Compléments sur la dérivation

1/ Composée de deux fonctions

Soient deux fonction u(x) et v(x), u est définie sur un intervalle I et v sur un intervalle J qui contient l'intervalle I, on peut former la fonction f(x) = v o u (se lit v rond u) définie sur I
Pour appliquer cette fonction on prend x et on calcule u(x) puis on calcule v(u(x))
Le symbole « o » signifie que l'on compose deux fonction (il faut faire l'une prendre son résultat et faire l'autre)

La dérivée d'une fonction composée est :

f'=(v' o u) * u'

Il s'agit du cas général, on présentera les cas particuliers.

Cas 1 : Dérivée de u^n avec u une fonction et n un entier

f(x) = $u(x)^n$ **f'(x) = $n*u'*u^{n-1}$**

Exemple : g(x) = $(4x+8)^5$ g'(x) = $5*4*(4x+8)^{5-1}$ = $20(4x+8)^4$

Cas 2 : Dérivée de $\frac{1}{u^n}$ avec u une fonction et n un entier naturel (sauf 0)

f(x) = $\frac{1}{u(x)^n}$ **f'(x) = $\frac{-nu'}{u^{n+1}}$**

Exemple : g(x) = $\frac{1}{(5x+3)^5}$ g'(x) = $\frac{-5*5}{(5x+3)^4}$ = $\frac{-25}{(5x+3)^4}$

Cas 3 : Dérivée de $\sqrt{u}$ avec u une fonction

f(x) = $\sqrt{u(x)}$ **f'(x) = $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$**

Exemple : g(x) = $\sqrt{(7x+50)}$ g'(x) = $\frac{7}{2\sqrt{(7x+50)}}$

Cas 4 : Dérivée de e^u avec u une fonction

f(x) = $e^{u(x)}$ **f'(x) = $u'*e^u$**

Exemple : g(x) = e^{-4x+5} g'(x) = $-4*e^{-4x+5}$

L'ensemble des cas possibles sont dans les deux tableaux à la fin du cours de Magoutier
Les dérivées vues en premières sont dans la partie mathématiques première

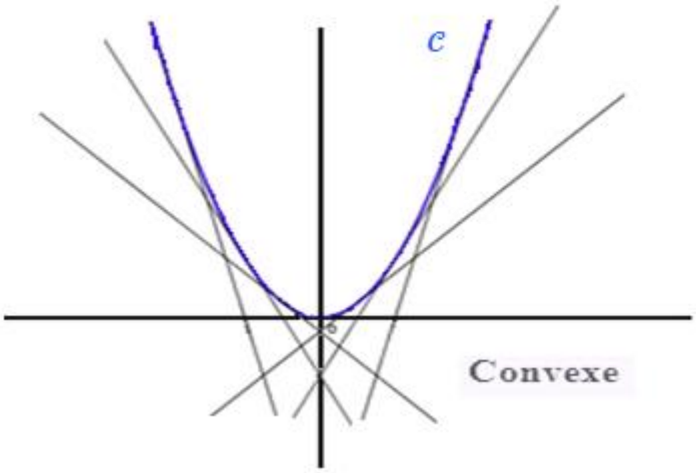
2/Convexité et point d'inflexion

Soit une fonction f et sa dérivée f' si f' est dérivable sur un intervalle I on note f'' sa dérivée : c'est la dérivée seconde de f

A – Fonction convexe

Une fonction est convexe sur un intervalle I si :
Sa courbe représentative est situé au-dessus de ses tangentes sur I
Sa fonction dérivée f' est croissante sur I
Sa dérivée seconde f'' est positive sur I

Représentation d'une fonction convexe sur R :

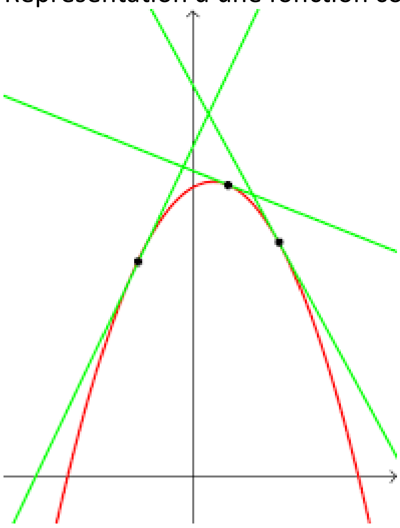


La représentation est situé au-dessus des tangentes

B- Fonction concave

Une fonction est concave sur un intervalle I si :
Sa courbe représentative est situé au-dessous de ses tangentes sur I
Sa fonction dérivée f' est décroissante sur I
Sa dérivée seconde f'' est négative sur I

Représentation d'une fonction concave sur R :



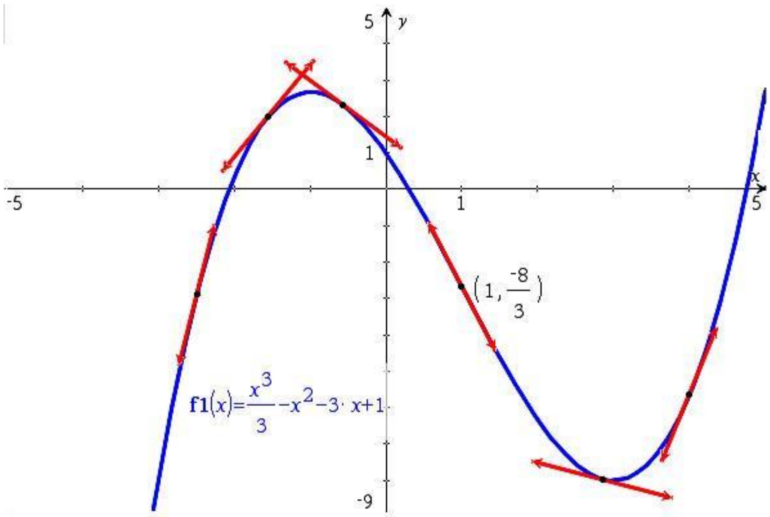
La représentation est situé au-dessous des tangentes

C- Point d'inflexion

Un point d'inflexion est un point de la représentation ou la convexité d'une fonction change

On a un point d'inflexion si :

La tangente à ce point traverse la représentation graphique
La dérivée f' change de variation à ce point
La dérivée seconde f'' change de signe à ce point



La fonction est concave sur]-∞ ; 1]
On a un point d'inflexion A (1, $\frac{-8}{3}$)
La fonction est convexe sur [1 ; +∞[