

Redes Neurais e Aprendizagem Profunda

APRENDIZADO DE MÁQUINA

FUNÇÃO DE PERDA (III)

Zenilton K. G. Patrocínio Jr

zenilton@pucminas.br

Função de Perda de Articulação

A **função perda de articulação** (“*hinge loss*”) usa a noção “margem máxima” buscando obter fronteiras com a maior distância dos dados

Função de Perda de Articulação

A **função perda de articulação** (“**hinge loss**”) usa a noção “margem máxima” buscando obter fronteiras com a maior distância dos dados

A noção de **margem** pode ser representada pela diferença entre o “score” da classe correta e uma outra classe qualquer

Função de Perda de Articulação

A **função perda de articulação** (“**hinge loss**”) usa a noção “margem máxima” buscando obter fronteiras com a maior distância dos dados

A noção de **margem** pode ser representada pela diferença entre o “score” da classe correta e uma outra classe qualquer

Seja y a classe correta correspondendo a x e j uma outra classe qualquer. Então a perda para a classe j é dada por

$$\max(0, f_j(x) - f_y(x) + 1)$$

Função de Perda de Articulação

A **função perda de articulação** (“**hinge loss**”) usa a noção “margem máxima” buscando obter fronteiras com a maior distância dos dados

A noção de **margem** pode ser representada pela diferença entre o “score” da classe correta e uma outra classe qualquer

Seja y a classe correta correspondendo a x e j uma outra classe qualquer. Então a perda para a classe j é dada por

$$\max(0, f_j(x) - f_y(x) + 1)$$

Somando-se para todas as classes j que foram diferente de y , obtém-se

$$L = \sum_{j \neq y} \max(0, f_j(x) - f_y(x) + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são



gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1

Valores em negrito são
“scores” para a classe correta.

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são



gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)




A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são

x_i →				
y_i →	gato	3,2	1,3	2,2
	carro	5,1	4,9	2,5
	rã	-1,7	2,0	-3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são



y_i → gato 3,2 1,3 2,2

j → carro 5,1 4,9 2,5

 rã -1,7 2,0 -3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são



y_i → gato 3,2 1,3 2,2

j → carro 5,1 4,9 2,5

rã -1,7 2,0 -3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:




$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$= \max(0, 5,1 - 3,2 + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são

x_i			
y_i	gato		
j	carro		
	rã		
	3,2	1,3	2,2
	5,1	4,9	2,5
	-1,7	2,0	-3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:




$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$= \max(0, 5,1 - 3,2 + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são

$x_i \rightarrow$				
$y_i \rightarrow$	gato	3,2	1,3	2,2
	carro	5,1	4,9	2,5
$j \rightarrow$	rã	-1,7	2,0	-3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:




$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$= \max(0, 5,1 - 3,2 + 1) + \max(0, -1,7 - 3,2 + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são

x_i			
y_i	gato		
	3,2	1,3	2,2
	carro	5,1	4,9
			2,5
j	rã		
	-1,7	2,0	-3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:




$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$= \max(0, 5,1 - 3,2 + 1) + \max(0, -1,7 - 3,2 + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são

x_i →				
y_i →	gato	3,2	1,3	2,2
	carro	5,1	4,9	2,5
	rã	-1,7	2,0	-3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:




$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$\begin{aligned} &= \max(0, 5,1 - 3,2 + 1) + \\ &\quad \max(0, -1,7 - 3,2 + 1) \\ &= \max(0, 2,9) + \max(0, -3,9) \\ &= 2,9 + 0 \\ &= 2,9 \end{aligned}$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são

x_i			
y_i	gato		
	3,2	1,3	2,2
	carro		
	5,1	4,9	2,5
	rã		
	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9		

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$\begin{aligned} &= \max(0, 5,1 - 3,2 + 1) + \\ &\quad \max(0, -1,7 - 3,2 + 1) \\ &= \max(0, 2,9) + \max(0, -3,9) \\ &= 2,9 + 0 \\ &= 2,9 \end{aligned}$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são



gato	3,2	1,3	2,2
-------------	------------	-----	-----

$y_i \rightarrow$ carro	5,1	4,9	2,5
--------------------------------	-----	------------	-----

rã	-1,7	2,0	-3,1
-----------	------	-----	-------------

Perda: 2,9

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são



	gato	3,2	1,3	2,2
$y_i \rightarrow$	carro	5,1	4,9	2,5
	rã	-1,7	2,0	-3,1
	Perda:	2,9		

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:





$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$\begin{aligned} &= \max(0, 1,3 - 4,9 + 1) + \\ &\quad \max(0, 2,0 - 4,9 + 1) \\ &= \max(0, -2,6) + \max(0, -1,9) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são

				
				
$y_i \rightarrow$	gato	3,2	1,3	2,2
	carro	5,1	4,9	2,5
	rã	-1,7	2,0	-3,1
	Perda:	2,9	0	

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

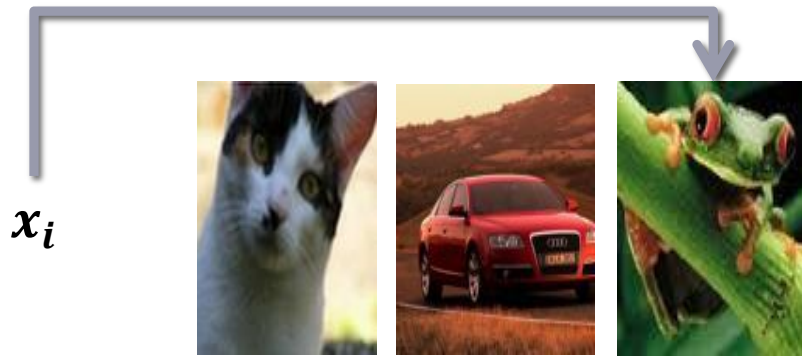
$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$\begin{aligned} &= \max(0, 1,3 - 4,9 + 1) + \\ &\quad \max(0, 2,0 - 4,9 + 1) \\ &= \max(0, -2,6) + \max(0, -1,9) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são



gato	3,2	1,3	2,2
------	-----	-----	-----

carro	5,1	4,9	2,5
-------	-----	-----	-----

$y_i \rightarrow$ rã	-1,7	2,0	-3,1
----------------------	------	-----	------

Perda:	2,9	0	
--------	-----	---	--

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

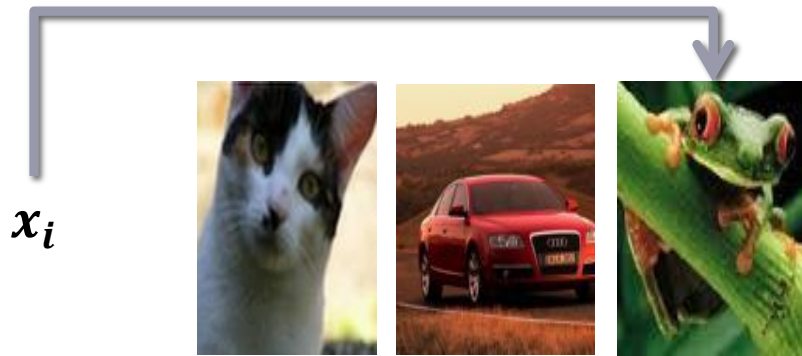
A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são



gato	3,2	1,3	2,2
------	-----	-----	-----

carro	5,1	4,9	2,5
-------	-----	-----	-----

$y_i \rightarrow$ rã	-1,7	2,0	-3,1
----------------------	------	-----	------

Perda:	2,9	0	
--------	-----	---	--

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$= \max(0, 2,2 - (-3,1) + 1) +$$

$$\max(0, 2,5 - (-3,1) + 1)$$

$$= \max(0, 6,3) + \max(0, 6,6)$$

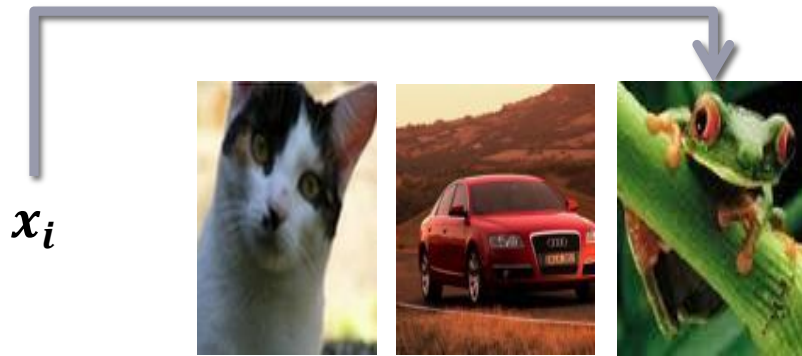
$$= 6,3 + 6,6$$

$$= 12,9$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são



gato	3,2	1,3	2,2
------	-----	-----	-----

carro	5,1	4,9	2,5
-------	-----	-----	-----

$y_i \rightarrow$ rã	-1,7	2,0	-3,1
----------------------	------	-----	------

Perda:	2,9	0	12,9
--------	-----	---	------

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro),

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$= \max(0, 2,2 - (-3,1) + 1) +$$

$$\max(0, 2,5 - (-3,1) + 1)$$

$$= \max(0, 6,3) + \max(0, 6,6)$$

$$= 6,3 + 6,6$$

$$= 12,9$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são



gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0	12,9

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro),

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Assim a perda total é dada pela soma de todas as perdas

$$L = \sum_{i=1}^N L_i$$

$$L = 2,9 + 0 + 12,9 = 15,8$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são



gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0	12,9

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

P1: que ocorre se somar todas as classes?
(incluindo $j = y_i$)

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são



gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0	12,9

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

P1: que ocorre se somar todas as classes?
(incluindo $j = y_i$)

$$\tilde{L}_i = 1 + \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$L = \sum_{i=1}^N \tilde{L}_i = N + \sum_{i=1}^N L_i$$

$$L = 3 + (2,9 + 0 + 12,9) = \mathbf{18,8}$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são



gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0	12,9

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

P2: que ocorre se utilizar a média ao invés da simples soma?

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são



gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0	12,9

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

P2: que ocorre se utilizar a média ao invés da simples soma?

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i$$

$$L = (2,9 + 0 + 12,9) / 3 = \mathbf{5,3}$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são



gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0	12,9

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

P3: que ocorre se somar o quadrado das perdas?

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são



gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0	12,9

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

P3: que ocorre se somar o quadrado das perdas?

$$\tilde{L}_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)^2$$

$$L = 2,9^2 + 0^2 + 12,9^2 = \mathbf{174,82}$$