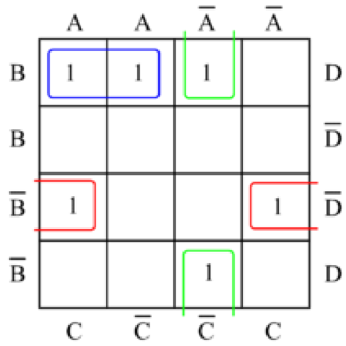

Bild 4-12

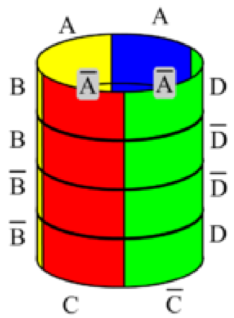

Bild 4-13

Dieses zyklische Verhalten des KV-Diagramms in horizontaler und gleichzeitig in vertikaler Richtung (in Bild 4-13 und 4-14 nur getrennt wiedergegeben) wird als toroidal bezeichnet, da ein Torus (Bild 4-15) diese Eigenschaft hat. Ein KV-Diagramm ist ein flacher Torus (Bild 4-15a). Das zweidimensionale KV-Diagramm kann durch Faltung und Krümmung in den dreidimensionalen Torus umgewandelt werden. Dazu wird das rechteckige KV-Diagramm zu einem waagrechten Schlauch gebogen und der Schlauch dann zu einem Ring geschlossen.

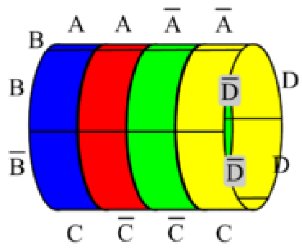

Bild 4-14

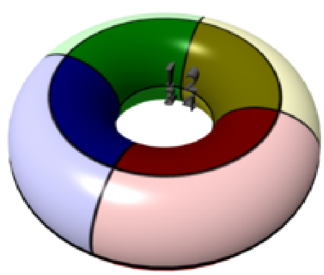

Bild 4-15: Torus

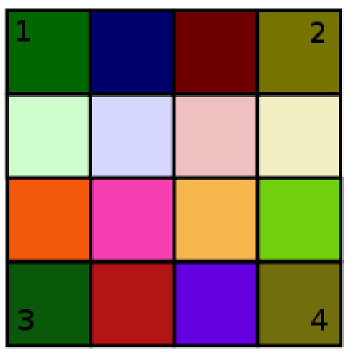

Bild 4-15a: Diese Fläche umschließt den Torus in Bild 4-15

Da das KV-Diagramm sich sowohl horizontal als auch vertikal zyklisch verhält (Torus), ist beim 4x4 Diagramm auch eine besondere Gruppenbildung an den Ecken möglich und erlaubt – Bild 4-16. Eine Grundbedingung ist aber immer, dass die Größe der Gruppe einer Zweierpotenz entspricht – 2, 4, 8, 16. Deshalb ist die Gruppe in Bild 4-17 (6 Felder) und Bild 4-18 verboten.

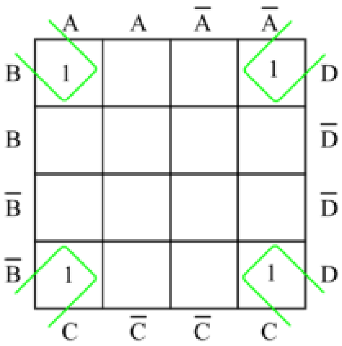

Bild 4-16: Die Gruppenbildung "über die Ecken" ist am Torus in Bild 4-15 und 4-15a anschaulich dargestellt

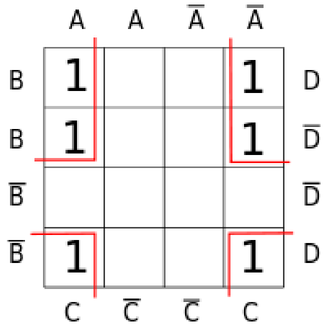

Bild 4-17

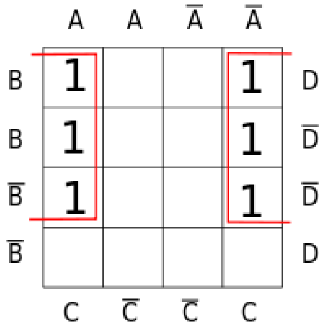

Bild 4-18

Genaugenommen liegt bereits beim 2x2 KV-Diagramm die gleiche zyklische Eigenschaft vor wie beim 4x4-Diagramm. Man macht nur keinen Gebrauch davon. Die Zweiergruppe in Bild 4-19 könnte man genauso gut zu beiden Seiten über die Ränder ausdehnen und dafür zwischen beiden Einserfeldern die Verbindung in der Mitte unterbrechen (Bild 4-20).

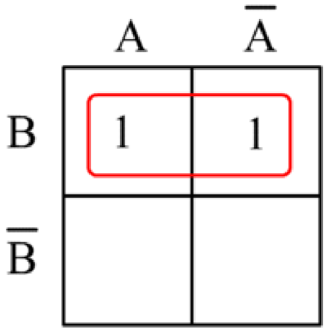

Bild 4-19

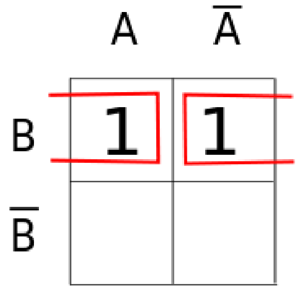

Bild 4-20

Auch die Vierergruppe in Bild 4-21 könnte man in Analogie zu Bild 4-16 so zeichnen, das sie sowohl horizontal als auch vertikal zyklisch über die Ränder geht. Dafür könnte man dann die Verbindung der Gruppe auf der „Vorderseite“ des KV-Diagramms unterbrechen, also die Gruppe sowohl horizontal, als auch vertikal aufspalten (Bild 4-24).

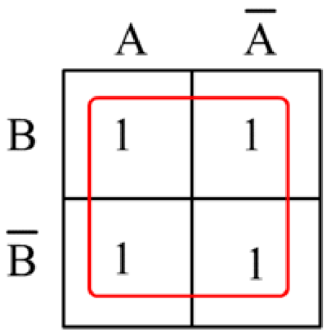

Bild 4-21

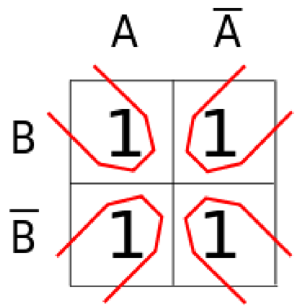

Bild 4-22

Bild 4-23 zeigt nochmals zyklische Eigenschaften eines 2x2-Diagramms, für deren Nutzung jedoch in der Praxis kein Bedarf besteht, da die Gruppen im Bild 4-24 ausreichen. Auch beim 2x4-Diagramm trifft man die gleichen zyklischen Eigenschaften (Bild 4-25), die jedoch in der Praxis nur in horizontaler Richtung genutzt werden (rote Gruppe), während die vertikale Gruppe (blau) ohne praktische Bedeutung ist.

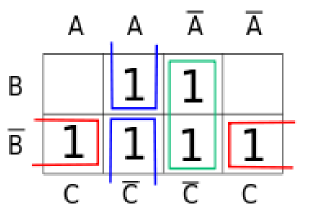

Bild 4-25

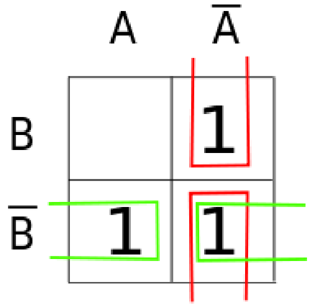

Bild 4-23

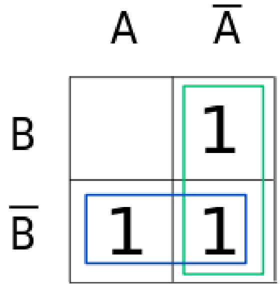

Bild 4-24

Bild 4-26 (links oben beginnend, reihenweise von links nach rechts) – die gegebene DNF lautet:
ABCD ∨ AB¬CD ∨ ¬AB¬CD ∨ A¬BC¬D ∨ ¬A¬BC¬D ∨ ¬A¬B¬CD.
Sie vereinfacht sich zu:

- blaue Gruppe: ABD (weil sich C mit ¬C zu 1 aufhebt und wegfallen kann);
- grüne Gruppe: ¬A¬CD (weil sich B mit ¬B zu 1 aufhebt und wegfallen kann);
- rote Gruppe: ¬BC¬D (weil sich A mit ¬A zu 1 aufhebt und wegfallen kann).

Das Endergebnis ist folglich: **ABD ∨ ¬A¬CD ∨ ¬BC¬D**.

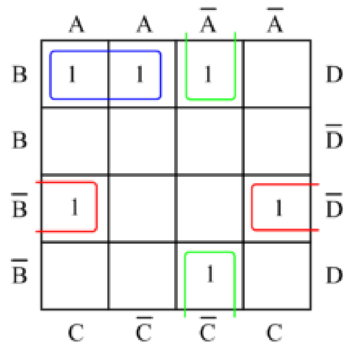

Bild 4-26

Bild 4-27 (links oben beginnend, reihenweise von links nach rechts) – die gegebene DNF lautet:
ABCD ∨ ¬ABCD ∨ A¬BCD ∨ ¬A¬BCD.
Da sich eine gültige Gruppe bilden lässt, in der sich A und B jeweils mit ihrer negierten Form aufheben, lautet das vereinfachte Ergebnis: **CD**.

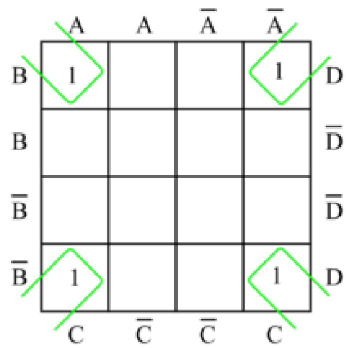

Bild 4-27

Bild 4-28 zeigt das KV-Diagramm mit der eingetragenen DNF (zeilenweise, von links oben beginnend):
ABCD ∨ AB¬CD ∨ ¬AB¬CD ∨ ¬ABCD ∨ ABC¬D ∨ AB¬C¬D ∨ ¬AB¬C¬D ∨ ¬ABC¬D ∨ A¬BC¬D ∨ A¬B¬C¬D ∨ ¬A¬B¬C¬D ∨ ¬A¬BC¬D.
Hier könnte man ohne KV-Diagramm schnell den Überblick verlieren. Die eingezeichnet Gruppe (Bild 4-28) ist so nicht zulässig (12 Felder). Bild 4-29 zeigt die korrekte Bildung der Gruppen (Achtergruppe – also eine Zweierpotenz, so groß wie möglich, so wenig Gruppen wie möglich). Die obere Gruppe (grün) vereinfacht sich zu: **B**. Die untere Gruppe (rot) vereinfacht sich zu: **¬D**. Somit lautet der Minterm: **B ∨ ¬D**.

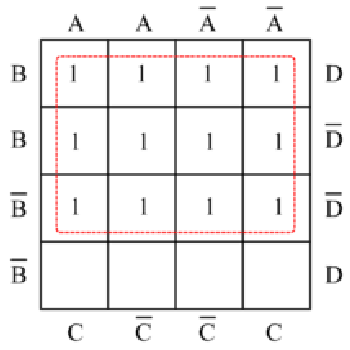

Bild 4-28

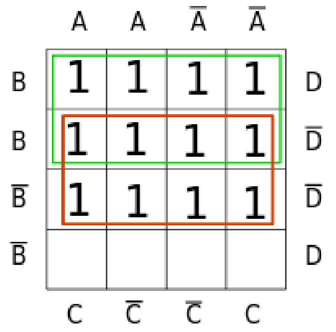

Bild 4-29

Nicht den Regeln entsprechend (so große Gruppen wie möglich, so wenig Gruppen wie möglich) ist die Gruppenbildung in Bild 4-30 und 4-31.

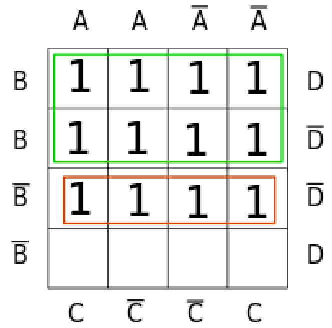

Bild 4-30

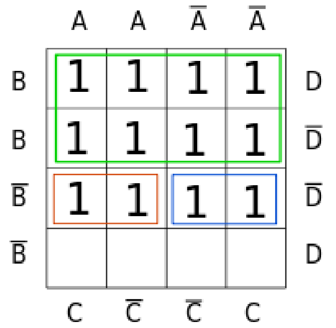

Bild 4-31

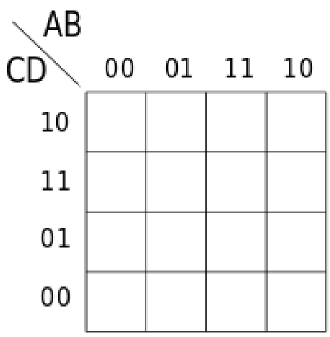

Bild 4-32

In Bild 4-32 liegt die Variante der Beschriftung nach Karnaugh vor, bei der man den Gray-Code besser erkennt. Bei dieser Art der Randbeschriftung kann man aus einer gegebenen Wahrheitstabelle direkt die Werte in das KV-Diagramm eintragen. Das Aufschreiben der DNF kann entfallen und auch das Übertragen der DNF in die Tabelle. Beides sind potentielle Fehlerquellen, die so entfallen.

Die gegebene Wahrheitswertetabelle (rechts) kann direkt in das 4x4-Diagramm übertragen werden (Bild 4-33). Der Umweg über die DNF kann entfallen. Sie wird hier nur nochmals zur Demonstration der enormen Arbeitserleichterung gegenüber der Beschriftungsversion von Veitch wiedergegeben:
¬AB¬C¬D ∨ A¬B¬C¬D ∨ A¬B¬CD ∨ A¬BC¬D ∨ A¬BCD ∨ AB¬C¬D ∨ ABC¬D ∨ ABCD.
Allerdings kann man sich auch mit dieser Diagrammversion nicht die nachfolgende Arbeit ersparen: Gruppen bilden und Ergebnis ablesen. Das Ablesen gestaltet sich bei dieser Beschriftungsart sogar schwieriger:

- rote Gruppe: AC;
- blaue Gruppe: B¬C¬D;
- grüne Gruppe: A¬B.

Das Endergebnis lautet: **AC ∨ B¬C¬D ∨ A¬B**.

A	B	C	D	X
0	0	0	0	**0**
0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	**0**
0	1	0	0	**1**
0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	**0**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	**1**
1	0	1	0	**1**
1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	**1**
1	1	0	1	**0**
1	1	1	0	**1**
1	1	1	1	**1**

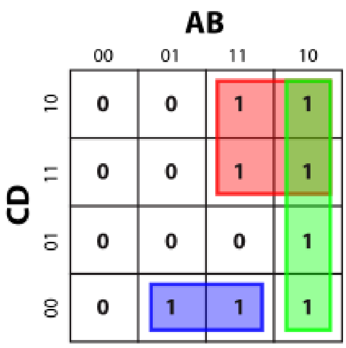

Bild 4-33

A	B	C	D	X

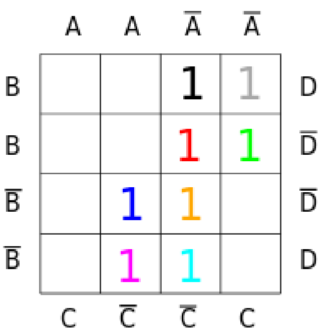

Bild 4-34

Die Forderung die Gruppen so groß wie möglich zu gestalten und so wenig wie möglich Gruppen zu verwenden, lässt bei den Versionen in Bild 4-34 bis 4-37 nur die zwei Gruppen in Bild 4-35 als optimale Wahl zu. Ausgangspunkt ist die Wahrheitstabelle (rechts). Die dazugehörige DNF lautet:

¬A¬B¬CD ∨ ¬AB¬C¬D ∨ ¬AB¬CD ∨ ¬ABC¬D ∨ ¬ABCD ∨ A¬B¬C¬D ∨ A¬B¬CD.

Die obere Gruppe (grün, Bild 4-35) reduziert sich zu ¬AB. Die untere Gruppe (rot) reduziert sich zu ¬B¬C.

Das Endergebnis lautet:**¬AB ∨ ¬B¬C**.

0	0	0	0	**1**
0	0	0	1	**1**
0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	**0**
0	1	0	0	**1**
0	1	0	1	**1**
0	1	1	0	**1**
0	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	**1**
1	0	1	0	**0**
1	0	1	1	**0**
1	1	0	0	**0**
1	1	0	1	**0**
1	1	1	0	**0**
1	1	1	1	**0**

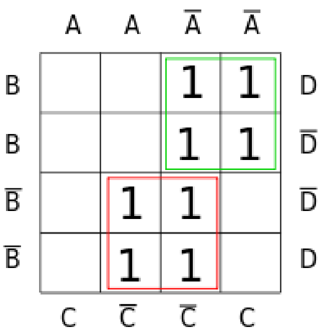

Bild 4-35

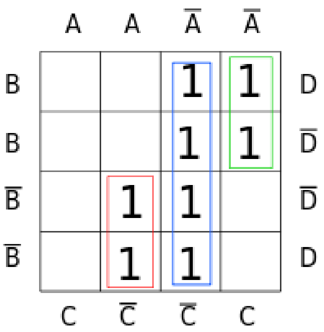

Bild 4-36

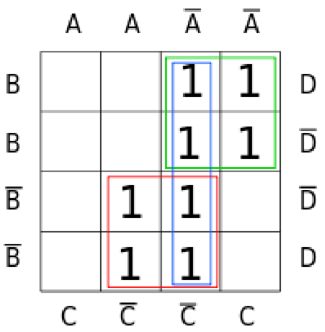

Bild 4-37

Für die drei Einserfelder in Bild 4-38 kommen nur die in Bild 4-39 dargestellten Gruppen in Betracht. Die DNF lautet:

¬ABCD ∨ A¬BCD ∨ ¬A¬BCD.

Die rote Gruppe reduziert sich zu ¬BCD. Die blaue Gruppe reduziert sich zu ¬ACD.

Das Endergebnis lautet:**¬BCD ∨ ¬ACD**.

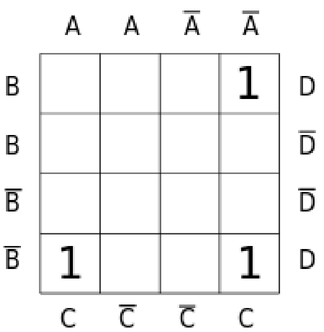

Bild 4-38

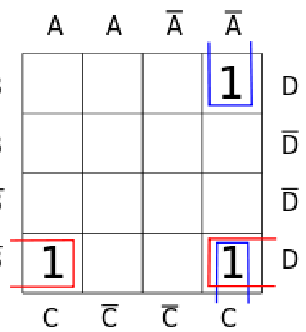

Bild 4-39

Für das Minimierungsproblem in Bild 4-40 erweisen sich die in Bild 4-41 dargestellten Gruppen als optimal. Die DNF lautet:

ABCD ∨ ¬ABCD ∨ A¬BCD ∨ ¬AB¬C¬D ∨ ¬ABC¬D ∨ ¬A¬B¬C¬D ∨ ¬A¬BC¬D ∨ ¬A¬B¬CD ∨ ¬AB¬CD.

Die rote Gruppe reduziert sich zu CD. Die blaue Gruppe reduziert sich zu ¬A¬B. Die grüne Gruppe reduziert sich zu ¬A¬D.

Das Endergebnis lautet: **CD ∨ ¬A¬B ∨ ¬A¬D**.

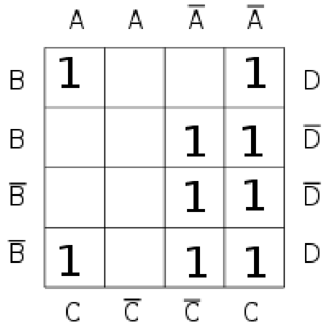

Bild 4-40

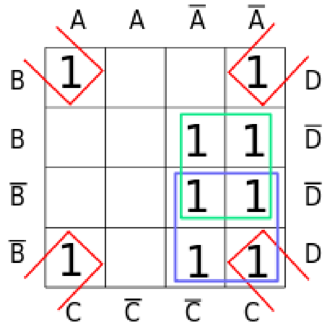

Bild 4-41

Für die Aufgabenstellung in Bild 4-42 ist die Gruppenbildung in Bild 4-43 am Besten. Während die Gruppen in Bild 4-44 bis 4-46 nicht die Forderungen erfüllen: „Die Gruppen müssen so groß wie möglich sein“ und „Es sind so wenig Gruppen wie möglich zu bilden“.

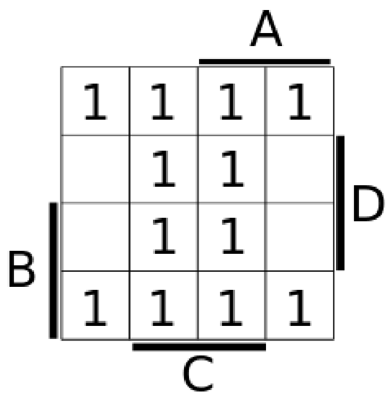

Bild 4-42

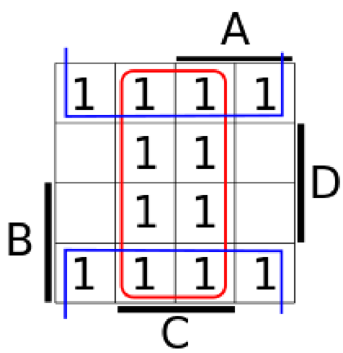

Bild 4-43

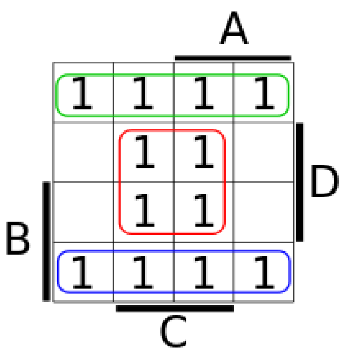

Bild 4-44

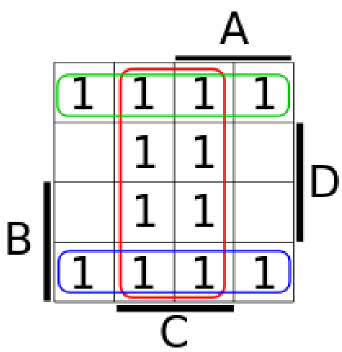

Bild 4-45

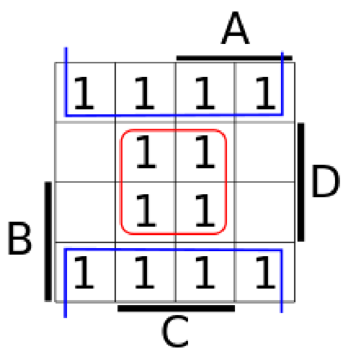

Bild 4-46

Für die Aufgabenstellung in Bild 4-47 ist die Gruppenbildung in Bild 4-48 am besten. Während die Gruppen in Bild 4-49 zu klein sind.

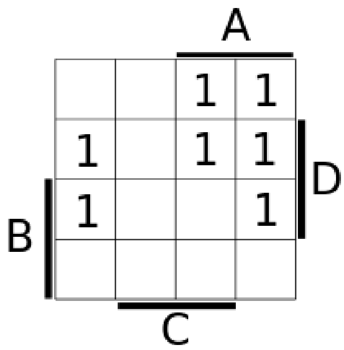

Bild 4-47

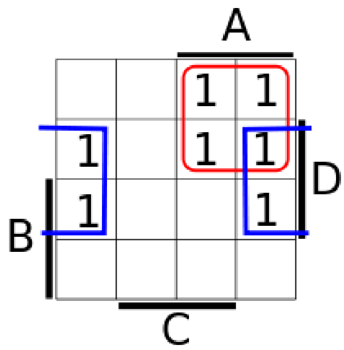

Bild 4-48

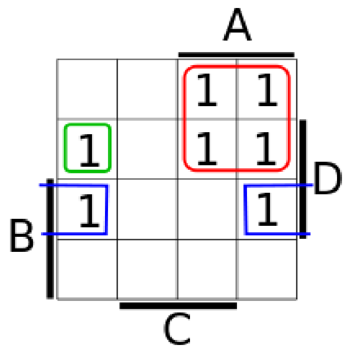

Bild 4-49

Bild 4-50 zeigt eine weitere Möglichkeit KV-Diagramme mit 4 Variablen darzustellen.

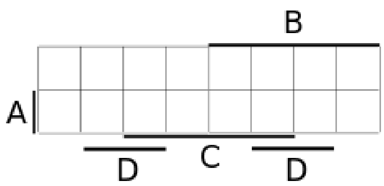

Bild 4-50

Die Bilder 4-51 bis 4-58 zeigen weitere Möglichkeiten Gruppen zu bilden.

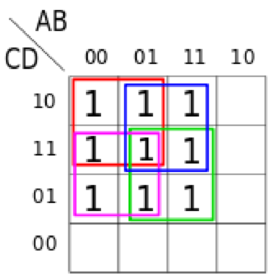

Bild 4-51

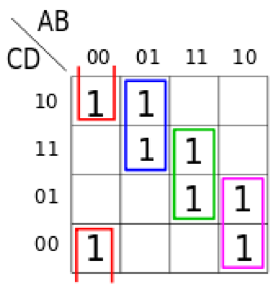

Bild 4-52

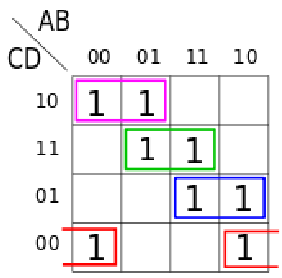

Bild 4-53

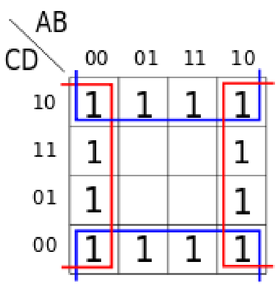

Bild 4-54

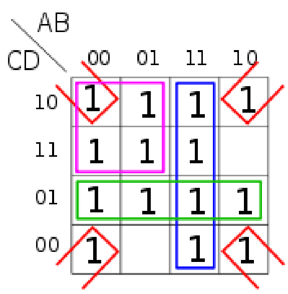

Bild 4-55

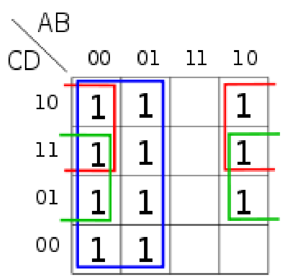

Bild 4-56

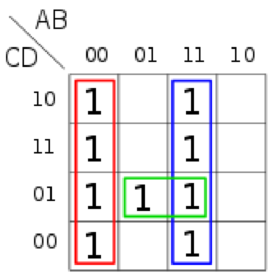

Bild 4-57

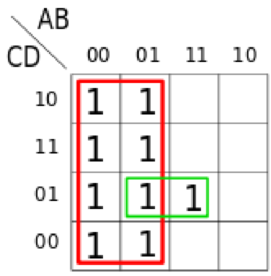

Bild 4-58

Fünf logische Variablen

Das KV-Diagramm für fünf logische Variablen benötigt 32 Felder. Bildlich kann man sich das als zwei übereinandergelegte 4x4-KV-Diagramme vorstellen (Bild 5-1). Dabei steht eine Schicht (rot) für die normale (nicht negierte) fünfte Variable (E) und die andere Schicht (blau) für die negierte fünfte Variable (¬E). Für die Eintragungen der Einsen kommt keine prinzipiell neue Regel dazu. Das KV-Diagramm besteht aus 32 Feldern. Die größte erlaubte Gruppe darf 32 Felder umschließen.

Jetzt können auch zwei Felder (hier als Würfel dargestellt) zu einer Gruppe zusammengefasst werden, die übereinander liegen (Bild 5-2).

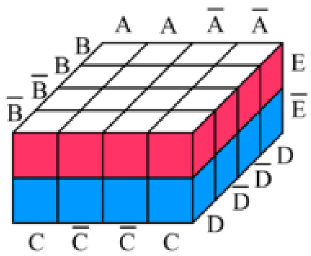

Bild 5-1

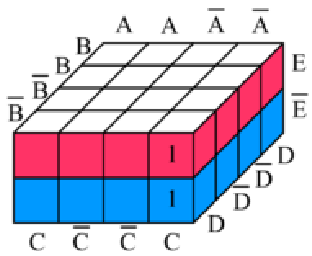

Bild 5-2

Analog können auch noch größere übereinanderliegende Gruppen gebildet werden. In Bild 5-3 ist nicht klar ersichtlich, ob unter den beiden nebeneinander liegenden Einsen in der roten Schicht auch je eine Eins in der blauen Schicht steht. Wenn das der Fall wäre, dann könnte man aus ihnen eine Vierergruppe bilden.

Auch die zyklischen Eigenschaften bleiben erhalten. Weil sie sich aber auf eine weitere Variable beziehen sind sie nicht mehr so anschaulich. Bild 5-4 zeigt vier Einserfelder (als Würfel dargestellt) in der roten Schicht und genau darunter liegend vier weitere Einserfelder in der blauen Schicht. Diese 8 Würfel (Felder) lassen sich zu einer Achtergruppe zusammenfassen.

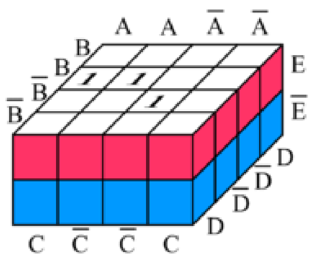

Bild 5-3

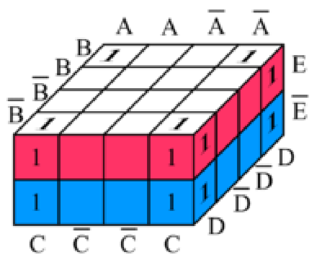

Bild 5-4

Für fünf Variablen werden für das Arbeiten mit dem KV-Diagramm zwei 4x4-Diagramme nebeneinander gezeichnet. Bild 5-5 zeigt die obere Schicht (rot) und Bild 5-6 die untere (blau). Die dreidimensionale Abbildung (Bild 5-1) diente nur zur Veranschaulichung.

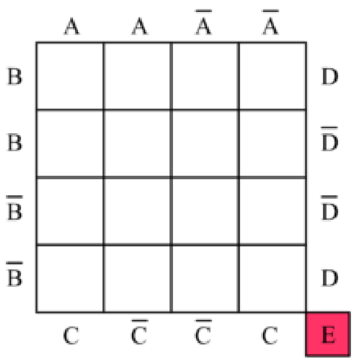

Bild 5-5

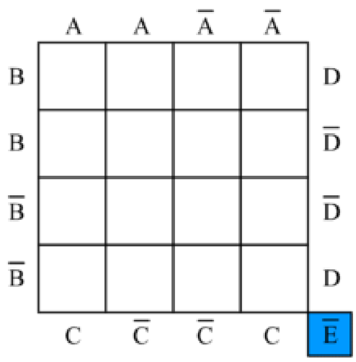

Bild 5-6

Zusätzlich zum „normalen“ Erkennen der zulässigen Gruppen muss jetzt auch noch die Gruppenbildung über beide Ebenen hinweg erkannt werden. So zeigt das zu Bild 5-7 gehörende KV-Diagramm (Bild 5-8 zusammen mit Bild 5-9) eine blaue Vierergruppe und eine rote Zweiergruppe, die jeweils über beide Ebenen gehen.

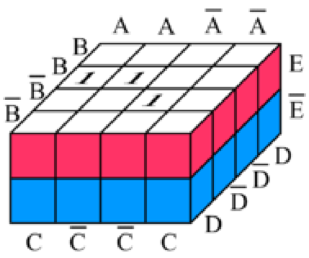

Bild 5-7: räumliche Darstellung von Bild 5-8 und 5-9

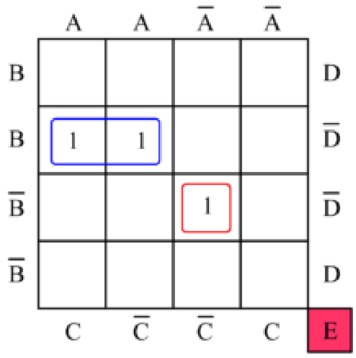

Bild 5-8

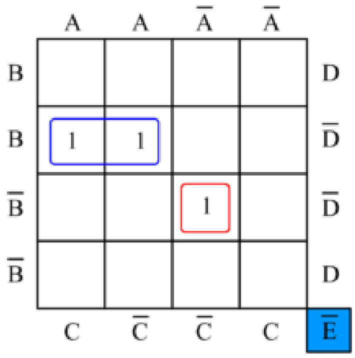

Bild 5-9

Bild 5-8 zusammen mit Bild 5-9 zeigt das KV-Diagramm mit der eingetragenen DNF:

ABC¬DE ∨ AB¬C¬DE ∨ ¬A¬B¬C¬DE ∨ ABC¬D¬E ∨ AB¬C¬D¬E ∨ ¬A¬B¬C¬D¬E.

Die blaue Vierergruppe vereinfacht sich zu: **AB¬D** (C und E liegen gleichzeitig auch in negierter Form in der Gruppe vor und entfallen; für E und ¬E muss man sich die beiden Ebenen gedanklich übereinander projizieren).

Die rote Zweiergruppe vereinfacht sich zu: **¬A¬B¬C¬D** (E entfällt).

Das Endergebnis lautet folglich: **AB¬D ∨ ¬A¬B¬C¬D**.

Bild 5-10 zeigt die DNF:

ABCDE ∨ ¬ABCDE ∨ A¬BCDE ∨ ¬A¬BCDE ∨ ABCD¬E ∨ ¬ABCD¬E ∨ A¬BCD¬E ∨ ¬A¬BCD¬E.

Die Achtergruppe reduziert sich zu: **CD**.

(Anmerkung: Die Flächen der Würfel sind hier zu Illustrationszwecken mit mehreren Einsen beschriftet. Da in dieser Darstellung ein Würfel einer Fläche im 4x4 Diagramm gleichzusetzen ist, gilt je Würfel nur eine Eins. Diese kann man sich gedanklich in den Würfel hinein projizieren. Beim Würfel hinten links wird angenommen, dass in der darunter liegenden blauen Schicht auch eine Eins steht, auch wenn sie nicht im Bild sichtbar ist.)

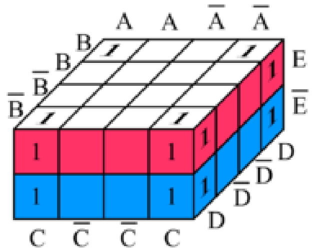

Bild 5-10

Eine andere Möglichkeit der räumlichen Darstellung von KV-Diagrammen mit 5 Variablen ist in Bild 5-11 dargestellt. In Bild 5-12 sind die gleichen Felder belegt, wie in Bild 5-7 bis 5-9.

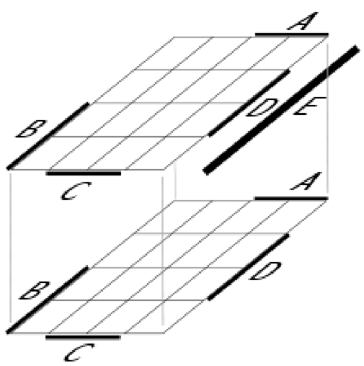

Bild 5-11

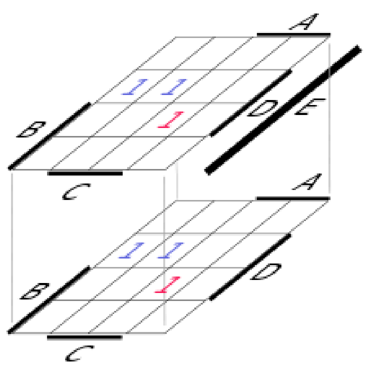

Bild 5-12

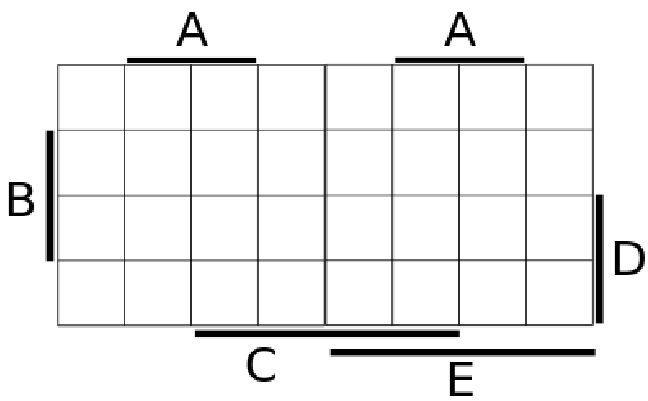

Bild 5-13

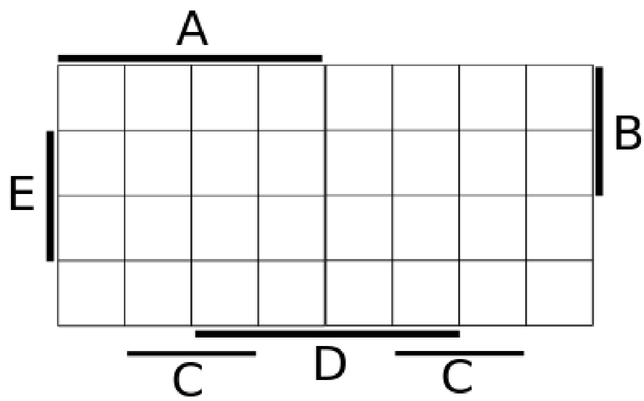

Bild 5-14

Eine weitere Möglichkeit für die graphische Darstellung eines KV-Diagramms für 5 Variablen zeigt Bild 5-13 und Bild 5-14.

Bild 5-15 zeigt eine weitere Version des KV-Diagramms für 5 Variablen. Dabei besteht zwischen den beiden 4x4 Blöcken eine Spiegelachse – gestrichelte Linie. In dieser Version ist die Zugehörigkeit zu den Gruppen, die sich über beide Seiten erstrecken, nur bei symmetrischer Anordnung um die Spiegelachse gegeben.

Sowohl die seitliche Beschriftung (AB), als auch obere Beschriftung (für CDE) ist in Gray-Code. Gray-Code hat die Eigenschaft symmetrisch zu sein.

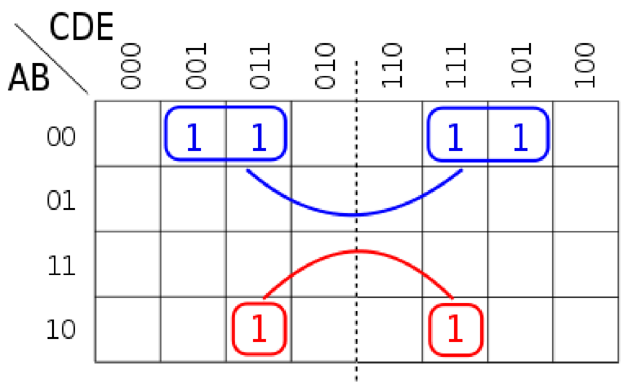

Bild 5-15: ¬A¬BE ∨ A¬BDE

Sechs logische Variablen

Das KV-Diagramm für sechs logische Variablen benötigt 64 Felder – in Bild 6-1 dreidimensional als Würfel dargestellt.

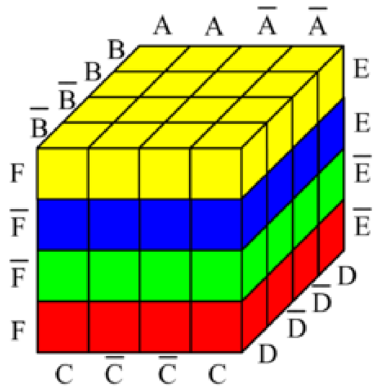

Bild 6-1

Auch hier wird für die praktische Anwendung jede Ebene als separates 4x4-Diagramm gezeichnet. Die Gruppenbildung über die Ebenen hinweg bedarf noch größerer Aufmerksamkeit. Die Handhabung der zyklischen Eigenschaften entzieht sich bei sechs Variablen schon fast dem Vorstellungsvermögen. Zu beachten ist, dass die fünfte und sechste Variable (also die dritte Dimension) ebenfalls nach dem Gray-Code angeordnet sind, damit jedes Feld einen anderen, und nur jeweils um eine Stelle verschiedenen Wert hat.

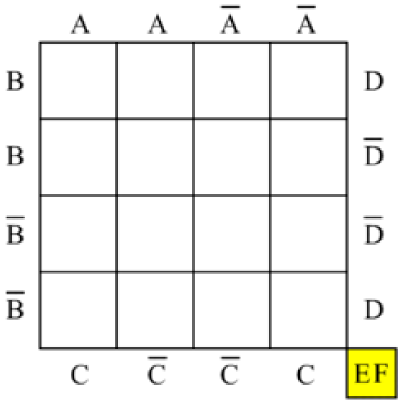

Bild 6-2

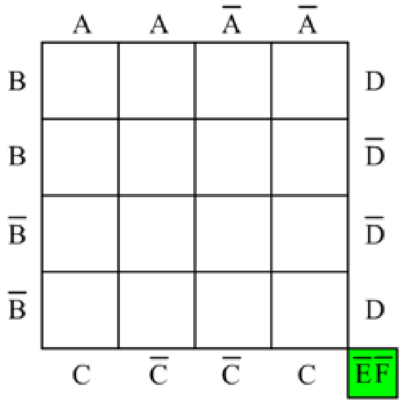

Bild 6-3

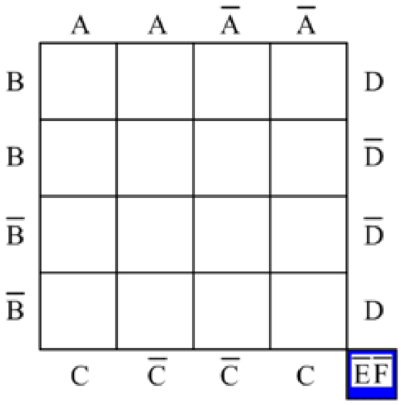

Bild 6-4

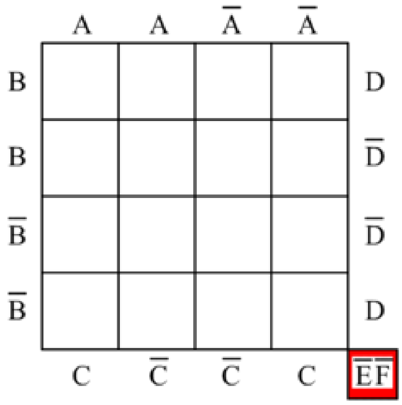

Bild 6-5

Eine andere Möglichkeit der räumlichen Darstellung von KV-Diagrammen mit 6 Variablen ist in Bild 6-6 dargestellt. In Bild 6-7 wurde ein Beispiel für die Belegung der Felder dargestellt.

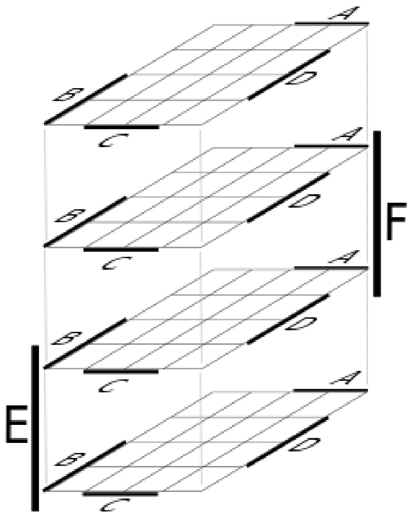

Bild 6-6

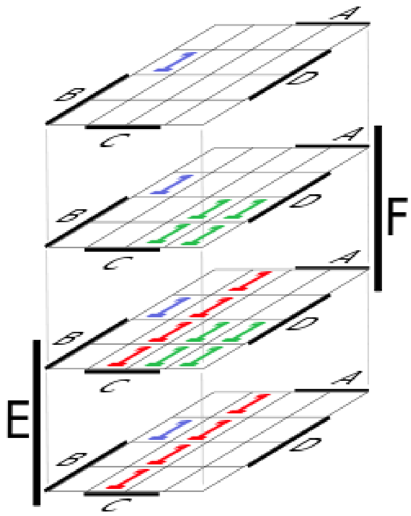

Bild 6-7

Bild 6-8 zeigt eine mögliche Version eines ausgefüllten KV-Diagramms mit 6 Variablen. In Bild 6-9 sind die 4 Felder jeweils um eine vertikale und horizontale Mittelachse gespiegelt. (Anmerkung: die Randbeschriftungen sind in den vorliegenden Bildern nicht identisch – Bild 6-5, 6-7, 6-8; es handelt sich also um unterschiedliche logische Ausdrücke)

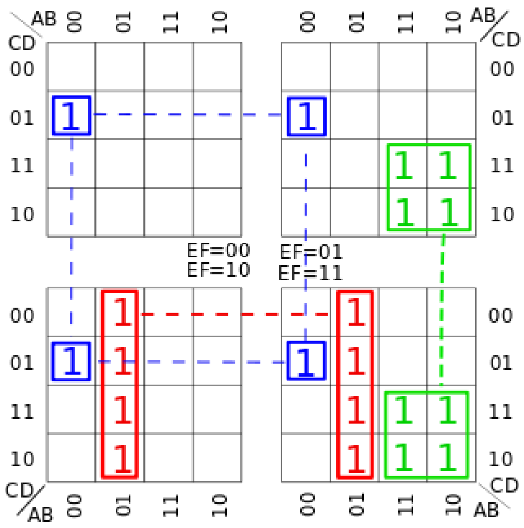

Bild 6-8

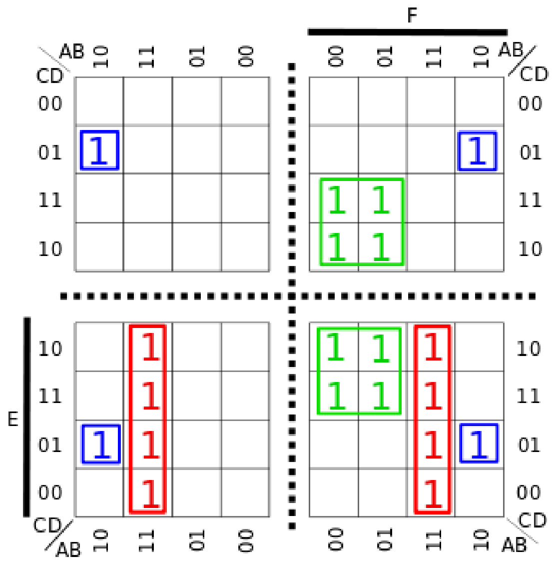

Bild 6-9

Aus Bild 6-8 kann man folgende Lösung ablesen:

```
A B | C D | E F
-------------
0 0 | 0 1 | - - (blau)
1 - | 1 - | - 1 (grün)
0 1 | - - | 1 - (rot)
```

Lösung: $\neg A \neg B \neg C D \lor A C F \lor \neg A B E$

Zur Titelseite: Karnaugh-Veitch-Diagramm - zum vorherigen Kapitel:Beispiele (Teil 1) - zum nächsten Kapitel:Beispiele (Teil 3)