DIMENSI PARTISI GRAF HASIL KALI 2-KUAT DAN PROGRAM PENCARI PARTISI PEMBEDA BEBERAPA KELAS GRAF

TUGAS AKHIR

Karya tulis sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana

dari Institut Teknologi Bandung

Oleh

ILMA ALIYA FIDDIEN

NIM: 10117019

(Program Studi Sarjana Matematika)

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

Juni 2021

ABSTRAK

DIMENSI PARTISI GRAF HASIL KALI 2-KUAT DAN PROGRAM PENCARI PARTISI PEMBEDA BEBERAPA KELAS GRAF

Oleh

ILMA ALIYA FIDDIEN

NIM: 10117019

(Program Studi Matematika)

Misalkan G adalah suatu graf non trivial dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Untuk setiap $v \in V(G)$ dan himpunan $S \subset V(G)$, jarak antara v dan S, $d(v,S)$ adalah jarak terpendek antara v dan suatu titik anggota S. Representasi v terhadap partisi titik $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ adalah k-vektor $r(s|\Pi) = (d(s,S_1), d(v,S_2), ..., d(v,S_k))$. Π adalah partisi pembeda dari G jika semua representasi setiap titik di G terhadap Π berbeda. Dimensi partisi G, ditulis $pd(G)$, adalah kardinalitas terkecil dari partisi pembeda yang mungkin untuk G. Pada penelitian ini, untuk G dan H dua sebarang graf berdiameter minimal k, didefinisikan graf hasil kali k-kuat $G \boxtimes_k H$ sebagai suatu perumuman dari graf hasil kali kuat. Dengan mengkaji pola diameternya, diberikan diameter sebagai fungsi dari orde untuk graf hasil kali 2-kuat dari graf lintasan, lingkaran, dan bipartit lengkap. Kemudian ditentukan batas-batas dimensi partisi graf hasil kali 2-kuat menggunakan keterangan orde dan diameter graf-graf asalnya. Graf kuasa ke-2 juga dilibatkan untuk membantu memberikan batas atas dimensi partisi $G \boxtimes_2 H$. Di bagian akhir, ditunjukkan program pencari partisi pembeda untuk beberapa kelas graf yang dibuat menggunakan bahasa pemrograman Python.

Kata Kunci: dimensi partisi, graf hasil kali k-kuat, graf kuasa, partisi pembeda

ABSTRACT

PARTITION DIMENSION OF 2-STRONG PRODUCT GRAPHS AND RESOLVING PARTITION FINDER PROGRAM FOR SOME CLASSES OF GRAPH

By

ILMA ALIYA FIDDIEN

NIM: 10117019

(Undgraduate Program in Mathematics)

Let G be a non-trivial graph with the vertices set $V(G)$ and the edges set $E(G)$. For each $v \in V(G)$ and $S \subset V(G)$, distance between v and S, $d(v, S)$ is the shortest distance between v and a vertex in S. The representation of v with respect to an ordered partition $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ is a k-vector $r(s|\Pi) = (d(s, S_1), d(v, S_2), ..., d(v, S_k))$. Π is resolving partition for G if all representation of vertices of G with respect to Π is unique. Dimension partition of G, denoted by $pd(G)$, is the smallest cardinality of resolving partitions for G. In this research, for G and H any graphs with minimum diameter k, we define a k-strong product graph, $G \boxtimes_k H$, a generalization of strong product graph. Through pattern-finding, we formulate the diameter of 2-strong product graphs of paths, cycles, and complete bipartite graphs. We then determine boundaries for partition dimension of 2-strong product graphs by utilizing the order and diameter of the original graphs. We involved 2^{nd} power graph to help find resolving partition of $G \boxtimes_2 H$. In the last section, we show a resolving partition finder program for few graph classes which written in Python.

Keywords: k-strong product graph, partition dimension, power graph, resolving partition

LEMBAR PENGESAHAN

DIMENSI PARTISI GRAF HASIL KALI 2-KUAT DAN PROGRAM PENCARI PARTISI PEMBEDA BEBERAPA KELAS GRAF

Laporan Tugas Akhir

Oleh

Ilma Aliya Fiddien

10117019

(Program Studi Sarjana Matematika)

Telah disetujui dan disahkan sebagai Laporan Tugas Akhir
di Bandung pada tanggal 10 Juni 2020.

Pembimbing

Prof. Dr. M. Salman A. N.

NIP 19680916 199402 1 001

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang. Didedikasikan untuk orang tua dan guru-guruku, semoga Allah limpahkan kebaikan kepada mereka.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Alhamdulillaahil-ladzii bini'matihi tatimmush-saalihaat. Segala puji dan syukur tidak akan pernah cukup terbilang untuk Sang Maha Memiliki Ilmu yang telah memberikan petunjuk dan kemudahan kepada penulis untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini. Banyak sekali pihak yang Allah lembutkan hati dan mudahkan tangannya untuk mendukung penulis dalam menuntaskan amanahnya sebagai mahasiswa di Program Studi Sarjana Matematika ITB, sejak awal hingga akhir. Izinkanlah penulis mengucapkan beberapa ucapan dan doa kepada mereka, sebagai bentuk rasa hormat atas jasa mereka.

1. Ibunda, Waryamah, dan ayahanda, Sahmudin, tidak pernah berhenti memberikan perhatian dan dukungan kepada penulis di sepanjang hayatnya. Niat dan usaha mereka mengirimkan Penulis berkuliah di ITB agar menjadi anak yang lebih shalehah dan semakin bermanfaat bagi sesamanya adalah motivasi terbesar Penulis untuk tetap bertahan menjalani empat tahun perkuliahan. Semoga Allah kumpulkan lagi kami sekeluarga di surga-Nya yang kekal. *Rabbighfirli waliwalidayya warhamhuma kama rabbayani shaghiran.*
2. Prof. M. Salman A. N., selaku dosen pembimbing tugas akhir Penulis sekaligus dosen matematika pertama bagi Penulis. Sejak tahap persiapan pertama, beliau telah menginspirasi Penulis untuk terus menikmati proses belajar, menjadi manusia yang berkarakter, dan terus berbuat baik dan mendoakan kedua orang tua. Semoga Pak Salman dan keluarga selalu dalam keadaan sehat dan selamat.
3. Seluruh dosen Program Studi Sarjana Matematika ITB dan dosen-dosen yang telah mengajari Penulis di Institut Teknologi Bandung. Semoga ilmu yang mereka ajarkan dapat menjadi pahala jariyah.
4. Keluarga Asrama Salman ITB 2018/2019 dan 2019/2020, telah bertukar banyak motivasi dan pelajaran hidup yang membantu membuat Penulis menjadi

individu yang lebih berempati pada lingkungan sekitar dan lebih ambisius mengejar capaian-capaian diri. Semoga setiap dari mereka menjadi orang-orang yang semakin menginspirasi sekitarnya.

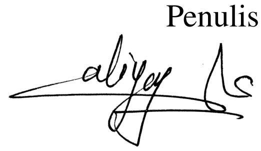
5. Teman-teman Penulis di Kepengurusan GAMAIS ITB 2021, 2020, 2018, 2017, dan Pembina GAMAIS ITB, Dr. Umar Khayam, S.T, M.T., yang secara langsung maupun tidak langsung memotivasi Penulis untuk tetap dekat dengan Sang Pencipta dan berlatih menjadi pribadi yang profesional, termasuk dalam menuntaskan tugas akhir ini.
6. Teman-teman Penulis di P3RI Salman ITB 1440H dan 1439H, tim IC, tim formatur, dan tim sekretaris, para pengurus dan pembina YPM Salman ITB, dan BMKA Salman, serta Beasiswa Aktivis Salman yang telah banyak memberikan dukungan kepada Penulis, baik secara moral melalui pengalaman maupun secara finansial selama Penulis berkuliah di ITB.

Penulis menyadari bahwa masih banyak hal yang bisa diperbaiki dan dikembangkan dari tugas akhir ini. Oleh karena itu, kritik dan saran dari pembaca akan sangat berharga bagi Penulis, baik dari segi penulisan maupun penelitian. Penulis berharap buku tugas akhir ini bisa bermanfaat kepada pembaca dalam bentuk apapun yang mungkin tidak akan pernah Penulis duga.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Majalengka, 10 Juni 2021

Penulis



Ilma Aliya Fiddien

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR LAMBANG

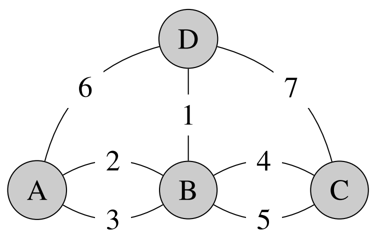
$G(V, E)$	Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E
$V(G)$	Himpunan titik graf G
$E(G)$	Himpunan sisi graf G
$e = uv$	Sisi e yang menghubungkan titik u dan titik v
$\|G\|$	Orde (banyak titik) graf G
$\|\|G\|\|$	*Size* (banyak sisi) graf G
$d(u, v)$	Jarak antara titik u dan titik v
$d(u, \Pi)$	Jarak antara titik u dan himpunan/partisi titik Π
$r(u\|\Pi)$	Representasi titik u terhadap himpunan/partisi titik Π
$diam(G)$	Diameter graf G
$dim(G)$	Dimensi metrik graf G
$pd(G)$	Dimensi partisi graf G
P_n	Graf lintasan orde n
C_n	Graf lingkaran orde n
K_n	Graf lengkap orde n
$K_{m,n}$	Graf bipartit lengkap orde $m + n$
$\square$	Operator kali Cartesius
$\boxtimes$	Operator kali kuat
$\boxtimes_k$	Operator kali k-kuat

Bab 1 Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Banyak permasalahan dapat direpresentasikan dengan sehimpunan *titik* beserta sehimpunan *sisi* yang menghubungkan titik-titik tersebut. Contohnya, titik merepresentasikan individu di suatu komunitas dan sisi merepresentasikan hubungan pertemanan antar individu. Dalam contoh ini, dapat dicari tahu apakah sepasang titik terhubung oleh suatu sisi, dengan kata lain, apakah dua individu tersebut berteman atau tidak. Objek yang direpresentasikan oleh titik dan garis ini dapat bersifat konkrit maupun abstrak. Abstraksi inilah yang melahirkan teori graf.

Konsep graf diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 dengan masalah Jembatan Königsberg. Euler memisalkan empat daratan di sekitar Sungai Pregel sebagai titik dan ketujuh jembatannya sebagai sisi. Dia meneliti apakah mungkin untuknya membuat suatu perjalanan atau *tour* yang dapat melewati seluruh jembatan cukup sekali sekali saja. *Tour* demikian disebut *Euler tour*. Telah terbukti bahwa *tour* tersebut tidak mungkin ada untuk kasus ini. Masalah ini dimodelkan sebagai graf berikut.



Gambar 1.1: Graf Jembatan Königsberg

Graf G adalah sebagai suatu pasangan terurut $(V(G), E(G))$. *Himpunan titik* $V(G)$ terdiri dari titik-titik unik tak terurut pada G. *Himpunan sisi* $E(G)$ terdiri atas sisi-sisi unik tak terurut pada G yang menghubungkan titik-titik pada $V(G)$. Pilih G sebagai graf seperti yang terlihat pada Gambar 1.1, maka $V(G) = \{A, B, C, D\}$ dan $E(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Dalam banyak aplikasi, graf juga sering digunakan untuk memodelkan jaringan atau *network*. Dalam mensistemasikan jaringan, diperlukan cara untuk mendeteksi lokasi suatu benda pada jaringan tersebut. Contohnya, robot bernavigasi dari titik ke titik pada suatu jaringan. Misalkan robot berkomunikasi dengan sejumlah sensor-sensor yang diletakkan di titik-titik pada jaringan. Titik-titik yang ditempati sensor tersebut disebut *landmarks*. Sensor-sensor ini akan memberikan keterangan jarak robot terhadap *landmarks* untuk memfasilitasi navigasi robot. Dengan cara ini, tujuan yang ingin dicapai adalah bagaimana cara memilih titik-titik sebagai *landmarks* sehingga setiap titik di jaringan tersebut dapat ditentukan lokasinya secara unik oleh *landmarks* ini. Lebih jauhnya lagi, jika diberikan suatu jaringan, ingin diketahui berapa banyak minimal sensor yang dibutuhkan sehingga setiap titik punya alamat unik. Inilah motivasi dimunculkannya konsep dimensi metrik yang dipublikasikan oleh Slater (1975) dan Harary & Melter (1976) secara independen.

Mencari dimensi metrik suatu graf G adalah mencari S suatu sub himpunan $V(G)$ berkardinalitas terkecil sedemikian hingga setiap titik di G memiliki alamat yang unik terhadap S. Himpunan yang membedakan seluruh titik disebut *himpunan pembeda*. Jika kardinalitasnya terkecil, maka itu disebut *himpunan pembeda minimal* atau *basis metrik*, dengan kardinalitasnya disebut *dimensi metrik*. Kemudian, Chartrand et al. (2000) mengembangkan konsep dimensi partisi (*partition dimension*) yang mirip dengan dimensi metrik. Mencari dimensi partisi suatu graf G adalah mencari partisi dari $V(G)$ berkardinalitas terkecil sedemikian sehingga setiap titik di G memiliki alamat unik terhadap partisi tersebut. Partisi yang mampu membedakan setiap titik ini disebut *partisi pembeda*. Jika kardinalitasnya terkecil, maka disebut partisi pembeda minimal, dengan kardinalitasnya disebut *dimensi partisi*. Nilai dimensi partisi suatu graf dapat lebih kecil dari pada dimensi metriknya.

Mencari dimensi metrik graf pohon dapat diselesaikan dalam waktu linear, seperti yang dijelaskan Slater (1975). Namun, Garey (1979) telah membuktikan bahwa masalah pencarian dimensi partisi sebarang graf merupakan masalah $\mathcal{NP}$-Complete. Artinya, pencarian himpunan (dan partisi) pembeda yang minimal untuk sebarang graf hanya bisa dilakukan secara heuristik atau hanya bisa dicari nilai aproksimasinya. Sementara itu, Khuller et al. (1996) menunjukkan bahwa mencari dimensi metrik graf dengan orde n dapat diaproksimasi dengan faktor $O(\log n)$.

Memang, menemukan nilai dimensi metrik atau dimensi partisi suatu graf cukup sulit secara komputasional. Namun, mengidentifikasi setiap titik secara unik adalah kemampuan yang sangat berguna. Selain aplikasi pada navigasi robot jarak jauh (Khuller et al., 1996), himpunan pembeda memiliki peran penting pada pemrosesan gambar digital (Melter & Tomescu, 1984), juga digunakan untuk merepresentasikan struktur senyawa kimia pada desain obat (Johnson, 1993), dan sebagai alat untuk menemukan sumber difusi pada suatu jaringan (Spinelli et al., 2017). Selain itu, dimensi metrik graf Hamming dapat digunakan untuk menganalisis permainan Mastermind (Chvátal, 1983) dan sebagai metode *graph-embedding* untuk *dataset* rantai gen yang diolah dengan pembelajaran mesin (Tillquist & Lladser, 2019).

Kajian teoritis dimensi partisi di antaranya adalah karakterisasi graf berorde n dengan dimensi partisi $2, n, n-1$ (Chartrand et al., 2000), $n-2$ (Tomescu, 2008), dan dimensi partisi graf hasil kali Cartesius & hasil kali kuat (Yero et al., 2014).

Selain itu, selayaknya objek matematis, graf dapat dioperasikan. Beberapa operasi biner pada graf di antaranya adalah kali Cartesius, kali kuat, kali leksikografis, dan kali tensor. Perumuman beberapa operasi graf telah dilakukan oleh Acharya & Mehta (2014), yaitu kali 2-tensor, dan oleh Acharya & Mehta (2015), yaitu kali r-Cartesius.

Pada karya tulis ini, akan dikaji dimensi partisi graf hasil kali 2-kuat. Untuk suatu k bilangan bulat positif, operasi kali k-kuat dikenalkan sebagai perumuman dari operasi kali kuat. Dipelajari juga graf kuasa ke-2, yang analisis strukturnya berguna untuk mendapatkan batas atas dimensi partisi graf hasil kali 2-kuat. Selain itu, karena penelitian pada graf menuntut representasi visual yang banyak dan pengecekan keunikan partisi pembeda membutuhkan tidak sedikit komputasi, dibuat program komputer untuk membantu penelitian ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Apa batas atas dan bawah dimensi partisi graf hasil kali 2-kuat dua graf sembarang?
2. Berapakah dimensi partisi graf hasil kali 2-kuat dua kelas graf tertentu?
3. Apa program yang dapat membantu mencari partisi pembeda beberapa kelas graf tertentu?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mendapatkan batas atas dan bawah dimensi partisi graf hasil kali 2-kuat dua graf sembarang
2. Menentukan dimensi partisi graf hasil kali 2-kuat dua kelas graf tertentu
3. Membuat program yang dapat membantu mencari partisi pembeda beberapa kelas graf tertentu

1.4 Batasan Masalah

Agar fokus bahasan pada penelitian ini terjaga, dilakukan pembatasan masalah sebagai berikut.

1. Graf yang menjadi objek penelitian merupakan graf sederhana, terhubung, dan terbatas.
2. Operasi graf yang dikaji adalah kali 2-kuat.
3. Kelas-kelas graf yang dioperasikan kali 2-kuatnya adalah lintasan, siklus, dan graf bipartit lengkap.
4. Program yang dibuat digunakan untuk membantu visualisasi beberapa kelas graf di atas dan graf hasil kali k-kuat dan kali Cartesius

1.5 Metode Penelitian

Untuk menjawab masalah pertama, diambil langkah-langkah sebagai berikut:

1. mendefinisikan operasi kali k-kuat graf,
2. mengeksplorasi karakteristik graf hasil kali 2-kuat dua sembarang graf,
3. merumuskan batas atas dan batas bawah dari dimensi partisi graf hasil kali 2-kuat dua sembarang graf,
4. mengecek dan memperbaiki batas atas dan batas bawah yang diperoleh,
5. menyimpulkan hasil penelitian.

Untuk menjawab masalah kedua, diambil langkah-langkah sebagai berikut:

1. mengeksplorasi karakteristik graf hasil kali 2-kuat beberapa kelas graf,
2. merumuskan batas atas, batas bawah, atau nilai eksak dari dimensi partisi graf hasil kali 2-kuat beberapa kelas graf,
3. menyimpulkan hasil penelitian.

Untuk menjawab masalah ketiga, diambil langkah-langkah sebagai berikut:

1. menentukan arsitektur program,
2. membuat algoritma program,
3. membuat antarmuka program,
4. mengevaluasi algoritma dan antarmuka program dan memperbaikinya.

1.6 Sistematika Pembahasan

Sistematika penulisan karya tulis tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

Bab pertama, yaitu Bab Pendahuluan, terdiri dari subbab penjelasan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

Bab kedua, yakni Bab Graf dan Dimensi Partisi Graf, memuat dasar teori yang digunakan pada penelitian, yaitu definisi graf, jenis graf, beberapa kelas graf, beberapa operasi pada graf, definisi dimensi partisi, serta hasil penelitian terdahulu yang berkaitan dengan dimensi partisi yang mendukung penelitian ini.

Bab ketiga, yaitu Bab Dimensi Partisi Graf Hasil Kali 2-Kuat. Pada bab ini dituliskan definisi graf hasil kali k-kuat, hubungan graf hasil kali 2-kuat dengan graf kuasa ke-2 dari suatu graf, dan dimensi partisi graf hasil kali 2-kuat beberapa kelas graf tertentu.

Bab keempat, yaitu Bab Program Pencari Partisi Pembeda Graf-Graf Tertentu. Pada bab ini dibahas perancangan arsitektur program, antarmuka dan fitur program, algoritma program, serta kelebihan dan kekurangan program.

Bab kelima, yaitu Bab Penutup. Bab ini diisi dengan simpulan hasil yang dapat menjawab pertanyaan pada bagian rumusan masalah. Selain itu, diberikan pula saran untuk penelitian selanjutnya mengenai graf hasil kali 2-kuat, dimensi partisinya, dan pengembangan program pencari partisi pembeda.

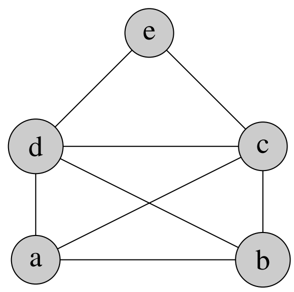
Bab 2 Graf dan Dimensi Partisi Graf

2.1 Terminologi pada Teori Graf

2.1.1 Definisi Graf

Suatu *graf* G adalah sistem pasangan terurut $(V(G), E(G))$. Dalam hal ini, $V(G)$ disebut *himpunan titik* (*vertex set*) dan $E(G)$ disebut *himpunan sisi* (*edge set*) dengan $V(G) \cap E(G) = \emptyset$. *Fungsi insidensi* dari G, $\psi(G)$, didefinisikan sebagai pemetaan $E(G)$ ke $(V(G))^2$. Titik $u, v \in V(G)$ dikatakan *bertetangga* dan $e \in E(G)$ dikatakan *mengaitkan* u dan v jika memenuhi $\psi(e) = \{u, v\}$, dengan titik u dan v disebut ujung-ujung dari sisi e. Banyaknya titik (*orde*) dan banyaknya sisi (*size*) dari graf G masing-masing dinotasikan $|V(G)|$ dan $|E(G)|$. Himpunan titik yang bertetangga dengan titik v ditulis sebagai $N(v)$. Banyaknya sisi yang bertetangga dengan titik v disebut dengan *derajat* dari v atau $deg(v)$. Suatu graf dikatakan berarah (*directed*) jika sisi $e = \{u, v\}$ dipandang sebagai himpunan terurut, yang berarti e mengaitkan u ke v. Sebaliknya, pada graf tak berarah (*undirected*), $\{u, v\} = \{v, u\}$. Untuk kemudahan menulis, notasi $\psi(e) = \{u, v\}$ akan sering ditulis sebagai $e = uv$.

Contoh 1. Graf amplop adalah graf yang memiliki $V(H) = \{a, b, c, d, e\}$, dan $E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, dengan $e_1 = ab, e_2 = bc, e_3 = cd, e_4 = ad, e_5 = de, e_6 = ce, e_7 = ac, e_8 = bd$.



Gambar 2.1: Graf amplop

Suatu graf dikatakan *sederhana* jika tidak mengandung *sisi ganda* (*multiple edges*) dan *sisi gelang* (*loop*). Graf amplop pada contoh atas adalah graf sederhana.

Sebuah *lintasan* dengan panjang n pada suatu graf G adalah barisan sisi-sisi terurut $v_i v_{i+1} = e_i \in E(G)(i = 0, 1 \ldots n-1)$, dan dituliskan sebagai $v_0 v_1 \ldots v_{n-1} v_n$.

Sebuah graf G dikatakan *terhubung* (*connected*) jika untuk setiap pasang titik di G terdapat setidaknya satu lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.

2.1.2 Graf Isomorfis

Graf dapat direpresentasikan melalui ilustrasi dengan geometri yang berbeda-beda. Graf G_1 dan G_2 dikatakan *isomorfis* jika terdapat pemetaan satu-satu $g : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ sedemikian sehingga $g(u)$ dan $g(v)$ bertetangga di G_2 jika dan hanya jika u dan v bertetangga di G_1.

2.1.3 Jarak pada Graf

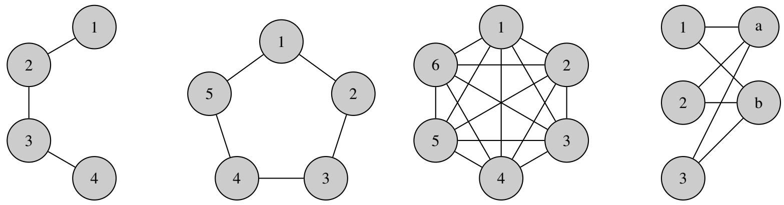
Jarak antara dua titik $u, v \in V(G)$, ditulis $d_G(u, v))$ adalah panjang lintasan terpendek di graf G yang menghubungkan u dan v. Sedangkan jarak antara titik $u \in V(G)$ dan himpunan $S \subseteq V(G)$ adalah $d_G(u, S)) = \min\limits_{v \in V(G)} \{d(u, v)\}$. Jika lintasan tersebut ada, maka $d_G(u, v)) < \infty$, dan $d_G(u, v)) = \infty$ jika selain dari itu. Untuk konteks graf yang jelas, jarak antara u dan v di graf G cukup ditulis $d(u, v)$.

Eksentrisitas $\epsilon(v)$ suatu titik v pada graf G adalah jarak terbesar v dengan suatu titik lainnya di G, ditulis sebagai $\epsilon(v) = \max\limits_{u \in V(G)} \{d(v, u)\}$. *Radius* dari suatu graf G adalah eksentrisitas minimum dari titik-titiknya, ditulis sebagai $rad(G) = \min\limits_{v \in V(G)} \{\epsilon(v)\}$. Sedangkan *diameter* dari graf G adalah eksentrisitas maksimum dari titik-titiknya, atau $diam(G) = \max\limits_{v \in V(G)} \{\epsilon(v)\}$. Diameter dari graf G juga dapat dipahami sebagai jarak antar titik di G yang terbesar.

2.2 Jenis-Jenis Graf

2.2.1 Graf Lintasan

Graf lintasan (*path*) berorde n, ditulis P_n, adalah graf terhubung yang hanya terdiri dari lintasan dengan panjang n. Dengan kata lain, setiap titik-titiknya berderajat dua, kecuali dua titik ujung yang berderajat satu. Diameter dari P_n adalah n.



(a) P_4 (b) C_5 (c) K_6 (d) $K_{3,2}$

Gambar 2.2: Beberapa contoh graf.

2.2.2 Graf Lingkaran

Graf *lingkaran* (*cycle*) C_n adalah graf terhubung berorde n dengan seluruh titiknya berderajat dua. Diameter dari C_n adalah $\lceil n/2 \rceil$.

Contoh 2. Graf C_5 memiliki himpunan titik $V(C_5) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dengan himpunan sisi $E(C_5) = \{12, 23, 34, 45, 51\}$, seperti diilustrasikan Gambar 2.2b.

2.2.3 Graf Lengkap

Graf *lengkap* (*complete*) K_n adalah graf terhubung berorde n dengan seluruh titiknya saling bertetangga. Diameter dari graf lengkap selalu 1.

Contoh 3. Graf K_6 memiliki himpunan titik $V(K_6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan himpunan sisi $E(K_6) = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}$, seperti yang ada pada Gambar 2.2c.

2.2.4 Graf Bipartit Lengkap

Graf multipartit (*multipartite*) adalah graf terhubung yang himpunan titiknya dibagi menjadi beberapa partisi sedemikian sehingga titik-titiknya hanya bertetangga dengan partisi selain partisinya sendiri. Jika partisinya sejumlah n maka diameternya adalah n. Jika partisi titiknya hanya dua maka disebut graf bipartit.

Graf *bipartit lengkap* atau $K_{n,m}$ adalah graf yang setiap titik di suatu partisi bertetangga dengan setiap titik di partisi lainnya.

Contoh 4. Graf $K_{2,3}$ mempunyai himpunan titik $V(K_{2,3}) = \{1, 2, 3, a, b\}$ dengan partisi titik $\{\{1, 2, 3\}, \{a, b\}\}$, seperti terlihat pada Gambar 2.2d.

2.3 Operasi pada Graf

Sebagai objek matematis pada umumnya, graf dapat dioperasikan secara uniter maupun biner. *Operasi uniter* hanya membutuhkan satu graf untuk menghasilkan suatu graf baru, sedangkan *operasi biner* memerlukan dua graf untuk menghasilkan suatu graf baru. Karya tulis ini fokus mendefinisikan operasi *kali k-kuat*. Sebelum itu, perlu dipahami terlebih dahulu definisi dari graf hasil *kali Cartesius* dan hasil *kali kuat* dari sepasang graf dan graf *kuasa ke-k* dari suatu graf. Mengacu pada Sabidussi (1959), kedua operasi tersebut didefinisikan sebagai berikut.

2.3.1 Operasi Kali Cartesius

Definisi 1. Untuk graf G dan H, *graf hasil kali Cartesius* $G\square H$ adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(G) \times V(H)$, dengan titik (u, x) dan (v, y) bertetangga jika dan hanya jika

- $uv \in E(G)$ dan $x = y$, atau
- $u = v$ dan $xy \in E(H)$.

Contoh 5. Misalkan graf 5-lingkaran memiliki $V(P_5) = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E(P_5) = \{ab, bc, cd, de\}$. Sementara itu, graf 2,3-bipartit lengkap memiliki $V(P_3) = \{1, 2, 3\}$ dan $E(P_3) = \{12, 23\}$. Maka graf $P_5\square P_3$ memiliki himpunan titik

$$\begin{aligned} V(P_5\square P_3) = \quad & \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (1, e), (2, a), (2, b), (2, c), \\ & (2, d), (2, e), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d), (3, e)\}, \end{aligned}$$

dan himpunan sisi

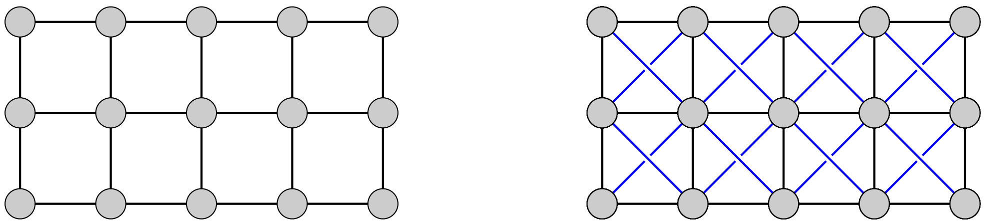
$$\begin{aligned} E(P_5\square P_3) = \quad & \{((1, a)(1, b)), ((1, b)(1, c)), ((1, c)(1, d)), ((1, d)(1, e)), \\ & ((2, a)(2, b)), ((2, b)(2, c)), ((2, c)(2, d)), ((2, d)(2, e)), \\ & ((3, a)(3, b)), ((3, b)(3, c)), ((3, c)(3, d)), ((3, d)(3, e)), \\ & ((1, a)(2, a)), ((2, a)(3, a)), ((1, b)(2, b)))((2, b)(3, b)), \\ & ((1, c)(2, c)), ((2, c)(3, c))\}. \end{aligned}$$

Graf $P_5 \square P_3$ diilustrasikan oleh Gambar 2.3a.

2.3.2 Operasi Kali Kuat

Definisi 2. Untuk graf G dan H, *graf hasil kali kuat* $G \boxtimes H$ adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(G) \times V(H)$, dengan titik (u,x) dan (v,y) bertetangga jika dan hanya jika

- $uv \in E(G)$ dan $x = y$, atau
- $u = v$ dan $xy \in E(H)$, atau
- $uv \in E(G)$ dan $xy \in E(H)$.



(a) Graf $P_5 \square P_3$ (b) Graf $P_5 \boxtimes P_3$

Gambar 2.3: Contoh graf hasil kali Cartesius dan hasil kali kuat

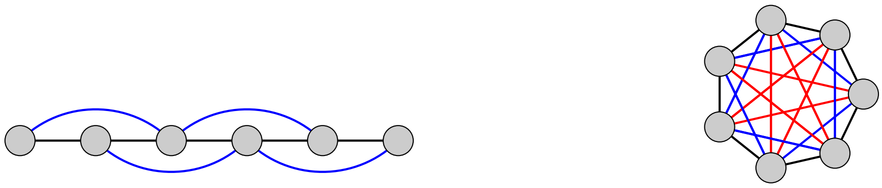
2.3.3 Graf kuasa ke-k

Dalam mengkaji graf hasil kali k-kuat yang dibahas pada tugas akhir ini, dicari graf atau operasi graf lain yang memiliki karakteristik yang mirip dengan definisi graf hasil kali k-kuat yang dibuat. Kesamaan karakteristik yang dicari adalah adanya pertambahan sisi yang "loncat" pada suatu graf setelah graf tersebut dioperasikan. Ditemukan suatu operasi yang diinginkan, yaitu kuasa ke-k yang pertama kali dibahas oleh Skiena (1990).

Definisi 3. Graf G^k, disebut **graf kuasa ke-k dari graf** G, adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan untuk sebarang titik $u, v \in V(G^k)$ bertetangga jika dan hanya jika $d_G(u,v) \leq k$.

2.4 Dimensi Metrik

Misalkan G adalah graf terhubung. *Representasi metrik* titik v terhadap himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\} \subseteq V(G)$ adalah k-vektor terurut $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), ..., d(v,w_k))$. Dalam hal ini, W disebut *himpunan pembeda*



(a) P_6^2 adalah graf kuasa ke-2 dari P_6 (b) C_{10}^3 adalah graf kuasa ke-3 dari C_3

Gambar 2.4: Contoh beberapa graf kuasa

bagi G jika tiap titik di G memiliki representasi yang unik. Himpunan pembeda dengan kardinalitas terkecil disebut *basis metrik* bagi G, dengan kardinalitasnya disebut *dimensi metrik* G, ditulis sebagai $dim(G)$.

Contoh 6. Perhatikan G graf amplop pada Gambar 2.5. Jika dipilih $S_1 = \{e\}$, maka titik d dan c tidak terbedakan karena jaraknya ke S_1 sama-sama 1. Kemudian, pemilihan $S_2 = \{a, e\}$ juga tidak bisa membedakan titik d dan c karena representasi metriknya sama-sama $(1, 1)$. Dapat dicek bahwa tidak ada himpunan pembeda dengan kardinalitas 1 atau 2 yang mampu untuk membedakan seluruh titik pada graf amplop tersebut. Dipilih $S_3 = \{a, d, e\}$ yang mampu membedakan semua titik pada graf tersebut. Representasi setiap titik terhadap S_3 adalah:

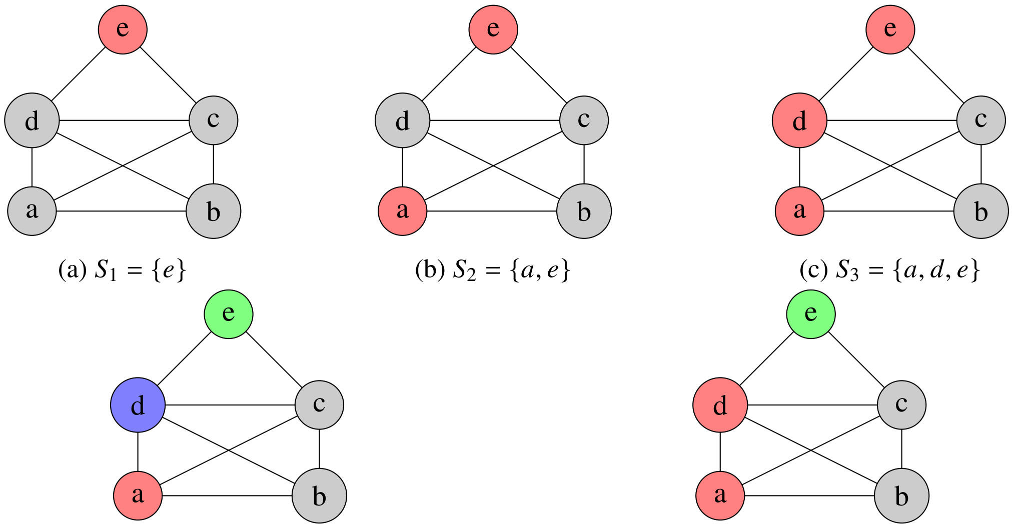
$$r(a|S_3) = (0, 1, 2) \qquad r(c|S_3) = (1, 1, 1) \qquad r(e|S_3) = (2, 1, 0)$$
$$r(b|S_3) = (1, 1, 2) \qquad r(d|S_3) = (1, 0, 1)$$

Karena S_3 himpunan pembeda minimal, disimpulkan $pd(G) = |S_3| = 3$.

2.5 Dimensi Partisi

Π adalah partisi titik graf G yang berukuran k jika Π mempartisi $V(G)$ menjadi subhimpunan-subhimpunan tak kosong sedemikian hingga setiap titik di G adalah anggota dari tepat satu subhimpunan di Π. Π berkardinalitas k disebut k-partisi.

Misalkan G adalah graf terhubung. Untuk sebuah titik $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap k-partisi titik terurut $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$, didefinisikan sebagai k-vektor $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), ..., d(v, S_k))$. Partisi Π disebut *partisi pembeda* jika setiap k-vektor $r(v|\Pi)$, $v \in V(G)$, unik. Partisi pembeda yang mempunyai banyak



(a) $S_1 = \{e\}$ (b) $S_2 = \{a, e\}$ (c) $S_3 = \{a, d, e\}$

(d) $\Pi = \{\{a\}, \{d\}, \{e\}, \{b, c\}\}$ (e) $\Phi = \{\{a, d\}, \{e\}, \{b, c\}\}$

Gambar 2.5: Berbagai basis partisi graf amplop

partisi yang paling sedikit disebut *basis* bagi G dengan kardinalitasnya disebut *dimensi partisi* dari G, ditulis sebagai $pd(G)$.

Contoh 7. Perhatikan kembali graf amplop G pada Gambar 2.5. Dapat langsung dikonstruksikan partisi pembeda yang menggunakan setiap titik di himpunan pembeda minimalnya (Gambar 2.5c) sebagai partisi singleton dan titik sisanya sebagai satu partisi yang berbeda (Gambar 2.5d). Namun, ternyata G memiliki partisi pembeda yang ukurannya lebih kecil, seperti terlihat pada Gambar 2.5e.

Berikut representasi titik-titik di G terhadap partisi Φ.

$$r(a|\Phi) = (0, 2, 1) \qquad r(c|\Phi) = (1, 1, 0) \qquad r(e|\Phi) = (1, 0, 1)$$
$$r(b|\Phi) = (1, 2, 0) \qquad r(d|\Phi) = (0, 1, 1)$$

2.6 Hasil-Hasil Penelitian Dimensi Partisi

Dari Contoh 7, diperoleh suatu wawasan bahwa keberadaan partisi pembeda berkardinalitas $p + 1$ untuk suatu graf dapat dijamin jika telah didapatkan himpunan pembeda yang berkardinalitas p. Oleh karena itu, diperoleh teorema berikut.

Teorema 1 (Chartrand et al., 2000)**.** *Misalkan G suatu graf tak trivial, terhubung, dan sederhana, maka*

$$pd(G) \leq dim(G) + 1.$$

Bukti. Misalkan $dim(G) = k$ dan $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ adalah basis bagi G. Pandang partisi terurut $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_{k+1}\}$ dengan $S_i = \{v_i\}(1 \leq i \leq k)$ dan $S_{k+1} = V(G) - S$. Karena $r(u, S) = (d(u, v_1), d(u, v_2), ..., d(u, v_k), 0)$ untuk $u \in V(G) - S$ dan S adalah himpunan pembeda bagi G, representasi $r(u, \Pi), u \in S_{k+1}$ unik. Selain itu, hanya representasi $r(v_i|\Pi)$ yang punya nilai 0 pada entri ke-i, $1 \leq i \leq k$. Artinya, $r(u|\Pi) \neq r(v_i|\Pi)$ untuk semua $u \in S_{k+1}$ dan semua $1 \leq i \leq k$. Akibatnya, Π adalah partisi pembeda bagi G, berukuran $k + 1$. Jadi, $pd(G) \leq dim(G) + 1$. ∎

Lema berikut memberikan panduan umum dalam menentukan kondisi ketika sepasang titik harus dipisahkan pada himpunan partisi yang berbeda.

Lema 2 (Chartrand et al., 2000)**.** *Misalkan* Π *partisi pembeda bagi G dan* $u, v \in V(G)$*. Jika* $d(u, w) = d(v, w)$ *untuk semua* $w \in V(G) - \{u, v\}$*, maka u dan v berada pada di himpunan yang berbeda pada* Π.

Bukti. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ dengan $u, v \in S_i \in \Pi$, maka $d(u, S_i) = d(v, S_i) = 0$, karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u, v\}$, dan $d(u, S_j) = d(v, S_j)$ untuk seluruh $j, 1 \leq j \neq i \leq k$. Jadi, $r(u|\Pi) = r(v|\Pi)$ dan Π bukanlah partisi pembeda. ∎

Lebih lanjut, teorema berikut memberikan batas bawah dan atas dimensi partisi yang cukup ketat untuk sebarang graf. Batas bawah dipenuhi oleh graf lintasan, sedangkan batas atas dipenuhi oleh graf lengkap.

Teorema 3 (Chappell et al., 2008)**.** *Jika G graf dengan orde* $n \geq 3$ *dan diameter d, maka*

$$h(n, d) \leq pd(G) \leq n - d + 1, \qquad (2.6.1)$$

dengan $h(n, d) = k$ *adalah bilangan bulat terkecil yang memenuhi* $k(d)^{k-1} \geq n$.

Bukti. Pandang G graf sederhana, terbatas, dan berdiameter d dengan $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_d, ...v_n\}$.

Pertama, dibuktikan batas atasnya. Misalkan u dan v adalah titik di G yang memenuhi $d(u, v) = d$ dan misalkan $u = v_1, v_2, ..., v_{d+1} = v$ adalah lintasan $u - v$ yang panjangnya d. Konstruksi partisi $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_(n - d + 1)\}$ dengan $S_1 = \{v_1, v_2, ..., v_d\}$ dan $S_i = \{v_(i + d - 1)\}$, untuk $2 \leq i \leq n - d + 1$.

Jelas bahwa titik-titik di S_1 terbedakan oleh S_2. Kemudian, S_i, untuk $2 \leq i \leq n-d+1$, adalah partisi singleton, sehingga semua titik yang berada di tiap partisi tersebut terbedakan. Didapat bahwa semua titik terbedakan. Artinya, Π adalah partisi pembeda sehingga $pd(G) \leq n - d + 1$.

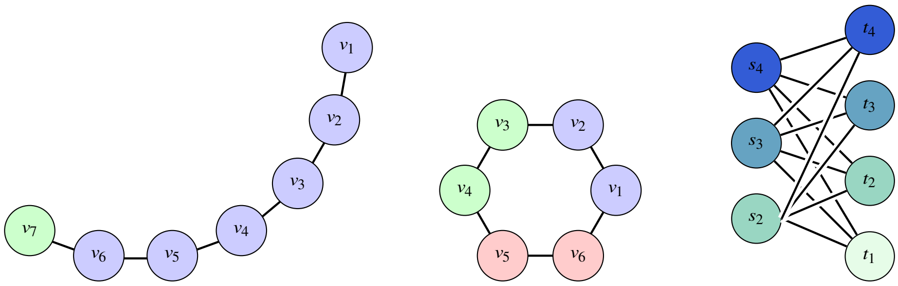
Kemudian, misalkan $pd(G) = k$ dan Π adalah partisi berkardinalitas k yang membedakan $V(G)$. Perhatikan bahwa setiap representasi titik di G adalah k-vektor. Salah satu entrinya haruslah bernilai 0 tepat pada entri ke-i, dengan i adalah urutan partisi yang mengandung titik tersebut. Terdapat sebanyak k pilihan tempat untuk entri 0. Selanjutnya, ada sebanyak d buah pilihan angka koordinat, yaitu $1, \ldots, d$, untuk $k - 1$ entri yang tersisa. Oleh karena itu, terdapat paling banyak kd^{k-1} kemungkinan representasi titik sedemikian hingga keseluruh n titik di G terbedakan. Akibatnya, k haruslah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi $kd^{k-1} \geq n$ sehingga $pd(G) \geq k = h(n, d)$. ■

Teorema berikut memberikan karakterisasi dimensi partisi terkecil dan dimensi partisi terbesar.

Teorema 4 (Chartrand et al., 2000)**.** *Untuk n adalah orde graf G, berlaku*

- $pd(G) = 2 \Leftrightarrow G = P_n$;
- $pd(G) = n \Leftrightarrow G = K_n$.

Selanjutnya, secara khusus untuk graf berdiameter 2, hubungan antara diameter, orde, dan dimensi partisinya ditunjukkan oleh teorema berikut.



(a) P_7 (b) C_6 (c) $K_{3,4}$

Gambar 2.6: Partisi pembeda beberapa graf.

Teorema 5 (Chappell et al., 2008)**.** *Orde maksimum dari graf berdiameter 2 dan berdimensi partisi $k \geq 2$ adalah*

$$l\left[\binom{2l-1}{l} + 2^{2l-1}\right], \text{ jika } k = 2l$$

dan

$$(2l+1)\left[\binom{2l-1}{l} + 2^{2l-1}\right], \text{ jika } k = 2l+1.$$

Berikut beberapa nilai eksak dimensi partisi beberapa kelas graf yang ikut dikaji.

Akibat 5.1 (Chartrand et al., 2000)**.** *Untuk $n \geq 3$ dan $r, s \geq 1$, berlaku*

- $pd(C_n) = 3$;
- $pd(K_{r,s}) = \begin{cases} r+1, & r = s; \\ max\{r,s\}, & r \neq s. \end{cases}$

Contoh 8. $\Pi = \{\{v_1, ..., v_6\}, \{v_7\}\}$ adalah salah satu partisi pembeda minimal untuk P_7. Berikut representasi tiap titiknya.

$$r(v_7|\Pi) = (1,0) \qquad r(v_i|\Pi) = (0, 7-i), 1 \leq i \leq 6$$

Contoh 9. $\Pi = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}\}$ adalah salah satu partisi pembeda minimal untuk C_6. Berikut representasi tiap titiknya.

$$r(v_1|\Pi) = (0,2,1) \qquad r(v_3|\Pi) = (1,0,2) \qquad r(v_5|\Pi) = (2,1,0)$$
$$r(v_2|\Pi) = (0,1,2) \qquad r(v_4|\Pi) = (2,0,1) \qquad r(v_6|\Pi) = (1,2,0)$$

Contoh 10. $\Pi = \{\{t_1\}\{t_2, s_2\}, \{t_3, s_3\}, \{t_4, s_4\}\}$ adalah salah satu partisi pembeda minimal untuk $K_{3,4}$. Berikut representasi tiap titiknya.

$$r(t_1|\Pi) = (0,1,1,1)$$
$$r(t_2|\Pi) = (2,0,1,1) \qquad r(t_3|\Pi) = (2,1,0,1) \qquad r(t_4|\Pi) = (2,1,1,0)$$
$$r(s_2|\Pi) = (2,0,1,1) \qquad r(s_3|\Pi) = (1,1,0,1) \qquad r(s_4|\Pi) = (1,1,1,0)$$

Bab 3 Graf Hasil Kali 2-Kuat dan Dimensi Partisinya

3.1 Graf Hasil Kali k-Kuat

Operasi kali k-kuat adalah perumuman dari operasi kuat pada graf. Perhatikan bahwa pada Definisi 2, pada syarat ke-3, sisi yang dibentuk adalah sisi dari titik-titik yang saling bertetangga di graf asalnya. Titik-titik tersebut dapat dipandang sebagai pasangan titik yang berjarak 1. Di sanalah letak perumuman definisi operasi kali kuat dengan syarat ketiga yang dimodifikasi.

Definisi 4. Untuk graf G dan H, *graf hasil kali k-kuat* $G \boxtimes_k H$ adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(G) \times V(H)$, dengan titik (u, x) dan (v, y) bertetangga jika dan hanya jika

- $uv \in E(G)$ dan $x = y$, atau
- $u = v$ dan $xy \in E(H)$, atau
- $d_G(u, v) = k$ dan $d_H(x, y) = k$.

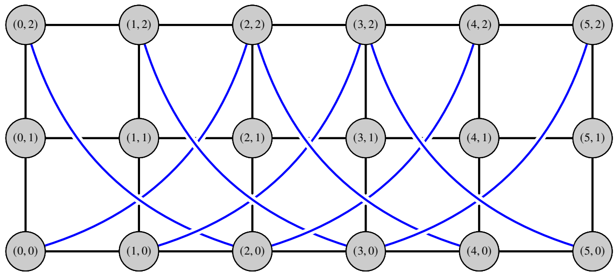
Sisi yang dibentuk oleh poin terakhir dinamakan sebagai *sisi kuat* dan titik-titik yang terkait dengannya disebut *titik kuat*.

Contoh 11. Pandang graf 3-lintasan P_3 dan graf 6-lintasan P_6. Misalkan $V(P_3) = \{0, 1, 2\}$ dan $V(P_6) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, maka

$$\begin{aligned} V(P_6 \boxtimes_2 P_3) = \quad & \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), \\ & (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2), \\ & (4,0), (4,1), (4,2), (5,0), (5,1), (5,2)\}, \end{aligned}$$

dan sisi-sisinya seperti terlihat pada Gambar 3.1

Jika tidak ada sepasang titik baik di graf G maupun graf H yang berjarak lebih dari k, maka graf hasil kali k-kuat antara dua graf tersebut akan sama saja dengan graf hasil kali Cartesiusnya. Dari sini, agar penelitian berfokus pada bahasan graf kali



Gambar 3.1: Graf $P_6 \boxtimes_2 P_3$

k-kuat saja, maka diformulasikan syarat diameter graf-graf asalnya dari graf hasil kali k-kuat sebagai berikut.

Proposisi 1. *Misalkan G dan H adalah graf dengan minimal diameternya kurang dari $k(k \geq 2)$, maka*

$$G \boxtimes_k H = G \square H.$$

Bukti. Misalkan $min\{diam(G), diam(H)\} < k$. Jelas terlihat dari definisi graf hasil kali Cartesius, bahwa tidak terdapat pasangan titik di graf G dan H yang memenuhi syarat ke-3 definisi graf hasil kali k-kuat, karena $d_{G \square H}(u, v) < k$. Akibatnya, $G \boxtimes_n H$ tidak memiliki sisi kuat. ■

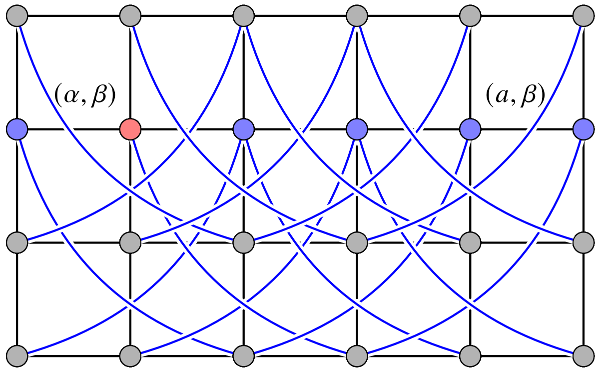
Dari syarat diameter tersebut, didapatkan observasi berikut.

Observasi 1. *Misalkan G dan H adalah graf berdiameter paling kecil k, maka graf $G \boxtimes_k H$ mengandung subgraf yang isomorfis terhadap $P_{k+1} \boxtimes_k P_{k+1}$.*

Lebih jauhnya lagi, jika $diam(G) = k$ dan $diam(H) = l$ dengan $k \leq l$, maka graf $G \boxtimes_k H$ mengandung subgraf yang isomorfis terhadap $P_{k+1} \boxtimes_k P_{l+1}$.

Observasi di atas akan berguna jika graf hasil kali 2-kuat graf-graf lintasan telah dikaji. Karakteristik dari graf tersebut lalu digunakan oleh graf hasil kali 2-kuat kelas graf lainnya.

Selanjutnya, jarak antar titik pada graf kali 2-kuat dapat diketahui nilainya secara pasti untuk titik-titik pada lapisan yang sama.



Gambar 3.2: Ilustrasi Lema 6

Lema 6. *Misalkan G dan H graf sederhana, terhubung, tak-trivial, dan berdiameter paling kecil 2. Misalkan titik* $u = (a, b) \in V(G \boxtimes_2 H)$ *dan* $v = (\alpha, \beta) \in V(G \boxtimes_2 H)$*.*

Jika $\beta = b$*, maka*

$$d_{G\boxtimes_2 H}(u, v) = 2\left\lfloor \frac{d_G(a, \alpha)}{4} \right\rfloor + (d_G(a, \alpha) \mod 4).$$

Jika $\alpha = a$*, maka*

$$d_{G\boxtimes_2 H}(u, v) = 2\left\lfloor \frac{d_H(b, \beta)}{4} \right\rfloor + (d_H(b, \beta) \mod 4).$$

Bukti. Dalam mencari lintasan terpendek antara dua titik pada graf hasil kali 2-kuat, dapat dipilih strategi yang mengutamakan sisi-sisi kuat dilewati terlebih dahulu. Perhatikan bahwa lintasan yang berasal dari titik u akan dapat kembali ke baris u jika telah melewati 2 sisi kuat dan kelipatannya. Sementara itu, 2 lompatan yang dilakukan 2 sisi kuat akan melewati empat titik di baris u. Dengan begitu, langkah ini diwakilkan dengan $2\left\lfloor \frac{d_G(a,\alpha)}{4} \right\rfloor$.

Kemudian, setelah menggunakan sisi-sisi kuat lintasan, ketika sudah cukup dekat dengan titik v, sisi-sisi di baris u akan dilintasi untuk mencapai v. Jika langkah-langkah sebelumnya optimum, maka sisi yang harus dilewati dapat sebanyak 0, 1, 2, atau 3, bergantung seberapa besar jarak v dengan titik kuat terdekatnya. Langkah ini diwakilkan oleh $(d_H(b, \beta) \mod 4)$, sehingga didapatkan persamaan di atas. ■

3.2 Dimensi Partisi Graf Kuasa Ke-k dari Suatu Graf

Secara umum, graf hasil kali k-kuat memiliki properti yang cukup kompleks. Oleh karena itu, untuk meneliti graf hasil kali 2-kuat, akan dimanfaatkan kemiripannya dengan graf kuadrat (graf kuasa ke-2) dari setiap graf asalnya. Di akhir subbab ini, diperoleh batas atas dimensi partisi graf hasil kali 2-kuat yang dijelaskan oleh dimensi partisi graf-graf asalnya.

Dari Definisi 3, dapat dengan mudah diketahui jarak antar titik pada graf kuadrat.

Lema 7. *Misalkan G suatu graf sederhana, terbatas, dan terhubung, dengan $u, v \in V(G) = V(G^2)$, maka*

$$d_{G^2}(u, v) = \left\lceil \frac{d_G(u, v)}{2} \right\rceil.$$

Bukti. Dari definisi graf kuasa, graf G^2 adalah graf dengan $V(G^2) = V(G)$ dan $E(G^2) = E(G) \cup \{ab : a, b \in V(G), d_G(a, b) = 2\}$. Artinya, untuk setiap pasang titik u, v, terdapat lintasan pada G^2 yang menghubungkan u dan v yang panjangnya lebih pendek daripada lintasan terpendek pada G yang menghubungkan u dan v. Tepatnya, lintasan pada G^2 tersebut akan melalui sisi-sisi yang berasal dari $\{ab : a, b \in G, d_G(a, b) = 2\}$. Karena itu, didapatkan persamaan di atas. ■

Selanjutnya, lema berikut dapat digunakan untuk mengkarakterisasi titik-titik yang tetap terbedakan di graf kuadrat, dengan masih menggunakan partisi yang membedakan graf asalnya.

Lema 8. *Misalkan G graf sederhana, terbatas, dan terhubung dengan $diam(G) \geq 2$ dan Π adalah partisi pembedanya. Jika u, v tidak bertetangga di G, maka u, v di G^2 juga masih terbedakan oleh Π.*

Bukti. Misalkan Π partisi pembeda bagi G. Misalkan pula u, v tidak bertetangga di G, maka $d_G(u, v) = s \geq 2$. Pandang sebarang himpunan $A \in \Pi$. Misalkan $d_G(v, A) = t$, maka $d_G(u, A) = s + t$. Perhatikan bahwa $d_{G^2}(u, A) = \left\lceil \frac{s+t}{2} \right\rceil$ dan $d_{G^2}(v, A) = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$. Karena $s \geq 2$, dengan induksi, jelas bahwa $\left\lceil \frac{s+t}{2} \right\rceil > \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil \implies$

$d_{G^2}(u, A) \neq d_{G^2}(v, A)$. Jadi, u, v terbedakan oleh Π. ■

3.2.1 Dimensi Partisi Graf Kuadrat

Dengan diketahuinya sifat dari Lema 8, dapat disusun strategi modifikasi partisi pembeda suatu graf sehingga graf kuadratnya tetap terbedakan.

Teorema 9. *Misalkan G suatu graf sederhana, terbatas, dan terhubung dengan $diam(G) \geq 2$, maka*

$$pd(G^2) \leq pd(G) + 2^{pd(G)-1} - 1.$$

Bukti. Misalkan $\Pi = \{\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{pd(G)}\}$ adalah partisi pembeda bagi G. Misalkan suatu titik $u \in A_i, 1 \leq i \leq pd(G)$, dengan representasinya terhadap Π di G adalah

$$r(u|\Pi) = (d_1, d_2, ..., d_{pd(G)}), d_i = 0.$$

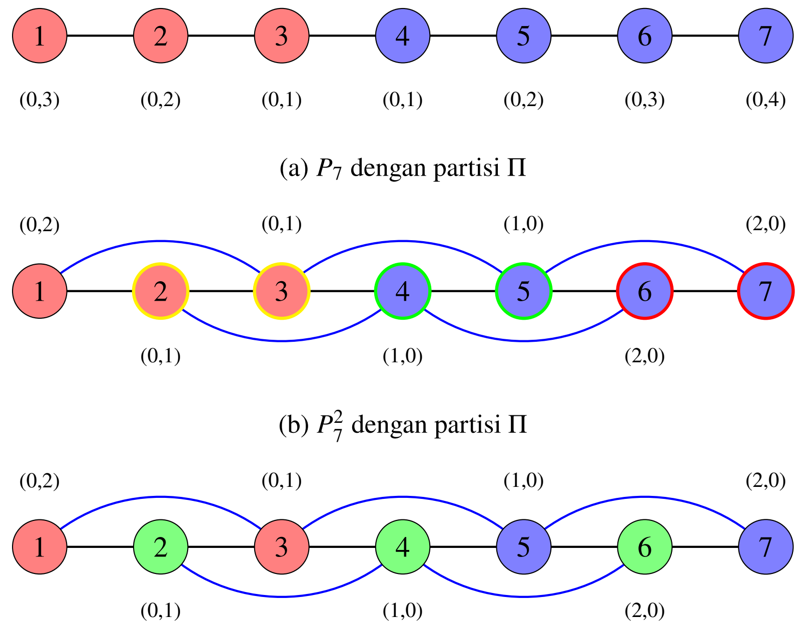
Berdasarkan Lema 7, representasi u terhadap Π di graf G^2 adalah

$$r(u|\Pi) = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_{pd(G)}),$$

dengan $\delta_i = \lceil d_i/2 \rceil, 1 \leq i \leq pd(G)$.

Akibatnya, terdapat titik-titik di graf G^2 yang representasi terhadap Π-nya sama. Kemudian, karena untuk setiap i, $1 \leq i \leq pd(G)$, berlaku δ_i adalah hasil pemetaan dari dua nilai (d_i ganjil dan $d_i + 1$), diperoleh dalam suatu himpunan A_i, maksimal banyaknya titik dengan suatu representasi yang sama adalah $2^{pd(G)-1}$.

Misalkan G^2 memiliki himpunan titik berepresentasi sama tadi sebanyak n, yaitu $R_m, (m = 1, ..., n)$, yang masing-masing himpunan berukuran $s_m \leq 2^{pd(G)-1}$. Misalkan $s = max\{s_1, ..., s_m\}$. Definisikan himpunan $R_m = \{u_{m,1}, ..., u_{m,s_m}\}$ untuk setiap m, sedemikian hingga $u_{a,c}$ dan $u_{b,c}$ tidak bertetangga, untuk setiap $a, b \in \{1, ..., n\}, a \neq b$, dan setiap $c \in \{1, ..., s\}$.



(a) P_7 dengan partisi Π

(b) P_7^2 dengan partisi Π

(c) P_7^2 dengan partisi $\Pi' \cap B$

Gambar 3.3: Ilustrasi Contoh 12

Selanjutnya, dikonstruksi koleksi himpunan baru $B = \{B_1, ..., B_{s-1}\}$, dengan

$$B_i = \{u_{m,i} : 1 \leq m \leq n\}.$$

Misalkan $\Pi' = \{S_i : S_i = \Pi_i - B_i, 1 \leq 1 \leq pd(G)\}$. Karena Π adalah partisi pembeda bagi G, Π' membedakan seluruh titik $u \in \Pi'_j, 1 \leq j \leq pd(G)$. Kemudian, B membedakan seluruh pasangan $u, v \in B_i, 1 \leq i \leq pd(G)$, karena u, v tidak bertetangga (Lema 8). Dapat disimpulkan bahwa partisi $\Pi' \cup B$ membedakan $V(G^2)$.

Karena $|B| = s - 1 \leq 2^{pd(G)-1} - 1$, diperoleh $pd(G^2) \leq pd(G) + 2^{pd(G)-1} - 1$. ■

Contoh 12. Pandang graf P_7 dan P_7^2 dengan $V(P_7) = V(P_7^2) = \{i : 1 \leq i \leq 7, \}$. Definisikan partisi $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}\}$ sehingga P_7 terbedakan oleh Π seperti yang terlihat pada Gambar 3.3a. Namun Π tidak membedakan P_7^2. Terdapat tiga himpunan titik berepresentasi sama, yaitu $R_1 = \{2, 3\}$ dengan representasi (0,1), $R_2 = \{4, 5\}$ dengan representasi (1,0), dan $R_3 = \{6, 7\}$ dengan representasi (2,0).

Karena kardinalitas terbesar dari R_i tadi adalah 2, kebetulan sama dengan $2^{pd(P_7)-1}$, cukup dikonstruksi $2 - 1 = 1$ sel partisi tambahan yang anggotanya adalah satu titik dari tiap himpunan titik berepresentasi sama. Pilih $B_1 = \{2, 4, 6\}$ sehingga $\Pi' = \{\{1, 3\}, \{5, 7\}\}$.

Akhirnya, diperoleh $\Pi' \cup \{B_1\}$ membedakan P_7^2 seperti terlihat pada Gambar 3.3c.

Pemilihan partisi pembeda untuk kuadrat graf lintasan berlaku untuk sebarang orde. Selain itu, dengan mengecek secara komputasional hingga orde yang cukup besar, ditemukan bahwa dimensi partisi untuk kuadrat graf lingkaran berada di rentang 3 hingga 5. Namun, belum bisa dibuktikan bahwa tidak ada kuadrat graf lingkaran yang dimensi partisinya 6, sehingga batas atasnya diambil dari Teorema 9. Sedangkan untuk graf bipartit lengkap, kuadratnya akan menghasilkan graf lengkap sehingga nilai dimensi partisi kuadrat graf bipartit lengkap akan sama dengan nilai ordenya.

Proposisi 2. *Untuk $m \geq 1, n \geq 3$, berlaku*

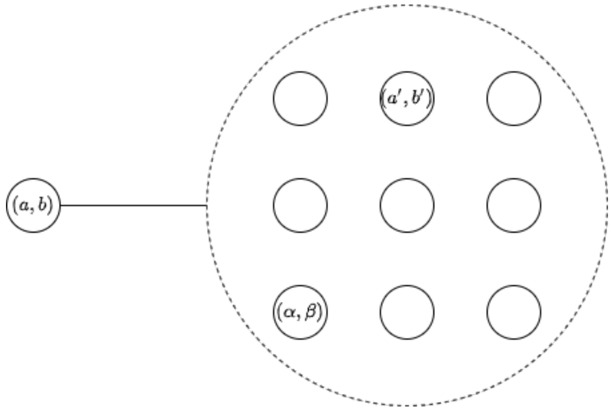
- $pd(P_n^2) = 3$,
- $3 \leq pd(C_n^2) \leq 6$,
- $pd(K_{m,n}^2) = pd(K_{m+n}) = m + n$.

Sejauh ini, diketahui batas atas Teorema 9 ketat untuk graf lintasan. Batas tersebut akan cukup berguna untuk graf-graf yang dimensi partisinya tidak bergantung terhadap ordenya, seperti graf lintasan dan graf lingkaran.

3.2.2 Hubungan Dimensi Partisi Graf Kali 2-Kuat dan Graf Kuadrat

Di bawah ini ditunjukkan bahwa jarak antar titik di graf hasil kali 2-kuat dibatasi oleh jarak antar titik di graf kuadrat graf-graf asalnya. Keterangan ini akan berguna untuk mendapatkan hubungan dimensi partisi antara graf-graf hasil kedua operasi tersebut.

Lema 10. *Misalkan G dan H adalah graf terhubung non trivial yang berdiameter paling kecil 2. Misalkan $A \subset V(G)$ dan $B \subset V(H)$.*



Gambar 3.4: Ilustrasi Lema 10

Untuk setiap $a \in A$ dan $b \notin B$,

$$d_{H^2}(b, B) \leq d_{G \boxtimes_2 H}((a, b), A \times B) \leq d_{H^2}(b, B) + 2. \qquad (3.2.1)$$

Untuk setiap $a \notin A$ dan $b \in B$,

$$d_{G^2}(a, A) \leq d_{G \boxtimes_2 H}((a, b), A \times B) \leq d_{G^2}(a, A) + 2. \qquad (3.2.2)$$

Bukti. Pandang $a \in A$ dan $b \notin B$. Misalkan $d_{H^2}(b, B) = s$. Karena graf hasil kali 2-kuat mengandung sisi-sisi kuat, diklaim bahwa terdapat subgraf I di $G \boxtimes_2 H$ yang isomorfis $P_3 \boxtimes_2 P_3$ sedemikian sehingga I memuat (α, β) dan memuat $(a', b') \in A \times B$, dengan $d_{G \boxtimes_2 H}((a, b), (a', b')) = d_{G \boxtimes_2 H}((a, b), A \times B)$ dan $d_{G \boxtimes_2 H}((a, b), (\alpha, \beta)) = s$.

Karena $diam(P_3 \boxtimes_2 P_3) = 2$, diperoleh $d_{G \boxtimes_2 H}((\alpha, \beta), (a', b')) \leq 2$. Karena itu, $s \leq d_{G \boxtimes_2 H}((a, b), A \times B) \leq s + 2$, sesuai dengan persamaan 3.2.1. Kesamaan didapat jika $(\alpha, \beta) = (a', b')$.

Dengan cara serupa di atas, untuk $a \notin A$ dan $b \in B$, diperoleh pertaksamaan 3.2.2 dengan kesamaan didapat jika $(\alpha, \beta) = (a', b')$. ∎

Teorema 11. *Misalkan G dan H adalah graf-graf sederhana, terbatas, terhubung,* *dan berdiameter minimal 2, maka*

$$pd(G \boxtimes_2 H) \leq pd(G^2) \cdot pd(H^2).$$

Bukti. Misalkan $\Pi_1 = \{A_1, A_2, ..., A_s\}$ dan $\Pi_2 = \{B_1, B_2, ..., B_t\}$ masing-masing adalah partisi pembeda dari G^2 dan H^2. Akan ditunjukkan bahwa $\Pi = \{A_i \times B_j : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t\}$ adalah himpunan pembeda dari $G \boxtimes_2 H$.

Misalkan $(a, b), (\alpha, \beta)$ adalah dua titik berbeda dari $V(G \boxtimes_2 H)$, dengan $a, \alpha \in V(G) = V(G^2)$ dan $b, \beta \in V(H) = V(H^2)$. Perhatikan bahwa jika $(a, b), (\alpha, \beta)$ berada pada himpunan yang berbeda di Π, maka kedua titik tersebut terbedakan oleh Π, karena $d_{G^2}(a, A_i) \neq d_{G^2}(\alpha, A_i)$, untuk $1 \leq i \leq s$; dan $d_{H^2}(b, B_i) \neq d_{G^2}(\beta, B_i)$, untuk $1 \leq i \leq t$.

Selanjutnya ditinjau kasus $(a, b), (\alpha, \beta)$ berada pada himpunan yang sama di Π.

- **Kasus 1:** $a = \alpha$, maka terdapat $i \in \{1, ..., s\}$ sedemikian hingga $a \in A_i$. Selain itu, perhatikan bahwa terdapat $B_j \in \Pi_2$ untuk suatu $j \in \{1, ..., t\}$, sedemikian sehingga $d_{H^2}(b, B_j) \neq d_{H^2}(\beta, B_j\}$

  $\implies d_{H^2}(b, B_j) - d_{H^2}(\beta, B_j\} \neq 0.$

  Dari Lema 10, diperoleh

  $$d_{H^2}(b, B_j) \leq d_{G \boxtimes_2 H}((a, b), A_i \times B_j) \leq d_{H^2}(b, B_j) + 2$$

  dan

  $$d_{H^2}(\beta, B_j) \leq d_{G \boxtimes_2 H}((\alpha, \beta), A_i \times B_j) \leq d_{H^2}(\beta, B_j) + 2$$

  Dengan mencari selisih dua pertidaksamaan di atas, diperoleh

  $d_{G \boxtimes_2 H}((a, b), A_i \times B_j) - d_{G \boxtimes_2 H}((\alpha, \beta), A_i \times B_j) = d_{H^2}(b, B_j) - d_{H^2}(\beta, B_j)$

  $\implies d_{G \boxtimes_2 H}((a, b), A_i \times B_j) - d_{G \boxtimes_2 H}((\alpha, \beta), A_i \times B_j) \neq 0$

$\implies d_{G\boxtimes_2 H}((a,b), A_i \times B_j) \neq d_{G\boxtimes_2 H}((\alpha,\beta), A_i \times B_j).$

$\implies (a,b),(\alpha,\beta)$ terbedakan.

- **Kasus 2:** $a \neq \alpha$, maka terdapat $A_k \in \Pi_1$ untuk suatu $k \in \{1,...,t\}$, sedemikian sehingga $d_{G^2}(a, A_k) \neq d_{G^2}(\alpha, A_k\}$. Lalu, karena $(a,b),(\alpha,\beta)$ berada dalam himpunan yang sama di Π, terdapat $l \in \{1,...,t\}$ sedemikian hingga $b,\beta \in B_l$. Serupa dengan argumen sebelumnya, dengan menggunakan Lema 10, diperoleh

$$d_{G^2}(a, A_k) \leq d_{G\boxtimes_2 H}((a,b), A_k \times B_l) \leq d_{G^2}(a, A_k) + 2$$

dan

$$d_{G^2}(\alpha, A_k) \leq d_{G\boxtimes_2 H}((a,b), A_k \times B_l) \leq d_{G^2}(\alpha, A_k) + 2.$$

Dengan mencari selisih dua pertidaksamaan di atas, diperoleh

$d_{G\boxtimes_2 H}((a,b), A_k \times B_l) - d_{G\boxtimes_2 H}((\alpha,\beta), A_k \times B_l) = d_{G^2}(a, A_k) - d_{G^2}(\alpha, A_k)$

$\implies d_{G\boxtimes_2 H}((a,b), A_k \times B_l) - d_{G\boxtimes_2 H}((\alpha,\beta), A_k \times B_l) \neq 0$

$\implies d_{G\boxtimes_2 H}((a,b), A_k \times B_l) \neq d_{G\boxtimes_2 H}((\alpha,\beta), A_k \times B_l).$

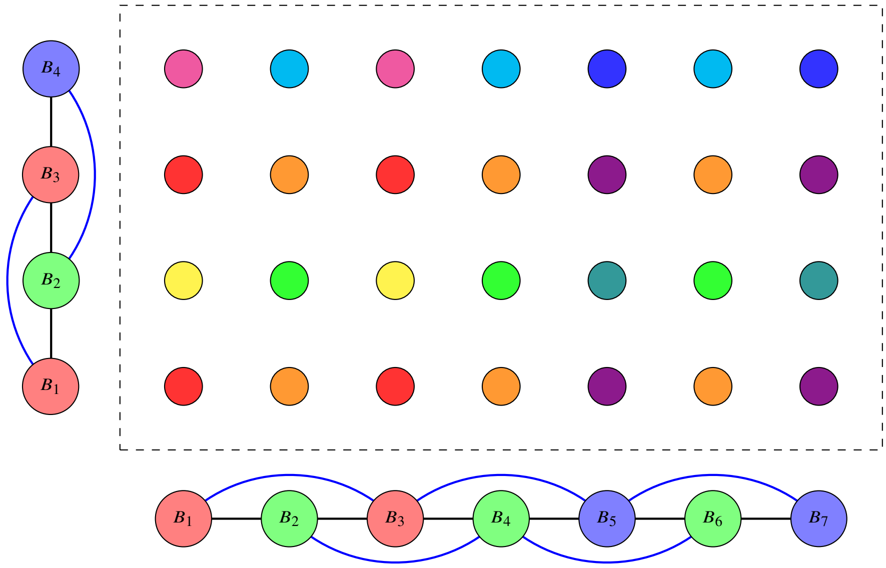
$\implies (a,b),(\alpha,\beta)$ terbedakan.

Akibatnya, untuk setiap dua titik berbeda $(a,b),(\alpha,\beta) \in V(G \boxtimes_2 H)$, didapat $r((a,b)|\Pi) \neq r((\alpha,\beta)|\Pi)$ sehingga Π himpunan pembeda dan batas atas terpenuhi. ∎

Dengan demikian, dapat dituliskan ulang hasil-hasil di atas sebagai berikut.

Akibat 11.1. *Misalkan G dan H adalah graf-graf sederhana, terbatas, terhubung, dan berdiameter minimal 2, maka*

$$3 \leq pd(G \boxtimes_2 H) \leq (pd(G) + 2^{pd(G)-1} - 1) \cdot (pd(G) + 2^{pd(G)-1} - 1).$$



Gambar 3.5: Ilustrasi batas atas pada Teorema 11, partisi pembeda untuk graf $P_4 \boxtimes_2 P_7$

Didapatkan batas atas dimensi partisi graf hasil kali 2-kuat dari beberapa kombinasi kelas graf berikut.

Akibat 11.2. *Untuk* $s \geq 1$ *dan* $n, m, t \geq 3$*, diperoleh:*

- $pd(P_m \boxtimes_2 P_n) \leq 3 \cdot 3 = 9$*;*
- $pd(P_m \boxtimes_2 C_n) \leq 3 \cdot 6 = 18$*;*
- $pd(P_n \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq 3 \cdot (s + t)$*;*
- $pd(C_m \boxtimes_2 C_n) \leq 6 \cdot 6 = 36$*;*
- $pd(C_n \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq 6 \cdot (s + t)$*;*
- $pd(K_{m,n} \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq (m + n) \cdot (s + t)$*.*

Teorema 11 memberikan gambaran awal cara membentuk partisi yang membedakan graf hasil kali 2-kuat, dengan melakukan dua langkah. Pertama, mencari terlebih dahulu partisi pembeda bagi kuadrat graf-graf asalnya dengan memodifikasi partisi pembeda bagi graf-graf asal tersebut. Kedua, mengonstruksi partisi pembeda untuk graf hasil kali 2-kuat yang merupakan kali Cartesius partisi pembeda bagi kuadrat graf-graf asalnya. Misalkan selisih antara kardinalitas partisi pembeda yang dibentuk dari prosedur di atas dengan dimensi partisinya dianggap sebagai eror, maka eror dari langkah pertama akan bertumpuk dengan eror di langkah kedua. Akibatnya, batas atas Teorema 11 bisa jadi masih cukup longgar, atau tidak ada graf yang ketat memenuhi batas atas tersebut. Oleh karena itu, penelitian ini mencoba melakukan penyelesaian dari sudut pandang lain, yaitu pengaruh diameter graf hasil kali 2-kuat terhadap dimensi partisinya. Bahasan akan dibatasi pada kelas-kelas graf tertentu.

3.3 Dimensi Partisi Graf Hasil Kali 2-Kuat Beberapa Kelas Graf

Untuk memulai bahasan subbab ini, observasi yang cukup intuitif berikut perlu untuk disebutkan.

Observasi 2. *Untuk G dan H graf sederhana, terhubung, dan berdiameter minimal 2, diameter graf $G \boxtimes_2 H$ bergantung pada diameter paling besar antara diameter G dan H.*

Dengan kata lain, dalam mengkaji diameter graf hasil kali 2-kuat antara dua graf, hanya perlu diperhatikan graf asal dengan diameter terbesar.

3.3.1 Dimensi Partisi $P_m \boxtimes_2 P_n$

Karena setiap graf lain akan mengandung subgraf isomorfis graf lintasan berorde tertentu, ditambah dengan jaminan Observasi 1, maka graf hasil kali 2-kuat antara graf-graf lintasan perlu dikaji terlebih dahulu.

Observasi 3.

$$diam(P_m \boxtimes_2 P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1, & m = 3, n \in \{3,4\} \text{ atau } 4 \leq m \leq n; \\ \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 2, & 4 \leq m \leq n. \end{cases}$$

Misalkan graf P_n, memiliki himpunan sisi $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$ dengan lintasan terpanjang adalah $0, 1, ..., n-2, n-1$. Perhatikan bahwa diameter dari graf lintasan berorde n adalah $n-1$, sehingga berdasarkan Lemma 7, diameter dari P_n^2 adalah $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$. Kemudian jarak antara $(0,0)$ dengan $(0, n-1)$ dan dengan $(2, n-1)$ dapat dipandang sebagai jarak antara titik 0 dengan titik $n-1$ pada graf P_n^2, dengan jarak yang mungkin adalah $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ atau $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1$.

Dapat dicek dengan mudah bahwa diameter $P_3 \boxtimes_2 P_3$ dan $P_3 \boxtimes_2 P_4$ masing-masing *adalah 2 dan 3. Selain itu, perlu diperhatikan beberapa kasus berikut.*

(i) Misalkan $n \mod 4 = 3$*. Jika* $m \geq 4$*, maka lintasan untuk jarak terpanjangnya ialah* $(0,0),(2,2),...,(2,n-1),(1,n-1)$*, sehingga diameternya* $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$*. Jika* $m = 3$ *dan* $n \neq 3$*, maka lintasan untuk jarak terpanjangnya ialah* $(0,1),(0,0),(2,2),...,(2,n-1),(1,n-1)$ *sehingga diameternya* $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1 = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$.

(ii) Misalkan $n \mod 4 = 0$*. Jika* $m \geq 4$*, maka lintasan untuk jarak terpanjangnya ialah* $(0,0),(2,2),...,(2,n-2),(2,n-1),(1,n-1)$*, sehingga diameternya* $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$*. Jika* $m = 3, n \neq 4$*, maka lintasan untuk jarak terpanjangnya ialah* $(0,1),(0,0),(2,2),...,(2,n-2),(2,n-1),(1,n-1)$*, sehingga diameternya* $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$.

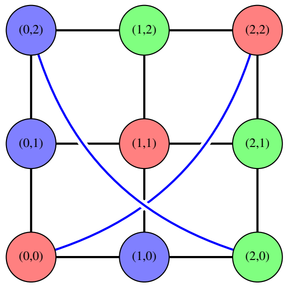
(iii) Misalkan $n \mod 4 = 1$*. Jika* $m \geq 4$ *maka lintasan untuk jarak terpanjangnya adalah* $(0,0),(2,2),...,(0,n-1),(1,n-1)$*, sehingga diameternya* $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$*. Jika* $m = 3$*, lintasan untuk jarak terpanjangnya ialah* $(0,1),(0,0),(2,2),...,(0,n-1),(1,n-1)$*, sehingga diameternya* $1 + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1 = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$.

(iv) Misalkan $n \mod 4 = 2$*. Jika* $m \geq 4$ *maka lintasan untuk jarak terpanjangnya adalah* $(0,0),(2,2),...,(0,n-2),(0,n-1),(1,n-1)$*, sehingga diameternya* $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$*. Jika* $m = 3$*, maka lintasan untuk jarak terpanjangnya adalah* $(0,1),(0,0),(2,2),...,(0,n-2),(0,n-1),(1,n-1)$*, sehingga diameternya* $1 + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1 = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$.

Proposisi 3.

$$pd(P_3 \boxtimes_2 P_3) = 3$$

Bukti. Misalkan $G = H = P_3$. Karena graf $G \boxtimes_2 H$ bukan graf lintasan, berdasarkan Akibat 4, haruslah $pd(G \boxtimes_2 H) \geq 3$. Misalkan $V(G) = V(H)\{0,1,2\}$, dapat dikonstruksi partisi pembeda $\Pi = \{A, B, C\}$ dengan $A = \{(0,0),(1,1),(2,2)\}$, $B = \{(1,0),(0,1),(0,2)\}$, $C = \{(2,0),(2,1),(1,2)\}$ seperti terlihat pada Gambar 3.6. Dapat dibuktikan bahwa 3-partisi yang dapat membedakan graf ini hanyalah partisi yang isomorfis dengan Π. ∎



Gambar 3.6: Partisi pembeda minimal untuk graf $P_3 \boxtimes_2 P_3$

Proposisi 4. *Untuk* $n \geq 4$, *berlaku* $pd(P_3 \boxtimes_2 P_n) \leq 4$.

Bukti. Misalkan $S = \{(0,0),(0,2),(1,1)\} \subset V(P_3 \boxtimes_2 P_n)$ dengan $V(P_3) = \{0,1,2\}$ dan $V(P_n) = \{0,1,\ldots,n\}$. Perhatikan bahwa representasi titik-titik $(1,i)$, untuk $0 \leq i \leq n$, terhadap S adalah (α,α,β), dengan $\alpha = \left\lceil \frac{d_{P_n}(i,1)}{2} \right\rceil + 1$ dan $\beta = d((1,i),\{1,1\}) = 2\left\lfloor \frac{d_{P_n}(i,1)}{4} \right\rfloor + (d_{P_n}(i,1) \mod 4)$.

Perhatikan pula bahwa karena kesimetrisan, representasi titik-titik $(0,i)$ dan $(2,i)$ terhadap S masing-masing adalah (a,b,c) dan (b,a,c), dengan c tertentu, dan $a = 2\left\lfloor \frac{d_{P_n}(i,0)}{4} \right\rfloor + (d_{P_n}(i,0) \mod 4)$ serta $b = 2\left\lfloor \frac{d_{P_n}(i,2)}{4} \right\rfloor + (d_{P_n}(i,2) \mod 4)$. Jelas bahwa $a \neq b$. Akibatnya, semua titik $(0,i),(1,i),(2,i)$ terbedakan oleh S. Didapatkan $md(P_3 \boxtimes_2 P_n) \leq 3$, sehingga menurut Teorema 1, $pd(P_3 \boxtimes_2 P_n) \leq md(P_3 \boxtimes_2 P_n) + 1 \leq 4$. ■

Akibat 11.3. *Untuk* $m,n \geq 3$, *berlaku* $3 \leq pd(P_m \boxtimes_2 P_n) \leq 9$.

3.3.2 Dimensi Partisi $P_n \boxtimes_2 K_{s,t}$

Observasi 4.

$$diam(P_n \boxtimes_2 K_{s,t}) = \begin{cases} n-1, & \textit{untuk } s=1, t\geq 3, \textit{ dan } n \in \{3,4\}; \\ \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 2, & \textit{untuk } s=1, t \geq 3, \textit{ dan } n \geq 5; \\ \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1, & \textit{untuk } s \geq 2, t\geq 3, \textit{ dan } n \geq 3. \end{cases}$$

Misalkan $V(K_{s,t}) = \{u_1,...,u_s,v_1,...,v_t\}$ *dengan partisi pertama adalah* $u_1,...,u_s$ *dan partisi kedua adalah* $v_1,...,v_t$. *Misalkan pula* $V(P_n) = \{0,1,2,...,n-1\}$.

Untuk $s = 1, t \geq 3, n \in \{3,4\}$, perhatikan bahwa salah salah satu pasang titik dengan jarak terpanjang adalah titik $(0, t_1)$ dan titik $(n-1, t_2)$, dengan jaraknya ialah $n-1$.

Untuk kasus kedua dan ketiga, lintasan untuk jarak terpanjang di graf lintasan 2-kuat graf bipartit lengkap dapat ditentukan dengan cara yang mirip dilakukan pada Observasi 3 pada subgraf yang isomorfis dengan $P_3 \boxtimes_2 P_n$.

Akibat 11.4.

$$4 \leq pd(P_3 \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq 3(s+t) - 1 \qquad\qquad s \geq 1, t \geq 3$$

Contoh 13. Misalkan $V(P_n) = \{i : 0 \leq i \leq n-1\}$, dan $V(K_{s,t}) = \{i : 0 \leq i \leq s-1\} \cup \{i : s \leq i \leq s+t-1\}$. Untuk graf $P_3 \boxtimes_2 K_{1,3}$, pilih partisi pembeda

$$\Pi_1 = \{(0,0), (0,2), (1,0), (1,1)\}, \qquad \Pi_2 = \{(0,1), (0,3)\},$$

$$\Pi_3 = \{(1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2)\}, \qquad \Pi_4 = \{(2,3)\}.$$

Karena itu, didapat representasi tiap titik sebagai berikut.

$$r((0,0)|\Pi) = (0,1,2,2) \qquad r((1,2)|\Pi) = (1,2,0,2)$$

$$r((0,2)|\Pi) = (0,2,1,1) \qquad r((1,3)|\Pi) = (1,1,0,1)$$

$$r((1,0)|\Pi) = (0,2,1,2) \qquad r((2,0)|\Pi) = (1,2,0,1)$$

$$r((1,1)|\Pi) = (0,1,1,2) \qquad r((2,1)|\Pi) = (1,1,0,2)$$

$$r((0,1)|\Pi) = (1,0,1,1) \qquad r((2,2)|\Pi) = (2,1,0,2)$$

$$r((0,3)|\Pi) = (1,0,1,2) \qquad r((2,3)|\Pi) = (1,1,1,0)$$

Jadi, $pd(P_3 \boxtimes_2 K_{1,3}) = 4$.

3.3.3 Dimensi Partisi $C_n \boxtimes_2 K_{s,t}$

Observasi 5.

$$diam(C_n \boxtimes_2 K_{s,t}) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & untuk\ s = 1, t \geq 3,\ dan\ 4 \leq n \leq 9; \\ \left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil + 2, & untuk\ s = 1, t \geq 3,\ dan\ n \geq 10; \\ \left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil + 1, & untuk\ s \geq 2, t \geq 3,\ dan\ n \geq 4. \end{cases}$$

Misalkan $V(K_{s,t}) = \{u_1, ..., u_s, v_1, ..., v_t\}$ *dengan partisi pertama adalah* $u_1, ...u_s$ *dan partisi kedua adalah* $v_1, ..., v_t$. *Misalkan pula* $V(C_n) = \{i : 0 \leq i \leq n-1\}$ *dengan* $0, 1, ..., n-1, 0$ *lingkaran terbesar di* C_n.

Untuk $s = 1, t \geq 3, 4 \leq n \leq 9$, *perhatikan bahwa salah salah satu pasang titik dengan jarak terpanjang adalah titik* $(0, t_1)$ *dan titik* $(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, t_2)$, *dengan jaraknya ialah* $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Untuk kasus kedua dan ketiga, lintasan untuk jarak terpanjang di graf lingkaran 2-kuat graf bipartit lengkap dapat ditentukan dengan cara yang mirip dilakukan pada Observasi 3 pada subgraf yang isomorfis dengan $P_3 \boxtimes_2 P_{k+1}$, *dengan* $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Berdasarkan Teorema 3 dan Observasi 5, diperoleh hasil untuk graf hasil kali 2-kuat berdiameter 2 berikut.

Akibat 11.5.

$$4 \leq pd(C_4 \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq 4(s+t) - 1, \qquad untuk\ s \geq 1,\ dan\ t \geq 3.$$
$$4 \leq pd(C_5 \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq 5(s+t) - 1, \qquad untuk\ s \geq 1,\ dan\ t \geq 3.$$

3.3.4 Dimensi Partisi $K_{m,n} \boxtimes_2 K_{s,t}$

Observasi 6.

$$diam(K_{m,n} \boxtimes_2 K_{s,t}) = 2, \qquad untuk\ m, s \geq 1, n,\ dan\ t \geq 3.$$

Graf $K_{q,r}$ dan $K_{s,t}$ masing-masing memiliki diameter 2, sehingga $diam(K_{m,n} \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq 2$. Namun karena graf hasil kali 2-kuat tersebut bukanlah graf lengkap, maka $diam(K_{q,r} \boxtimes_2 K_{s,t}) = 2$.

Berdasarkan Teorema 3 dan Observasi 6, diperoleh hasil sebagai berikut.

Akibat 11.6. *Misalkan $pd(K_{q,r} \boxtimes_2 K_{s,t}) = k$, maka $p + q + r + s \leq k2^k$.*

Akibat 11.7. *Untuk $m, s \geq 1, n, t \geq 3$, berlaku*

$$4 \leq pd(K_{m,n} \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq (n + m)(s + t) - 1.$$

3.3.5 Karakterisasi Dimensi Partisi 3 untuk Graf Hasil Kali 2-Kuat

Sejauhi ini, untuk graf berorde kecil, ditemukan bahwa graf berdimensi partisi 3 hanyalah $P_3 \boxtimes_2 P_3$ dengan kemungkinan 3-partisi yang sangat sedikit. Oleh karena itu, dibuatlah konjektur berikut.

Konjektur 1.

$$pd(G \boxtimes_2 H) = 3 \Leftrightarrow G = H = P_3$$

Pernyataan dari ruas kanan ke ruas kiri telah ditunjukkan oleh Proposisi 3. Namun pernyataan arah sebaliknya belum bisa dibuktikan.

Bab 4 Program Pencari Dimensi Partisi Graf-Graf Tertentu

4.1 Perancangan Arsitektur Program

Program dibuat dengan bahasa pemrograman Python versi 3.6. Dibuat dua jenis program, yaitu program yang memiliki antar muka umum (*general user interface*/GUI) dan program dalam bentuk *notebook*.

Pada program GUI, program dibagi menjadi tiga skrip Python yang berbeda:

1. *main.py*, skrip yang dieksekusi,
2. *partition.py*, skrip yang menyimpan fungsi pencari seluruh partisi suatu himpunan, dan
3. *graph_object.py*, skrip untuk menyimpan objek *Graph* yang dibuat.

Sedangkan pada program *notebook*, program hanya menggunakan satu berkas IPython Notebook dengan nama *graph-partition-dimension.ipynb*.

4.2 Antarmuka dan Fitur Program

Antarmuka program GUI dibangun menggunakan modul PyQt5. Terdapat dua bagian utama antarmuka, yaitu visualisasi graf dan hasil pencarian partisi pembeda, serta tombol pemilihan graf dan parameter-parameternya.

Pengguna dapat memilih dua jenis graf dengan cara memilih nama jenis graf pada menu *dropdown*. Kemudian pengguna dapat mengatur orde graf dengan memindahkan *slider* yang ada di bawahnya. Gambar representasi graf akan muncul secara otomatis.

Untuk mencari dimensi partisi, pengguna mengetuk tombol *"Search Basis of..."* lalu program akan memulai mengecek semua kemungkinan partisi yang dapat membedakan graf tersebut dimulai dari kardinalitas partisi yang kecil. Jika pencarian dimensi partisi telah selesai, tiap titik pada graf memiliki warna sesuai dengan partisi pembedanya. Selanjutnya, jika kursor diarahkan pada suatu titik, akan muncul vektor representasi titik tersebut terhadap partisi yang sedang ditampilkan.

4.3 Algoritma Program

Berikut adalah algoritma program untuk mencari dimensi partisi sebarang graf menggunakan metode *brute-force*.

```
G ← Graph()
V ← G.graph.nodes()
k ← 2
upper_bound ← G.graph.order()
while k <= upper_bound do
    partitions ← all_partition(V, k)
    for partition in partitions do
        if is_resolving(partition, G) then
            pd ← length(partition)
            return pd
        else
            next partition
        end if
    end for
    k ← k + 1
end while
```

Berbagai algoritma pada teori graf, seperti mencari lintasan terpendek antara dua titik, telah disediakan oleh suatu *package* di Python, yaitu NetworkX. Dengan begitu, program ini tinggal memanggil fungsi-fungsi yang telah disediakan.

4.4 Kelebihan dan Kekurangan Program

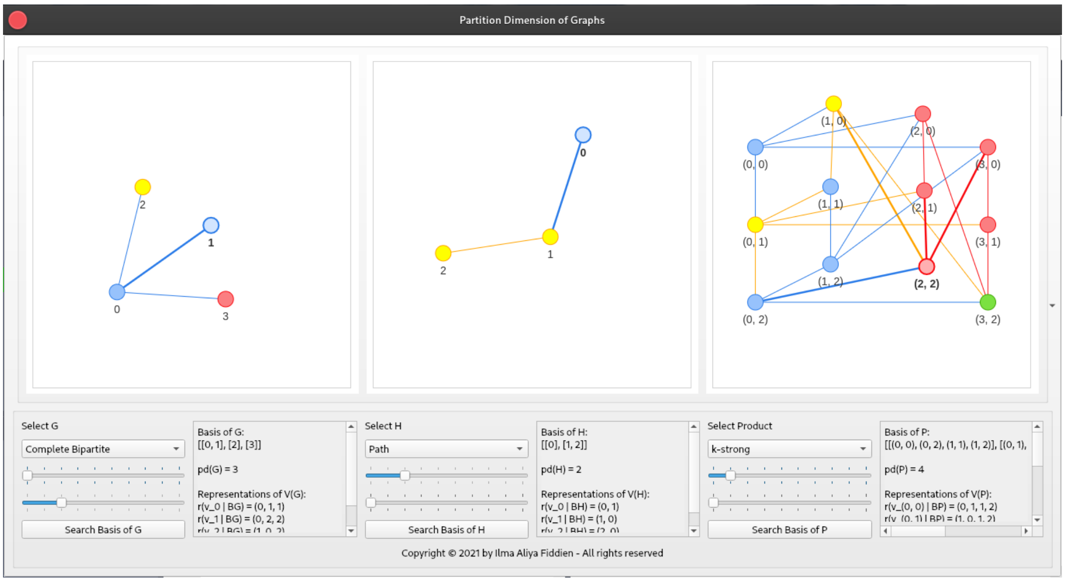
Kelebihan dari program yang telah dibuat adalah sebagai berikut.

1. Terdapat pilihan program dengan format *notebook* yang fleksibel diubah-ubah untuk penelitian.

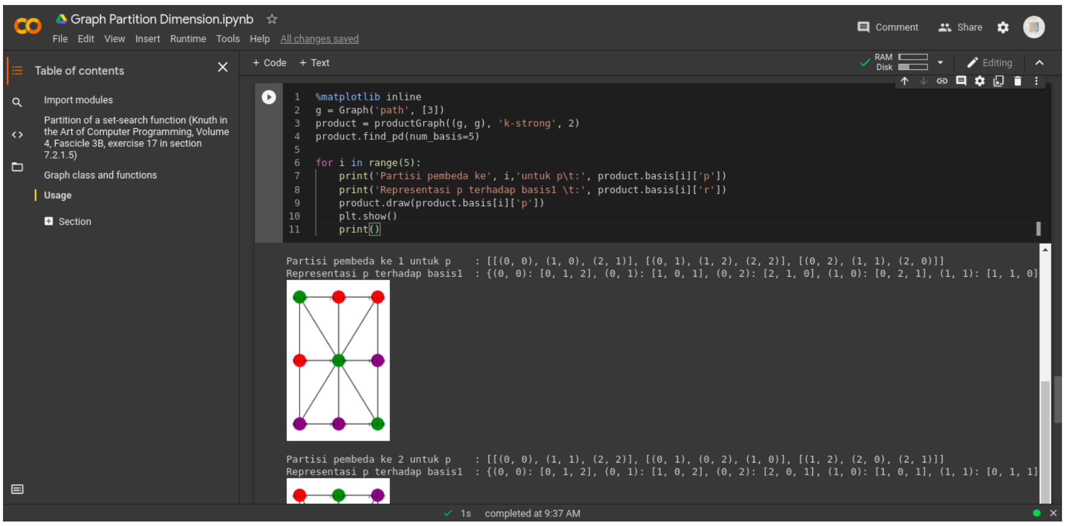
2. Terdapat pilihan program dengan format *GUI* yang cocok untuk visualisasi graf.
3. Pada program GUI, pengguna dapat berinteraksi langsung dengan graf dengan cara memindah-mindahkan titik pada gambar untuk membantu intuisi bangun ruang.

Kekurangan dari program yang telah dibuat adalah sebagai berikut.

1. Pengguna harus membiasakan diri dengan bahasa pemrograman Python untuk menggunakan program *notebook*.
2. Masih sedikit pilihan jenis graf dan jenis operasi graf yang bisa dipilih pada kedua jenis program.
3. Program mulai berjalan cukup lama dalam mencari dimensi partisi graf yang ordenya melebihi 12.



Gambar 4.1: Program GUI



Gambar 4.2: Program Notebook

Bab 5 Penutup

5.1 Simpulan

Dari penelitian yang telah dilakukan, didapat kesimpulan sebagai berikut.

1. Graf hasil kali 2-kuat memiliki dimensi partisi paling kecil 3 dan memiliki batas atas perkalian dimensi partisi dari graf kuadrat masing-masing graf asalnya. Belum ditemukan graf yang ketat memenuhi batas atas tersebut.

2. Belum ditemukan suatu nilai dimensi partisi graf hasil kali kuat yang eksak antara kelas graf lintasan, lingkaran, dan bipartit lengkap, kecuali untuk graf-graf yang partikular. Adapun rentang nilai dimensi partisinya dapat ditentukan dengan memanfaatkan properti diameter. Hasilnya sebagai berikut.

   (i) $3 \leq pd(P_m \boxtimes_2 P_n) \leq 9$ untuk m dan $n \geq 3$.

   (ii) $3 \leq pd(P_m \boxtimes_2 C_n) \leq 18$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$.

   (iii) $3 \leq pd(P_n \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq 3(s+t)$ untuk $s \geq 1$ dan $n, t \geq 3$.

   (iv) $4 \leq pd(P_3 \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq 3(s+t) - 1$ untuk $s \geq 1$ dan $t \geq 3$.

   (v) $3 \leq pd(C_m \boxtimes_2 C_n) \leq 36$ untuk m dan $n \geq 4$.

   (vi) $4 \leq pd(C_4 \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq 4(s+t) - 1$ untuk $s \geq 1$ dan $t \geq 3$.

   (vii) $4 \leq pd(C_5 \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq 5(s+t) - 1$ untuk $s \geq 1$ dan $t \geq 3$.

   (viii) $4 \leq pd(C_n \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq 6(s+t)$ untuk $n \geq 6, s \geq 1,$ dan $t \geq 3$.

   (ix) $4 \leq pd(K_{m,n} \boxtimes_2 K_{s,t}) \leq (n+m)(s+t) - 1$ untuk $m, s \geq 1$ dan $n, t \geq 3$.

3. Program yang dapat membantu mencari partisi pembeda beberapa kelas graf tertentu dapat dibuat menggunakan bahasa pemrograman Python dengan dua pilihan format, yaitu dalam format *IPython notebook* atau dalam format program yang memiliki GUI.

5.2 Saran

Dari pengalaman penelitian yang telah dilakukan dan dari kesimpulan di atas, berikut saran penelitian atau aplikasi lebih lanjut dari karya tulis ini.

1. Dimensi partisi dan dimensi metrik graf kuasa ke-k memiliki potensi untuk dieksplorasi lebih lanjut.

2. Definisi graf hasil kali kuat dapat diperumum lagi menjadi graf hasil kali (k, l)-kuat, yaitu syarat sisi kuat menjadi $d_G(u, v) = k$ dan $d_H(x, y) = l$.

3. Program dapat memuat kelas-kelas graf dan operasi graf yang lebih bervariasi dan memuat algoritma pencarian dimensi metrik dan dimensi partisi secara heuristik.

4. Dapat dibuat program untuk mengilustrasikan berbagai konsep-konsep lainnya pada teori graf, sebagai sarana edukasi.

DAFTAR PUSTAKA

Acharya, U. P., & Mehta, H. S. (2014). 2-tensor product of graphs. *International Journal of Mathematics and Scientific Computing*, *4*(1), 21–24.

Acharya, U. P., & Mehta, H. S. (2015). Generalized cartesian product of graphs. *International Journal of Mathematics and Scientific Computing*, *5*(1), 158–165.

Chappell, G. G., Gimbel, J., & Hartman, C. (2008). Bounds on the metric and partition dimensions of a graph. *Ars Combinatoria*, *88*.

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. (2000). The partition dimension of a graph. *Aequationes Mathematicae*, *59*(1-2), 45–54.

Chvátal, V. (1983). Mastermind. *Combinatorica*, *3*(3), 325–329.

Garey, D. S., M. R. dan Johnson. (1979). *Computers and intractability: A guide to the theory of np-completeness*. Freeman.

Harary, F., & Melter, R. A. (1976). On the metric dimension of graph. *Ars Combinatoria*, *2*, 191–195.

Johnson, M. A. (1993). Structure-activity maps for visualizing the graph variables arising in drug design. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, *3*, 203–236.

Khuller, S., Raghavachari, B., & Rosenfeld, A. (1996). Landmarks in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, *70*, 217–229.

Melter, R. A., & Tomescu, I. (1984). Metric bases in digital geometry. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, *25*, 113–121.

Sabidussi, G. (1959). Graph multiplication. *Mathematische Zeitschrift volume*, *72*, 446–457.

Skiena, S. S. (1990). *Implementing discrete mathematics: Combinatorics and graph theory with mathematica*. Addison-Wesley.

Slater, P. J. (1975). Leaves of trees. *Congressus Numerantium*, *14*, 549–559.

Spinelli, B., Celis, E., & Thiran, P. (2017). A general framework for sensor placement in source localization. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, *2*, 86–102.

Tillquist, R. C., & Lladser, M. E. (2019). Low-dimensional representation of genomic sequences. *Journal of mathematical biology*, *79*, 1–29.

Tomescu, I. (2008). Discrepancies between metric dimension and partition dimension of a connected graph. *Discrete Mathematics*, *308*(22), 5026–5031.

Yero, I. G., Jakovac, M., Kuziak, D., & Taranenko, A. (2014). The partition dimension of strong product graphs and cartesian product graphs. *Discrete Mathematics*, *331*, 43–52.

LAMPIRAN

LAMPIRAN A

Kode Python: Generator Partisi Himpunan

```python
def partition(Set, m):
    """ a function to create all possible partitions of a set """

    def visit(n, a):
        ps = [[] for i in range(m)]
        for j in range(n):
            ps[a[j + 1]].append(Set[j])
        return ps

    def f(mu, nu, sigma, n, a):
        if mu == 2:
            yield visit(n, a)
        else:
            for v in f(mu - 1, nu - 1, (mu + sigma) % 2, n, a):
                yield v
        if nu == mu + 1:
            a[mu] = mu - 1
            yield visit(n, a)
            while a[nu] > 0:
                a[nu] -= 1
                yield visit(n, a)
        elif nu > mu + 1:
            if (mu + sigma) % 2 == 1:
                a[nu - 1] = mu - 1
            else:
                a[mu] = mu - 1
            if (a[nu] + sigma) % 2 == 1:
                for v in b(mu, nu - 1, 0, n, a):
                    yield v
            else:
                for v in f(mu, nu - 1, 0, n, a):
                    yield v
            while a[nu] > 0:
                a[nu] -= 1
                if (a[nu] + sigma) % 2 == 1:
                    for v in b(mu, nu - 1, 0, n, a):
                        yield v
                else:
                    for v in f(mu, nu - 1, 0, n, a):
                        yield v

    def b(mu, nu, sigma, n, a):
        if nu == mu + 1:
            while a[nu] < mu - 1:
                yield visit(n, a)
                a[nu] += 1
            yield visit(n, a)
            a[mu] = 0
        elif nu > mu + 1:
            if (a[nu] + sigma) % 2 == 1:
                for v in f(mu, nu - 1, 0, n, a):
```

```python
                        yield v
                else:
                    for v in b(mu, nu - 1, 0, n, a):
                        yield v
                while a[nu] < mu - 1:
                    a[nu] += 1
                    if (a[nu] + sigma) % 2 == 1:
                        for v in f(mu, nu - 1, 0, n, a):
                            yield v
                    else:
                        for v in b(mu, nu - 1, 0, n, a):
                            yield v
                if (mu + sigma) % 2 == 1:
                    a[nu - 1] = 0
                else:
                    a[mu] = 0
            if mu == 2:
                yield visit(n, a)
            else:
                for v in b(mu - 1, nu - 1, (mu + sigma) % 2, n, a):
                    yield v

    n = len(Set)
    a = [0] * (n + 1)
    for j in range(1, m + 1):
        a[n - m + j] = j - 1
    return f(m, n, 0, n, a)
```

Berkas program dapat dilihat dan diunduh di link berikut.

https://github.com/ilmaaliyaf/graph-partition-dimension

LAMPIRAN B

Kode Python: Pencari Partisi Dimensi

```python
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import networkx as nx
from partition import partition

class Graph(nx.graph.Graph):

    def __init__(self, graph_type='', parameter=[]):
        if graph_type not in ['path', 'cycle', 'complete', 'complete_bipartite']:
            self.graph = nx.empty_graph()
            self.graph_params = None
        else:
            self.define_type(graph_type, parameter)
        self.basis = [{'p': '', 'r': ''}]
        self.pd = None
        self.count = 0

    def define_type(self, graph_type, parameter):
        self.graph_type = graph_type
        self.graph_params = parameter
        if graph_type not in ['path', 'cycle', 'complete', 'complete_bipartite']:
            raise ("Choose type between path, cycle, complete, and complete_bipartite")
        else:
            self.graph = eval('nx.' + graph_type + '_graph(*parameter)')

    def diam(self):
        return nx.diameter(self.graph)

    def distance(self):
        return dict(nx.all_pairs_shortest_path_length(self.graph))

    def find_pd(self,
                num_basis=1,
                lower_bound=2,
                upper_bound='',
                print_result=False):
        """ find basis for this graph """
        V = list(self.graph)
        basis_ = []
        if type(upper_bound) != int:
            upper_bound = self.graph.order() + 1

        i = 0
        for k in range(lower_bound, upper_bound):
            partitions = partition(V, k)
            for j, P in enumerate(partitions):
```

```
                if j < self.count:
                    continue
                resolving, representation = self.is_resolving(P)
                if resolving:  # add P into basis_dict
                    basis_.append({'p': P, 'r': representation})
                    self.basis = basis_
                    self.pd = len(basis_[-1]['p'])
                    i += 1
                    if print_result:
                        print(P)
                    if i + 1 > num_basis:
                        self.count = j
                        return

    def is_resolving(self, partition):
        r = {}
        d = self.distance()
        for v in self.graph.nodes:
            r[v] = []
            for P in partition:
                dvP = d[v][min(P, key=d[v].get)]
                r[v].append(dvP)
        r_reversed = {str(val): key for key, val in r.items()}
        return len(r) == len(r_reversed), r

    def r(self, partition):
        r = {}
        d = self.distance()
        for v in self.graph.nodes:
            r[v] = []
            for P in partition:
                dvP = d[v][min(P, key=d[v].get)]
                r[v].append(dvP)
        return r

class productGraph(Graph):

    def __init__(self, G, H, product_type, product_params):
        self.component_graphs = (G, H)
        self.product_type = product_type
        self.product_params = product_params
        self.graph_type = 'product'

        if product_type == 'k-strong':
            self.k_strong()
        elif product_type == 'cartesian':
            self.cartesian()
        else:
            self.graph = nx.empty_graph()

        self.count = None
        self.basis = [{'p': '', 'r': ''}]
        self.pd = None

    def k_strong(self):
        G = self.component_graphs[0]
```

```
        H = self.component_graphs[1]
        if self.product_params == 1:
            self.graph = nx.strong_product(G.graph, H.graph)
        else:
            P = nx.cartesian_product(G.graph, H.graph)
            dG = G.distance()
            dH = H.distance()
            jumping_vertex = []
            for u in P.nodes:
                for v in P.nodes:
                    if dG[u[0]][v[0]] == self.product_params \
                            and dH[u[1]][v[1]] == self.product_params:
                        P.add_edge(u, v)
                        if v not in jumping_vertex:
                            jumping_vertex.append(v)
            self.graph = P
            self.jumping_vertex = jumping_vertex

    def cartesian(self):
        G = self.component_graphs[0]
        H = self.component_graphs[1]
        self.graph = nx.cartesian_product(G.graph, H.graph)
```

LAMPIRAN C

Kode Python: Program GUI

```python
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import sys
import PyQt5.QtWidgets as Widget
from PyQt5.QtCore import Qt
from PyQt5.QtWebEngineWidgets import QWebEngineView
import networkx as nx
from graph_object import Graph, productGraph
from pyvis.network import Network

class MainProgram(Widget.QComboBox):

    def __init__(self):
        super(MainProgram, self).__init__()
        self.initials = ('g', 'h', 'p')
        self.graph_type = ['Path', 'Cycle', 'Complete', 'Complete Bipartite']
        self.product_type = ['Cartesian', 'k-strong']
        self.initial_graph_param = {'path': 2, 'cycle': 3, 'complete': 2,
                                    'complete_bipartite': 1, 'k-strong':1,
                                    '': 1, 'cartesian': 1}
        # === LEFT SECTION INITIALISATION: SLIDERS ===
        def init_slider_widget():
            slider = Widget.QSlider(Qt.Horizontal)
            slider.setValue(1)
            slider.setFocusPolicy(Qt.StrongFocus)
            slider.setTickPosition(Widget.QSlider.TicksBothSides)
            slider.setTickInterval(1)
            slider.setSingleStep(1)
            slider.setMinimum(1)
            slider.setMaximum(10)
            slider.setSingleStep(1)
            return slider
        self.slider = {}
        self.view = {}
        for x in self.initials:
            self.slider[x] = (init_slider_widget(), init_slider_widget())
            self.view[x] = QWebEngineView()
        # === GRAPH OBJECTS INITIALISATION ===
        self.select_graph = {}
        for x in self.initials[:2]:
            self.select_graph[x] = Widget.QComboBox(self)
            self.select_graph[x].addItems(self.graph_type)
            self.select_graph[x].setCurrentIndex(-1)
        self.select_graph['p'] = Widget.QComboBox(self)
        self.select_graph['p'].addItems(self.product_type)
        self.select_graph['p'].setCurrentIndex(-1)
```

```
        # === BASIS BUTTON INITIALISATION ===
        self.basisButtonBox = Widget.QGroupBox()
        self.result_button = {}
        for i, x in enumerate(self.initials):
            self.result_button[x] = Widget.QPushButton()
            self.result_button[x].setText(f'Search Basis of {x.upper()}')
            self.result_button[x].clicked.connect(self.basis_updater)
            self.result_button[x].setEnabled(False)
        # === RESULT BOX INITIALISATION ===
        self.viewBox = Widget.QGroupBox()
        self.resultBox = Widget.QGroupBox()
        self.result = {}
        for x in self.initials:
            self.result[x] = Widget.QLabel(
                f'Basis of {x.upper()}:\nNone\nRepresentations of V({x.upper()}):\nNone', self)
        gr = Graph('path', [1])
        # === GRAPH-RELATED VARIABLES INITIALISATION ===
        self.w = '409px'
        self.h = '420px'
        self.nt = {x: {'type': '', 'params': '', 'pd': 100,
                       'nt': Network(height=self.h, width=self.w),
                       'nx': gr}
                   for x in self.initials}
        # CALLING UI
        self.unit_ui()
        self.show()
        self.setWindowState(Qt.WindowMaximized)

    def center(self):
        qr = self.frameGeometry()
        cp = Widget.QDesktopWidget().availableGeometry().center()
        qr.moveCenter(cp)
        self.move(qr.topLeft())

    def unit_ui(self):
        self.setGeometry(100, 100, 1200, 600)
        self.center()
        self.setWindowTitle('Partition Dimension of Graphs')
        grid = Widget.QGridLayout()
        grid.setColumnStretch(1, 6)
        grid.setRowStretch(1, 2)
        self.setLayout(grid)
        # ADD SELECT GRAPH & RESULT SECTION
        self.box_result()
        result_layout = Widget.QHBoxLayout()
        result_layout.addWidget(self.resultBox)
        grid.addLayout(result_layout, 2, 0, 1, 3)
        # ADD GRAPH VIEWER
        self.viewer()
        view_layout = Widget.QHBoxLayout()
        view_layout.addWidget(self.viewBox)
        grid.addLayout(view_layout, 1, 1),

```

```python
    def viewer(self):
        layout = Widget.QGridLayout()

        for i, x in enumerate(self.initials):
            self.nt[x]['nt'].from_nx(self.nt[x]['nx'].graph)
            self.nt[x]['nt'].save_graph(f'view_graph_{x}.html')
            with open(f'view_graph_{x}.html', 'r') as f:
                html = f.read()
            self.view[x].setHtml(html)
            layout.addWidget(self.view[x], 0, i, alignment=Qt.
                AlignCenter)

        layout.setSpacing(10)
        self.viewBox.setLayout(layout)

    def box_result(self):
        layout = Widget.QGridLayout()
        layout.setSpacing(10)

        label = {}
        label['g'] = Widget.QLabel('Select G', self)
        label['h'] = Widget.QLabel('Select H', self)
        label['p'] = Widget.QLabel('Select Product', self)

        for i, x in enumerate(self.initials):
            layout.addWidget(label[x], 0, i*2)
            layout.addWidget(self.select_graph[x], 1, i*2)
            layout.addWidget(self.result_button[x], 4, i*2)
            scroll = Widget.QScrollArea()
            scroll.setWidget(self.result[x])
            scroll.setWidgetResizable(True)
            scroll.setFixedHeight(150)
            scroll.setViewportMargins(5, 5, 5, 5)
            layout.addWidget(scroll, 0, i*2+1, 5, 1)
            # manage signal
            self.select_graph[x].activated.connect(self.
                update_graph)
            self.select_graph[x].activated[str].connect(self.
                on_product)
            self.select_graph[x].currentIndexChanged['QString'].
                connect(self.disable_widget)

            # GRAPH SLIDERS
            for j in range(2):
                # add to layout
                layout.addWidget(self.slider[x][j], j+2, i*2)
                # manage signal
                self.slider[x][j].valueChanged.connect(self.
                    update_graph)
                self.slider[x][j].valueChanged[int].connect(self.
                    on_product)

        self.select_graph['p'].setEnabled(False)
        self.slider['p'][0].setEnabled(False)
        self.slider['p'][1].setEnabled(False)

```

```
        notice = Widget.QLabel('Copyright 2021 by Ilma Aliya Fiddien - All rights reserved', self)
        layout.addWidget(notice, 5, 0, 6, 0, Qt.AlignCenter)

        self.resultBox.setLayout(layout)

    def disable_widget(self, currentIndex):
        # if both g and h are active, then make p active
        if self.select_graph['h'].isEnabled() and self.select_graph['h'].isEnabled():
            self.select_graph['p'].setEnabled(True)
        else:
            self.select_graph['p'].setEnabled(False)

        # if p is active then make its sliders and button active
        if self.select_graph['p'].isEnabled() == False:
            self.slider['p'][0].setEnabled(False)
            self.slider['p'][1].setEnabled(False)
            self.result_button['p'].setEnabled(False)

        sender = self.sender()
        # if g or h are in those list, make the 2nd slider (parameter) active
        if currentIndex in ['Complete Bipartite']:
            if sender is self.select_graph['g']:
                self.slider['g'][1].setEnabled(True)
            if sender is self.select_graph['h']:
                self.slider['h'][1].setEnabled(True)
        else:
            if sender is self.select_graph['g']:
                self.slider['g'][1].setEnabled(False)
            if sender is self.select_graph['h']:
                self.slider['h'][1].setEnabled(False)

        if currentIndex in ['k-strong']:
            self.slider['p'][0].setEnabled(True)
        elif currentIndex in ['cartesian']:
            self.slider['p'][0].setEnabled(False)
            self.slider['p'][1].setEnabled(False)
        else:
            self.slider['p'][0].setEnabled(False)

    # =============================
    # DRAWING ON THE CANVAS
    # =============================

    def graph_drawer(self, graph, title, x):
        """ Function to draw the updated graph into it's canvas """
        graph = nx.relabel_nodes(graph, lambda node: str(node))
        nt = Network(height=self.h, width=self.w)
        nt.from_nx(graph)

        if x == 'p':
            layout = {}
            for v in graph.nodes:
```

```
                v_ = eval(v)
                layout[v] = ([v_[0], v_[1]])
            for node in nt.nodes:
                node["x"] = layout[node['id']][0] * 100
                node["y"] = layout[node['id']][1] * 100
            nt.toggle_physics(False)

        nt.save_graph(f'view_graph_{x}.html')
        with open(f'view_graph_{x}.html', 'r') as f:
            html = f.read()
            self.view[x].setHtml(html)
        self.nt[x]['nt'] = nt

    def update_graph(self):
        """ Function to set graph G """
        s = self.sender()
        if s in [self.select_graph['g'], self.slider['g'][0], self
            .slider['g'][1]]:
            x = 'g'
        elif s in [self.select_graph['h'], self.slider['h'][0],
            self.slider['h'][1]]:
            x = 'h'
        else:
            x = 'p'

        graph_type = '_'.join(str(self.select_graph[x].currentText
            ()).lower().split())
        m = self.slider[x][0].value()
        if m < self.initial_graph_param[graph_type]:
            m = self.initial_graph_param[graph_type]
            self.slider[x][0].setValue(self.initial_graph_param[
                graph_type])
        if self.slider[x][1].isEnabled():
            n = self.slider[x][1].value()
            graph = Graph(graph_type, [m, n])
            graph_params = [m, n]
        else:
            graph = Graph(graph_type, [m])
            graph_params = [m]
        self.nt[x]['nx'] = graph
        self.graph_drawer(graph.graph, f'{graph_type} {
            graph_params}', x)

        # enabling basis updater button
        self.result_button[x].setEnabled(True)
        self.result[x].setText(f'Basis of {x.upper()}:\nNone\
            nRepresentations of V({x.upper()}):\nNone')
        self.change = True

    def on_product(self):
        """ Function to set graph product P """
        product_type = '_'.join(str(self.select_graph['p'].
            currentText()).lower().split())
        p = productGraph(self.nt['g']['nx'], self.nt['h']['nx'],
                              product_type, self.slider['p'][0].
                                  value())
```

```
        self.nt['p']['nx'] = p
        self.graph_drawer(p.graph, p.product_type + " " + str(p.product_params), 'p')

        # enabling basis updater button
        self.result_button['p'].setEnabled(True)
        self.change = True

    # ======================
    # DEALING WITH THE BASIS
    # ======================

    def basis_updater(self):
        """ Function to update basis of the updated graph """
        # search partition dimension and it's basis
        s = self.sender()
        if s == self.result_button['g']:
            x = 'g'
        elif s == self.result_button['h']:
            x = 'h'
        else:
            x = 'p'
        # prepare to continue checking the partitions from last iteration
        # because we are dealing with the same graph
        if self.change == False:
            count = self.nt[x]['nx'].count
            num_basis = 2
            pd = self.nt[x]['pd']
        else:
            count = 0
            num_basis = 1
            pd = self.nt[x]['nx'].graph.order()

        graph = self.nt[x]['nx']
        graph.count = count # continue from the last checked partition
        graph.find_pd(num_basis=num_basis) # search for partition dimension
        basis = graph.basis[-1]['p']
        r = graph.basis[-1]['r']

        for v in graph.graph.nodes:
            graph.graph.nodes[v]['title'] = str(r[v])
            graph.graph.nodes[v]['group'] = r[v].index(0) + 1

        self.graph_drawer(graph.graph, graph.graph_type, x)

        # 2 form the text to show
        G = x.upper()

        if pd < graph.pd:
            part_type = 'Resolving partition'
            connection = '<='
        else:
            part_type = 'Basis'
```

```
            connection = '='

        b_text = part_type + ' of ' + G + ':\n' \
                + str(basis) \
                + '\n\npd(' + G + ') '+ connection + ' ' + str(graph.pd)
        rep = ''
        for v in r.keys():
            rep = rep + 'r(v_' + str(v) + ' | B' + G + ') = ' \
                  + str(tuple(r[v])) + '\n'

        b_text = b_text + '\n\nRepresentations of V(' + G \
                        + '):\n' + rep

        # 3 send signal to result box
        self.result[x].setText(b_text)

        self.change = False

if __name__ == '__main__':
    app = Widget.QApplication(sys.argv)
    app.setStyle("Fusion")
    screen = MainProgram()
    result = app.exec_()
    del screen
    del app
    sys.exit(result)
```

INDEKS