Successions d'épreuves indépendantes – Schéma de Bernoulli

Pour les rappels de première se référer au cours dans mathématiques première

1/ Succession d'épreuves indépendantes

Prenons une urne avec 8 boules, 4 rouges et 4 vertes, on effectue 2 tirage

Cas 1 : sans remise
On tire la première boule : elle est verte, on ne la remet pas dans l'urne puis on tire la deuxième

Lors du premier tirage la probabilité de tirer une boule rouge était de 4/8 de même que la probabilité de tirer une boule verte était de 4/8
Lors du deuxième tirage il ne reste que 7 boule dans l'urne 4 rouges et 3 verte, j'ai donc une probabilité de 4/7 de tirer une boule rouge et 3/7 sur une boule verte
Mon premier tirage influe sur le second : les deux épreuves sont dépendantes

Cas 2 : avec remise
On tire la première boule : elle est rouge, on la remet dans l'urne puis on tire la deuxième

Ici lors du deuxième tirage étant donné que j'ai remis la boule dans l'urne j'ai exactement les même probabilités que pour le premier tirage
Mon premier tirage n'influe pas sur le second : les deux épreuves sont indépendantes

Donc deux épreuves successives sont indépendante lorsque le résultat de la première n'influe pas sur le résultat de la seconde

2/ Epreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire possédant 2 issues
Une issue est un Succès l'autre un Echec
La probabilité du succès est notée p donc la probabilité de l'échec vaut 1-p

On peut associer une seule épreuve de Bernoulli à une variable aléatoire X qui associe un Succès à la valeur 1 et un échec à la valeur 0
On a donc $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$

On peut alors établir la loi de probabilité suivante :

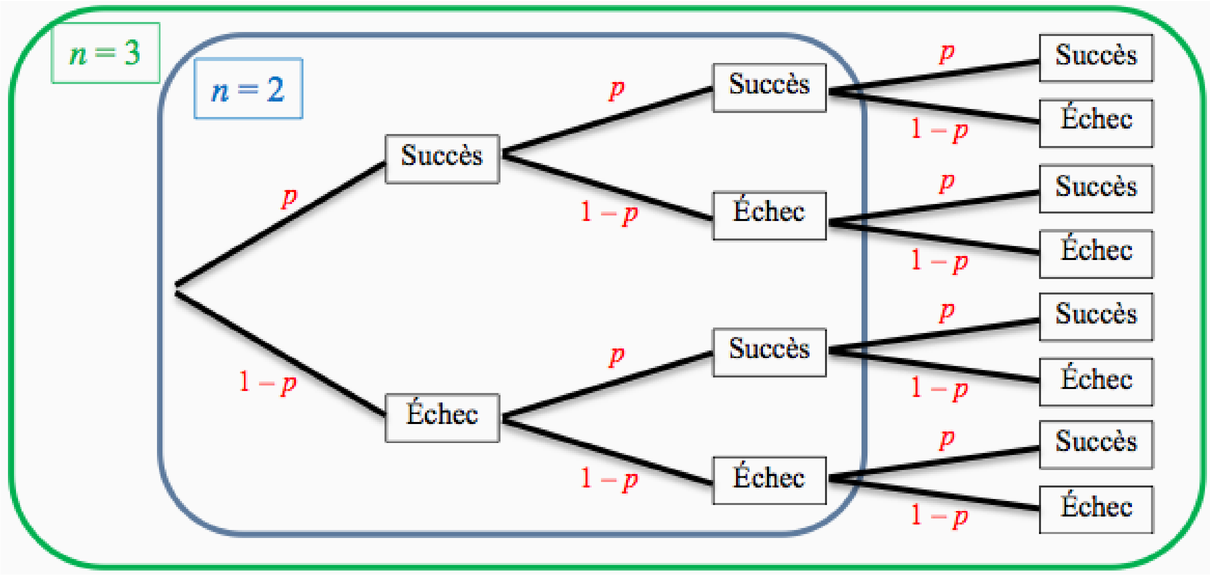
xi	1	0
P(X=xi)	p	1-p

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p
On peut alors calculer l'espérance : **$E(X) = p$**
L'espérance est une moyenne : en moyenne la probabilité d'un succès est égale à p
La Variance : **$V(X) = p(1-p)$**
La Variance sert à montrer si les variations des différents valeurs (ici on n'a que 0 ou 1) est grande plus la variance est élevés plus les écarts des valeurs entre elles est grand
L'écart-type : **$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$**
L'écart-type correspond à l'écart des différentes valeur par rapport à la moyenne, plus l'écart-type est grand plus les différentes valeurs sont éloignés de la moyenne. En général si la variance est grande l'écart-type sera grand.

3/ Schéma de Bernoulli

Un Schéma de Bernoulli est la répétition n fois d' épreuves Bernoulli identiques et indépendantes
Chaque épreuve à deux issues (Succès et Echec) avec la probabilité de Succès noté p
On parle donc de Schéma de Bernoulli de paramètres n et p

Ici n = 3 :



Ici on peut obtenir soit 0 soit 1 soit 2 soit 3 succès

Donc le nombre de succès est compris entre 0 et n
On note k le nombre de succès avec k un nombre entier compris entre 0 et n. La probabilité d'obtenir k succès parmi les n épreuves identiques et indépendantes est :

$$\binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ se lit k parmi n c'est un coefficient binomial (cf dénombrements)

Si l'on associe un schéma de Bernoulli à une variable aléatoire Y , qui compte le nombre de succès alors on dit que Y suit une loi binomiale de paramètres n et p
On note : **Y~B(n,p)**

<u>Phrase à connaître (à adapter au contexte de l'exercice) :</u>
L'expérience qui consiste qui consiste à …… et à dénombrer le nombre de succès est assimilable à ***n*** *répétitions* ***identiques et indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli.*** *Le succès est l'évènement S : « …… » la probabilité de succès est* ***p***
Donc ***Y~B(n,p)***

On a P(Y = k) = $\binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$
P(Y≤ k) s'obtient à la calculatrice
P(Y≥k) = 1 – P(Y≤k-1)
P(a≤ Y ≤b) = P(Y≤b) – P(Y≤a-1)

On peut ensuite calculer :

L'espérance : E(X) = n*p
La Variance : V(X) = n*p(1-p)
L'écart-type : σ(X) = $\sqrt{V(X)}$

Lorsque les paramètre n et p sont assez grand les calculs peuvent directement être effectués à la calculatrice