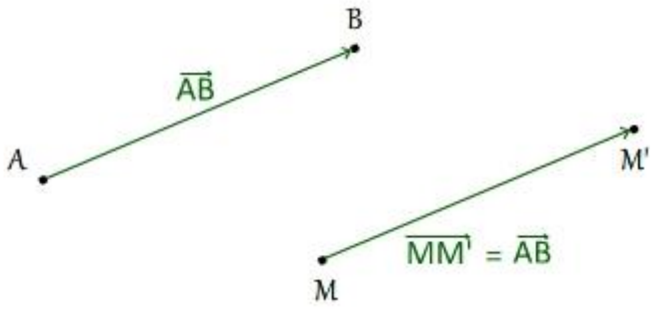
Vecteurs et géométrie dans l'espace

1/ Généralités sur les vecteurs

Définition :

Un vecteur est défini par deux point, A et B donne le vecteur $\overrightarrow{AB}$
Ce vecteur a une direction (la droite (AB))
Un sens (de A vers B)
Et une longueur ou norme (la longueur AB notée aussi $\|\overrightarrow{AB}\|$)
La translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans l'espace donne des vecteurs images de $\overrightarrow{AB}$ de même longueur même direction et même sens

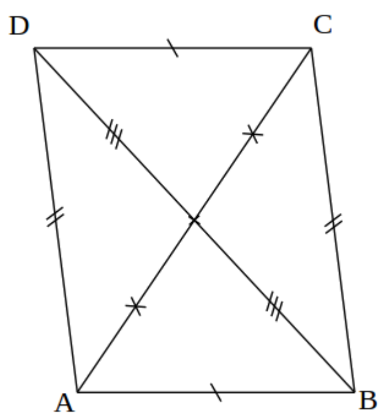


Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur image du vecteur $\overrightarrow{AB}$ on a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$

Vecteur nul :

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ n'a pas de longueur, lorsqu'on fait la translation de $\overrightarrow{AA}$ on obtient un point
Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ correspond à un non-déplacement c'est le vecteur nul :
$\overrightarrow{AA}= \vec{0}$

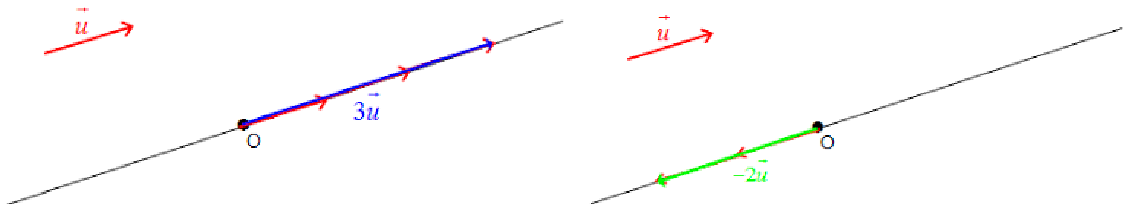
Dans un parallélogramme :



Dans un parallélogramme ABCD les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux de même les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont égaux

Multiplier un vecteur par un réel :
On prend le vecteur $\vec{u}$ et x un réel :
Si x > 0 alors x*$\vec{u}$ est du même sens que $\vec{u}$

Si x < 0 alors x*$\vec{u}$ est de sens opposé à $\vec{u}$



Vecteurs opposés :

Le vecteur -$\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{BA}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés

Vecteurs colinéaires :

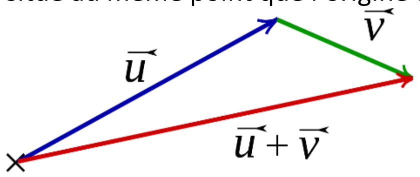
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel x (non nul) tel que $\boldsymbol{\vec{u}}$ **= x**$\boldsymbol{\vec{v}}$

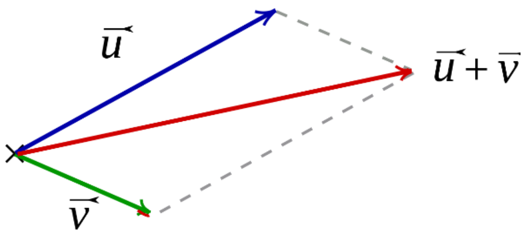
Points alignés :

Trois points A, B et C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Somme de vecteurs :

Pour additionner deux vecteurs il faut s'arranger (translation) pour que l'extrémité du premier soit situé au même point que l'origine du seconde soit :

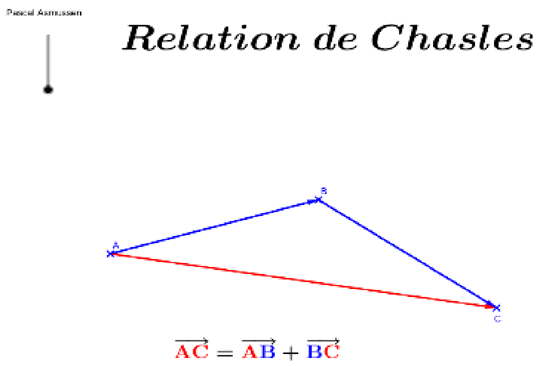




Ici on a procédé à la translation du vecteur $\vec{v}$ afin d'avoir son origine sur le même point que l'extrémité du vecteur $\vec{u}$ on a pu en déduire le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$

Relation de Chasles :

Soient A et B deux points et pour tout point M : $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}}$



Distributivité du calcul vectoriel :

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et deux réels non nul x et y :

x($\vec{u}$ + $\vec{v}$) = x$\vec{u}$ + x$\vec{v}$ (x+y) $\vec{u}$ = x$\vec{u}$ + y$\vec{u}$

2/ Le Plan

Définition :

Avec trois point A, B et C on a deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ engendre un plan le couple ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est appelé couple directeur du plan (ABC)

On dit que (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est un repère du plan (ABC) (Car A est l'origine du repère)

Ce plan est l'ensemble des point M tel que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ + $y\overrightarrow{AC}$ (avec x et y des réels)

De manière générale un plan est un ensemble de point engendré par deux vecteurs non colinéaires

Coplanarité :

Coplanaire = qui appartiennent au même plan

Des points sont coplanaires s'ils appartiennent au même plan

Trois vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires si $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ + $y\overrightarrow{AC}$ (avec x et y des réels)

3/ L'espace

Définition :

Les points A, B et C sont non alignés ; ils engendre le plan (ABC)

Soit un point D n'appartenant pas au plan (ABC)

Les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ engendre l'espace à 3 dimensions ,($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$) est une base de l'espace

(A; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$) est un repère de l'espace

L'espace est l'ensemble des points M tel que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ + $y\overrightarrow{AC}$ + z$\overrightarrow{AD}$ (avec x, y et z des réels)

4/ Démonstrations vectorielles

Démontrer que 3 points sont alignés avec le calcul vectoriel :

Pour démontrer que 3 points sont alignés il faut démontrer que leurs vecteurs sont colinéaires

Qu'il s'agisse du cube, du parallélépipède ou du tétraèdre la technique est la même :

- Placer les points demandés selon les expressions vectorielles donnés
- Reprendre les expressions vectorielles données et utiliser la relation de Chasles pour les écrire en fonction des vecteurs de base de l'espace (souvent $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$)
- Trouver une correspondance (facteur multiplicatif) entre les nouvelles expression obtenues

Pour l'exemple : https://www.youtube.com/watch?v=i4jDkJNtzZg (Yvan Monka)

Démontrer une coplanarité avec le calcul vectoriel :

Quatre points A,B,C et D sont coplanaires si :
Trois d'entre eux sont alignés
Ou bien il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

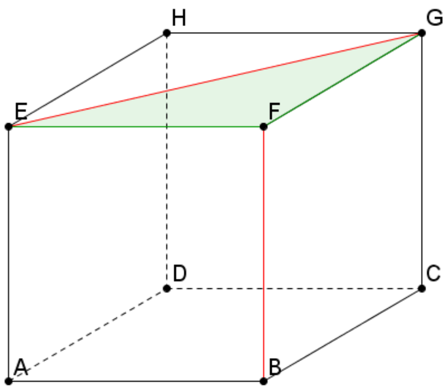
Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si :
Deux d'entre eux sont colinéaires
Ou bien il existe deux réels x et y tels que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$

Pour l'exemple : se référer à celui du cours p 9 (je n'ai pas pu trouver mieux)

5/Position relative de plans et de droites

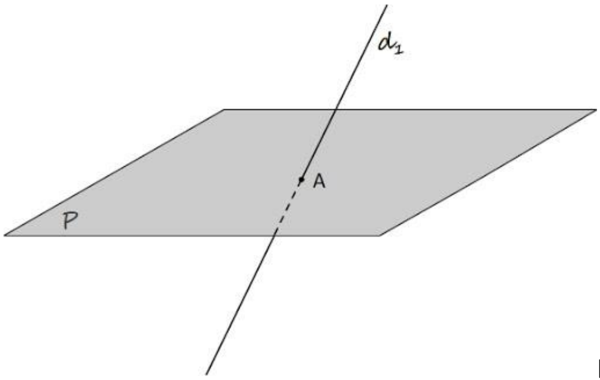
a- Position relative d'une droite et d'un plan

Une droite peut être incluse dans un plan,
Dans ce cas tout les points d'une droite (d) appartiennent à un plan (P)



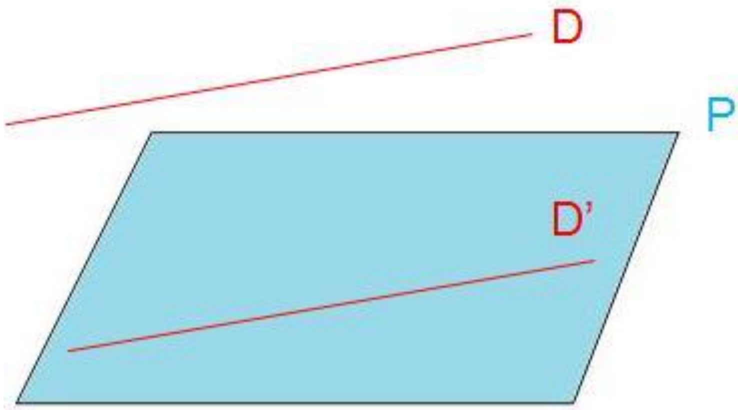
La droite (EG) est incluse dans le plan (FEG)

Une droite peut avoir un unique point d'intersection avec un plan on dit qu'ils sont sécants



La droite (d1) coupe le plan (P) en A

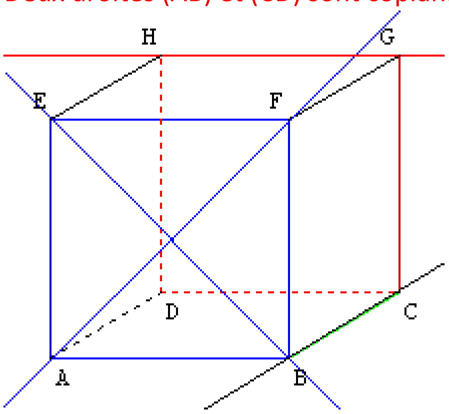
Une droite peut être strictement parallèle à un plan dans ce cas il faut qu'il y ait une droite (d') incluse dans un plan (P) parallèle à une droite (d)



La droite (D) est parallèle à (D') et donc au plan (P)

b- Position relative de deux droites

Deux droites peuvent être coplanaires
Deux droites (AB) et (CD) sont coplanaires si A,B,C et D sont coplanaires
Deux droites (AB) et (CD) sont coplanaires si elles sont sécantes ou parallèles



Les droites (EB) et (FA) appartiennent au plan (ABE) : elles sont coplanaires

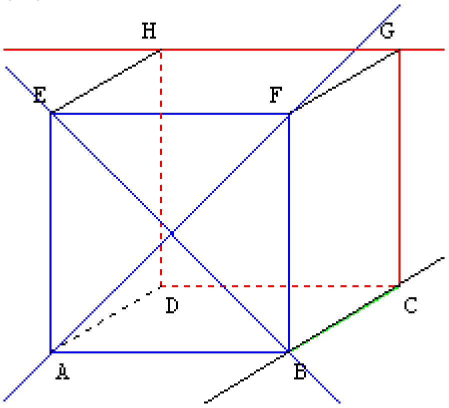
Démontrer que 2 droites sont parallèles revient à démontrer que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires

Remarque : des droites parallèles sont soit strictement parallèles soit confondues, pour montrer qu'elle sont confondues (ou pas) il faut montrer qu'en étant parallèle qu'elle ont (ou qu'elle n'ont pas) un point en commun on utiliserait alors la représentation paramétrique de droite.

Des droites non-coplanaires ne sont ni parallèles ni sécantes

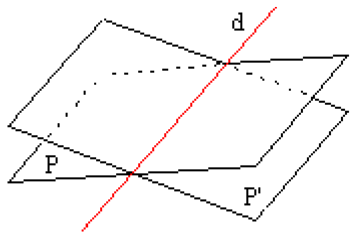
c- Position relative de deux plans

Deux plans peuvent être parallèles,
Si les plans (P) et (P') alors deux droites sécantes du plan (P) sont parallèles à deux droites sécantes (P')



Les droites (EF) et (BF) sont sécantes et appartiennent au plan (ABE) , elles sont parallèles aux droites (HG) et (CG) qui appartiennent au plan (DCH), les plans (ABE) et (DCH) sont donc parallèles

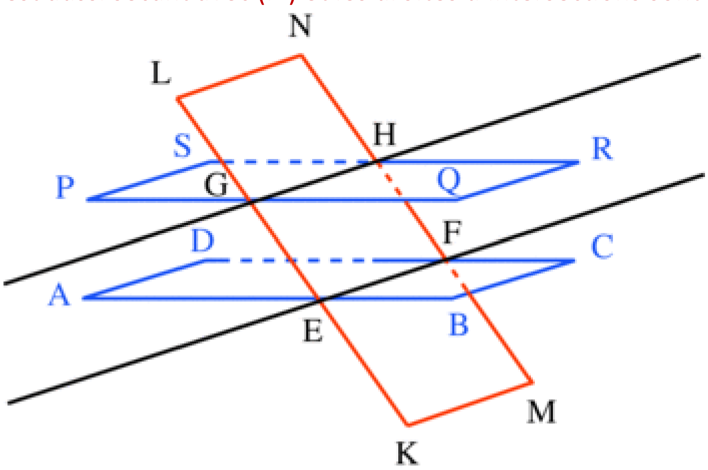
Deux plans peuvent être sécants, dans ce cas leur intersection est obligatoirement <u>une droite</u>,



Les plans (P) et (P') sont sécant en (d)

Théorème de l'étagère :

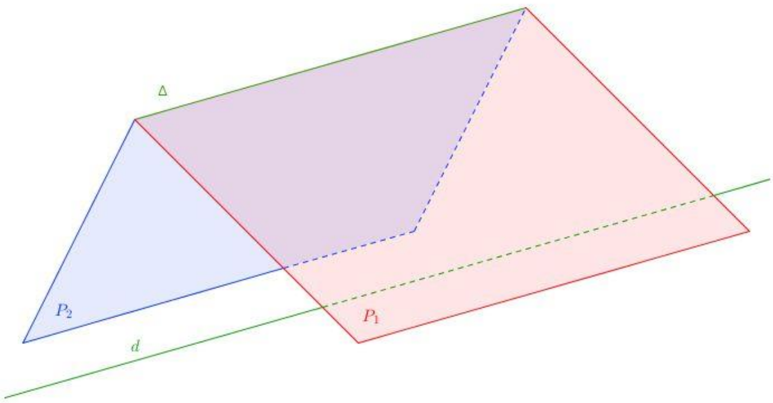
Soient deux plans (P) et (P') parallèles. On suppose que le plan (L) est sécant avec le plan (P) alors (L) est aussi sécant avec (P') et les droites d'intersections sont parallèles



Les plans (PQS) et (ABD) sont parallèles, le plan (LKN) est sécant à (ABD) et donc à (PQS)
De même les droites d'intersections (EF) et (GH) sont parallèles

Théorème du toit :

<u>Théorème 3</u> : Soit deux plans P_1 et P_2 sécants suivant une droite Δ et une droite d parallèle à P_1 et à P_2, alors d est parallèle à Δ.



6/ Déterminer graphiquement des intersections

Ici on ne peut que se référer à l'exemple du cours p16
Sachant que chaque section est différente selon la position des points
(La plupart du temps en devoir le tracé de la section est guidée par les questions précédentes)
Néanmoins on peut proposer un exemple : https://www.youtube.com/watch?v=DZOqmxMFplM

7/Coordonnées dans un repère de l'espace

Tout point tout vecteur à 3 coordonnées dans l'espace :
Le point M (x,y,z)
Le vecteur $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$
Remarque : les coordonnées d'un point ou d'un vecteur dépendent du repère choisi

Opération sur les coordonnées de vecteurs :

Si on multiplie le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ par un réel k , k$\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$

Soit le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$

Opération sur les coordonnées de points :
Soient les points A (xa, ya, za) et B (xb, yb, zb)
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ *sont* $\begin{pmatrix}xb-xa\\yb-ya\\zb-za\end{pmatrix}$

8/ Représentations paramétriques de droite

On considère une droite (d) passant par un point **A (xa, ya, za)** et dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Si le point M (x,y,z) appartient à la droite d alors ces coordonnées doivent vérifier ces trois égalités :

$$\begin{cases} x = xa + ta \\ y = ya + tb \quad avec\ t \in R \\ z = za + tc \end{cases}$$

Il s'agit d'une représentation paramétrique de la droite d, le paramètre est un réel t

Donc pour faire une représentation paramétrique de droite il faut :

- Trouver un vecteur directeur de cette droite
- Trouver un point qui appartient à la droite

Exemple : On a les points A(-1 ;1 ;3) et B(5 ;-2 ;-3) et on demande une représentation paramétrique de la droite (AB)

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est directeur de la droite (AB) on calcule ses coordonnées : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-(-1) \\ -2-1 \\ -3-3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

On peut alors faire une première représentation paramétrique en prenant le point A appartenant à (AB) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 6t} \\ \boldsymbol{y = 1 - 3t} \quad \boldsymbol{t \in R} \\ \boldsymbol{z = 3 - 6t} \end{cases}$$

On peut en faire une autre en s'appuyant sur le point B :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 5 + 6t} \\ \boldsymbol{y = -2 - 3t} \quad \boldsymbol{t \in R} \\ \boldsymbol{z = -3 - 6t} \end{cases}$$

On remarque que 1/3 $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ce vecteur est aussi directeur de (AB)

(n'importe quel multiplication de $\overrightarrow{AB}$ est directeur de la droite (AB))

On peut donc écrire une troisième représentation paramétrique :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 5 + 2t} \\ \boldsymbol{y = -2 - t} \quad \boldsymbol{t \in R} \\ \boldsymbol{z = -3 - 2t} \end{cases}$$