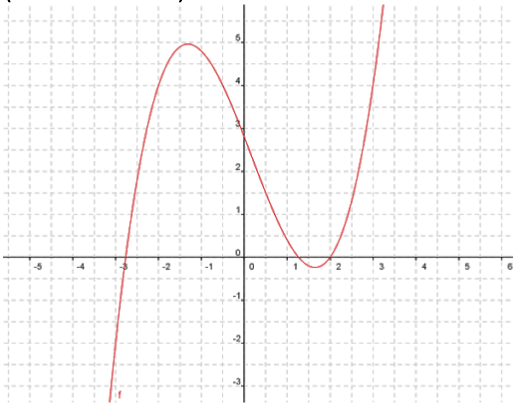
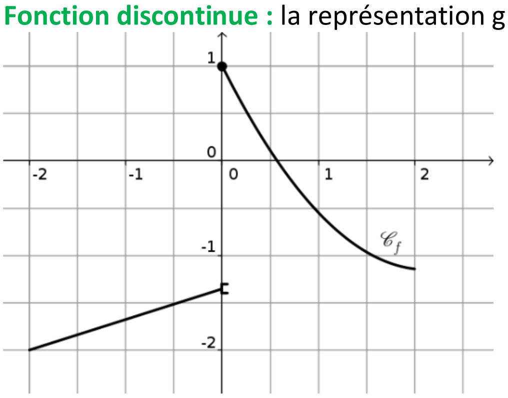
Logarithme népérien

1/ Continuité de fonction

Fonction continue : on peut tracer sa représentation graphique sans lever notre main de la feuille (d'un seul trait)



Fonction discontinue : la représentation graphique ne se fait pas d'un seul trait



Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant une valeur x0

La fonction f est continue à gauche de x0 si la limite de f lorsque x tend vers x0 par la gauche (donc par les valeurs négatives) est égale à f(x0)
Autrement dit : $\lim_{x \to x0^-} f(x) = f(x0)$

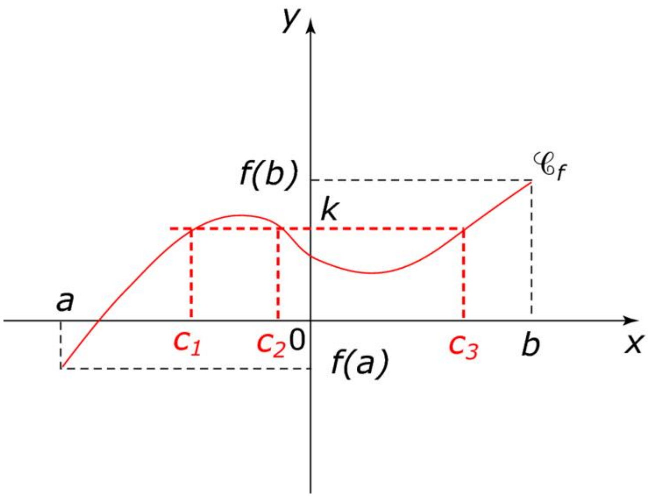
La fonction f est continue à droite de x0 si la limite de f lorsque x tend vers x0 par la droite (donc par les valeurs positives) est égale à f(x0)
Autrement dit : $\lim_{x \to x0^+} f(x) = f(x0)$

La fonction f est continue sur x0 si les limites de f(x) à gauche et à droite de x0 sont égale à f(x0) :
$\lim_{x \to x0^-} f(x) = \lim_{x \to x0^+} f(x) = f(x0)$

Les fonctions polynôme et rationnelles sont continues sur les intervalles ou elles sont définies
Les sommes, produits et puissances de fonction continues sont continues
Les fonctions dérivables sur un Intervalle sont continues sur cet intervalle

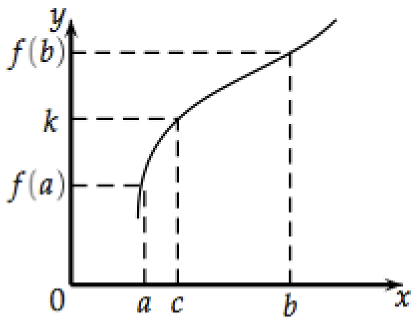
2/ Théorème des Valeurs intermédiaires

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle [a ;b], pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que f(c) = k



Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

Si une fonction f est définie, continue **et <u>strictement</u> monotone** (strictement croissante ou décroissante) sur un intervalle [a ;b] alors pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) **il existe un et un seul c compris entre a et b tel que f(c) = k**



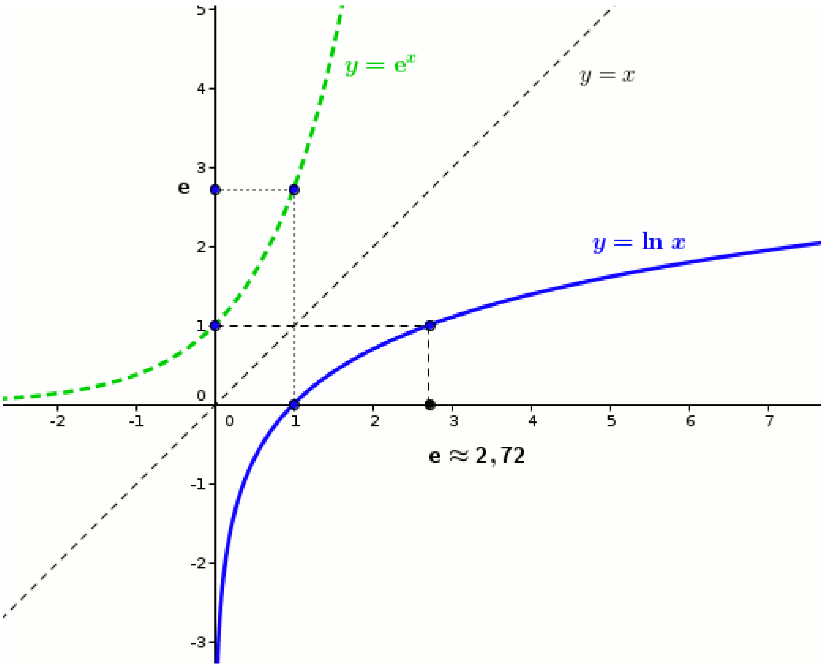
Pour appliquer le Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires les conditions suivantes doivent être réunies :
Sur un intervalle I :
La fonction f doit être continue sur I
La fonction f doit être strictement monotone sur I

Si ces deux conditions sont réunies on étudie les bornes de l'intervalle :
Si l'intervalle à deux bornes réelles a et b, on calcule f(a) et f(b) et on voit si le k qu'on cherche est compris dedans
Si l'intervalle possède une borne de type $\pm\infty$ *il faut alors calculer la limite de la fonction en + ou en -∞. Ainsi pour l'intervalle]-∞ ; a] il faut voir si le k qu'on cherche est compris entre* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *et f(b)*
Si le k que l'on cherche est compris entre les bornes de l'intervalle alors on peut affirmer grâce au corolaire qu'il existe un unique c tel que f(c) = k

3/ Logarithme népérien

La fonction logarithme népérien ln(x) permet « d'annuler » la fonction exponentielle tout comme la racine carré « annule » le carré.
Donc $e^{\ln a} = a$ et $\ln(e^a) = a$
De même : $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$

On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle
Représentation graphique :



Propriétés algébriques de ln :

ln(ab) = ln a + ln b

$\ln(\frac{1}{b})$ = -ln b

$\ln(\frac{a}{b})$ = ln a – ln b

$\ln(a^n)$ = n* ln a

$\ln(\sqrt{a})$ = $\frac{1}{2}$ ln a

Propriétés de la fonction ln :

La fonction ln est continue sur]0 ; +∞[
La fonction ln est dérivable sur]0 ; +∞[et **ln'x = $\frac{1}{x}$**
La fonction ln est strictement croissante sur]0 ;+∞[

ln a = ln b ⇔ a = b **ln a < ln b ⇔ a < b**

Tableau de signes :

x	0	1	+∞

0

ln x			-	+

Limites de la fonction ln :

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Croissances comparées (la fonction ln est négligeable comparé à une fonction puissance :

$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$