# Likelihood

## Likelihood

> 가능도(可能度, 영어: likelihood) 또는 우도(尤度)는 확률 분포의 모수가, 어떤 확률변수의 표집값과 일관되는 정도를 나타내는 값이다. (출처: 위키백과)

약간의 왜곡이 있는 표현이지만, 관측된 데이터가 주어졌을 때 어떤 수가 모수일 확률이라고 생각하면 편하다.
(원래 모수는 상수이지만 모수를 하나의 변수라고 생각하고 접근하는 방식이라고 생각하자.)

## MLE(Maximum Likelihood Estimation)

Likelihood를 최대화하는 값을 모수의 추정값으로 바라보는 것.

## Probability VS Likelihood

Probability란 모수가 주어졌을 때, 표본의 등장 확률.
Likelihood란 표본이 주어졌을 때, 모수의 확률.

간단하게 표현하면
Probability: $P(X|\theta)$
Likelihood: $L(\theta|X)$

## Likelihood의 계산

### Qusetion

동전을 4번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 X라고 하자. 4번의 시행 중 앞면은 총 3번 나왔다. 이때 $p = \frac{1}{2}$의 Likelihood는?

### Solution

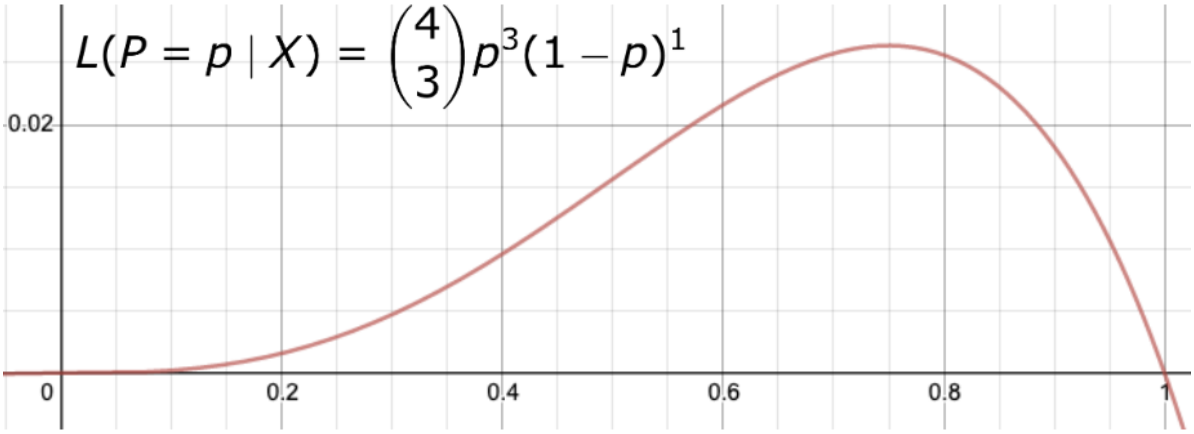
이항분포의 PMF(Probability Mass Function):

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

현재 $n = 4,\ x = 3,\ p = ?$

$$L(P = p|X = 3) = \binom{4}{3} p^3 (1 - p)^1$$

$p$를 x축에 놓고 위 식의 그래프를 그려보면




위 수식에 $p = \dfrac{1}{2}$ 을 대입하면 답을 구할 수 있다.

해당 풀이를 잘 보면 하나 더 알 수 있는 것.

$$L(\theta|X) = P(X|\theta)$$

연속확률 분포에서는 조금 오해의 소지가 있는 표현이지만 이렇게 이해해도 크게 상관 없다.

# MLE의 계산

## Question

위 경우에 MLE를 통해 Likelihood를 최대화하는 모수 p를 계산해보자.

## Solution

$$L(P = p|X = 3) = \binom{4}{3} p^3 (1-p)^1$$

위 식을 최대화하는 $p$를 찾으면 된다. 어떻게?
위 수식의 미분값을 0으로 만드는 $p$를 찾으면 된다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\binom{4}{3} p^3 (1-p)^1\right) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{1}{4}(p^3 - p^4)\right) = 0$$

$$p^2(3 - 4p) = 0$$

$$\therefore p = \frac{3}{4}$$

# Sample이 여러개일 때 Likelihood & MLE

위 예시에서는 관측값이 오직 1개였다. ($X = 3$)
하지만 현실에서 샘플을 하나만 뽑는 일은 거의 없다.
샘플을 여러개 뽑았을 때의 Likelihood를 Gaussian(Normal) Distribution에서 계산해보자

## Question

A학교 학생들의 시험점수 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 이라고 알려져있다. 10명 학생의 점수를 무작위하게 뽑았을 때 그 점수가 다음과 같았다.
$\{5, 40, 60, 45, 70, 85, 90, 100, 30, 80\}$
이 때, MLE로 계산한 $\mu$의 추정값은?

## Solution (1)

PDF(Probability Density Function) of Gaussian Distribution:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

앞선 이항분포 문제의 풀이처럼 접근한다면 $x$에 주어진 표본 10개 값을 모두 넣고 해당 값들을 모두 곱한 값을 최대로 만드는 $\mu$를 찾으면 된다. (곱하는 이유는 표본의 추출은 독립을 가정하기 때문.)

$$\prod_{x \in X} \Bigg(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)\Bigg)$$

$$where \quad X = \{5, 40, 60, 45, 70, 85, 90, 100, 30, 80\}$$

이걸 $\mu$에 대해 편미분한다? 계산이 너무 힘들다.

## Solution (2) - Negative Log Likelihood

위 식에 마이너스와 로그를 취해보자. 그리고 해당 값을 최소로 만드는 값을 찾으면 된다.

$$-\ln\Bigg(\prod_{x \in X} \Bigg(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)\Bigg)\Bigg)$$

$$= -\sum_{x \in X} \ln\Big(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\Big) + \sum_{x \in X} \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\Bigg(-\sum_{x \in X} \ln\Big(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\Big) + \sum_{x \in X} \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Bigg) = 0$$

$$-\sum_{x \in X} \frac{(x-\mu)}{\sigma^2} = 0$$

$$\sum_{x \in X} (x-\mu) = 0$$

$$\therefore \mu = \overline{X}$$

결국 모수 $\mu$의 추정값은 표본평균 $\overline{X}$이다.
정규분포에서 MLE를 통한 모수 $\mu$의 추정값은 표본 $X$의 평균임을 증명했다.
(중요한 것은 결과 ($\mu = \overline{X}$) 가 아니라 과정.)

여기까지 이해했다면 딥러닝에서 흔히 사용하는 `NLLLoss`가 어떤 생각으로 만들어졌는지 알 수 있다.

## 주의

실제 접하게 될 대부분의 data sample은 $x \in \mathbb{R}$이 아니다.
보통 sample은 $x \in \mathbb{R}^n$이다.
즉 $x$는 Joint Distribution을 따르는 경우가 대부분이고 달라지는 점이 조금 생길 수 있다.
또한 given 되는 값이 모수만이 아닐 수도 있다.

하지만 대부분 위 내용을 통해 이해 가능하다.