

Redes Neurais e Aprendizagem Profunda

APRENDIZADO DE MÁQUINA FUNÇÃO DE PERDA (III)

Zenilton K. G. Patrocínio Jr

zenilton@pucminas.br

Função de Perda de Articulação

A **função perda de articulação** (“*hinge loss*”) usa a noção “margem máxima” buscando obter fronteiras com a maior distância dos dados

Função de Perda de Articulação

A **função perda de articulação** (“*hinge loss*”) usa a noção “margem máxima” buscando obter fronteiras com a maior distância dos dados

A noção de **margem** pode ser representada pela diferença entre o “score” da classe correta e uma outra classe qualquer

Função de Perda de Articulação

A **função perda de articulação** (“*hinge loss*”) usa a noção “margem máxima” buscando obter fronteiras com a maior distância dos dados

A noção de **margem** pode ser representada pela diferença entre o “score” da classe correta e uma outra classe qualquer

Seja y a classe correta correspondendo a x e j uma outra classe qualquer.
Então a perda para a classe j é dada por

$$\max(0, f_j(x) - f_y(x) + 1)$$

Função de Perda de Articulação

A **função perda de articulação** (“*hinge loss*”) usa a noção “margem máxima” buscando obter fronteiras com a maior distância dos dados

A noção de **margem** pode ser representada pela diferença entre o “score” da classe correta e uma outra classe qualquer

Seja y a classe correta correspondendo a x e j uma outra classe qualquer.
Então a perda para a classe j é dada por

$$\max(0, f_j(x) - f_y(x) + 1)$$

Somando-se para todas as classes j que foram diferente de y , obtém-se

$$L = \sum_{j \neq y} \max(0, f_j(x) - f_y(x) + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$

são



gato	3,2	1,3	2,2
-------------	------------	-----	-----

carro	5,1	4,9	2,5
--------------	-----	------------	-----

rã	-1,7	2,0	-3,1
-----------	------	-----	-------------

Valores em negrito são
“scores” para a classe correta.

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são



gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são

$x_i \rightarrow$			
$y_i \rightarrow$	gato	3,2	1,3
	carro	5,1	4,9
	rã	-1,7	2,0
			-3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são

x_i	→			
y_i	→	gato	3,2	1,3
j	→	carro	5,1	4,9
		rã	-1,7	2,0
				-3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são

x_i	→			
y_i	→	gato	3,2	1,3
j	→	carro	5,1	4,9
		rã	-1,7	2,0
				-3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

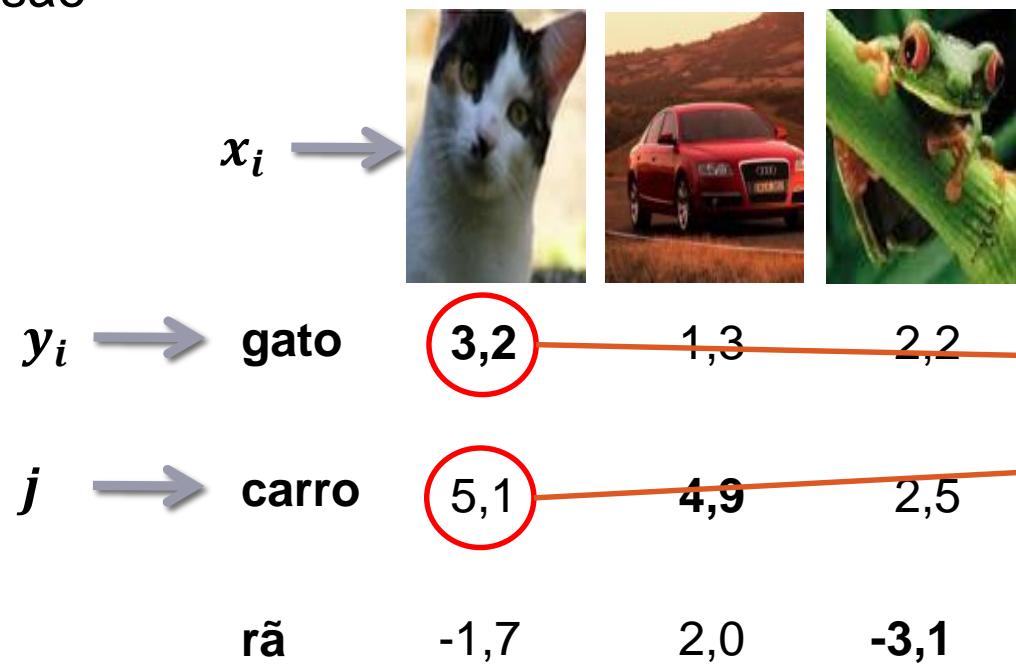
A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$
$$= \max(0, 5,1 - 3,2 + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são



Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$= \max(0, 5,1 - 3,2 + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são

x_i	→			
y_i	→	gato	3,2	1,3
				2,2
carro		5,1	4,9	2,5
j	→	rã	-1,7	2,0
				-3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

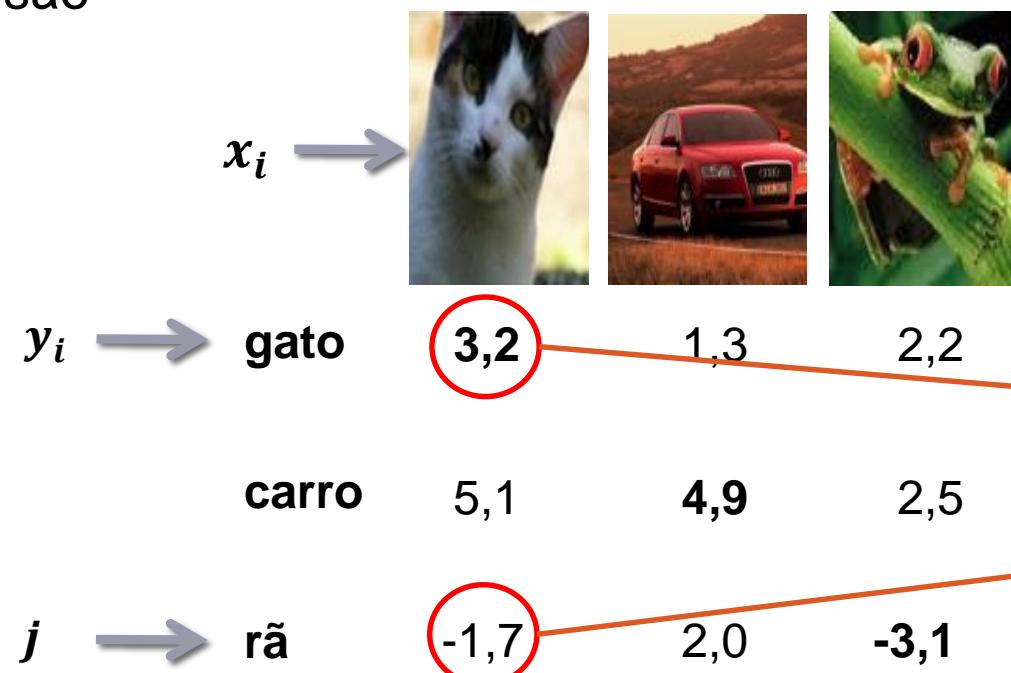
$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$= \max(0, 5,1 - 3,2 + 1) + \\ \max(0, -1,7 - 3,2 + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são



Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$= \max(0, 5,1 - 3,2 + 1) + \\ \max(0, -1,7 - 3,2 + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$ são

$x_i \rightarrow$			
$y_i \rightarrow$	gato	3,2	1,3
	carro	5,1	4,9
	rã	-1,7	2,0
			-3,1

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}L_i &= \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1) \\&= \max(0, 5,1 - 3,2 + 1) + \\&\quad \max(0, -1,7 - 3,2 + 1) \\&= \max(0, 2,9) + \max(0, -3,9) \\&= 2,9 + 0 \\&= 2,9\end{aligned}$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são

	$x_i \rightarrow$			
$y_i \rightarrow$	gato	3,2	1,3	2,2
	carro	5,1	4,9	2,5
	rã	-1,7	2,0	-3,1
	Perda:	2,9		

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}L_i &= \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1) \\&= \max(0, 5,1 - 3,2 + 1) + \\&\quad \max(0, -1,7 - 3,2 + 1) \\&= \max(0, 2,9) + \max(0, -3,9) \\&= 2,9 + 0 \\&= 2,9\end{aligned}$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são

x_i			
gato	3,2	1,3	2,2
$y_i \rightarrow$ carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda: 2,9			

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são

	x_i		
			
gato	3,2	1,3	2,2
$y_i \rightarrow$ carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9		

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$= \max(0, 1,3 - 4,9 + 1) +$$

$$\max(0, 2,0 - 4,9 + 1)$$

$$= \max(0, -2,6) + \max(0, -1,9)$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são

	x_i		
			
$y_i \rightarrow$	gato	3,2	1,3 4,9 2,0 0
	carro	5,1	2,2 2,5 -3,1
	rã	-1,7	
Perda:		2,9	

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$\begin{aligned} &= \max(0, 1,3 - 4,9 + 1) + \\ &\quad \max(0, 2,0 - 4,9 + 1) \\ &= \max(0, -2,6) + \max(0, -1,9) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são

x_i			
gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
y_i → rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0	

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são

	x_i			
				
gato	3,2	1,3	2,2	
carro	5,1	4,9	2,5	
y_i	→ rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0		

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro)

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}L_i &= \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1) \\&= \max(0, 2,2 - (-3,1) + 1) + \\&\quad \max(0, 2,5 - (-3,1) + 1) \\&= \max(0, 6,3) + \max(0, 6,6) \\&= 6,3 + 6,6 \\&= 12,9\end{aligned}$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são

	x_i		
			
gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
y_i	→ rã	-1,7	2,0
Perda:	2,9	0	12,9

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro),

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$\begin{aligned} &= \max(0, 2,2 - (-3,1) + 1) + \\ &\quad \max(0, 2,5 - (-3,1) + 1) \\ &= \max(0, 6,3) + \max(0, 6,6) \\ &= 6,3 + 6,6 \\ &= 12,9 \end{aligned}$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são



gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0	12,9

Dada uma amostra (x_i, y_i) em que x_i é a imagem e y_i é o rótulo da classe (um valor inteiro),

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Assim a perda total é dada pela soma de todas as perdas

$$L = \sum_{i=1}^N L_i$$

$$L = 2,9 + 0 + 12,9 = 15,8$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são



gato	3,2	1,3	2,2
-------------	------------	-----	-----

carro	5,1	4,9	2,5
--------------	-----	------------	-----

rã	-1,7	2,0	-3,1
-----------	------	-----	-------------

Perda:	2,9	0	12,9
---------------	------------	----------	-------------

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

P1: que ocorre se somar todas as classes?
(incluindo $j = y_i$)

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são

			
gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0	12,9

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

P1: que ocorre se somar todas as classes?
(incluindo $j = y_i$)

$$\tilde{L}_i = 1 + \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$L = \sum_{i=1}^N \tilde{L}_i = N + \sum_{i=1}^N L_i$$

$$L = 3 + (2,9 + 0 + 12,9) = \mathbf{18,8}$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são



gato	3,2	1,3	2,2
-------------	------------	-----	-----

carro	5,1	4,9	2,5
--------------	-----	------------	-----

rã	-1,7	2,0	-3,1
-----------	------	-----	-------------

Perda:	2,9	0	12,9
---------------	------------	----------	-------------

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

P2: que ocorre se utilizar a média ao invés da simples soma?

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são

			
gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0	12,9

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

P2: que ocorre se utilizar a média ao invés da simples soma?

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i$$

$$L = (2,9 + 0 + 12,9) / 3 = 5,3$$

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são



gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0	12,9

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

P3: que ocorre se somar o quadrado das perdas?

Exemplo – Função de Perda de Articulação

Suponha: 3 imagens treino e 3 classes

Para algum W , “scores” $s = f(x, W) = Wx$
são



gato	3,2	1,3	2,2
carro	5,1	4,9	2,5
rã	-1,7	2,0	-3,1
Perda:	2,9	0	12,9

A perda de articulação tem a seguinte forma:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

P3: que ocorre se somar o quadrado das perdas?

$$\tilde{L}_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)^2$$

$$L = 2,9^2 + 0^2 + 12,9^2 = \mathbf{174,82}$$