

# Восстановление плотности и EM-алгоритм

Викулин Всеволод

v.vikulin@corp.mail.ru

20 апреля 2019

Восстановление плотности. Математично и полезно.

# Зачем восстанавливать плотности?

Есть целое семейство алгоритмов, которые требуют знание плотности распределений.

$$p(y|x) = \frac{p(x|y)p(y)}{p(x)} = \frac{p(x|y)p(y)}{\sum_i p(x|y_i)p(y_i)}$$

где  $p(y|x)$  — апостериорная вероятность принадлежности объекта  $x$  к классу  $y$ ,  $p(x|y)$  — правдоподобие (likelihood),  $p(y)$  — априорная вероятность класса  $y$ ,  $p(x)$  — правдоподобие данных (evidence).

## Вопрос

Как теперь предсказать метку класса?

# Зачем восстанавливать плотности?

Давайте разбираться, как считать:

$p(x|y)$  - берем все объекты класса и восстанавливаем плотность,

$p(y)$  - доля класса в выборке,

$p(x)$  — не очень то и нужна.

Осталось только восстановить плотность!

## Пример

Подбрасываем монетку. Хотим узнать вероятность, что она выпадет орлом. Как использовать формулу Байеса?

## Вопрос

А можно ли находить аномалии в данных с помощью плотности?

Всего есть 3 метода восстановления плотности.

- 1 Непараметрическое
- 2 Параметрическое
- 3 Разделение смеси

Сегодня обсудим их все.

# Непараметрическое восстановления плотности

Рассмотрим одномерный случай.

Если признак  $x$  категориальный -  $p(x = k|y)$  = доля класса  $y$ , где признак  $x$  принимает значение  $k$ .

Если  $x$  – вещественный, то  $p(x) = \lim_{h \rightarrow 0} P[x - h, x + h]$ ,  
тогда  $p(x|y)$  = доля точек класса  $y$  которые попали в окно  $[x - h, x + h]$

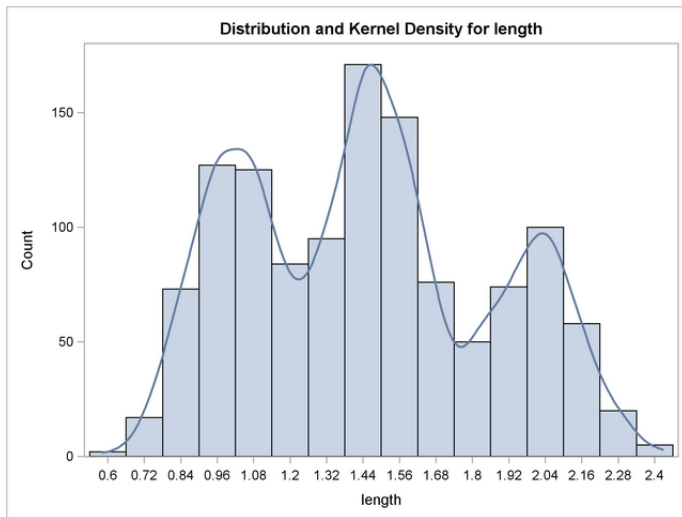
$$p(x|y) = \frac{1}{2Nh} \sum_{i=1}^N (|x - x_i| < h) [y_i = y]$$

Можно использовать метод парзеновского окна:

$$p(x|y) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) [y_i = y]$$

,  
где  $K$  - нормированная функция, которую называют ядром.

# Непараметрическое восстановления плотности



Считаем, что наши данные порождены параметрическим распределением, например, нормальным.

## Вопрос

Почему всегда нормальным?

$$p(x|y, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

,  
осталось найти  $\mu_y$  и  $\sigma_y$ .



# Метод максимума правдоподобия

Правильные те параметры, при которых пронаблюдать такую выборку максимально правдоподобно!

Вы этот принцип применяете постоянно в жизни!

Пишем функцию правдоподобия, то есть вероятность пронаблюдать выборку:

$$L(\theta) = p(X|\theta) = \prod_{i=1}^N p(x_i|\theta)$$

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^N \log p(x_i|\theta)$$

Правильные параметры те, которые максимизируют  $L(\theta)$ . Строим для каждого класса функцию правдоподобия, находим оптимальные параметры!

## Пример

Подбрасываем монетку. Из  $n$  испытаний получили  $m$  орлов. Как оценить вероятность появления орла  $p$ ?

$$L(\theta) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$$

$$\log L(\theta) = \log C_n^m + m \log p + (n - m) \log(1 - p)$$

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial p} = \frac{m}{p} - \frac{n - m}{1 - p} = \frac{m - pm - np + pm}{p(1 - p)} = 0$$

$$p = \frac{m}{n}$$

Просто доля орлов! А в чем тут проблема?

Воспользуемся формулой Байеса.

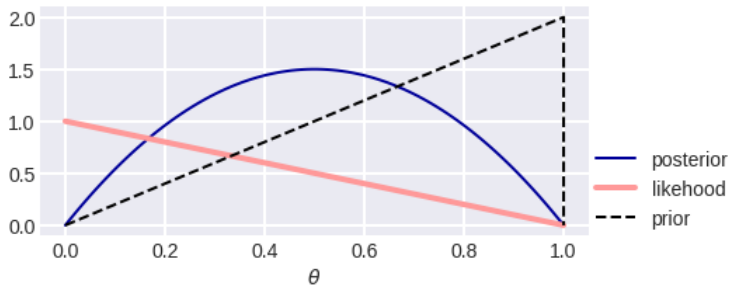
$$p(\theta|X) = \frac{p(X|\theta)p(\theta)}{p(X)}$$

Пусть мы заранее знаем, что монетка чаще выпадает орлом,  $p(\theta) = 2\theta$  Сделали один бросок, увидели решку. Если использовать ММП, то  $L(\theta) = 1 - \theta$ ,  $\theta^* = 0$ . А если байесовский подход?

$$p(\theta|X) = 2\theta(1 - \theta)$$

Это парабола! Где максимум?

# Пример



Источник: [dyakonov.org/2018/07/30/байесовский-подход](http://dyakonov.org/2018/07/30/байесовский-подход)

$$p(x|y, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{(x - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

$$\log L(\theta, y) = \sum_{i=1}^{N_y} \log p(x_i|y, \theta)$$

$$\log L(\theta, y) = -N_y \log \sigma_y - N_y \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{N_y} (x_i - \mu_y)^2$$

$$\frac{\partial \log L(\theta|y)}{\partial \mu_y} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N_y} (x_i - \mu_y) = 0$$

$$\mu_y = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} x_i$$

$$\log L(\theta, y) = -N_y \log \sigma_y - N_y \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{N_y} (x_i - \mu_y)^2$$

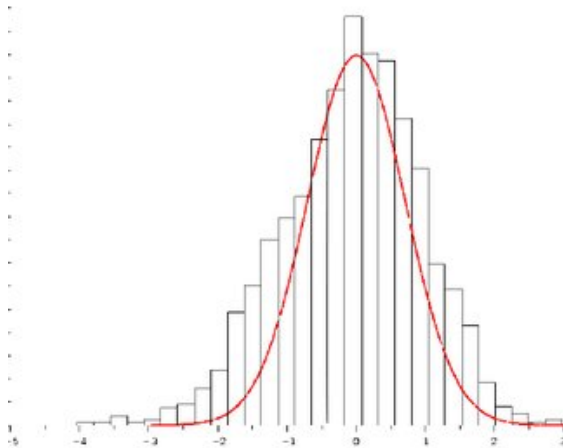
$$\mu_y = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} x_i$$

$$\frac{\partial \log L(\theta, y)}{\partial \sigma_y} = -\frac{N_y}{\sigma_y} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{N_y} (x_i - \mu_y)^2 = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} (x_i - \mu_y)^2 = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} \left( x_i - \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} x_i \right)^2$$

Решение по ММП - выборочное среднее и выборочная дисперсия!

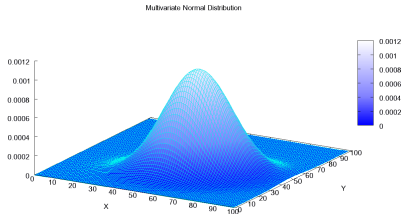
# Пример



# Многомерное нормальное распределение

$$N(x|\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)},$$

$\mu$  - вектор размера  $n$ ,  $\Sigma$  - ковариационная матрица  $n \times n$ , симметричная.



$$\mu_y = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} \mathbf{x}_i, \Sigma = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} (\mathbf{x}_i - \mu_y)^T (\mathbf{x}_i - \mu_y)$$



**ЕМ алгоритм. Понять трудно, но Вы справитесь.**

# Модели со скрытыми переменными

Скрытые переменные – переменные, которые мы не наблюдаем, но которые влияют на внутреннее состояние модели.

- Кластеризация
- Машинный перевод
- Распознавание речи
- Тематическое моделирование
- Все, что сами сможете придумать

ЕМ (Expectation-maximization) – алгоритм, позволяющий находить оценку максимального правдоподобия в задачах со скрытыми переменными.

$Z$  – скрытые переменные. Правдоподобие:

- Неполное  $\log P(X|\Theta)$
- Полное  $\log P(X, Z|\Theta)$

Разумеется,  $\log P(X|\Theta) = \log \int P(X, Z|\Theta) dZ$

$\log P(X|\Theta)$  в сложных задачах, как правило, тяжело максимизировать – не является выпуклой функцией. Скрытые переменные  $Z$  можем подобрать сами, чтобы упростить задачу.

# Дивергенция Кульбака-Лейбера

Часто нужно мерить расстояние между двумя вероятностными распределениями.

$$KL(q||p) = \int q(x) \log \frac{q(x)}{p(x)} dx$$

$$KL(q||p) = - \int q(x) \log p(x) dx + \int q(x) \log q(x) dx$$

$KL$  дивергенция неотрицательна, она обращается в нуль тогда и только тогда, когда  $q = p$ , но при этом не является метрикой (Почему?).

# Вывод EM алгоритма

Хотим максимизировать  $\log P(X|\Theta) \rightarrow \max_{\Theta}$ .

$Z$  – скрытые переменные, имеющие распределение  $q(Z)$ .

$$\begin{aligned}\log P(X|\Theta) &= \int q(Z) \log P(X|\Theta) dZ = \int q(z) \log \frac{P(X, Z|\Theta)}{P(Z|X, \Theta)} dZ = \\ &= \int q(z) \log \frac{P(X, Z|\Theta)q(Z)}{P(Z|X, \Theta)q(Z)} dZ = \\ &= \int q(Z) \log \frac{P(X, Z|\Theta)}{q(Z)} dZ + \int q(Z) \log \frac{q(Z)}{P(Z|X, \Theta)} dZ = \\ &= L(q, \Theta) + KL(q||P) \geq L(q, \Theta)\end{aligned}$$

$$\log P(X|\Theta) = L(q, \Theta) + KL(q||P) \geq L(q, \Theta)$$

Будем максимизировать нижнюю оценку  $L(q, \Theta)$  сначала по  $q$ , потом по  $\Theta$ . Очевидно, что  $L(q, \Theta)$  максимальна, когда  $KL(q, \Theta) = 0$ .

**E шаг:**

$$q^*(Z) = \arg \min_q \int q(Z) \log \frac{q(Z)}{P(Z|X, \Theta^{old})} dZ = P(Z|X, \Theta^{old})$$

**M шаг:**

$$\Theta^{new} = \arg \max_{\Theta} \int q^*(Z) \log \frac{P(X, Z|\Theta)}{q^*(Z)} dZ = \arg \max_{\Theta} \int q^*(Z) \log P(X, Z|\Theta) dZ$$

То есть вместо  $\log P(X|\Theta) \rightarrow \max_{\Theta}$ , на M шаге решаем  $\mathbb{E}_Z \log P(X, Z|\Theta) \rightarrow \max_{\Theta}$



# Пример



| Coin A    | Coin B    |
|-----------|-----------|
|           | 5 H, 5 T  |
| 9 H, 1 T  |           |
| 8 H, 2 T  |           |
|           | 4 H, 6 T  |
| 7 H, 3 T  |           |
| 24 H, 6 T | 9 H, 11 T |

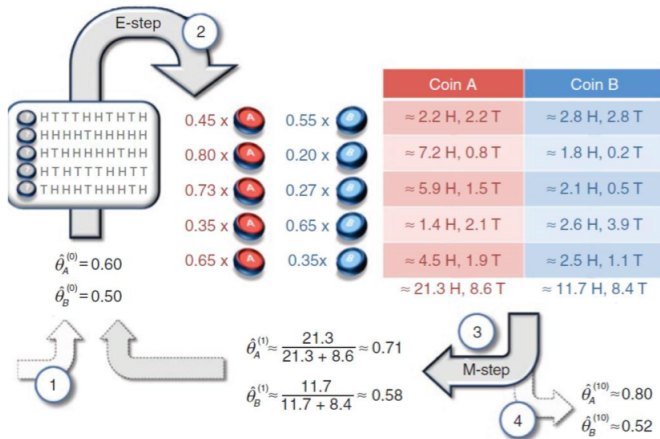
$$\theta_1 = \frac{24}{24 + 6} = 0.8$$

$$\theta_2 = \frac{9}{9 + 11} = 0.45$$

Источник: Adv. Statistical Machine Learning



# Пример



Источник: Adv. Statistical Machine Learning

## Пример

$$\theta_A = 0.6, \theta_B = 0.5$$

$$L(\theta) = C_{10}^9 p^9 (1-p)^{10-9}$$

$$L(\theta_A) = 0.004, L(\theta_B) = 0.001$$

. Для 2 броска вероятней, что это монетка  $A$ ! А как оценить апостериорную вероятность?

$$P(Z|X, \Theta^{old}) = \frac{P(X, \Theta^{old}|Z)P(Z)}{P(X, \Theta^{old})} = \frac{P(X, \Theta^{old}|Z)P(Z)}{\sum_i P(Z_i)P(X, \Theta^{old}|Z_i)}$$

$$P(Z = A|X, \Theta^{old}) = \frac{0.004}{0.004 + 0.001} = 0.8, P(Z = B|X, \Theta^{old}) = \frac{0.001}{0.004 + 0.001} = 0.2$$

Дальше считаем мат.ожидание. Для монетки  $A$  число орлов  $9 * 0.8 = 7.2$ , число решек  $1 * 0.8 = 0.8$ . Для монетки  $B$  число орлов  $9 * 0.2 = 1.8$ , число решек  $1 * 0.2 = 0.2$ .

Дальше считаем  $\theta_A, \theta_B$  не через реальное число бросков, а через их мат.ожидания!

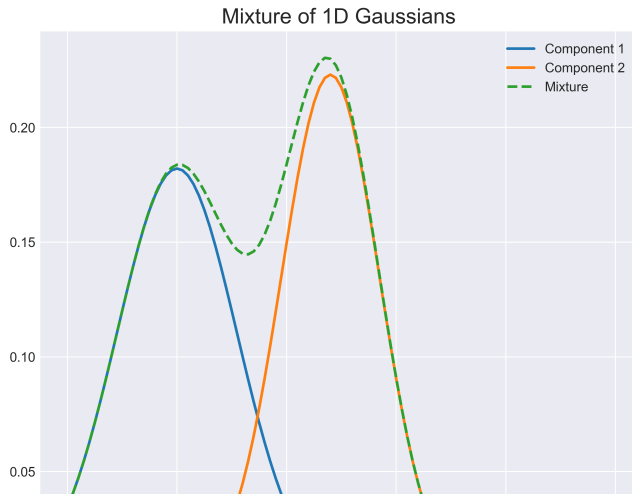
Смесь распределений. Кластеризуем мягко.

Говорят, что  $p(x)$  – смесь распределений, если

$$p(x) = \sum_{k=1}^K \pi_k p_k(x), \sum_{k=1}^K \pi_k = 1, \pi_k \geq 0,$$

где  $K$  – число компонент смеси,  $p_k(x)$  – распределение  $k$  компоненты,  $\pi_k$  – априорная вероятность  $k$  компоненты.

# Смесь нормальных распределений



Пусть нам дана выборка размера  $N$ . Параметризуем  $p_k(x) = \phi(x|\Theta_k)$

$$\log P(X|\Theta) = \log \prod_{i=1}^N p(x_i|\Theta) = \sum_{i=1}^N \log \sum_{k=1}^K \pi_k \phi(x_i|\Theta_k)$$

Введем скрытую переменную, которая будет отвечать за выбор компоненты.

$z$  –  $k$ -мерный вектор, у которого одна компонента равна 1, а остальные равны 0.

$$\log P(X, Z|\Theta) = \log \prod_{i=1}^N p(x_i, Z|\Theta)$$

$$p(x_i, Z|\Theta) = \prod_{k=1}^K [\pi_k \phi(x_i|\Theta_k)]^{z_{i,k}}$$

$$\log P(X, Z|\Theta) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K z_{i,k} (\log \pi_k + \log \phi(x_i|\Theta_k))$$

# Смесь нормальных распределений

Наша смесь:

$$P(X|\Theta) = \prod_{i=1}^N p(x_i|\mu, \Sigma) = \prod_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \pi_k N(x_i|\mu_k, \Sigma_k)$$

**Е шаг:** считаем апостериорное распределение на скрытые переменные

$$p(z_{i,k} = 1|x_i, \Theta^{old}) = \frac{p(z_{i,k} = 1)p(x_i|z_{i,k} = 1, \Theta^{old})}{p(x_i|\Theta^{old})} = \frac{\pi_k^{old} N(x_i|\mu_k^{old}, \Sigma_k^{old})}{\sum_{j=1}^K \pi_j^{old} N(x_i|\mu_j^{old}, \Sigma_j^{old})} = g_{i,k}$$

# Смесь нормальных распределений

Полное правдоподобие:

$$\log P(X, Z | \mu_k, \Sigma_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K z_{i,k} (\log \pi_k + \log N(x_i | \mu_k, \Sigma_k))$$

**М шаг:** максимизируем мат. ожидание логарифма полного правдоподобия

$$\begin{aligned} E_Z \log P(X, Z | \mu_k, \Sigma_k) &= E_Z \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K z_{i,k} (\log \pi_k + \log N(x_i | \mu_k, \Sigma_k)) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K g_{i,k} (\log \pi_k + \log N(x_i | \mu_k, \Sigma_k)) \rightarrow \max_{\mu_k, \Sigma_k, \pi_k} \end{aligned}$$

при условии  $\sum_{k=1}^K \pi_k = 1$ ,



# Смесь нормальных распределений

Можно аналитически найти максимум:

$$\pi_k = \frac{1}{N} \sum_i^N g_{i,k}$$

$$\mu_k = \frac{\sum_i^N g_{i,k} x_i}{\sum_i^N g_{i,k}}$$

$$\Sigma_k = \frac{\sum_i^N g_{i,k} (x_i - \mu_k)(x_i - \mu_k)^T}{\sum_i^N g_{i,k}}$$

$g_{i,k}$  – вес объекта  $i$  в компоненте  $k$  (насколько объект подходит под компоненту)  
априорная вероятность компоненты  $\pi_k$  – средний вес компоненты по выборке  
параметры нормального распределения считаются по тем же формулам, что и в принципе максимума правдоподобия, но взвешены с помощью  $g_{i,k}$ .

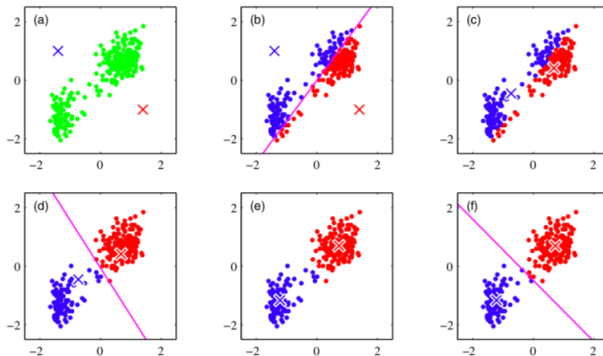
Разделяем смесь нормальных распределений. Пусть  $\Sigma = \sigma^2 I$ , единичная матрица,  $\sigma^2$  стремится к нулю, априорные вероятности кластеров равны.

$$p(z_{i,k} = 1 | x_i, \Theta^{old}) = \frac{\pi_k^{old} N(x_i | \mu_k^{old}, \Sigma_k^{old})}{\sum_{j=1}^K \pi_j^{old} N(x_i | \mu_j^{old}, \Sigma_j^{old})} = \frac{\exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \|x_i - \mu_k\|^2)}{\sum_{j=1}^K \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \|x_i - \mu_j\|^2)} = g_{i,k}$$

Если  $\sigma^2$  стремится к нулю, то  $g_{i,k} = 1$  для самого близкого к объекту  $i$  кластеру и  $g_{i,k} = 0$  для всех остальных кластеров.

Дальше пересчитали единственный параметр:

$$\mu_k^{new} = \frac{\sum_i^N g_{i,k} x_i}{\sum_i^N g_{i,k}}$$



Источник: Bishop

**Спасибо за внимание!**

$$p(x|\theta) = \theta \exp(-x\theta)$$

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^N \log p(x_i|\theta) = N \log \theta - \theta \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{N}{\theta} - \sum_{i=1}^N x_i = 0$$

$$\theta = \frac{N}{\sum_{i=1}^N x_i}$$

$$p(x|\theta) = \frac{\theta^x \exp(-\theta)}{x!}$$

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^N \log p(x_i|\theta) = -N\theta + \sum_{i=1}^N (x_i \ln \theta - \ln x_i!)$$

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} = N - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^N x_i = 0$$

$$\theta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$p(y|\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y - \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{x})^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\log L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \log p(y_i|\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}) = N(-\log \sigma - \frac{1}{2} \log 2\pi) - \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{x}_i)^2}{2\sigma^2}$$

Правильные  $\theta$ , которые минимизируют  $\sum_{i=1}^N (y_i - \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{x}_i)^2$ . Ничего не напоминает?