Exercices pour la rentrée

CPES Paris-Saclay
Année 2025–2026

Ce livret est destiné à vous préparer à reprendre les mathématiques de manière sérieuse, efficace et sereine pour la rentrée en CPES. Il n'y aura pas de test spécifique dessus à la rentrée, mais il sera attendu que vous maîtrisiez les techniques et les méthodes abordées dans ce livret.

Il est conseillé de commencer à travailler les exercices de ce livret à partir de mi-août, à raison d'un chapitre tous les 2-3 jours (faire plusieurs chapitres en une seule journée est inefficace).

Ce livret est repris du livret d'exercices pour la rentrée distribué au lycée Saint-Louis.

1 Calcul algébrique

Exercices d'échauffement

Exercice 1.1

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $a \neq b$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a}.$$

Exercice 1.2

Pour rappel, pour $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+$, on a :
$(|x| < a \iff -a < x < a)$ et $(|x| > a \iff (x < -a)$ ou $x > a)$.
Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $2x + 4 \leqslant 3$,
2. $3 - 2x > 5$,
3. $|2x - 5| < 13$,
4. $|3 - 4x| \geqslant 17$.

Exercice 1.3

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + 2mx + 1 = 0.$$

Exercice 1.4

Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$2xy \leqslant x^2 + y^2.$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

Exercice 1.5

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{7}{6}\}$:

$$\frac{3x-5}{6x+7} \geqslant -\frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \left(\frac{3x+1}{6x-3}\right)^2 \leqslant 16$$

Exercices à préparer

Exercice 1.6

On considère l'équation (E_1) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0 \qquad (E_1)$$

1. Montrer que 1 est solution de (E_1).
2. Trouver la valeur de trois réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

3. Résoudre l'équation (E_1).
4. Soit r une racine de (E_1). On pose $f : x \mapsto e^{rx}$, définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

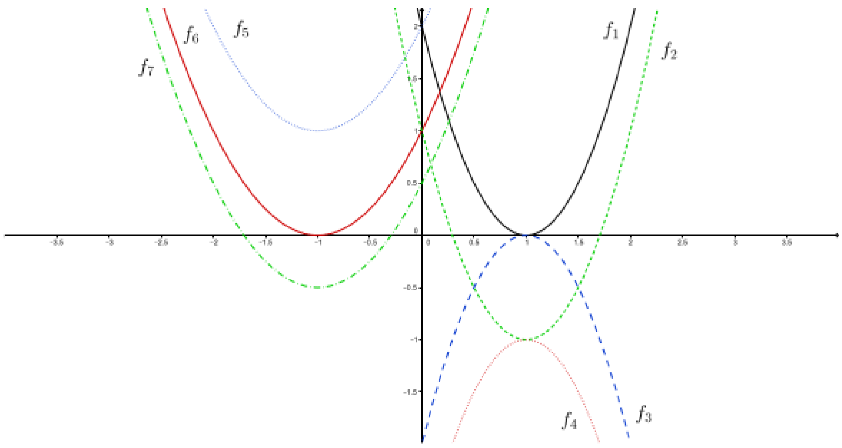
$$f'''(x) - 8f''(x) + 17f'(x) - 10f(x) = 0$$

Exercice 1.7

Soit a, b, c trois réels, et soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$$

1. Montrer que la courbe représentative de f admet un extremum (c'est-à-dire un minimum ou un maximum) global au point d'abscisse $x = -\dfrac{b}{2a}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en fonction de a.
3. On considère les courbes suivantes :



Déterminer, en justifiant la réponse, les courbes qui correspondent aux valeurs :

(a) $a = 2, b = -4, c = 2$,
(b) $a = -2, b = 4, c = -2$,
(c) $a = 1, b = 2, c = 1$,
(d) $a = 1, b = 2, c = 2$,
(e) $a = 1, b = 2, c = \frac{1}{2}$.

2 Fonctions usuelles et suites

Exercices d'échauffement

Exercice 2.1

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de e^x et e^y les quantités suivantes :

$$A = e^{2x-y}, \quad B = \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}}, \quad C = \frac{e^{3x}+e^{y-x}}{e^{x+y}+e^{2y-3x}}$$

Exercice 2.2

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer en fonction de $\ln(x)$ et $\ln(y)$ les quantités suivantes :

$$D = \ln(x^2y^5), \quad E = \ln\left(-\sqrt{x} + e^{\ln(y+\sqrt{x})}\right), \quad F = \frac{\ln(y^2e^{\ln x})}{2+\ln\left(\frac{x}{e^2}\right)} \quad (x \neq 1)$$

Exercice 2.3

Dire pour quelles valeurs de x les expressions suivantes ont du sens et les simplifier :

$$G = \ln\left(\sqrt[3]{e^x}\right), \quad H = \ln\left((e^x+e^{-x})^2 - e^x(e^x+e^{-3x})\right), \quad I = e^{-\ln(2x^4)}$$

Exercice 2.4

Simplifier, sans utiliser la calculatrice, les expressions suivantes :

$$J = \frac{6^{10}}{27 \cdot 3^8}, \quad K = \left(\sqrt{2}\right)^7, \quad L = \frac{9^5}{3^8}$$

Exercice 2.5

Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^*$. Simplifier les expressions suivantes :

$$M = x^5 \cdot (2x)^3, \quad N = \frac{(xy)^9}{y^7}, \quad O = \frac{y^9+(-y)^{14}}{y^7+y^{12}}, P = \frac{(y^2)^{10}}{(y^3)^6}$$

Exercice 2.6

On considère les suites suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.7

On considère les suites suivantes :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{1+e^n}$$

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{1}{n+2}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes.

Exercices à préparer

Exercice 2.8

Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut montrer les résultats connus suivants :

a) si $|x| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$,

b) si $x > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = +\infty$,

c) si $x = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 1$,

d) si $x \leqslant -1$, alors la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

1. Montrer que si $x = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 1$.
2. Montrer que si $x = -1$, la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
3. On suppose dans cette question que $|x| < 1$.
   (a) Montrer que la suite $(|x^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Montrer que la suite $(|x^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.
   (c) En déduire que la suite $(|x^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
   On pose $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} x^n$.
   (d) Supposons que $\ell \neq 0$: aboutir à une contradiction.
   (e) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$.
4. On suppose dans cette question que $|x| > 1$.
   (a) Montrer que la suite $(|x^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) On suppose dans cette sous-question que $x > 1$.
      i. Étudier la fonction $f_n : x \mapsto x^n - n(x-1) - 1$ définie sur $[1, +\infty[$.
      ii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, x^n \geqslant n(x-1) + 1$.
      iii. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = +\infty$.
   (c) On suppose dans cette sous-question que $x < -1$.
      i. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |x^n| = +\infty$.
      ii. En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

3 Dérivées et intégrales

Exercices d'échauffement

Exercice 3.1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto 2x^3 + 2$
2. $f_2 : x \mapsto e^{3x+3}$
3. $f_3 : t \mapsto e^{\cos(2t+1)}$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{e^x + \ln(x)}$
6. $f_6 : t \mapsto x^t$
7. $f_7 : t \mapsto t^x$
8. $f_8 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
9. $f_9 : x \mapsto \ln(t + x)$
10. $f_{10} : x \mapsto \sqrt{\ln(2 + \cos(x))}$
11. $f_{11} : x \mapsto \dfrac{e^{x^2}}{\ln(1 + x^4)}$
12. $f_{12} : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
13. $f_{13} : x \mapsto e^{e^x}$
14. $f_{14} : x \mapsto \sqrt{\ln(x)} - \ln(\sqrt{x})$

Exercice 3.2

Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(x)$
2. $x \mapsto 3e^{3x+3}$
3. $x \mapsto \sin(x) \times \cos(x)$
4. $x \mapsto 3x \times e^{3x^2+3}$
5. $x \mapsto \dfrac{x}{x^2 + 1}$
6. $x \mapsto \dfrac{1}{x \times \ln(x)}$

Exercice 3.3

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^3}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^8 \frac{dt}{\sqrt{1 + t}}$

Exercice 3.4

1. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^e x \ln(x)\, dx$.

Exercices à préparer

Exercice 3.5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $\varphi_n : x \mapsto e^x - nx$.

1. Étudier les variations de la fonction φ_n sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que l'équation $e^x = nx$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.6

On pose :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \leqslant 2 \\ x^2 - \frac{7}{2}x + 4 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Étudier les variations de f sur $]-\infty, 2]$ puis sur $]2, +\infty[$, ses limites en $\pm\infty$ et tracer la courbe représentative de f.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Calculer $\displaystyle\int_0^x f(x)\,dx$.

Exercice 3.7

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} = 1 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_3^5 \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}\,dx$.

Exercice 3.8

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \geqslant 1$$

2. Montrer que pour tout $y \geqslant 1$:

$$0 < y - \sqrt{y^2 - 1} \leqslant 1 \leqslant y + \sqrt{y^2 - 1}$$

3. Soit $y \in [1, +\infty[$, résoudre l'équation d'inconnue $X \in [1, +\infty[$:

$$X + \frac{1}{X} = 2y$$

4. Soit $y \in [1, +\infty[$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$

4 Récurrences

Avertissement

La compréhension des raisonnements par récurrence signifie que l'on sait faire le raisonnement mais également que l'on sait quand le faire. Toutes les questions de ce chapitre ne se traitent donc pas par récurrence, c'est à vous de voir si c'est le cas ou non.

Exercices d'échauffement

Exercice 4.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1+\cos(\pi n^2+2)}{2}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 1$.

Exercice 4.2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est pair, alors n^2 est pair ; montrer que si n est impair, alors n^2 est impair.
2. On pose $u_0 \in \mathbb{N}$, et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est un entier pair.

Exercice 4.3

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction. Si elle existe, on note $f^{(0)}$ la n-ème dérivée de f. Par convention, $f^{(0)} = f$. On a donc :

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f''', \ldots$$

Ici, soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{3x}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3^n e^{3x}$.

Exercice 4.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x\cos(2\pi x)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(n) \leqslant f(n+1)$.
2. Montrer que f n'est pas croissante.

Exercices à préparer

Exercice 4.5

On pose $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (n+1)v_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant 0$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant n$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, v_n est appelée la factorielle de n, et on note pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n! = v_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

avec la convention $0! = 1$.

Exercice 4.6

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}, \quad \text{et} \quad u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

(avec la convention $0^0 = 1$).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer f_n' en fonction de f_n et de f_{n-1}.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n'(x)\,dx$.
3. Calculer u_0.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = u_{n-1} - \frac{1}{en!}$$
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
7. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n!}$.
9. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.