Klaus Dahlheimer
ihr
Online-Dozent

Karnaugh-Veith-Diagramm

- Bei der digitalen Schaltungssynthese wird aus der Wahrheitstabelle die Funktionsgleichung als disjunktive oder konjunktive Normalform erstellt.
  Die direkte Umsetzung führt fast immer zu einer aufwendigen Digitalschaltung. Mit den De Morganschen Gesetzen und der Schaltalgebra lassen sich optimierte und meist minimierte Funktionsgleichungen finden. Die KV-Diagramme vereinfachen die Optimierung und reduzieren die mathematischen Umrechnungen.
- Das KV-Diagramm hat zu allen logischen Kombinationen der Eingangsvariablen je ein Feld. Bei n Eingangsvariablen gibt es 2^n Felder.

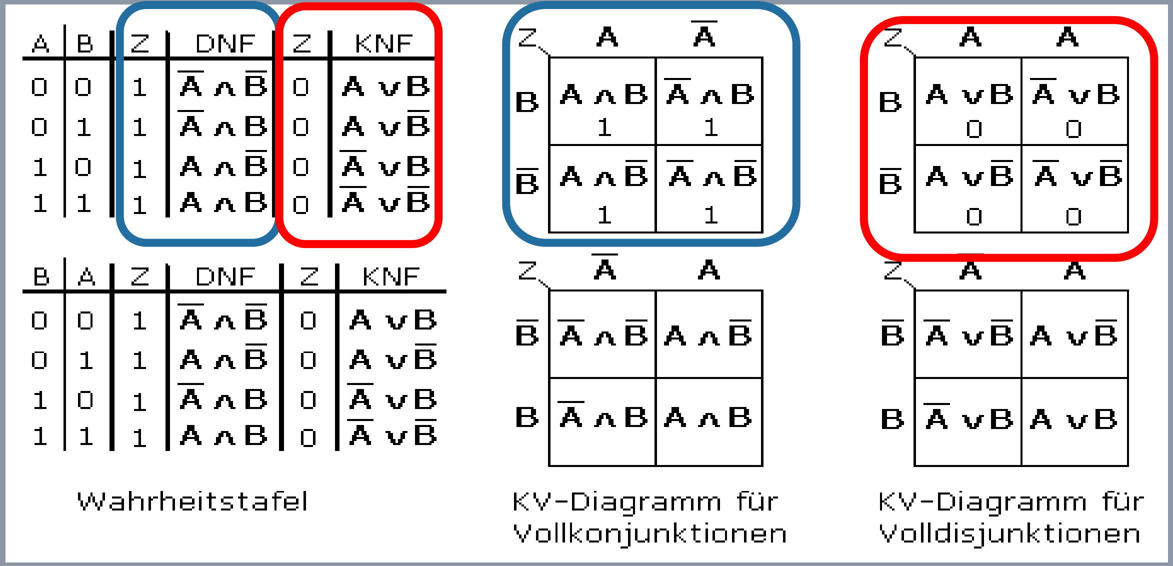
Z	A	¬A
B		
¬B		

Karnaugh-Veith-Diagramm

KV-Diagramm für zwei Eingangsvariable

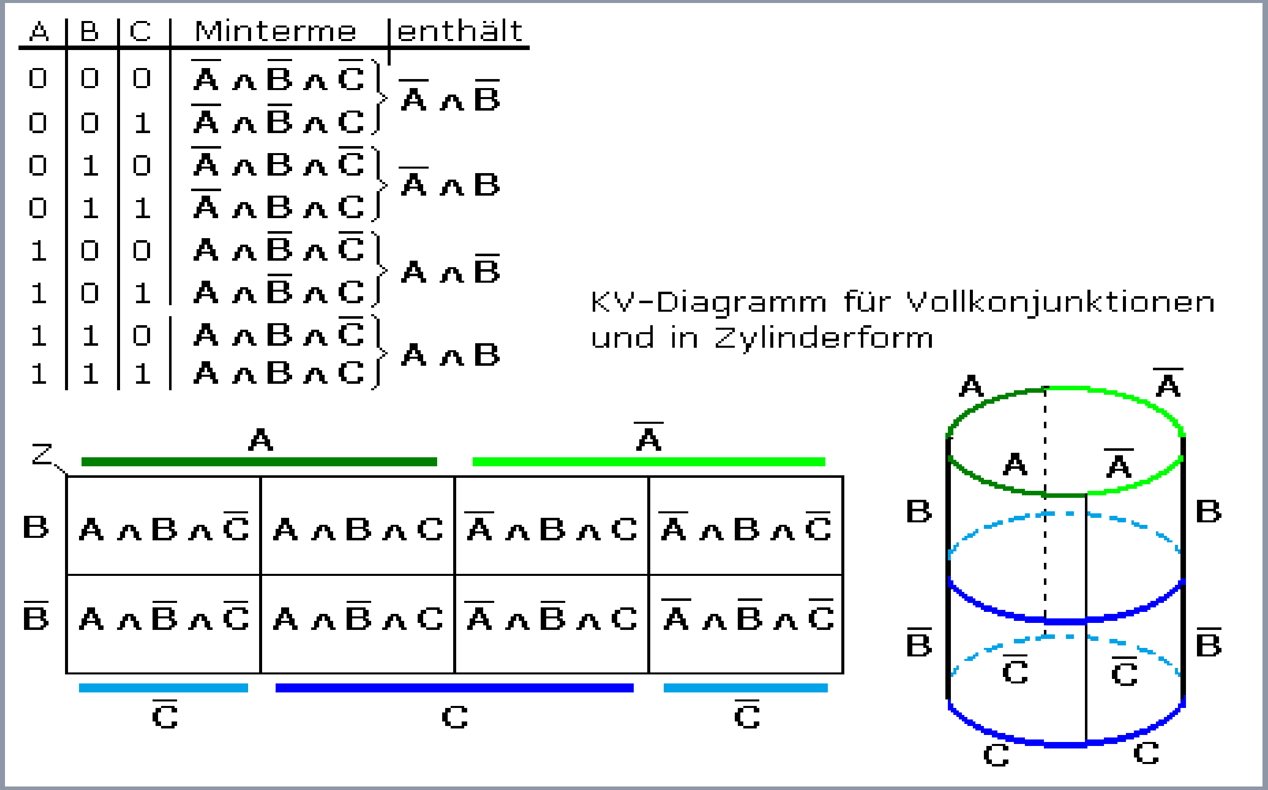
- Das folgende Bild zeigt den Zusammenhang zwischen der Wahrheitstafel und dem KV-Diagramm. Jeder Platz entspricht einer schaltalgebraischen Gleichung. In ihr kommt jede Variable in der normalen und negierten Form je einmal vorkommt. Anstelle der Gleichungen schreibt man die Variablen an die Ränder des KV-Diagramms und erhält ein koordinatives Zuordnungssystem.

Jedes Feld ist durch seine Zeilen- und Spaltenvariable eindeutig bestimmt. Ist die optimierte DNF gesucht, dann werden die Minterme mit den Feldwerten 1 betrachtet. Die Variablen sind durch UND verknüpft. Die Einzelverknüpfungen sind durch ODER verbunden.
Ist die optimierte KNF gesucht, dann werden Maxterme mit den Feldwerten 0 betrachtet, deren Variablen sind dann durch ODER zu verknüpfen, während die Einzelterme durch UND verbunden werden.



Karnaugh-Veith-Diagramm
KV-Diagramm für drei Eingangsvariable

- Bei drei Eingangsvariablen mit je zwei logischen Schaltzuständen sind acht Felder im KV-Diagramm zu bezeichnen. Die Wahrheitstafel zeigt Minterme mit logischem Ausgang 1. Sie werden nach den oben genannten Regeln in das KV-Diagramm übertragen.



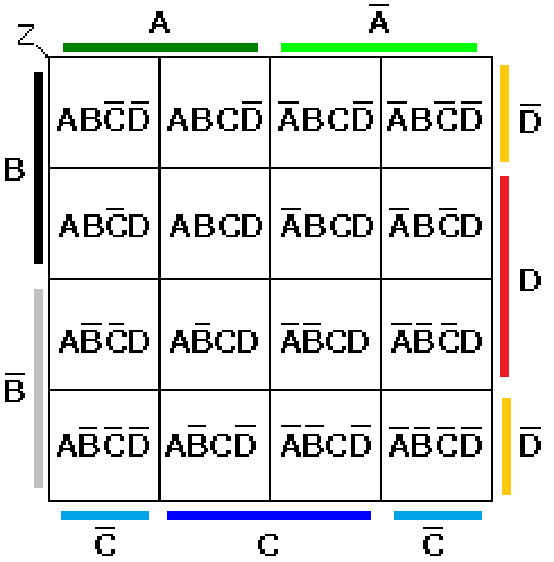
A	B	C	Minterme	enthält
0	0	0	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
0	0	1	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$	
0	1	0	$\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$	$\overline{A} \wedge B$
0	1	1	$\overline{A} \wedge B \wedge C$	
1	0	0	$A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$	$A \wedge \overline{B}$
1	0	1	$A \wedge \overline{B} \wedge C$	
1	1	0	$A \wedge B \wedge \overline{C}$	$A \wedge B$
1	1	1	$A \wedge B \wedge C$	

Z	A	A	$\overline{A}$	$\overline{A}$
B	$A \wedge B \wedge \overline{C}$	$A \wedge B \wedge C$	$\overline{A} \wedge B \wedge C$	$\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$
$\overline{B}$	$A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$	$A \wedge \overline{B} \wedge C$	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$

Karnaugh-Veith-Diagramm

KV-Diagramm für vier Eingangsvariable

- Bei vier Eingangsvariablen besitzt das KV-Diagramm 16 Felder. Die Variablen sind so am Rand zu verteilen, dass sich ungleiche Variablen nicht gegenseitig überschneiden und gleiche Variablennamen paarweise normal und negiert nebeneinander auftreten. Die ebene Darstellung des KV-Diagramms ist über die Diagonalen verbunden als Kugel zu sehen.



KV-Diagramm für 4 Variable mit eingetragenen Vollkonjunktionen

Karnaugh-Veith-Diagramm

Regeln

- An jeder Kante steht nur eine Variable in normaler und negierter Form.
- Bei mehr als zwei Variablen müssen gegenüberliegende Kanten unterschiedlich aufgeteilt sein.
- Gegenüberliegende Kanten sind als benachbart anzusehen.
- Blöcke können nur horizontal, vertikal oder quadratisch auftreten.
- Eine Blockbildung kann nur für Minterme oder Maxterme gebildet werden.
- Die Anzahl der Felder im Block entspricht einer 2-er Potenz, also 2, 4, 8, 16.
- Blöcke sollten so groß als möglich sein. Sie dürfen sich überschneiden.

Karnaugh-Veith-Diagramm

Beispiele zur Blockbildung

Im KV-Diagramm lassen sich benachbarte Vollkonjunktionen, Feldwerte 1, oder benachbarte Volldisjunktionen, Feldwerte 0, zusammenfassen. Hat man sich für Vollkonjunktionen (UND) entschieden, dann werden eingetragene 0-Werte nicht berücksichtigt. Eine entsprechende Regel gilt für Volldisjunktionen (ODER). KV-Diagramme mit zwei Eingangsvariablen sind sehr einfach zu überblicken. Die Skizze zeigt diese KV-Diagramme mit erlaubten Blöcken für Minterme.

Optimierte DNF aus dem KV-Diagramm

Es werden Blöcke mit Minterme, Feldwerte 1 gebildet.
Alle im Block gemeinsam vorkommenden Variablen bilden durch UND verknüpft den Gleichungsterm.
In der Funktionsgleichung sind alle Gleichungsterme disjunktiv durch ODER verknüpft.

Wahrheitstabelle und vollständige DNF

Blockbildung benachbarter Vollkonjunktionen

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$Z = \bar{A}B \vee AB$

$Z = B(\bar{A} \vee A)$

$Z = B$

	A	$\bar{A}$
B	1	1
$\bar{B}$		

$Z = B$

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$Z = A\bar{B} \vee AB$

$Z = A(\bar{B} \vee B)$

$Z = A$

	A	$\bar{A}$
B	1	
$\bar{B}$	1	

$Z = A$

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$Z = \bar{A}B \vee A\bar{B} \vee AB$

$Z = \bar{A}B \vee A(\bar{B} \vee B)$

$Z = \bar{A}B \vee A$

$Z = (\bar{A} \vee A) \wedge (B \vee A)$

$Z = A \vee B$

	A	$\bar{A}$
B	1	1
$\bar{B}$	1	

$Z = A \vee B$

A	B	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$Z = \bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B \vee A\bar{B} \vee AB$

$Z = \bar{A}(\bar{B} \vee B) \vee A(\bar{B} \vee B)$

$Z = \bar{A} \vee A$

$Z = 1$

	A	$\bar{A}$
B	1	1
$\bar{B}$	1	1

$Z = 1$

Karnaugh-Veith-Diagramm

Beispiele zur Blockbildung

Die folgenden drei Beispiele zeigen für Minterme das Erstellen der Funktionsgleichung aus der Wahrheitstabelle mit vollständiger DNF die Optimierung durch die Schaltalgebra oder direkt aus dem KV-Diagramm. Die Blockbildung erfolgt mit benachbarten Vollkonjunktionen. Dabei sollten größtmögliche Schleifen gebildet und überflüssige Schleifen vermieden werden.

Wahrheitstabelle und vollständige DNF

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$Z = A\bar{B}\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee AB\bar{C} \vee ABC$$
$$Z = A\bar{B}(\bar{C} \vee C) \vee AB(\bar{C} \vee C)$$
$$Z = A\bar{B} \vee AB$$
$$Z = A(\bar{B} \vee B)$$
$$Z = A$$

Blockbildung benachbarter Vollkonjunktionen
größtmögliche Schleifen bilden

	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$
B	1	1		
$\bar{B}$	1	1		
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

$Z = A$

	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$
B	1	1		
$\bar{B}$	1	1		
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$Z = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C} \vee AB\bar{C}$$
$$Z = \bar{B}\bar{C}(\bar{A} \vee A) \vee \bar{C}(\bar{A}B \vee AB)$$
$$Z = \bar{B}\bar{C} \vee \bar{C}[B(\bar{A} \vee A)]$$
$$Z = \bar{B}\bar{C} \vee B\bar{C} = \bar{C}(B \vee \bar{B})$$
$$Z = \bar{C}$$

Schleifen lassen sich symmetrisch
über benachbarte Ränder erstellen

	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$
B	1			1
$\bar{B}$	1			1
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

$Z = \bar{C}$

	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$
B	1			1
$\bar{B}$	1			1
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Klaus Dahlheimer, Online-Dozent

Karnaugh-Veith-Diagramm

Beispiele zur Blockbildung

Das letzte Beispiel zeigt, dass auch mit den Maxtermen die Funktionsgleichung aus dem KV-Diagramm ausgelesen werden kann. Dazu werden Blöcke mit den Feldwerten 0 gebildet. Die dort gemeinsam auftretenden Variablen werden negiert durch ODER verknüpft und die Einzelterme dann durch UND verknüpft.

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$Z = \bar{A}\bar{B}C \vee \bar{A}BC \vee A\bar{B}C \vee AB\bar{C} \vee ABC$$

$$Z = \bar{B}C(\bar{A} \vee A) \vee BC(\bar{A} \vee A) \vee AB\bar{C}$$

$$Z = \bar{B}C \vee BC \vee AB\bar{C}$$

$$Z = C(\bar{B} \vee B) \vee AB\bar{C}$$

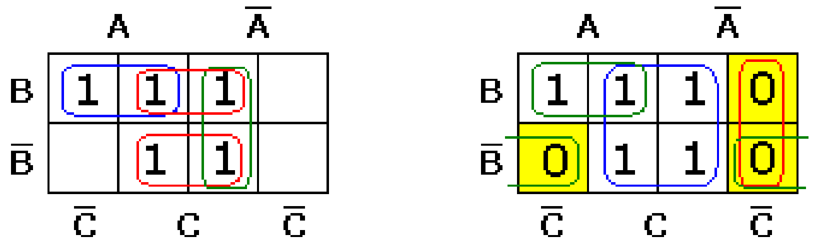
$$Z = C \vee AB\bar{C}$$

mit dem disjunktiven Distributivgesetz

$$Z = C \vee AB \wedge (C \vee \bar{C})$$

$$Z = C \vee AB$$

überflüssige Schleifen vermeiden $Z = C \vee AB$



Auslesen der optimierten konjunktiven Normalform

$$Y = (\bar{\bar{A}} \vee \bar{\bar{C}}) \wedge (\bar{\bar{B}} \vee \bar{\bar{C}}) = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$\boxed{Y = C \vee AB}$$

Karnaugh-Veith-Diagramm

Beispiele zur Blockbildung

- KV-Diagramme für vier Eingangsvariable bieten noch mehr Möglichkeiten zur Blockbildung. Das folgende Bild zeigt einige Beispiele zum Erstellen der Funktionsgleichung nach der DNF. Auch hier zeigt das letzte Beispiel, dass mit dem KV-Diagramm gleichermaßen auf Minterme oder Maxterme angewendet recht schnell die optimierte Funktionsgleichung ermittelt werden kann.