Zahlensysteme

Teil I: Zahlensysteme

1. Einführung und Zahlensysteme
2. Zahlensysteme / Algorithmik
3. Zahlendarstellung im Rechner
4. Gleitkommazahlen / Fließpunktzahlen

1. Einführung und Zahlensysteme

- Modell → Wirklichkeit
- Die „einfachste“ Form der Darstellung einer Zahl
- Basis-Zahlendarstellung

Modell → Wirklichkeit

- Phänomen Anzahl

10 Äpfel	$\oplus$	5 Äpfel	=	?
13 Autos	$\oplus$	18 Autos	=	?
37 Häuser	$\oplus$	12 Häuser	=	?
10 Rinder	$\oplus$	8 Rinder	=	?

Operationen Summenbildung
Differenz
Produkt
Division
Potenzen
etc.

- Zahlen

1. Frage: Wie notiert man Zahlen?
Wie aufwendig ist das Notieren?

2. Frage: Wie addiert man Zahlen?
Wie aufwendig ist das addieren?

Die „einfachste“ Form der Darstellung einer Zahl

„7“	≈								
„15“	≈																

Vorteil: unmittelbar verständlich

Nachteil: zu großer Aufwand bei großen Zahlen,
außerdem nicht wirklich **benennbar**,
damit praktisch nicht kommunizierbar.

Addition

- Wie addiert man solche Zahlen?

$$\overbrace{|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|}^{9} \quad + \quad \overbrace{|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|}^{22}$$

$$= \quad |\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|$$

Vorteil: Algorithmus trivial:
Man hängt die einen Striche an die anderen Striche.
(Algorithmus z.B. durch Wegstreichen)

Nachteil: hoher Aufwand,
Ergebnis schwer nutzbar.

Basis-Zahlendarstellung

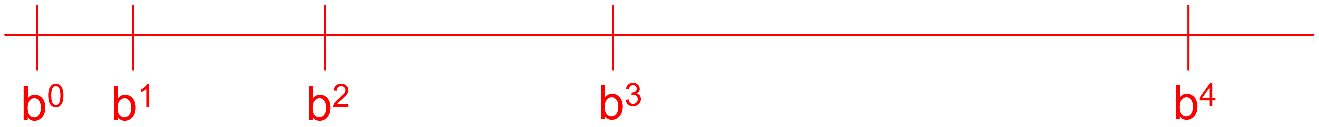
Man nehme eine Zahl b, z.B. b = 2, 3, 4, …
Betrachtet man die Zahl b^n für n = 0, 1, 2, … dann ergibt sich

$b^0 = 1$

$b^1 = b$

$b^2 = b^2$

$b^3 = b^3$



wächst exponentiell schnell

b^x wächst schneller als jedes Polynom

2^{300} ist schon größer als die Anzahl aller Atome im Universum

Mit 8-Tupeln aus 0 und 1 (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1) lassen sich schon 256 verschiedene Dinge unterscheiden bzw. beschreiben.

Basis-Zahlendarstellung (1)

$$zahl = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i$$

- die Basis $b \geq 2$ ist aus den natürlichen Zahlen
- die Ziffer a_i ist aus den natürlichen Zahlen $0 \leq a_i \leq b-1$
- die Darstellung ist eindeutig
- **Schreibweise:**

$zahl = (a_n \ldots a_0)_b$

Beispiel: $(1024)_{10} = 1 \bullet 10^3 + 0 \bullet 10^2 + 2 \bullet 10^1 + 4 \bullet 10^0$

- gebräuchliche Zahlenbasen:
  - 2 (Binär-System)
  - 8 (Oktal-System)
  - 10 (Dezimal-System)
  - 16 (Hexadezimal-System)

Beispiel:

100011101

435

285

11D (Ziffern: 0, ..., 9, A, B, C, D, E, F)

Konvertierung zwischen zwei Basen

$$zahl = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

- Basis b → Basis 10
  - Eingabe: b, Ziffernfolge a_0, a_1, ... , a_n
  - Ausgabe: Dezimalzahl

Basis 10 besonders wichtig, weil wir diese gewöhnt sind

- Basis 10 → Basis b
  - Eingabe: Dezimalzahl, neue Basis b
  - Ausgabe: Ziffernfolge a_0, a_1, ... , a_n

Basis-Zahlendarstellung (2)

Vorteile: Mit Basis-Zahlendarstellungen (Stellenwertsystemen) gelingt eine **exponentielle Verkürzung** der Darstellung gegenüber dem Strichcode.
Sie basiert im wesentlichen auf der Größe b^i
daher gibt es auch entsprechende Bezeichnungen

z.B. 38 Milliarden

> aktuelles Programm der US Bundesregierung zur Stärkung US Finanzsystems: US$ 700 Milliarden

Man braucht Namen im Zehnersystem:

0, 1, 2, … , 9		
10	zehn	
100	hundert	
10^6	Million	
10^{100}	Googol	(Namensgeber der Suchmaschine „google“)

Basis-Zahlendarstellung (3)

92 im Französischen:	quatre vingt douce
	$4 \cdot 20 + 12$

- Wesentlich:
  1. Potenzen spielen eine zentrale Rolle.
  2. Man braucht die Null („0“).
     (Kulturhistorische Revolution)
  3. In größeren Systemen (z.B. im 12-er System / im 16-er System) benötigt man außerdem neue Zeichen
     (im 12-er System für 10 und 11 / im 16-er System für 10 bis 15)

2. Zahlensysteme / Algorithmik

- Summenbildung
- Addition mit Übertrag
- Multiplikation

Summenbildung

- Kann man in der kurzen Codierung eine (bzgl. der kurzen Codierung) **schnelle**, d.h. polynomische Addition hinbekommen?

Summenbildung = zentraler Algorithmus
(Subtraktion, Multiplikation, Division,
Potenz, Wurzel werden darauf zurückgeführt)

Im französischen heißt die Rechnung im Lokal
„l'addition"

Zentraler Algorithmus für das 10-er System:

```
  3 4 9 7 1 6 5
+   5 4 8 2 1 3
---------------
    1 1 1 0 0 0
===============
  4 0 4 5 3 7 8
```

Übertrag ist immer 0 oder 1

Addieren von 2 Zahlen = 3-er Addition, von denen eine nur aus 0-en und 1-en besteht

Summenbildung (1)

- Weitere Beispiele:

$$\begin{array}{rr} & 15723 \\ + & 6098 \\ \hline & {\scriptstyle 1\,0\,1\,1} \\ \hline\hline & 21821 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 48313 \\ + & 75688 \\ \hline & {\scriptstyle 1\,1\,1\,1\,1} \\ \hline\hline & 124001 \end{array}$$

Summenbildung (2)

- Addition ist also realisierbar
  über eine **Sequenz** von sogenannten **Volladdierern**
  (beinhalten den Übertrag)

- bzw. über spezielle Algorithmen, die ohne eine solche Sequenz auskommen.

(wird später genauer behandelt)

Summenbildung (3)

➢ Formale stellenweise Addition (mit Übertrag)

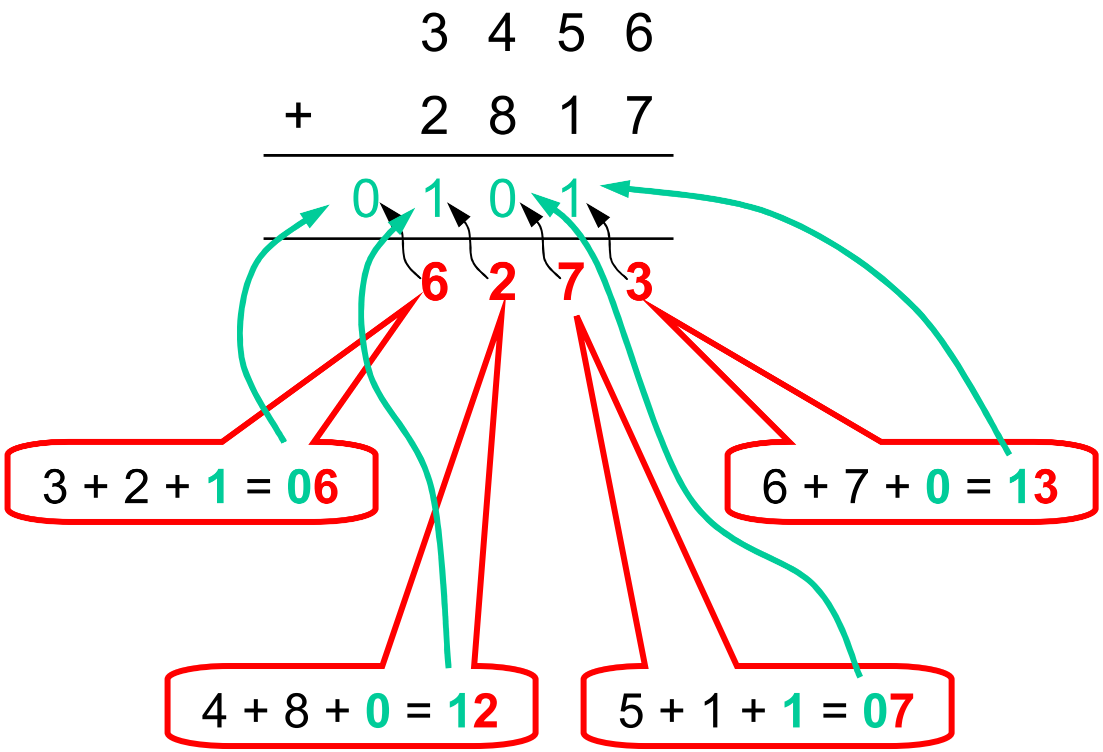
$$
\begin{array}{ccccccc|c|cc}
a_n b^n & + & a_{n-1} b^{n-1} & + & \ldots & + & & a_1 b^1 & + & a_0 b^0 \\
a`_n b^n & + & a`_{n-1} b^{n-1} & + & \ldots & + & & a`_1 b^1 & + & a`_0 b^0 \\
\hline
 & & \ldots & & & & & ü_0 & & \\
\hline
 & & \ldots & & & & & s_1 \cdot b^1 & + & s_0 \cdot b^0
\end{array}
$$

$$
ü_0 = \begin{cases} 0, \text{ falls } a_0 + a`_0 < b \\ 1, \text{ falls } a_0 + a`_0 \geq b \end{cases}
$$

$$
s_0 = \begin{cases} a_0 + a`_0, \text{ falls } a_0 + a`_0 < b \\ (a_0 + a`_0) - b, \text{ falls } a_0 + a`_0 \geq b \end{cases}
$$

Summenbildung (4)

- Konkretes Beispiel:



Addition im 5-er System (1)

- Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4

$5_{10} = 10_5$
$6_{10} = 11_5$
$7_{10} = 12_5$
$8_{10} = 13_5$
$9_{10} = 14_5$

größte Zahl bei der Addition zweier 5-er Zahlen, wenn noch ein Übertrag von 1 dazu kommt, da 4 + 4 (+1) = 9_{10} = 14_5

- Additionstabelle

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	**10**
2	2	3	4	**10**	**11**
3	3	4	**10**	**11**	**12**
4	4	**10**	**11**	**12**	**13**

Die **grün** gekenn-zeichneten Fälle erzeugen einen Übertrag

Addition im 5-er System (2)

- mit Übertrag:

+ (+1)	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	**10**
1	2	3	4	**10**	**11**
2	3	4	**10**	**11**	**12**
3	4	**10**	**11**	**12**	**13**
4	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**

Die **grün** gekenn-zeichneten Fälle erzeugen einen Übertrag

Addition im 5-er System (3)

$5^0 = 1$

$5^1 = 5$

$5^2 = 25$

$5^3 = 125$

…

- einfache Beispiele zur Konvertierung:

$$(10)_{10} = \underbrace{2\cdot5^1}_{5} + \underbrace{0\cdot5^0}_{1} = (20)_5$$

$$(11)_{10} = 2\cdot5^1 + 1\cdot5^0 = (21)_5$$

$$(12)_{10} = 2\cdot5^1 + 2\cdot5^0 = (22)_5$$

$$(15)_{10} = 3\cdot5^1 + 0\cdot5^0 = (30)_5$$

$$(18)_{10} = 3\cdot5^1 + 3\cdot5^0 = (33)_5$$

$$\overbrace{(26)_{10}}^{\text{III … III}} = \underbrace{1\cdot5^2}_{25} + \underbrace{0\cdot5^1}_{5} + \underbrace{1\cdot5^0}_{1} = (101)_5$$

Vorgehensweise:

25 (= 5^2) ist die größte 5-er Potenz, die gerade noch kleiner ist als die gegebene 26.

25 „passt“ genau 1 mal „in 26 hinein“.

(bisher) → $1\cdot5^2$

Nun die $1\cdot5^2$ (= 25) von den bisherigen 26 abziehen.
→ Es bleibt ein Rest von 1.

5 (= 5^1) „passt” genau 0 mal „in den Rest (= 1) hinein”.

(bsiher) → $1\cdot5^2 + 0\cdot5^1$

Nun die $0\cdot5^1$ (= 0) vom bisherigen Rest (= 1) abziehen.
→ Es bleibt ein Rest von 1.

1 (= 50) „passt“ genau 1 mal „in den Rest (= 1) hinein”.

(bisher) → $1\cdot5^2 + 0\cdot5^1 + 1\cdot5^0$

Nun die $1\cdot5^0$ (= 1) vom bisherigen Rest (= 1) abziehen.
→ Es bleibt ein Rest von 0.

→ Wir sind fertig!

Addition im 5-er System (4)

- einfache Beispiele zur Addition:

$$(3)_5 + (4)_5 \;=\; (7)_{10} \cdot 5^0 \;=\; 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 \;=\; (12)_5$$

Umweg über das 10-er System (eigentlich unschön – und hier nur zur Veranschaulichung)

- direkter Weg:

$$(22)_5 + (30)_5 \;=\; ?$$

Übertrag

$$\begin{array}{ccccl} & & 2 & 2 & = (12)_{10} \\ + & & 3 & 0 & = (15)_{10} \\ \hline & 1 & 0 & & \\ \hline & 1 & 0 & 2 & = (27)_{10} \end{array}$$

$$= (27)_{10}$$

5^0	=	1
5^1	=	5
5^2	=	25
5^3	=	125
5^4	=	625
5^5	=	3125
	…	

Addition im 5-er System (5)

➢ Beispiel

- Addiere $(13431)_5 + (42344)_5 = (111330)_5$

$$
\begin{array}{rr}
 & (1\;3\;4\;3\;1)_5 \\
+ & (4\;2\;3\;4\;4)_5 \\
\hline
 & 1\;\;1\;\;1\;\;1\;\;1\;\; \\
\hline\hline
 & (1\;1\;1\;3\;3\;0)_5
\end{array}
\rightarrow (3125)_{10} + (625)_{10} + (125)_{10} + 3\cdot(25)_{10} + 3\cdot(5)_{10} = (3965)_{10}
$$

➢ Rechnen im 5-er System

- $(13431)_5 = 1\cdot(625)_{10} + 3\cdot(125)_{10} + 4\cdot(25)_{10} + 3\cdot(5)_{10} + 1\cdot(1)_{10}$
  $= 1\cdot(625)_{10} + (375)_{10} + (100)_{10} + (15)_{10} + (1)_{10} = (1116)_{10}$
- $(42344)_5 = 4\cdot(625)_{10} + 2\cdot(125)_{10} + 3\cdot(25)_{10} + 4\cdot(5)_{10} + 4\cdot(1)_{10}$
  $= (2500)_{10} + (250)_{10} + (75)_{10} + (20)_{10} + (4)_{10} = (2349)_{10}$

$$\sum = (3965)_{10}$$

Addition im 12-er System (1)

- Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B

  $10_{10} = A_{12}$
  $11_{10} = B_{12}$
  $12_{10} = 10_{12}$
  …
  $23_{10} = 1B_{12}$

größte Zahl bei der Addition zweier 12-er Zahlen, wenn noch ein Übertrag von 1 dazu kommt, da $B_{12} + B_{12}\ (+1) = 11_{10} + 11_{10}\ (+1)$
$1B_{12} = 23_{10}$

- Additionstabelle

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	**10**
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	**10**	**11**
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	**10**	**11**	**12**
4	4	5	6	7	8	9	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**
5	5	6	7	8	9	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
6	6	7	8	9	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
7	7	8	9	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
8	8	9	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
9	9	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
A	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
B	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**1A**

Die **grün** gekennzeichneten Fälle erzeugen einen Übertrag

Addition im 12-er System (2)

➢ mit Übertrag:

+ (+1)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	**10**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	**10**	**11**
2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	**10**	**11**	**12**
3	4	5	6	7	8	9	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**
4	5	6	7	8	9	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
5	6	7	8	9	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
6	7	8	9	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
7	8	9	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
8	9	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
9	A	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
A	B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**1A**
B	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**1A**	**1B**

Die **grün** gekenn-
zeichneten Fälle
erzeugen einen
Übertrag

Addition im 12-er System (3)

12^0	=	1
12^1	=	12
12^2	=	144
12^3	=	1728
12^4	=	20736
12^5	=	248832
12^6	=	2985984
12^7	=	35831808
12^8	=	429981696

- Beispiel
  - Addiere $(63A5)_{12} + (5B43)_{12} = (10328)_{12}$

$$\begin{array}{rr} & (6\ 3\ A\ 5)_{12} \\ + & (5\ B\ 4\ 3)_{12} \\ \hline & 1\ 1\ 1\ 0\phantom{)_{12}} \\ \hline\hline & (1\ 0\ 3\ 2\ 8)_{12} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow\ & 1_{12}\cdot 12^4 + 0_{12}\cdot 12^3 + 3_{12}\cdot 12^2 + 2_{12}\cdot 12^1 + 8_{12}\cdot 12^0 = \\ & 1\cdot(20736)_{10} + 0\cdot(1728)_{10} + 3\cdot(144)_{10} + 2\cdot(12)_{10} + 8\cdot(1)_{10} = \\ & (20736)_{10} + (432)_{10} + (24)_{10} + (8)_{10} = \\ & (21200)_{10} \end{aligned}$$

- Rechnen im 12-er System

  - $(63A5)_{12} = 6_{12}\cdot 12^3 + 3_{12}\cdot 12^2 + A_{12}\cdot 12^1 + 5_{12}\cdot 12^0 =$
    $= 6\cdot(1728)_{10} + 3\cdot(144)_{10} + 10\cdot(12)_{10} + 5\cdot(1)_{10} =$
    $= (10368)_{10} + (432)_{10} + (120)_{10} + (5)_{10} = (10925)_{10}$
  - $(5B43)_{12} = 5_{12}\cdot 12^3 + B_{12}\cdot 12^2 + 4_{12}\cdot 12^1 + 3_{12}\cdot 12^0 =$
    $= 5\cdot(1728)_{10} + 11\cdot(144)_{10} + 4\cdot(12)_{10} + 3\cdot(1)_{10} =$
    $= (8640)_{10} + (1584)_{10} + (48)_{10} + (3)_{10} = (10275)_{10}$

$$\sum = (21200)_{10}$$

Multiplikation

➢ Gegeben zwei Zahlen:

„7“ ≈ | | | | | | |

„5“ ≈ | | | | |

➢ Wie erhält man das Produkt?

- mehrfaches Addieren der Zahl

$$7 \cdot 5 \quad = \quad \underbrace{5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5}_{\text{7 Summanden}} \quad =$$

Multiplikation (1)

- Multiplikationstabelle (das kleine $1\cdot 1$ im 10-er-System)

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Multiplikation (2)

- Multiplikationstabelle (das kleine 1·1 im 5-er-System)

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

- Bemerkung: kleiner, einfacher

Multiplikation (3)

- Wie multipliziert man effizienter als durch mehrfache Addition?

- Beispiel: (im 10-er-System)

$$1\ 2\ 3 \quad \cdot \quad 4\ 5\ 6 \quad = \quad ?$$

Multiplikation (4)

$$\begin{aligned} 123 \cdot 456 &= 123 \cdot (400 + 50 + 6) \\ &= 123 \cdot 400 + 123 \cdot 50 + 123 \cdot 6 \\ &= 12300 \cdot 4 + 1230 \cdot 5 + 123 \cdot 6 \\ &= 49200 + 6150 + 738 \\ &= 56088 \end{aligned}$$

➢ D.h. Multiplikation „beliebiger“ Zahlen im 10-er System wird zurückgeführt auf

- Multiplikation mit 1, 10, 100 durch Anhängen keiner, einer, zweier etc. Nullen
- Multiplikation mit einstelligen Zahlen (← Multiplikationstabelle!)
- Addition (← Additionstabelle!)

Multiplikation (5)

- Kurzdarstellung

1	2	3	·	4	5	6
		4				
			8			
			1	2		
		4	9	2	0	0
			5			
			1	0		
				1	5	
			6	1	5	0
				6		
				1	2	
					1	8
+				7	3	8
		1	1	0	0	
		5	6	0	8	8

3. Zahlendarstellung im Rechner

- Das 2-er System
- Konvertierung
- Negative Zahlen und Subtraktion
- 2-er Komplement

Das 2-er System

Vorteil: nur noch 0 und 1
2 gut identifizierbare und technisch realisierbare Zustände
(Strom fließt vs. Strom fließt nicht,
positive Spannung vs. negative Spannung)

Wie sieht die Zahl

$$\overbrace{|\;|\;|\;|\;|\;|\;|\;|\;|\;|\;|\;|\;|}^{13}$$

im Zweier-System aus?

$$13 \quad = \quad \underbrace{1 \cdot 2^3}_{8} + \underbrace{1 \cdot 2^2}_{4} + \underbrace{0 \cdot 2^1}_{0} + \underbrace{1 \cdot 2^0}_{1} \quad \rightarrow \quad 1101$$

$$5 \quad \rightarrow \quad 101$$

Addition im 2-er System (1)

- Ziffern: 0, 1

$0_{10} = 000_2$
$1_{10} = 001_2$
$2_{10} = 010_2$
$3_{10} = 011_2$
$4_{10} = 100_2$
$5_{10} = 101_2$
$6_{10} = 110_2$

- Additionstabelle:

+	0	1
0	0	1
1	1	**10**

mit Übertrag:

+ (+1)	0	1
0	1	**10**
1	**10**	**11**

Die **grün** gekenn-zeichneten Fälle erzeugen einen Übertrag

Addition im 2-er System (2)

Summenbildung:

$$
\begin{array}{rcr}
1\,1\,0\,1 & \rightarrow & 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \;=\; 13_{10} \\
+ \quad 1\,0\,1 & \rightarrow & 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \;=\; 5_{10} \\
\hline
{\scriptstyle 1\;1\;0\;1} & & \\
\hline\hline
1\,0\,0\,1\,0 & \rightarrow & 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \;=\; 18_{10}
\end{array}
$$

Konvertierung

Konvertierung vom 10-er System in 2-er System

$(377)_{10} = (?)_2$

377	:	2	=	188	Rest	1
188	:	2	=	94	Rest	0
94	:	2	=	47	Rest	0
47	:	2	=	23	Rest	1
23	:	2	=	11	Rest	1
11	:	2	=	5	Rest	1
5	:	2	=	2	Rest	1
2	:	2	=	1	Rest	0
1	:	2	=	0	Rest	1

Stop bei 0

Ergebnis: Rückwärtsanordnung der Reste, d.h.

$(1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1)_2 = (377)_{10}$

Probe, d.h. Konvertierung vom 2-er System in 10-er System

1	0	1	1	1	1	0	0	1	
256 +		64 +	32 +	16 +	8 +			1	= 377
2^8		2^6	2^5	2^4	2^3			2^0	

Konvertierung (1)

Wieso werden Reste rückwärts angeordnet ?

$$(32)_{10} \quad = \quad (?)_2$$

$$\begin{array}{rcrcrlr}
32 & : & 2 & = & 16 & \text{Rest} & 0 \\
16 & : & 2 & = & 8 & \text{Rest} & 0 \\
8 & : & 2 & = & 4 & \text{Rest} & 0 \\
4 & : & 2 & = & 2 & \text{Rest} & 0 \\
2 & : & 2 & = & 1 & \text{Rest} & 0 \\
1 & : & 2 & = & 0 & \text{Rest} & 1
\end{array}$$

$$(32)_{10} \quad = \quad (100000)_2$$

Endliche Zahlenbereiche (1)

Digitalrechner sind **endlich** !

- Es gibt nur endlich viele Stellen, endlich viele Plätze, … die zur Zahlendarstellung verwendet werden können. Häufig werden 32 bit, d.h. 32 Dualstellen bereitgestellt.

$$\underbrace{0/1}_{2^{31}}\ \underbrace{0/1}\ \ldots.\ \underbrace{0/1}_{2^{1}}\ \underbrace{0/1}_{2^{0}=1}$$

Kleinste Zahl	$(0 \ldots 0)_2$	=	$(0)_{10}$
Größte Zahl	$(1 \ldots 1)_2$	=	$(4\ 294\ 967\ 295)_{10}$

Größere Zahlenbereiche als der 32 bit sind möglich

z.B. 48 bit oder 64 bit.

Endliche Zahlenbereiche (2)

Problem endlicher Zahlenbereiche:

- Summe, Produkt darstellbarer Zahlen ist u.U. nicht mehr darstellbar („Überlauf“, overflow)

Hypothetisch kleines Beispiel: nur 4 Bits

	0	1	1	1
+	1	0	0	1
1	1	1	1	
1	0	0	0	0

?

$\Rightarrow$ Summenbildung nicht ausführbar!

Negative Zahlen und Subtraktion

- Ziel: Sowohl Darstellung negativer Zahlen als auch Arithmetik damit

- Grundsätzlich 2 Wege denkbar:
  - Extra Substraktionsalgorithmus
  - Rückführung auf Addition (← bevorzugt)

Negative Zahlen und Subtraktion (1)

1. Versuch: (signed integer)

- Ein Bit wird als Vorzeichen reserviert.
- Dann sind nun weniger Bits zur eigentlichen Zahlendarstellung (Betragsdarstellung) verfügbar.
- Typischerweise wird das Bit ganz links als Vorzeichen verwendet.
  - Vorzeichenbit = 0 $\leftrightarrow$ +
  - Vorzeichenbit = 1 $\leftrightarrow$ –
- Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} (\,\mathbf{0}\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\,)_2 = 114 \\ \,\mathbf{+}\ 64 + 32 + 16 + 8 + 2 \\ \\ (\,\mathbf{1}\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\,)_2 = -114 \\ \,\mathbf{-}\ 64 + 32 + 16 + 8 + 2 \end{array}\right\}\ \text{Darstellbarkeit negativer Zahlen erscheint in Ordnung}$$

Negative Zahlen und Subtraktion (2)

- kleines Problem: Die „0“ hat zwei Darstellungen.
  Alle anderen darstellbaren Zahlen haben eindeutige Darstellungen.

$$\underbrace{(\,0 \ldots 0\,)_2}_{„+0“} \;=\; 0 \;=\; \underbrace{(\,1\,0 \ldots 0\,)_2}_{„-0“}$$

  (gewöhnungsbedürftig, aber beherrschbar)

- großes Problem: Addition einer negativen Zahl
  = Subtraktion dieser Zahl?

Negative Zahlen und Subtraktion (3)

➢ Beispiel: 9 – 4

	0	0001001	(= 9)
+	1	0000100	(= – 4)
	1	0001101	(= – 13)

→ so nicht

Negative Zahlen und Subtraktion (4)

- Vorzeichenbit = 1 ↔ +
- Vorzeichenbit = 0 ↔ –

➢ 9 – 4

	1 0001001	(= 9)
+	0 0000100	(= – 4)
	1 0001101	(= + 13)

→ so auch nicht

➢ Aber: Für eine **reine Darstellung** gemischt auftretender positiver und negativer Zahlen ist die Vorzeichenkonvention brauchbar!

2-er Komplement

2. Versuch: (2-er Komplement)

- Finde zu irgendeiner Binärzahl, z.B. 00001001_2 eine Binärzahl, so dass deren Summe 0 ist. (Beschränkung auf 8 Bit) z.B. 9 – 9 = 0

Löse das Problem rückwärts!

$$\begin{array}{rc|ccccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
+ & & & & & ? & & & \\ \hline
 & & & & & & & & \\ \hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

2-er Komplement

2. Versuch: (2-er Komplement)

- Finde zu irgendeiner Binärzahl, z.B. 00001001_2 eine Binärzahl, so dass deren Summe 0 ist. (Beschränkung auf 8 Bit)   z.B. 9 – 9 = 0

Löse das Problem rückwärts!

	0	0	0	0	1	0	0	1
+	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	1	1	1	1	1	1	1	
	0	0	0	0	0	0	0	0

1. Beobachtung:

Es entsteht eine neue Stelle.
→ ignorieren

2. Beobachtung:

Die zu addierende Zahl ist das Komplement der ursprünglichen Zahl – bis auf die letzte Stelle.

Komplement: 0 → 1
1 → 0

2-er Komplement (1)

- Das 2-er Komplement wird in zwei Schritten gebildet

    1. Bildung des reinen Komplements
    2. Addition von 1,
       wobei eine vorne ggf. entstehende neue Stelle ignoriert wird.

- Beispiele für 2-er Komplement:

$$
\begin{array}{lrr}
 & & 00001111 \\
\text{Komplementbildung} & & \text{--------------------} \\
 & & 11110000 \\
\text{Addition von 1} & + & 00000001 \\
\hline
 & & 11110001
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lrr}
 & & 00001110 \\
\text{Komplementbildung} & & \text{--------------------} \\
 & & 11110001 \\
\text{Addition von 1} & + & 00000001 \\
\hline
 & & 11110010
\end{array}
$$

2-er Komplement (2)

- Komplement (Komplement (Zahl))   =   Zahl

  aber auch
- 2-er Komplement (2-er Komplement (Zahl))   =   Zahl

- Beispiel:
  - 2-er Komplement von 00001110 ist 11110010 (vorige Folie)
  - Davon das 2-er Komplement:

$$\begin{array}{rr} & 11110010 \\ \text{Komplementbildung} & \\ \hline & 00001101 \\ \text{Addition von 1} & +\ 00000001 \\ \hline & 00001110 \end{array}$$

Addition des 2-er Komplements (1)

➢ $(13 - 9)_{10}$

1. Schritt: **Bildung** des 2-er Komplements von 9

	0	0	0	0	1	0	0	1	
	1	1	1	1	0	1	1	0	
+	0	0	0	0	0	0	0	1	
	1	1	1	1	0	1	1	1	2-er Komplement von $(9)_{10}$

2. Schritt: **Addition** von 13 und dem 2-er Komplement von 9

		0	0	0	0	1	1	0	1	= $(13)_{10}$
+		1	1	1	1	0	1	1	1	= 2-er Komplement von $(9)_{10}$
	1	1	1	1	1	1	1	1		
		0	0	0	0	0	1	0	0	= $(4)_{10}$

ignorieren des Übertrags!

Addition des 2-er Komplements (2)

- $(9 - 13)_{10}$ (Die Darstellung negativer Zahlen ist im Zusammenhang mit dem 2-er Komplement im bisherigen Verlauf ungeklärt.)

1. Schritt: Bildung des 2-er Komplements von 13

	0	0	0	0	1	1	0	1	
	1	1	1	1	0	0	1	0	
+	0	0	0	0	0	0	0	1	
	1	1	1	1	0	0	1	1	2-er Komplement von $(13)_{10}$

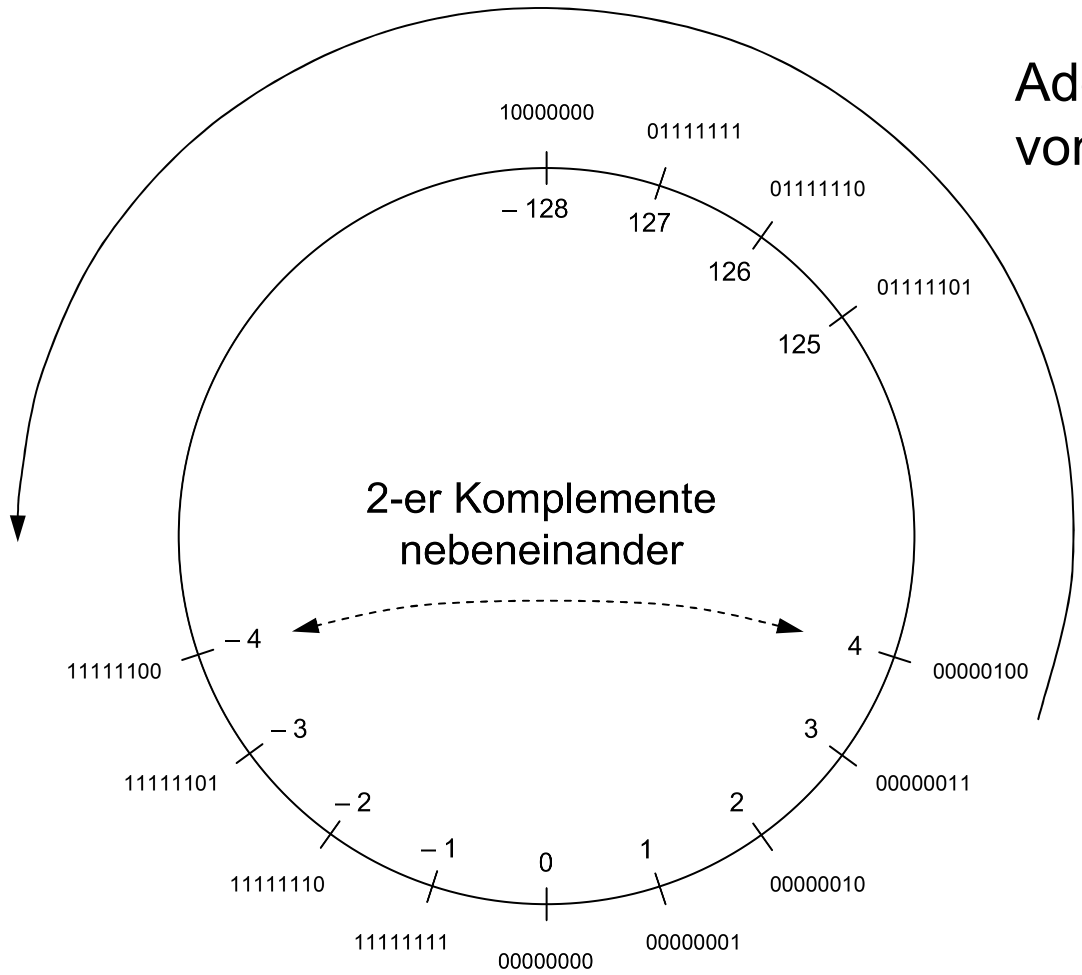
2. Schritt: Addition von 9 und 2-er Komplement von 13

		0	0	0	0	1	0	0	1	
+		1	1	1	1	0	0	1	1	
	0	0	0	0	0	0	1	1		
		1	1	1	1	1	1	0	0	$= (-4)_{10}$?

kein Übertrag entstanden

Darstellung negativer Zahlen noch nicht festgelegt → möglicherweise sinnvoll

2-er Komplement von 8-Bit Zahlen (1)



Addition von 00000001 von Position zu Position

- Das erste Bit ist das Vorzeichen
  - 1 ↔ –
  - 0 ↔ +
- 2-er Komplemente liegen sich in diesem Zahlenkreis **nicht** gegenüber, sind aber betragsmäßig gleich.

2-er Komplement von 8-Bit Zahlen (2)

- Subtraktion wurde tatsächlich auf Addition mit 2-er Komplement zurückgeführt.
- Die Bildung des 2-er Komplements kann wiederum auf Addition zurückgeführt werden, denn die Komplementbildung kann auf Addition zurückgeführt werden – allerdings auf Addition **ohne** Überträge
- Beispiel:

$$
\begin{array}{rr}
 & 00001001 \\
+ & 11111111 \\
\hline
 & 11110110
\end{array}
$$

Diese beiden Zahlen sind die reinen Komplemente voneinander.

Überträge ignorieren

Es wird stets diese Zahl zum Binärmuster addiert.

- Subtraktion vollständig auf Addition(en) zurückgeführt!
- Komplementbildung durch ziffernweise / bitweise Negation.

2-er Komplement von 8-Bit Zahlen (3)

- Zahlenbereichsüberschreitungen beim 2-er Komplement werden in dieser Vorlesung (Übungen, Tutorien, Klausur) **nicht** behandelt.

- Multiplikationen beim 2-er Komplement werden in dieser Vorlesung (Übungen, Tutorien, Klausur) **auch nicht** behandelt.

4. Gleitkommazahlen / Fließpunktzahlen

- Kommazahlen im Dezimalsystem
- Beispiel im 2er-System
- (Zehner-)Exponenten
- Normierung
- Gleitkommazahlen-Darstellung in Rechnern
- Besonderheiten
- Konsequenzen

Kommazahlen im Dezimalsystem

Bisher bekannt sind Zahlen wie:

$$1\,2\,3 \;=\; 1 \cdot \underbrace{10^2}_{100} + 2 \cdot \underbrace{10^1}_{10} + 3 \cdot \underbrace{10^0}_{1}$$

Wie aber stellt man das Ergebnis der folgenden Rechnung dar?

7 Tafeln Schokolade sollen gerecht auf 4 Freunde verteilt werden.

$7 : 4 = 1$ Rest 3

$3 : 4 = 0$ Rest 3 ? (was ist $\frac{3}{4}$?)

Kommazahlen im Dezimalsystem (1)

Man kann die Darstellung des Zahlensystems fortsetzen, indem man sich einfach ein paar Stellen „leiht“:

7 : 4	=	1	Rest	3
3 0 : 4	=	7	Rest	2
2 0 : 4	=	5	Rest	0

„geliehen“

„geliehen“

Ergebnis: 1 , 7 5

Man muss die Stelle markieren, an der man begonnen hat, sich „Stellen auszuleihen“.
$\Rightarrow$ Einführung des „Kommas“

Kommazahlen im Dezimalsystem (2)

Dies lässt sich auch wie folgt darstellen:

$$1 \cdot \underbrace{1}_{10^0} + 7 \cdot \frac{1}{\underbrace{10}_{10^{-1}}} + 5 \cdot \frac{1}{\underbrace{100}_{10^{-2}}}$$

D.h. das Verfahren, Zahlen in verschiedenen Basis-Systemen darzustellen, lässt sich auch für Zahlenwerte < 1 fortsetzen.

Beispiel im 2er-System

Was ist $(11{,}375)_{10}$ im 2er-System?

$$
\begin{array}{rlllll}
 & 11{,}375 < 16 & \rightarrow & 0 \cdot 2^4 & = & 0 \\
- & 0 & & & & \\
\hline
 & 11{,}375 \geq 8 & \rightarrow & 1 \cdot 2^3 & = & 8 \\
- & 8 & & & & \\
\hline
 & 3{,}375 < 4 & \rightarrow & 0 \cdot 2^2 & = & 0 \\
- & 0 & & & & \\
\hline
 & 3{,}375 \geq 2 & \rightarrow & 1 \cdot 2^1 & = & 2 \\
- & 2 & & & & \\
\hline
 & 1{,}375 \geq 1 & \rightarrow & 1 \cdot 2^0 & = & 1 \\
- & 1 & & & & \\
\hline
 & 0{,}375 < 0{,}5 & \rightarrow & 0 \cdot 2^{-1} & = & 0 \\
- & 0 & & & & \\
\hline
 & 0{,}375 \geq 0{,}25 & \rightarrow & 1 \cdot 2^{-2} & = & \frac{1}{4} \\
- & 0{,}25 & & & & \\
\hline
 & 0{,}125 \geq 0{,}125 & \rightarrow & 1 \cdot 2^{-3} & = & \frac{1}{8} \\
- & 0{,}125 & & & & \\
\hline
 & 0{,}0 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
2^5 & = & 32 \\
2^4 & = & 16 \\
2^3 & = & 8 \\
2^2 & = & 4 \\
2^1 & = & 2 \\
2^0 & = & 1 \\
2^{-1} & = & 0{,}5 \\
2^{-2} & = & 0{,}25 \\
2^{-3} & = & 0{,}125 \\
2^{-4} & = & 0{,}0625 \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

Ergebnis: $(1\ 0\ 1\ 1,\ 0\ 1\ 1)_2$

$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$

(Zehner-)Exponenten

Für besonders große und betragsmäßig kleine Zahlen ist die Exponentialschreibweise bekannt:

$$345 \cdot 10^{9} = 345 \cdot 1\,000\,000\,000$$
$$= 345\,000\,000\,000$$

$$123 \cdot 10^{-5} = 123 \cdot 0{,}0001$$
$$= 0{,}00123$$

Das gleiche ist natürlich auf Systeme anderer Basen übertragbar:

$$1101 \cdot 2^{8} = 1101 \cdot 1\,0000\,0000$$
$$= 1101\,0000\,0000$$

$$10111 \cdot 2^{-7} = 10111 \cdot 0{,}0000\,001$$
$$= 0{,}0010\,111$$

Normierung

Üblich ist häufig auch eine „Normierung“, so dass nicht mehr mehrere „Vorkommastellen“ vorkommen.

Über den Exponenten lässt sich dies ausgleichen:

$$
\begin{aligned}
345 \cdot 10^{9} &= 345 \cdot 1\,000\,000\,000 \\
&= 345\,000\,000\,000 \\
&= 3{,}45 \cdot 10^{11} = 0{,}345 \cdot 10^{12} \\
123 \cdot 10^{-5} &= 123 \cdot 0{,}0001 \\
&= 0{,}00123 \\
&= 1{,}23 \cdot 10^{-3} = 0{,}123 \cdot 10^{-2}
\end{aligned}
$$

Ob auf x,xxx oder 0,xxxx normiert wird ist letztendlich eine willkürliche Festlegung

Analog im 2er-System:

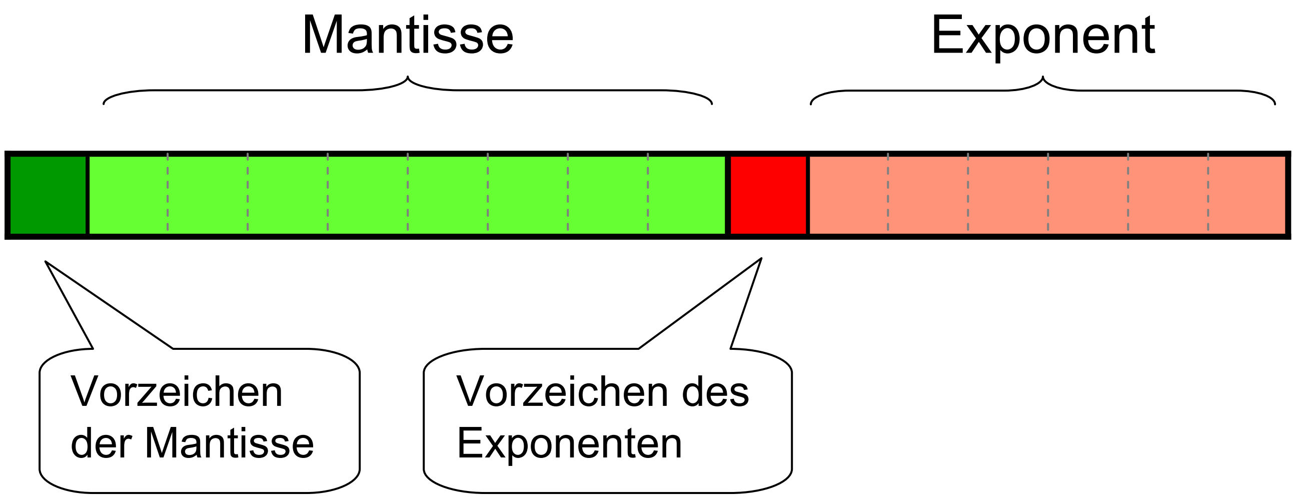
$$
\begin{aligned}
1101 \cdot 2^{8} &= 1101 \cdot 1\,0000\,0000 \\
&= 1101\,0000\,0000 \\
&= 1{,}101 \cdot 2^{11} = 0{,}1101 \cdot 2^{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
10111 \cdot 2^{-7} &= 10111 \cdot 0{,}0000\,001 \\
&= 0{,}0010\,111 \\
&= 1{,}0111 \cdot 2^{-3} = 0{,}10111 \cdot 2^{-4}
\end{aligned}
$$

Gleitkommazahlen-Darstellung in Rechnern

Wieder basierend auf dem 2er System.

Aufteilung eines Bereiches für die „Nachkommazahlen“
(bestimmte Anzahl von Stellen / Bits als Genauigkeit)
und eines Bereiches für den Exponenten.



Bemerkung:

Es gibt viele unterschiedliche Standards, bekanntester IEEE 754 (hier ***nicht*** dargestellt).
Nicht in allen Fällen werden die Spezifikationen der Norm IEEE 754 vollständig erfüllt;
Beispiele dafür sind einige **IBM-Großrechnersysteme**, die **VAX**-Architektur und einige **Supercomputer** wie die von **Cray**, aber auch die Sprache **Java**.

<u>Besonderheiten</u>

Aufgrund der Normierung steht die erste 1 entweder direkt vor oder nach dem Komma. Ein freies Setzen des Kommas ist nicht mehr möglich.

Solche Fälle würden (per Definition) **<u>immer</u>** durch den Exponenten ausgeglichen.

standardmäßig auftretender Fall: $\overbrace{1,}^{\text{immer fest}}\mathrm{xxxxx}$ oder $\overbrace{0{,}1}^{\text{immer fest}}\mathrm{xxxxx}$

Erst ab hier können beliebige Ziffernfolgen auftreten (0 oder 1)

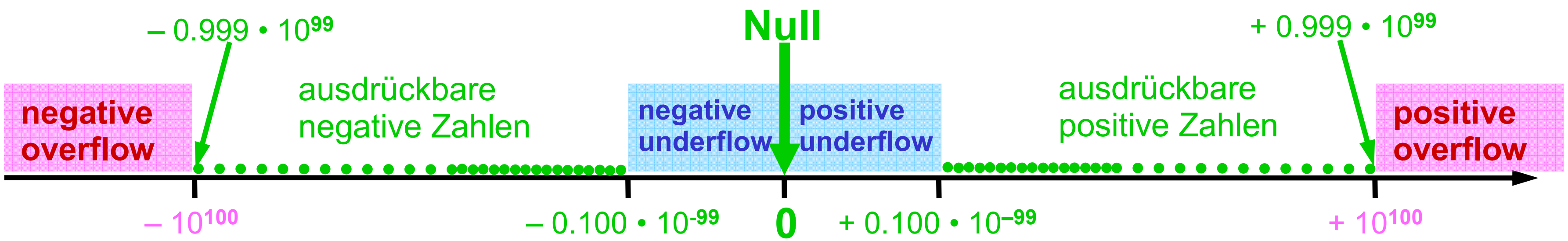
Um Platz zu sparen, hat man sich daher entschieden, das erste Bit einzusparen und einfach anzunehmen, dass es auf 1 gesetzt ist.
(so genanntes „hidden Bit“)

Die restliche Mantisse hat daher 1 Bit mehr zur Verfügung.

Konsequenzen

1. Aufgrund der Normierung und des Verbots von 0-en direkt nach dem Komma existiert direkt um den Nullpunkt eine „Lücke“, in der keine Zahlen darstellbar sind. (siehe auch Übungen)

2. Über den Zahlenstrahl herrscht eine unterschiedliche Dichte, welche Zahlen in welcher Entfernung vom Nullpunkt dargestellt werden können.



- jede Gleitkommazahl **repräsentiert ein Intervall** der reellen Zahlen; das Intervall wächst mit zunehmendem Betrag der Zahl, d.h. die **Dichte der Repräsentation** nimmt mit zunehmendem Betrag der Zahl ab
- Eine Abschätzung des Einflusses der Ungleichverteilung der Repräsentanten auf die Rechenoperationen ist nicht trivial
- Behandlung von **overflow** / **underflow**, **Null**, „undefiniert“?

Darstellung der Null

3. Aufgrund dieser Design-Entscheidung lässt sich nun theoretisch keine „Null“ mehr darstellen.

   Abhilfe:

   > Eine bestimmte Abfolge der Bits über die gesamte Länge (Mantisse und Exponent) wird als Darstellung der „Null“ **definiert**.

   Einige besondere Zahlen, die auf diese Weise definiert werden:

+ 0,0	„positive null“	
– 0,0	„negative null“	
+ ∞	„positive infinity“	
– ∞	„negative infinity“	
undefinierte Zahl	„not-a-number“	(NaN)

Interne Darstellung besonderer Zahlen

Wie werden die „besonderen“ Zahlen (wie ±0, ±∞ oder NaN) intern dargestellt?

Exponent E	Mantisse M	Bedeutung	Salopp	Bezeichnung
$E = E_{min}$	$M = 0$	$(-1)^S \cdot 0$	± 0	Null (gehört zu denorm.)
$E = E_{min}$	$M > 0$	$(-1)^S \cdot M / 2^p \cdot 2^{E_{min}}$	$\pm 0{,}M \cdot 2^{E_{min}}$	denormalisierte Zahl
$E_{min} < E < E_{max}$	$M \geq 0$	$(-1)^S \cdot (1 + M / 2^p) \cdot 2^E$	$\pm 1{,}M \cdot 2^E$	normalisierte Zahl
$E = E_{max}$	$M = 0$	Unendlich	$\pm\infty$	Unendlich
$E = E_{max}$	$M > 0$	keine Zahl (NaN)		keine Zahl (NaN)

wobei:

- S – Wert des Vorzeichenbits (S – sign)
- E – Wert des Exponenten (E_{min} – mininaler Expon., E_{max} – maximaler Expon.)
- M – Wert der Mantisse
- p – Anzahl der Mantissenbits (p – precision)

Die Lücke in der Mitte

Wie lassen sich kleine Zahlen um Null darstellen?

Aufgrund der Normierung und des implizit immer gesetzten „hidden Bits" ist es nach den vorangegangenen Regeln nicht möglich Zahlen darzustellen, die kleiner sind als der kleinste Exponent.
Es bildet sich eine „Lücke" um die Null herum.

Abhilfe:

Beim kleinsten Exponenten wird auf die Normierung und auf das implizite „hidden Bit" verzichtet.

Nun sind auch Zahlen der Form **0,0…0xxxx** erlaubt und man kommt somit (im Rahmen der Genauigkeit des vorletzten Exponenten) beliebig an die Null heran. Die Null ist sogar nur ein Spezialfall dieser so genannten **„denormalisierten" Zahlen**.

Rechenoperationen

4. Addition und Multiplikation sind nicht trivial.

Addition:

$1{,}23 \cdot 10^3 + 4{,}56 \cdot 10^4 = 1{,}23 \cdot 1000 + 4{,}56 \cdot 10000 = 1230 + 45600 = 46830$

auf gleichen Exponenten bringen

$= 1{,}23 \cdot \mathbf{1000} + 45{,}6 \cdot \mathbf{1000}$

oder $0{,}123 \cdot \mathbf{10000} + 4{,}56 \cdot \mathbf{10000}$

dann Mantissen addieren

$= \mathbf{46{,}83} \cdot 1000$ $\qquad = \mathbf{4{,}683} \cdot 10000$

$= 46{,}83 \cdot 10^3$ $\qquad = 4{,}683 \cdot 10^4$

Multiplikation:

$\underset{\text{Mantisse}_1}{\mathbf{1{,}23}} \cdot 10^{\overset{\text{Exponent}_1}{\mathbf{3}}} \times \underset{\text{Mantisse}_2}{\mathbf{4{,}56}} \cdot 10^{\overset{\text{Exponent}_2}{\mathbf{4}}} = 1{,}23 \cdot 1000 \times 4{,}56 \cdot 10000 = 1230 \times 45600 = 56718000$

Mantisse und Exponenten einzeln zusammenfassen

$= \mathbf{1{,}23} \times \mathbf{4{,}56} \cdot \mathbf{1000} \times \mathbf{10000} = \mathbf{Mant_1} \times \mathbf{Mant_2} \cdot 10^{\mathbf{Exp_1}} \times 10^{\mathbf{Exp_2}}$

und dann jeweils verrechnen

$= \mathbf{5{,}6718} \cdot \mathbf{10000000}$ $\qquad = \mathbf{Mant_1} \times \mathbf{Mant_2} \cdot 10^{\mathbf{Exp_1} + \mathbf{Exp_2}}$

$= 5{,}6718 \cdot 10^7$

Zahlenumwandlungen

5. Berechnung mit sowohl einer Ganzen Zahl als auch einer Gleitkommazahl erfordert Umwandlung:

   - Sollen Zahlen unterschiedlicher Darstellungsarten miteinander verrechnet werden, so müssen sie zunächst in eine gemeinsame Darstellungsart überführt werden.

Beispiel:

Wandlung in Ganze Zahlen

$1{,}23 \cdot 10^4 + 567 = 1{,}23 \cdot 10000 + 567 = 12300 + 567 = 12867$

$= 1{,}23 \cdot 10^4 + 5{,}67 \cdot 10^2 = 1{,}23 \cdot 10^4 + 0{,}0567 \cdot 10^4 = 1{,}2867 \cdot 10^4$

Wandlung in Fließpunktzahlen

Dabei können Informationen verloren gehen

$1{,}23 \cdot 10^1 + 567 = 1{,}23 \cdot 10 + 567 = 12 + 567 = 579$

$= 1{,}23 \cdot 10^1 + 5{,}67 \cdot 10^2 = 0{,}123 \cdot 10^2 + 5{,}67 \cdot 10^2 = 5{,}793 \cdot 10^2$

Rundungsfehler

6. Rechenungenauigkeiten / Rundungsfehler

- Test: **Assoziativgesetz** (Beispiel mit 4-stelliger Arithmetik)
  $x = 9{,}900;\ \ y = 1{,}000;\ \ z = -\,0{,}999$
  $(x + y) + z \quad = \ 10{,}90 + (-\,0{,}999) \ = \ \mathbf{9{,}910}$
  $x + (y + z) \quad = \ 9{,}900 + 0{,}001 \ = \ \mathbf{9{,}901}$

- Test: **Distributivgesetz** (Beispiel mit 4-stelliger Arithmetik)
  $x = 1100,;\ \ y = -\,5{,}000;\ \ z = 5{,}001$
  $(x \cdot y) + (x \cdot z) \ = \ (-\,5500) + 5501 \ = \ \mathbf{1{,}000}$
  $x \cdot (y + z) \quad = \ 1100, \cdot 0{,}001 \ = \ \mathbf{1{,}100}$

- Auslöschung
  Bei der Subtraktion zweier fast gleich großer Werte heben sich die signifikanten Ziffern auf und die Differenz verliert dadurch an Signifikanz (z.B. Differenzenquotient)

- Überlaufgefahr
  ... bei Division durch kleine Werte

Fazit

- Gleitkommazahlen können nicht gleichgesetzt werden mit Rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$) oder mit Reellen Zahlen ($\mathbb{R}$)

- Probleme der Numerik
  (= eigener Fachbereich in der Mathematik)