Planification d'expériences (numériques)

12-13 décembre 2017

Informations pratiques

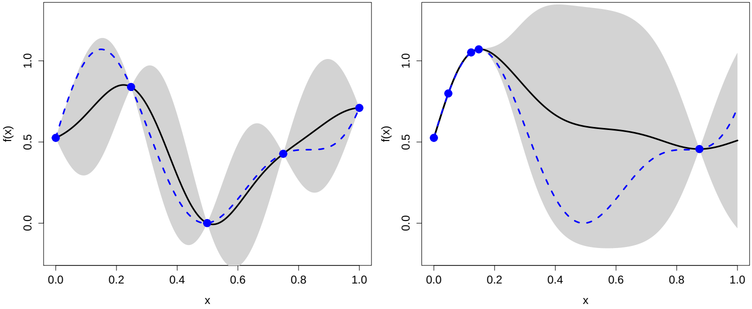
- Contact : Victor Picheny
  INRA (Institut National de la Recherche Agronomique)
  victor.picheny@inra.fr
- Volume horaire : 4,5 heures cours + 3h TP
- Support de cours : transparents uniquement
- Evaluation : exercice dans l'examen du 11 janvier + CR TP
- A noter : TP "filé" avec les autres cours de l'UP4

Propos du cours

Cours de O. Roustant : vous avez vu comment construire un métamodèle à partir d'un ensemble de données (x - y)

Question : comment choisir les points pour obtenir le "meilleur" modèle ?

Exemple de krigeage : même nombre de points mais différents emplacements



Quelques repères historiques

- Traditionnellement : pharmaceutique, agronomie, procédés...
- Depuis 20+ ans : expériences numériques

Planification d'expériences "classiques"

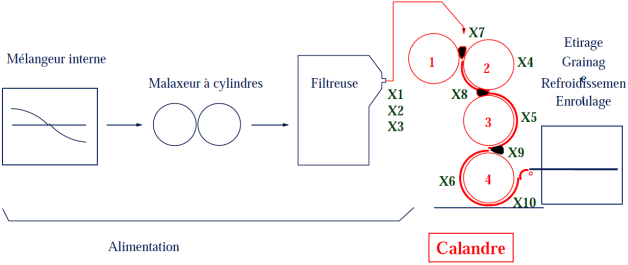
- Fisher : Design of Experiments (1935)
- Kiefer : Optimum experimental designs (1959)
- Fedorov : Theory of optimal experiments (1972)
- Taguchi : Introduction to quality engineering (1986)

Planification d'expériences numériques

- McKay : Latin Hypercube Sampling (1979)
- Sacks : Design and analysis of computer experiments (1989)

Exemple introductif : qualité de feuilles de PVC

- X1 - Température matière entrée calandre
- X2 - Ouverture de la filière
- X3 - Débit matière à l'entrée
- X4 - Température cylindres 1 et 2
- X5 - Température cylindre 3
- X6 - Température cylindre 4
- X7 - Diamètre du bourrelet 1
- X8 - Diamètre du bourrelet 2
- X9 - Diamètre du bourrelet 3
- X10 - Dernier entrefer



Objectif : absence de bulles d'air, résistance

1 essai = 1 jour, 2500 €

Quelques solutions intuitives

- Un facteur à la fois
- Toutes les combinaisons possibles $\Rightarrow$ plans pour facteurs qualitatifs
- "Un peu de tout" $\Rightarrow$ plans remplissant l'espace

Ajout d'information a priori

"Toutes les variables contribuent linéairement à l'amélioration de la production"

- Modèle : $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_{10} X_{10} + \varepsilon$
- Comment obtenir le modèle le plus précis possible ?
  $\Rightarrow$ plans optimaux / orientés modèle

Exemple PVC

Essayer toutes les combinaisons pour 2 valeurs de chaque X_i : 1024 essais = 3 ans

Planification : quels objectifs ?

Obtenir le maximum d'information avec un nombre fixé d'observations

Analyse de sensibilité

Recherche des facteurs influents

Optimisation

Déterminer la meilleure combinaison de facteurs

Apprentissage / prédiction

Connaître le phénomène pour l'ensemble de variation des facteurs

Conventions et notations

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$: facteur / entrée
- d : dimension du problème
- y : réponse / sortie
- Plan d'expériences : $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$

Dans la suite du cours : $b_i \leq x_i \leq B_i \quad \forall i$

- On normalise toujours ! $0 \leq x_i \leq 1$
- Plan d'expériences = explorer l'hypercube de dimension d, $[0,1]^d$

Plan du cours

Partie 1 : approches géométriques

1. plans pour facteurs qualitatifs
2. plans remplissant l'espace

Partie 2 : plans orientés modèle

1. Modèle de régression linéaire
2. Modèle de krigeage

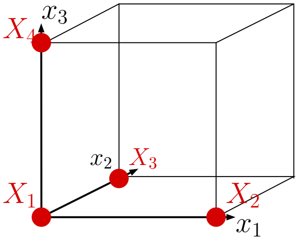
Plans pour facteurs qualitatifs

Un à la fois (OAT - “One-at-a-time”)

Une approche intuitive pour voir si un facteur a une influence sur la réponse est de les faire varier un à la fois

- On fixe tous les autres facteurs à leur valeur de référence
- On effectue une expérience de référence, et une pour la variation de chaque facteur étudié

Exemple



point	x_1	x_2	x_3
X_1	0	0	0
X_2	1	0	0
X_3	0	1	0
X_4	0	0	1

Avantages et inconvénients :

+ seulement $d + 1$ observations
+ faciles à interpréter

– on ne peut voir que des effets linéaires

$$m(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$$

– seules 2 expériences servent à la fois pour estimer les effets

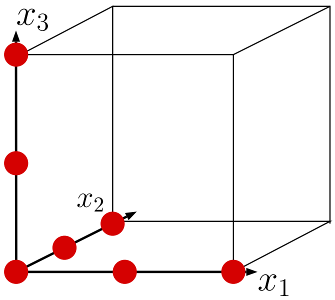
– pas de mesure des interactions

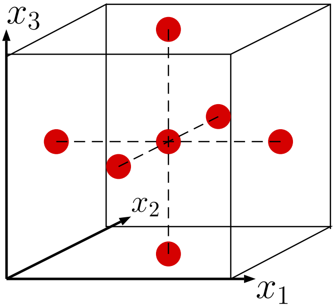
Exercice

Comment adapter ce type de plans pour estimer des effets quadratiques ?

Solution

Les effets quadratiques peuvent être estimés avec au choix :

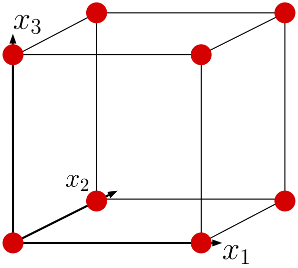




On parle parfois de “plan en étoile”.

Plans factoriels complets

Principe : considérer toutes les combinaisons de $x_i \in \{0, 1\}$:



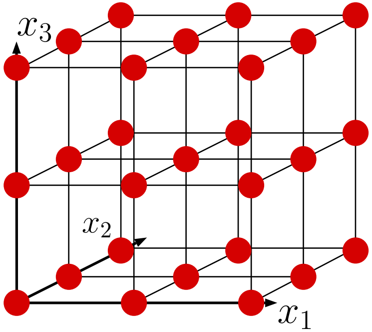
+ On peut mesurer toutes les interactions :

$$\beta_0 + \sum_k \beta_k x_k + \sum_{j,k} \beta_{j,k} x_j x_k + \beta_{1,2,3} x_1 x_2 x_3$$

– Le nombre d'expériences devient 2^d irréaliste avec d grand (cf. exemple PVC)

Plans factoriels complets

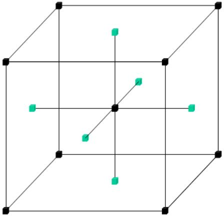
On peut également construire des plans factoriels avec k niveaux :



Cela permet de calculer des effets quadratiques (ou plus) mais le nombre d'évaluations k^d est encore moins réaliste...

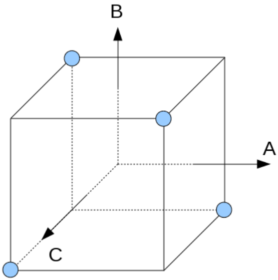
On peut aussi combiner ou réduire les plans

Composite



Effets quadratiques pour "seulement" $2^d + d + 1$ expériences

Fractionnaire

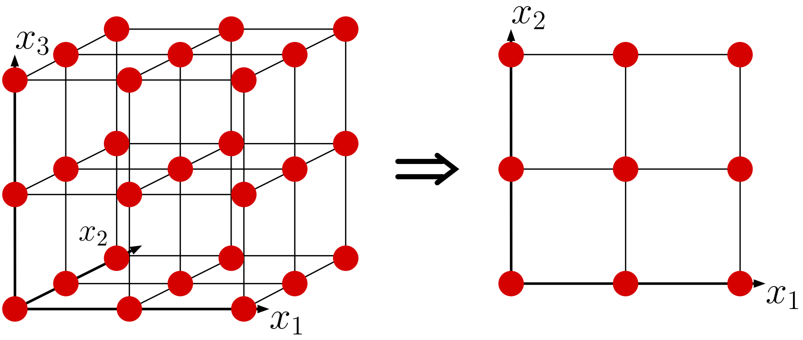


Effets linéaires avec 2^{d-1} expériences *mais* effets confondus : ici $C = AB$

Problème de projection

Pourquoi ne veut-on pas de superposition de points quand on projette ?

Si une variable n'a pas d'influence (cf. cours à venir d'E. Padonou), les observations deviennent redondantes :



On passe de 27 observations à 9...

Conclusion sur les plans pour facteurs qualitatifs

pour :

- Faciles à utiliser
- Adaptés aux variables continues et discrètes
- Peuvent être combinés (étoile + factoriel par exemple) ou dégradés (plans fractionnaires)
- Bien adaptés (souvent optimaux) pour la régression linéaire

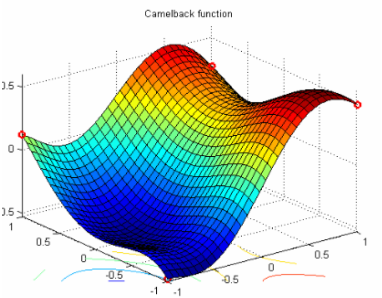
contre :

- Nombre d'expériences non flexible
- Nombre d'expériences trop grand en grande dimension
- Expériences dupliquées en projection

Notions géométriques : “remplir l’espace”

Quel contexte ?

- Variables continues
- Pas d'information a priori sur la réponse (modèle statistique non présupposé)
- Réponse potentiellement complexe (voire discontinue)
- Possibilité de variables peu influentes
- Nombre de facteurs pouvant être élevé
- Nombre de facteurs influents pouvant être beaucoup plus petit



Objectifs

Les plans doivent :

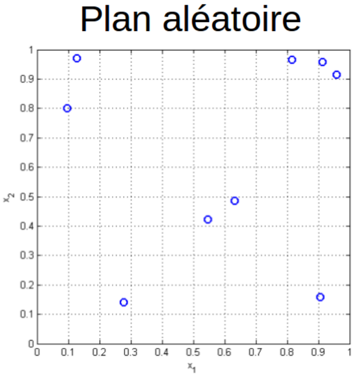
- permettre d'utiliser une grande variété de modèles
- donner de l'information pour n'importe quelle partie du domaine
- avoir de bonnes projections dans les sous-espaces
- être robustes à la montée en dimension

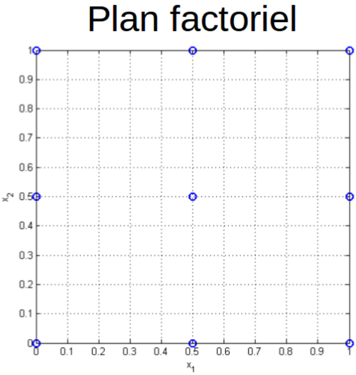
"**Remplir l'espace**" : explorer au maximum l'espace des variables

- observer f partout
- disperser au maximum les observations

$\Rightarrow$ quelle signification donner à *"remplir"*, *"partout"*, *"disperser"* ?

Deux contre-exemples

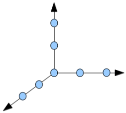




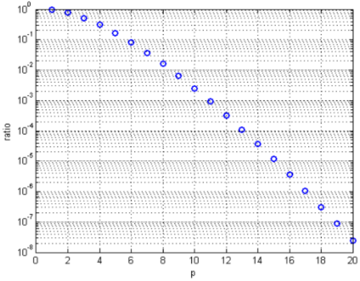
Curiosités de la montée en dimension (1/3)

L'intuition est souvent trompeuse !

- Volume du cube : $(2r)^d$
- Volume de la boule : $V = \frac{r^d \pi^d}{\Gamma(d/2+1)}$



Ratio hypersphère /hypercube :

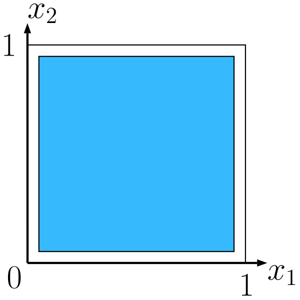


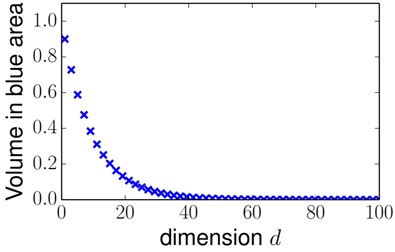
$\Rightarrow$ Pour d grand, la boule contient 0% du volume !

Curiosités de la montée en dimension (2/3)

Rapport entre le cube de côté 1 et celui de côté 0,9 :

$\frac{V_1}{V_2} = 0,9^p \to 0 \Rightarrow$ Tout le volume est contenu dans l'"écorce" !



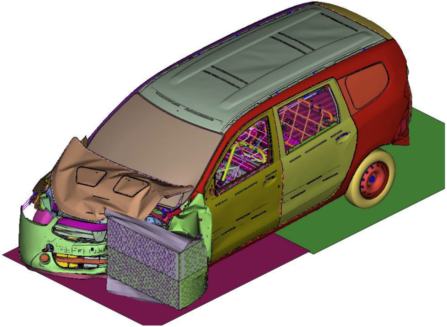


De plus : les points peuvent être loins les uns des autres

Diagonale du cube unité de longueur $\sqrt{d}$

Curiosités de la montée en dimension (3/3)

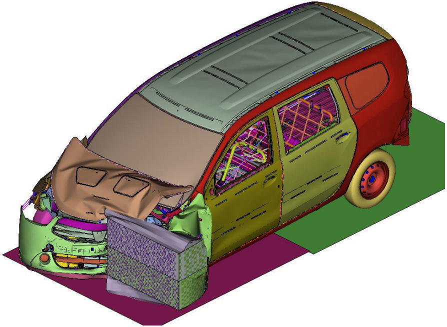
- Le nombre de sommets et d'arêtes d'un hypercube croît plus vite que ce qu'on peut penser



Tester toutes les combinaisons min / max des 50 facteurs prendrait...

Curiosités de la montée en dimension (3/3)

- Le nombre de sommets et d'arêtes d'un hypercube croît plus vite que ce qu'on peut penser



Tester toutes les combinaisons min / max des 50 facteurs prendrait...
3000 fois l'âge de l'univers !
($d = 50 \rightarrow 2^d \approx 1.e15$)

Mesurer le remplissage d'espace

Trois familles de critère

- Intra-distances : au sein du plan d'expérience $\mathbf{X}_n$
- Inter-distances : entre $\mathbf{X}_n$ et $\mathbb{X}$
- Uniformité de la distribution des $\mathbf{x}_i$

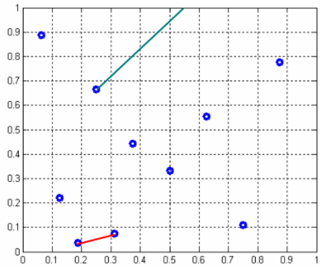
Intuition

- Les points sont bien dispersés s'ils sont éloignés les uns des autres
- On a "observé partout" si, pour tout point de $\mathbb{X}$, il existe une observation x_i proche
- Le remplissage est uniforme si toutes les zones de l'espace contiennent un nombre égal d'observations

Critères basés sur les distances

Intra-distances : Maximin
la distance minimum entre les points du plan doit être grande

Inter-distances : Minimax
la distance maximale entre n'importe quel point du domaine et le point du plan le plus proche doit être petite



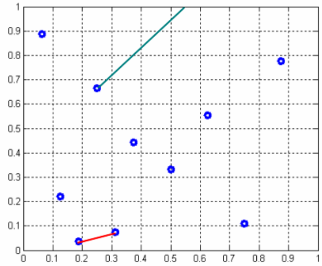
Exercice

1. Formaliser les critères maximin et minimax
2. Ecrire les problèmes d'optimisation de plans d'expériences correspondants

Maximin

$$\max_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N}\left[\min_{i\neq j}\left(d(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)\right)\right]$$

- On maximise en dimension $d \times N$
- On calcule $n(n-1)/2$ distances.



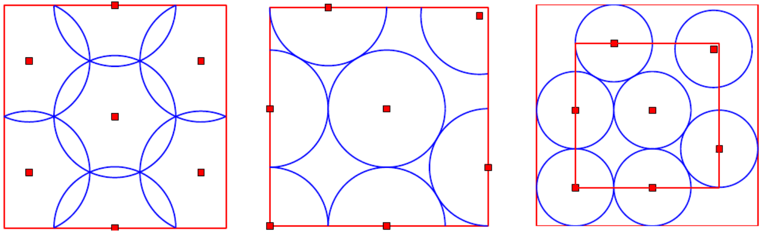
Minimax

$$\min_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N}\left[\max_{\mathbf{x}}\left[\min_{i}\left(d(\mathbf{x},\mathbf{x}_j)\right)\right]\right]$$

- On minimise en dimension $d \times N$
- On maximise en dimension d
- On calcule n distances

Lien avec des problèmes de physique (pour $d > 1$)

- maximin $\Leftrightarrow$ empilement de sphères
- minimax $\Leftrightarrow$ recouvrement de sphères

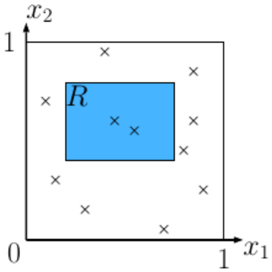


Source : L. Pronzato

Critère basé sur l'uniformité : la discrépance

Discrépance = mesure de non-uniformité Compare le nombre de points dans un hyper-rectangle avec le nombre attendu (en espérance) d'un échantillon issu de la distribution uniforme.

Exemple : plan à 11 points

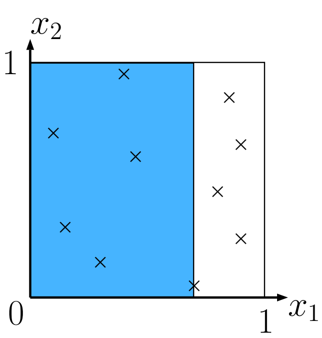


Proba (loi uniforme) d'être dans R : 0.22
Ratio empirique : 2/11.
Discrépance (par rapport à R) :
$D_R = |0.22 - 2/11| = 0.038$

Définition borne supérieure de la distance entre les fonctions de répation empirique et analytique : $D = \sup \left| \frac{N_R}{N} - \frac{V_R}{V} \right|$

La discrépance est souvent calculée soit en :

- fixant un des sommets de R à l'origine
- en centrant R



Le maximum (par rapport à R) est obtenu pour R tangent à des points

$\rightarrow$ sup calculé sur un ensemble discret

Résolution directe des problèmes d'optimisation ?

$$\max_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N} \Phi\left[\mathbf{X}_N\right]$$

avec Φ *maximin*, *minimax* ou *discrépance*.

Problème extrêmement difficile ! !

- Grande dimension : $d \times N$
- Objectifs ni convexes, ni différentiables
- *Minimax* nécessite une boucle interne d'optimisation $\rightarrow$ très coûteux à évaluer

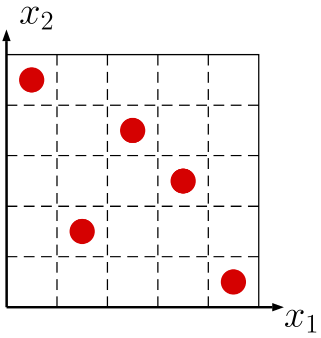
Réduction de nos ambitions (cf. suite du cours)

- Optimiser une classe de plans (LHS)
- Construire des plans avec de bonnes propriétés sans résoudre un problème d'optimisation : CVT, suites à faible discrépance

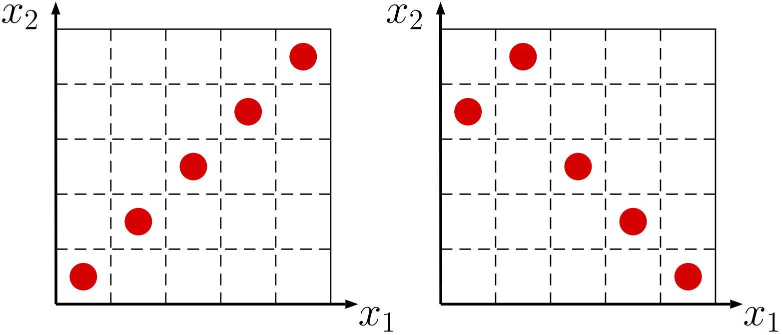
Plans remplissant l'espace : Hypercubes latins (LHS)

Hypercubes latins (Latin Hypercube Sampling, LHS)

- Plans aléatoires
- On découpe chaque dimension en n intervalles ($\Rightarrow n^d$ blocs)
- On prend un unique point par “ligne” et par “colonne”
- Les distributions marginales sont uniformes !



Pas de remplissage d'espace garanti...



They have to be combined with a criterion such as maximin.

Exercice

- Construire un LHS à 5 points en dimension 3
- Comment programmer une fonction $lhs(n, d)$?
- Comment optimiser un LHS afin qu'il remplisse l'espace ?

Solution (1/2)

Définition

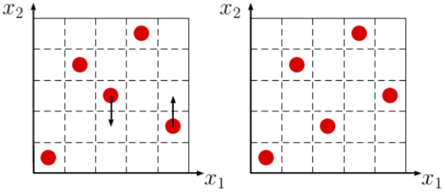
Un hypercube latin à n points et d variables, $LHS(n, d)$, est une matrice $n \times d$ dont chaque colonne est une permutation (normalisée) de $\{1, 2, \ldots, n\}$

Solution (2/2)

On peut permuter 2 cellules (ou blocs) d'une même colonne et conserver la structure LHS

x1	x2
1	1
2	4
3	3
4	5
5	2

x1	x2
1	1
2	4
3	2
4	5
5	3



$\Rightarrow$ Problème discret ! On va utiliser des algorithmes d'*échange*.

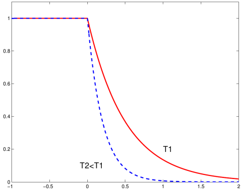
Recuit simulé - Morris et Mitchell [1995]

1. On génère un LHS initial
2. On cherche les points critiques au sens du critère maximin
3. On choisit aléatoirement une colonne d'un point critique
4. On effectue un **échange** avec une autre cellule de la même colonne prise aléatoirement
5. Si l'échange est bénéfique : on accepte la modification
6. Sinon : on accepte (quand même !) avec une probabilité :

$$\pi = \exp\left[\frac{\phi_{ancien} - \phi_{nouveau}}{T}\right] \qquad \text{(si } \phi \text{ est à maximiser)}$$

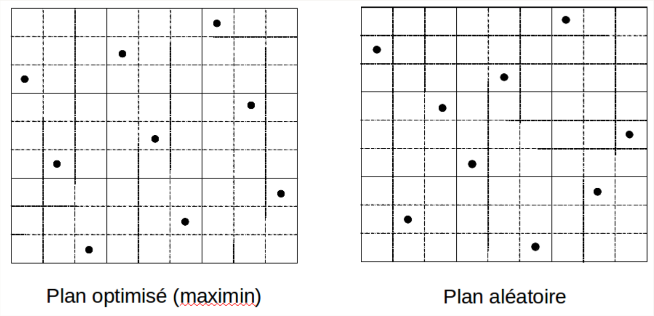
T décroît avec le temps

Par exemple : $T_k = \frac{T_0}{\log(k+1)}$.



LHS maximin

Le plan le plus utilisé pour les expériences numériques



Pour aller plus loin...

Un exemple de LHS en 2D : sudoku !

4	3	1	6	7	9	5	2	8
9	6	7	2	5	8	3	4	1
5	8	2	1	4	3	9	6	7
6	5	9	8	1	7	2	3	4
3	2	8	5	6	4	1	7	9
7	1	4	9	3	2	8	5	6
8	7	3	4	2	1	6	9	5
1	4	5	3	9	6	7	8	2
2	9	6	7	8	5	4	1	3

●	3	1	6	7	9	5	2	8
9	6	7	2	5	8	3	●	1
5	8	2	1	●	3	9	6	7
6	5	9	8	1	7	2	3	●
3	2	8	5	6	●	1	7	9
7	1	●	9	3	2	8	5	6
8	7	3	●	2	1	6	9	5
1	●	5	3	9	6	7	8	2
2	9	6	7	8	5	●	1	3

Le sudoku possède des propriétés supplémentaires !

Niveau de stratification supplémentaire

Nous allons utiliser un outil complémentaire : tables orthogonales (OA)

Table orthogonale (OA) : définition

- n lignes
- k colonnes
- Chaque élément prend une valeur entre 1 et q

X est de **force t** si, pour toute sous-matrice $n \times t$:

- Chaque valeur dans chaque colonne apparaît un nombre égal de fois
- Chaque combinaison de valeurs entre deux colonnes apparaît un nombre (λ) égal de fois
- On a : $\lambda \times q^t = n$

On note : $\mathbf{OA(n, k, q, t)}$

Exemple

Table orthogonale :

- OA(n points, k dim, q valeurs, force t)
- Pour toute sous-matrice $n \times t$:
  - Chaque valeur dans chaque colonne apparaît un nombre égal de fois
  - Chaque combinaison de valeurs entre deux colonnes apparaît un nombre λ égal de fois
- On a : $\lambda \times q^t = n$

λ=2

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	3	2	3	1	1
2	3	2	2	1	1	3	1
3	2	3	1	3	2	2	1
4	1	2	1	1	2	1	2
5	3	3	3	3	3	3	2
6	2	1	2	2	1	2	2
7	1	3	2	1	3	2	3
8	3	1	1	3	1	1	3
9	2	2	3	2	2	3	3
10	1	3	1	2	1	3	1
11	3	1	3	1	2	2	1
12	2	2	2	3	3	1	1
13	1	1	2	3	2	3	2
14	3	2	1	2	3	2	2
15	2	3	3	1	1	1	2
16	1	2	3	3	1	2	3
17	3	3	2	2	2	1	3
18	2	1	1	1	3	3	3

OA(18, 7, 3, 2)

LHS et tables orthogonales

- Tous les LHS sont des tables orthogonales de force 1
- On peut construire un LHS à partir d'une table orthogonale de force > 1
- Algorithme de Tang (1993) : pour chaque colonne, pour chaque niveau s, on remplace toutes les instances de s par une permutation de

$$(s-1)\lambda q^{t-1} + 1, \ldots, (s-1)\lambda q^{t-1} + \lambda q^{t-1}$$

Exercice

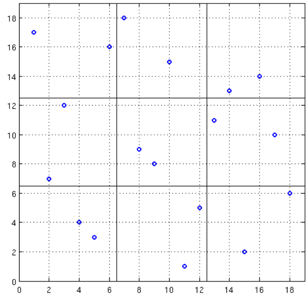
Construire un LHS à 4 points à partir de $OA(n = 4, k = 2, q = 2, t = 2)$

Exemple : LHS à partir de OA(18,2,3,2)

OA(18,2,3,2) :

1	1
1	2
1	3
1	1
2	2
2	3
2	1
3	2
3	3
3	1
1	2
1	3
1	1
2	2
2	3
2	1
3	2
3	3

2 expériences par carré :



Uniformité sur les marges de dimension t : λ points dans chacune des q^t cellules

Récapitulatif : LHS et OA

LHS

- Projections uniformes sur les marginales d'ordre 1
- Très facile à générer
- Pas de difficulté pour N et d grands
- Pas de duplication en projection
- MAIS pas de remplissage d'espace sans optimisation

$\Rightarrow$ Alternative à l'optimisation : niveau de stratification supplémentaire

- Propriétés plus complexes atteignables : OA, tms-Net
- Intérêts :
  - Limite les "trous" dans les sous-espaces
  - Meilleure capture des interactions
- Défaut : nombre de points fortement contraint

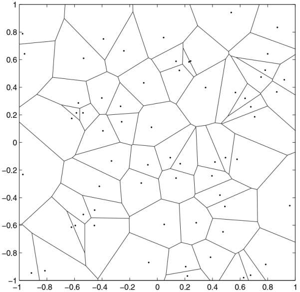
$\Rightarrow$ Difficile à mettre en oeuvre ! Cf. package `planor`

Plans remplissant l'espace : Tessellations Centroïdales de Voronoï (CVT)

Etant donné un ensemble de points générateurs $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, la **cellule de Voronoi** $\mathcal{C}_i$ associée au point $\mathbf{x}_i$ est la region de l'espace telle que :

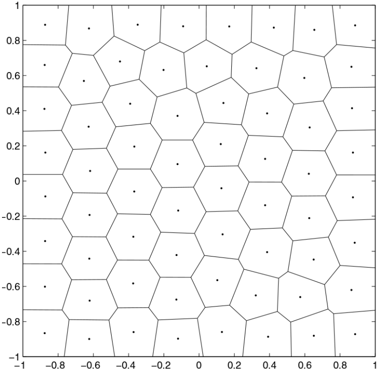
$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}_i, d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j), \quad i \neq j$$

Tessellation de Voronoi $=$ ensemble des cellules $\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n\}$



Source : Q. Du et Al., *Centroidal Voronoi Tessellations : Applications and Algorithms*, SIAM Review, 41-4, 1999.

Tessellation Centroïdale de Voronoï (CVT) est un cas particulier des Tesselations de Voronoi où les points générateurs correspondent aux centres de masse des cellules :



Source : Q. Du et Al., *Centroidal Voronoi Tessellations : Applications and Algorithms*, SIAM Review, 41-4, 1999.

Propriétés des CVT

Les CVT sont des points stationnaires de :

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{V_i} \|y - z_i\|^p dy, \quad p \geq 1$$

- Distorsion : $H(z_i, V_i) = \sum_{i=1}^{k} \int_{V_i} \|y - z_i\|^2 dy$
- Quadrature :

$$\int_{\Omega} f(y)dy \approx \sum_{i=1}^{k} \int_{V_i} f(z_i)dy = \sum_{i=1}^{k} A_i f(z_i), \text{ avec } A_i = \text{volume}(V_i)$$

avec $A_i = \text{volume}(V_i)$. Pour f lipschitzienne :

$$Q = \left| int_{\Omega} f(y)dy - \sum_{i=1}^{k} A_i f(z_i) \right| \leq L \sum_{i=1}^{k} \int_{V_i} \|y - z_i\| dy$$

CVT et planification

Propriétés de stationnarité

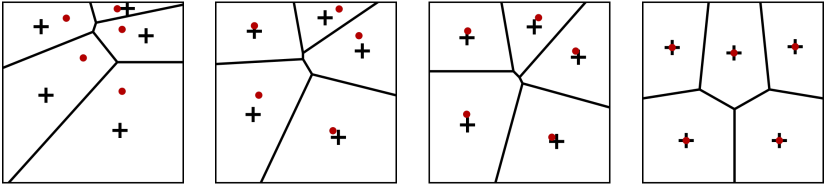
- Distorsion minimale : chaque point de l'espace est proche d'un point générateur
- Bonne approximation constante par morceaux
- Propriétés indépendantes de la dimension de l'espace

Conséquences

- Bon remplissage d'espace
- On utilise les *points générateurs comme plan d'expériences*

Construction des CVT : algorithme de Lloyd

1 Générer un ensemble $\mathbf{X}$ de n points
2 Tant que $i < nb\_iter$
3 Calculer la tessellation associée à X
4 $\mathbf{X} =$ centre de masse de chaque cellule

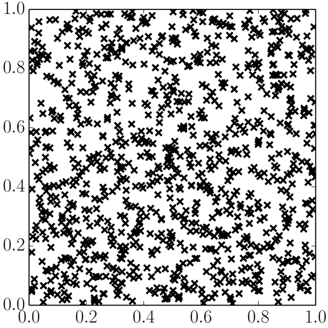


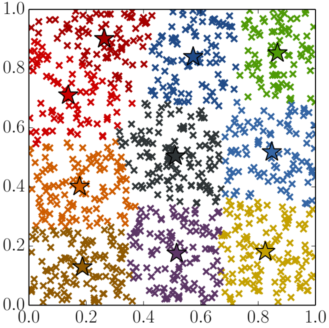
iteration 1 iteration 2 iteration 3 iteration 15

source : page wikipedia, "Lloyd's algorithm"

Construction des CVT : k-means

Très proche de Lloyd, mais basé sur un grand ensemble discret de points au lieu du domaine continu :



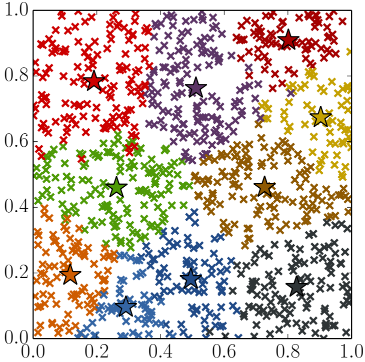


Construction des CVT : algorithme de McQueen

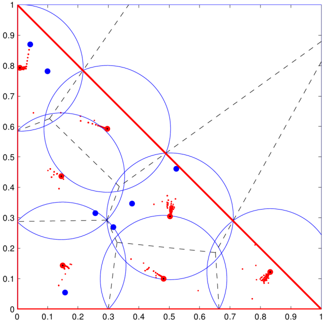
Beaucoup plus rapide (bien qu'il demande beaucoup d'itérations)

1 Générer un ensemble $\mathbf{X}$ de n points
2 Initialiser j un vecteur de 1 de longueur n
3 Tant que $i < nb\_iter$
4 Générer aléatoirement un point w
5 Chercher le point générateur x_k le plus proche d w
6 Mettre à jour : $x_k = \frac{j_k x_k + w}{j_k + 1}$
7 $j_k = j_k + 1$

Construction des CVT : algorithme de McQueen



Fonctionne pour un espace $\mathbb{X}$ quelconque



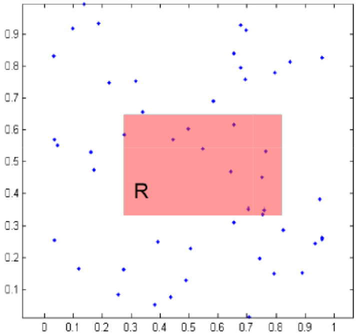
source : L. Pronzato - Ecole PECNUM' 2016

Plans remplissant l'espace : suites à faible discrépance

Rappel de la discrépance

Mesure d'uniformité de la répartition des points dans l'espace

$$D = \sup \left| \frac{N_R}{N} - \frac{V_R}{V} \right|$$



Suites à faible discrépance

Les suites à faible discrépance sont des suites déterministes qui convergent vers la distribution uniforme.

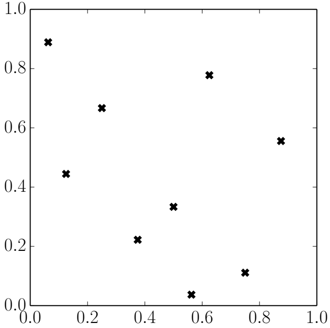
- Elles remplissent l'espace uniformément et “rapidement”
- Elles sont faciles à construire
- On peut facilement ajouter des points

Beaucoup de ces suites existent : Halton, Hammerley, Sobol', Faure, van der Corput, ...

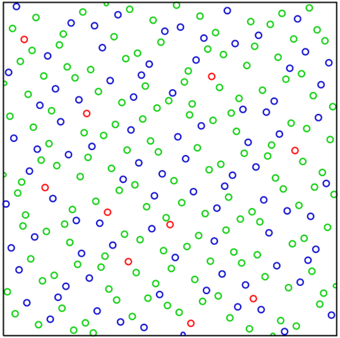
Exemple : suite de Halton

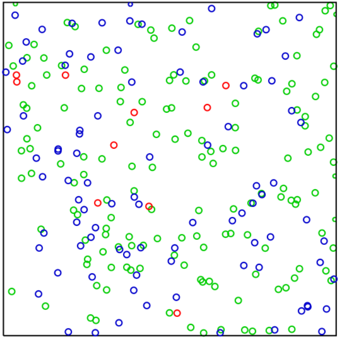
Basée sur d entiers sans diviseurs communs. Pour $d = 2$, avec les entiers $(2, 3)$ la suite s'écrit :

$$x_1 = 1/2,\ 1/4,\ 3/4,\ 1/8,\ 5/8,\ 3/8,\ 7/8,\ 1/16,\ 9/16, \ldots$$
$$x_2 = 1/3,\ 2/3,\ 1/9,\ 4/9,\ 7/9,\ 2/9,\ 5/9,\ 8/9,\ 1/27, \ldots$$



Exemple : suite de Halton (256 points)





source : wikipedia

Définitions / Propriétés

Suites équiréparties : une des trois conditions est vérifiée

- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \to \int f(x)dx$
- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{f(x_i)\in[0,y]^d} \to \mathrm{Vol}([0,y]^d)$
- Discrépance empirique $D_n \to 0$

Il existe des suites équiréparties telles que :

$$\frac{1}{n}\left|\sum_i f(x_i) - \int f(x)dx\right| \leq c(f)\frac{\log(n)^d}{n}$$

$\Rightarrow$ **Suites à faible discrépance**

- Tirage uniforme (Monte-Carlo) : $c(f) = \frac{1}{\sqrt{n}}$
- Plan factoriel (grille) : $c(f)\frac{1}{n}$

Limites des suites à faible discrépance

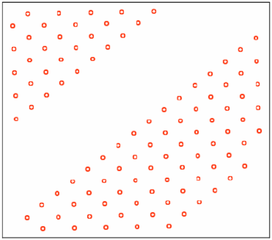
Pour n petit

Ne remplit pas forcément l'espace (cf. exemple de Halton)

Pour d grand

- Alignements en projections
- "Trous" dans les sous-espaces

Ex. : Halton en 8 dimensions, 80 points : (X7, X8)



Source : thèse J. Franco, 2008

Récapitulatif : remplissage d'espace

Plusieurs critères de "qualité"

- intra-distances : Maximin
- inter-distances : minimax
- uniformité : discrépance
- projection / stratification

Plusieurs familles de plans

- Hypercubes latins
- Tessellations centroïdales de Voronoï
- Suites à faible discrépance

Pas de solution universelle !