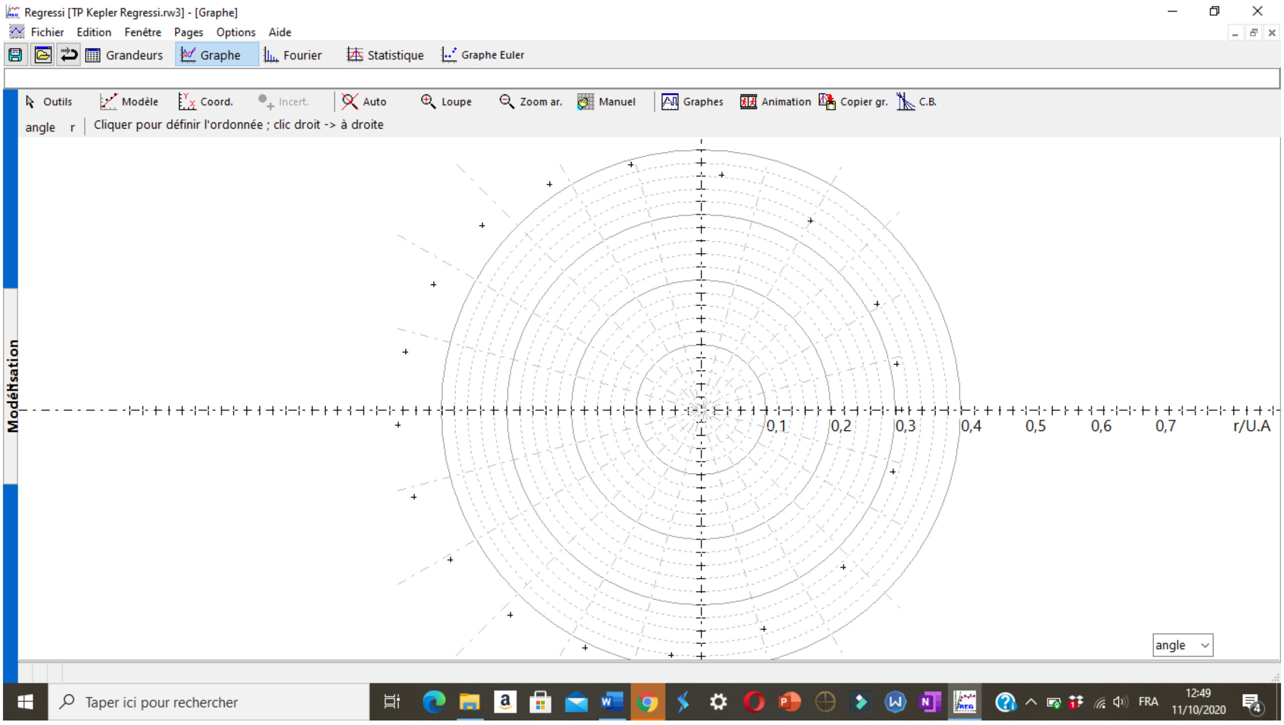
- PICARD Matias
- MUSSARD Olivier

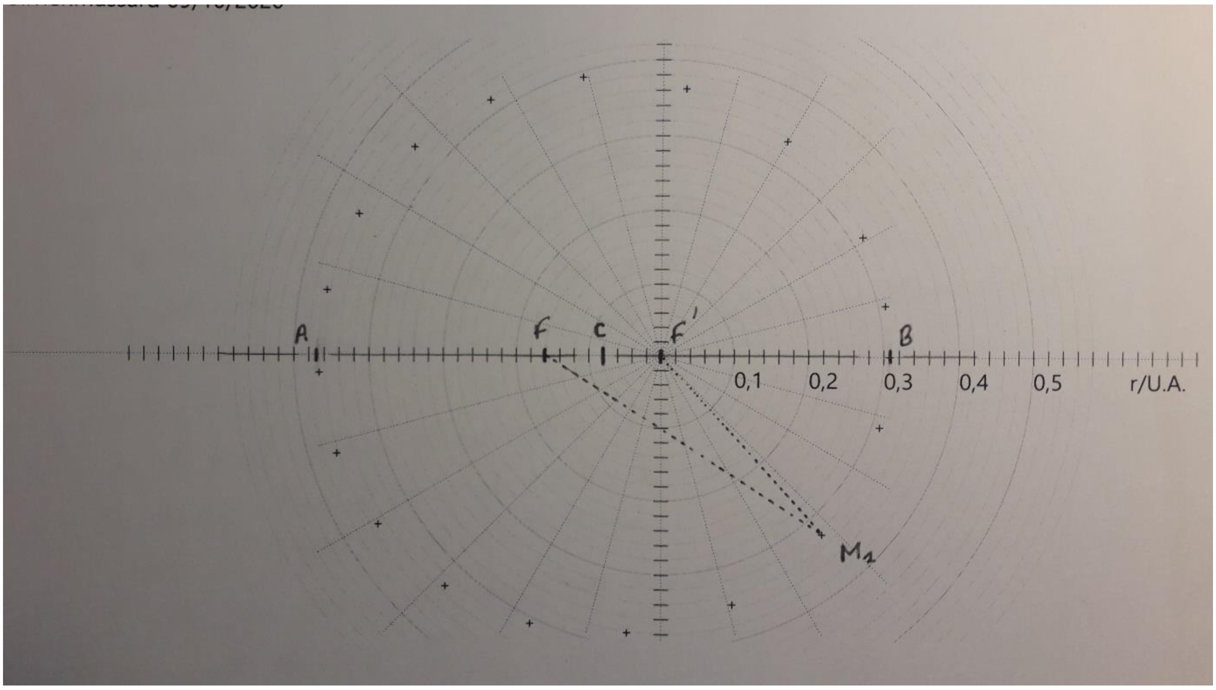
TP – Mercure et Jupiter contre Kepler

1ère Loi – Loi des orbites

1/ On trace la trajectoire de Mercure autour du Soleil :



2/ Sur notre graphe on mesure le grand axe AB de l'orbite de Mercure : 2a = AB = 8,8 cm
On note F' l'origine du repère, position du Soleil, l'un des deux foyer selon la première loi de Kepler.
On note C le centre du grand axe et on mesure CF' = 0,9 cm
Si la trajectoire est une ellipse alors les deux foyer sont équidistants au centre du grand axe, on reporte donc la distance CF' à gauche de C et on note F le second foyer tel que CF = 0,9 cm
On note M un point quelconque de la trajectoire.
On mesure FM = 5,1 cm et F'M = 3,7 cm



Si la trajectoire est une ellipse alors : **FM + F'M = 2a**
Application numérique : FM + F'M = 8,8 cm = 2a

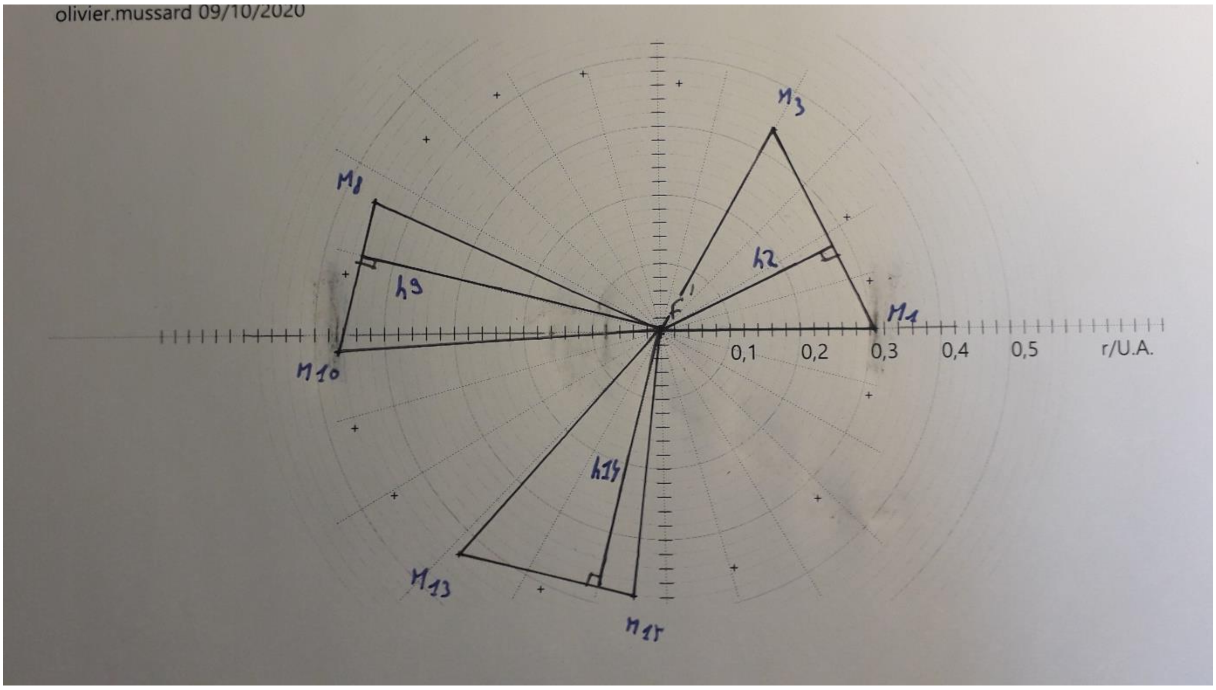
La trajectoire de Mercure est donc elliptique, ***la Loi des orbites est vérifiée pour Mercure.***

2ème Loi – Loi des aires

Le Soleil est notée F' , M1 correspond à la position d'indice 1 de Mercure,

On représente sur le graphe les triangles F'M1M3 ; F'M8M10 et F'M13M15 dont on va déterminer les aires S2 , S9 et S14
L'aire d'un triangle quelconque se calcule de la manière suivante :
S = $\frac{1}{2}bh$

Avec b la base et h la hauteur du triangle
On trace donc les hauteurs des trois triangles h2, h9 et h14



Pour le triangle F'M1M3 , on mesure b = M1M3 = 3,7 cm et h2 = 3,1 cm

S2 = $\frac{1}{2}3{,}7 * 3{,}1 = 5{,}73\ cm^2$

Pour le triangle F'M8M10 , on mesure b = M8M10 = 2,8 cm et h9 = 5,0 cm

S9 = $\frac{1}{2}2{,}8 * 5{,}0 = 6{,}31\ cm^2$

Pour le triangle F'M13M15 , on mesure b = M13M15 =2,9 cm et h14 = 4,3 cm

S14 = $\frac{1}{2}2{,}9 * 4{,}3 = 6{,}23\ cm^2$

On constate que les trois aires calculées sont proche, néanmoins les véritables aires balayées par le segment F'M ne sont pas des triangles car le point M à une trajectoire elliptique et non rectiligne. Par conséquent on doit prendre en compte les incertitudes liées à ces mesures. De plus on remarque que la première aire calculé est plus petite que les deux autres, cette différence peut s'expliquer par le fait que la position 2 est plus proche du Soleil que la position 9 et 14 de ce fait et si on suppose la loi des aires vraie le point M devra progresser plus vite entre les positions 1 et 3 pour balayer le même surface qu'entre les positions 8 et 10 ou 13 et 15 ce faisant elle traversera un arc de cercle plus grand qui ne pourra pas être pris en compte dans le calcul de l'aire à partir d'un triangle.

Calculs d'incertitudes :

L'incertitude se calcule de la manière suivante :

$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta b}{b}$ soit $\boldsymbol{\Delta S = S(\frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta b}{b})}$

Avec Δh = Δb = 0,8 mm = $8{,}0*10^{-2}$ cm

Pour S2 :
S2 = 5,73 cm^2 M1M3 = 3,7 cm h2 = 3,1 cm

$\Delta S = 5{,}73(\frac{8{,}0*10^{-2}}{3{,}1} + \frac{8{,}0*10^{-2}}{3{,}7})$ = 0,27 cm^2

Pour S9 :
S9 = 6,31 cm^2 M8M10 = 2,5 cm h9 = 5,0 cm

$\Delta S = 6{,}31(\frac{8{,}0*10^{-2}}{5{,}0} + \frac{8{,}0*10^{-2}}{2{,}5})$ = 0,30 cm^2

Pour S14 :
S14 = 6 ,23 cm^2 M13M15 = 2,9 cm h14 = 4,3 cm

$\Delta S = 5{,}73(\frac{8{,}0*10^{-2}}{4{,}3} + \frac{8{,}0*10^{-2}}{2{,}9})$ = 0,29 cm^2

On estime selon les résultats obtenus et les incertitudes calculées que les aires des trois triangles sont proches on peut donc dire que **la Loi des Aires est vérifiée pour Mercure.**

3ème Loi – Loi des périodes

1/ On cherche la période de révolution T et la longueur du demi-grand axe a de Mercure et Jupiter ainsi que des 4 satellites Galiléens de Jupiter (Io ; Callisto ; Ganymède et Europe).

Mercure : T_m = 87,969 jours soit 7,6 * 10^6 s a_m = 57 909 050 km soit 5,7 * 10^{10} m
Jupiter : T_j = 4 332,01 jours soit 3,7 * 10^8 s a_j = 778 340 000 km soit 7,8 * 10^{11} m

Io : T_i = 1,769 jours soit 1,5 * 10^5 s a_i = 421 800 km soit 4,2 * 10^8 m
Callisto : T_c = 16,689 jours soit 1,4 * 10^6 s a_c = 1 882 700 km soit 1,9 * 10^9 m
Ganymède : T_g = 7,154 jours soit 6,2 * 10^5 s a_g = 1 070 400 km soit 1,1 * 10^9 m
Europe : T_e = 3,551 jours soit 3,1 * 10^5 s a_e = 671 100 km soit 6,7 * 10^8 m

2/ Selon la troisième loi de Kepler : **$T^2 = k*a^3$**

Pour vérifier la loi des périodes on doit donc calculer le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ et obtenir une constante, on obtiendrait approximativement la même valeur pour Jupiter et Mercure d'une part et pour les satellites Galiléens de Jupiter d'autre part.

Calcul pour Jupiter et Mercure :

Pour vérifier la loi des périodes il faut que : $\frac{T_m^2}{a_m^3} = \frac{T_j^2}{a_j^3}$

Mercure :

$\frac{T_m^2}{a_m^3} = \frac{(7{,}6*10^6)^2}{(5{,}7*10^{10})^3}$ = 3,1*10^{-19}

Jupiter:

$\frac{T_j^2}{a_j^3} = \frac{(3{,}7*10^8)^2}{(7{,}8*10^{11})^3}$ = 2,9*10^{-19}

Les deux valeurs obtenues sont proches, **la loi des périodes est vérifiée pour Mercure et Jupiter**

Calcul pour les Satellites de Jupiter :

Pour vérifier la loi des périodes il faut que : $\boldsymbol{\frac{T_i^2}{a_i^3} = \frac{T_c^2}{a_c^3} = \frac{T_g^2}{a_g^3} = \frac{T_e^2}{a_e^3}}$

Io :

$\frac{T_i^2}{a_i^3} = \frac{(1,5*10^5)^2}{(4,2*10^8)^3}$ = 3,0*10^{-16}

Callisto :

$\frac{T_c^2}{a_c^3} = \frac{(1,4*10^6)^2}{(1,9*10^9)^3}$ = 2,9*10^{-16}

Ganymède :

$\frac{T_g^2}{a_g^3} = \frac{(6,2*10^5)^2}{(1,1*10^9)^3}$ = 2,9*10^{-16}

Europe :

$\frac{T_e^2}{a_e^3} = \frac{(3,1*10^5)^2}{(6,7*10^8)^3}$ = 3,2*10^{-16}

On retrouve approximativement la même valeur, **la Loi des périodes est vérifiée pour les 4 satellites** Galiléens de Jupiter.

Conclusion : Apport de Newton

On souhaite démontrer l'égalité suivante : $\boldsymbol{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G*M}}$ avec M la masse du corps central
Pour parvenir à le démontrer on va s'appuyer sur l'étude d'un système par exemple le système $\{Mercure\}$ dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. On va utiliser le repère de Frenet avec pour origine le centre de masse du système. De plus on supposera l'orbite de Mercure circulaire de rayon a la masse de Mercure sera noté m et celle du Soleil M.

On exploite la seconde loi de Newton :
$\sum \vec{F}$ = m$\vec{a}$

Ici Mercure n'est soumise qu'à la force de gravitation $\overrightarrow{F_G}$
$\overrightarrow{F_G}$ = m$\vec{a}$

Ainsi en prenant comme vecteur unitaire $\vec{n}$ le vecteur normal à la trajectoire du système on a :

G$\frac{m\,M}{a^2}\vec{n}$ = m$\vec{a}_y$ soit en norme : G$\frac{m\,M}{a^2}$ = ma_y $\boldsymbol{G\frac{M}{a^2} = a_y}$

Ici seul la composante en y du vecteur accélération nous intéresse car celle-ci fait intervenir les données nécessaires à la résolution du problème
Dans le repère de Frenet on peut déduire la vitesse de la composante en y du vecteur accélération grâce à la formule suivante :

$a_y = \frac{v^2}{a}$ donc $G\frac{M}{a^2} = \frac{v^2}{a}$ on en déduit l'expression de la vitesse : $\boldsymbol{\sqrt{G\frac{M}{a}} = v}$

Or la période T se calcule par le quotient de la circonférence de l'orbite par la vitesse
Donc :
$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{G\frac{M}{a}}}$

$\frac{2\pi a}{T} = \sqrt{G\frac{M}{a}}$

$\frac{4\pi^2 a^2}{T^2} = \frac{GM}{a}$

$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = GM$

$4\pi^2 a^3 = GMT^2$

$\frac{4\pi^2 a^3}{GM} = T^2$

$$\boldsymbol{\frac{4\pi^2}{GM} = \frac{T^2}{a^3}}$$

Ainsi grâce à cette nouvelle formule on est en mesure d'estimer facilement la distance au Soleil (ou autre point central) ou la période de rotation d'un système selon les données dont nous disposons. Cette formule permet aussi de déduire la masse d'un point central connaissant la période et le demi-grand axe d'un système orbitant autour.