

Математические основы теории вероятностей, часть 2

Палагашвили Аби

17 февраля 2019 г.

1 Конечные произведения измеримых пространств

$(X, S, \mu)(Y, T, \nu)$ - пространства с мерами Рассмотрим вопрос о построении пространства $(X \times Y, S \times T, \mu \times \nu)$

Определение 1.1. Пусть $A \subset X, B \subset Y$. Прямоугольником $A \times B$ называется совокупность пар $(x, y), x \in A, y \in B$

Лемма 1.1. Класс всех измеримых $(A \in S, B \in T)$ прямоугольников образует полуалгебру

Доказательство. $(A_1 \times B_1) \subset (A_2 \times B_2) \Rightarrow (A_2 \times B_2) \setminus (A_1 \times B_1) = \bigcup_{i=1}^k (C_i \times D_i) = A_2(B_2 \setminus B_1) \cup B_1(A_2 \setminus A_1)$ \square

Определение 1.2. Произведение σ - алгебр $S \times T$ - σ - алгебра, порожденная классом измеримых прямоугольников.

Определение 1.3. Пусть $E \subset X \times Y$. Тогда x -сечением Множества E называется множество $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$

Определение 1.4. Пусть f -измеримая функция со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда x -сечением функции f называется $f_x(y) : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $f_x(y) = f(x, y)$

Теорема 1.1. Если $E \in S \times T$, то $E_x \in T$ и $E_y \in S \forall x \in X, y \in Y$

Доказательство. Для измеримых прямоугольников утверждение верно. Далее, заметим, что

$$\left(\bigcup A_i\right)_x = \bigcup (A_i)_x \quad (1)$$

и

$$(A_1 \setminus A_2)_x = (A_1)_x \setminus (A_2)_x \quad (2)$$

Зафиксируем x . Обозначим через \mathcal{F} класс множеств $A \in S \times T$, для которых x -сечение $\in T$. В силу (1) и (2) получаем, что \mathcal{F} является σ -алгеброй, содержащей все измеримые прямоугольники. По определению $\mathcal{F} \subset S \times T$, но из доказательства имеем $S \times T \subset \mathcal{F}$ \square

Лемма 1.2. Пусть f - измеримая функция на $(X \times Y, S \times T)$. Тогда x -сечение f_x есть измеримая функция на (Y, T)

Доказательство. Для $\forall B \in \mathcal{B}$ имеем $f_x^{-1}(B) = \{y : f(x, y) \in B\} = \{y : (x, y) \in f^{-1}(B)\} = (f^{-1}(B))_x \in T$ \square