Математические основы теории вероятностей, часть 2

Палагашвили Аби

17 февраля 2019 г.

1 Конечные произведения измеримых пространств

$(X, S, \mu)(Y, T, \nu)$ - пространства с мерами Рассмотрим вопрос о построении пространства $(X \times Y, S \times T, \mu \times \nu)$

Определение 1.1. *Пусть* $A \subset X, B \subset Y$. **Прямоугольником** $A \times B$ *называется совокупность пар* $(x, y), x \in A, y \in B$

Лемма 1.1. *Класс всех измеримых* $(A \in S, B \in T)$ *прямоугольников образует полуалгебру*

Доказательство. $(A_1 \times B_1) \subset (A_2 \times B_2) \Rightarrow (A_2 \times B_2) \setminus (A_1 \times B_1) = \bigcup_{i=1}^{k}(C_i \times D_i) = A_2(B_2 \setminus B_1) \bigcup B_1(A_2 \setminus A_1)$ □

Определение 1.2. Произведение σ *- алгебр* $S \times T$ *-* σ *- алгебра,порожденная классом измеримых прямоугольников.*

Определение 1.3. *Пусть* $E \subset X \times Y$*.Тогда* **x-сечением** *Множества* E *называется множество* $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$

Определение 1.4. *Пусть f-измеримая функция со значениями в* $\overline{\mathbb{R}}$*.Тогда x-сечением функции* f *называется* $f_x(y) : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *такая,что* $f_x(y) = f(x, y)$

Теорема 1.1. *Если* $E \in S \times T$*, то* $E_x \in T$ *и* $E_y \in S$ $\forall x \in X, y \in Y$

Доказательство. Для измеримых прямоугольников утверждение верно. Далее,заметим,что

$$(\bigcup_i A_i)_x = \bigcup_i (A_i)_x \tag{1}$$

и

$$(A_1 \setminus A_2)_x = (A_1)_x \setminus (A_2)_x \tag{2}$$

Зафиксируем x.Обозначим через $\mathcal{F}$ класс множеств A $\in S \times T$,для которых x-сечение $\in T$.В силу (1) и (2) получаем,что $\mathcal{F}$ является σ - алгеброй,содержащей все измеримые прямоугольники.По определению $\mathcal{F} \subset S \times T$, но из доказательства имеем $S \times T \subset \mathcal{F}$ □

Лемма 1.2. *Пусть f - измеримая функция на $(X \times Y, S \times T)$. Тогда x-сечение f_x есть измеримая функция на (Y, T)*

Доказательство. Для $\forall B \in \mathcal{B}$ имеем $f_x^{-1}(B) = \{y : f(x,y) \in B\} = \{y : (x,y) \in f^{-1}(B)\} = (f^{-1}(B))_x \in T$ □