А.Н. Выборнов

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

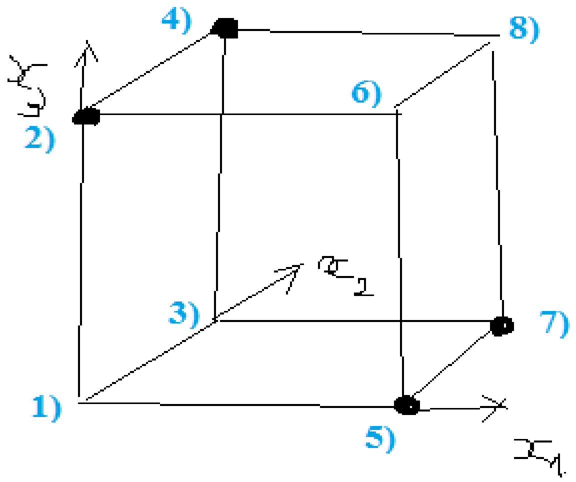
Выявление фиктивных переменных и наличия монотонности с использованием бинарного куба

Выявление фиктивных переменных с использованием бинарного куба

Рассмотрим булеву функцию 3-х переменных, заданную строкой ее значений на бинарных наборах: $f = (e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6\ e_7\ e_8)$.
Булеву функцию трех переменных можно задать, выделив жирными точками на кубе вершины соответствующие *единичным наборам* (наборам на которых функция принимает значение равное единице), например:

f=(01011010)

	x1	x2	x3	f
1)	0	0	0	0
2)	0	0	1	1
3)	0	1	0	0
4)	0	1	1	1
5)	1	0	0	1
6)	1	0	1	0
7)	1	1	0	1
8)	1	1	1	0



Имея такое изображение булевой функции мы можем мгновенно определить, какие переменные будут существенными, а какие фиктивными.
1) Поскольку при проецировании грани 5) 6) 8) 7) на грань 1) 2) 4) 3) жирные точки **<u>не</u>** совпадают, можно сделать вывод что переменная x1 – *существенная* переменная,
2) Поскольку при проецировании грани 3) 4) 8) 7) на грань 1) 2) 6) 5) жирные точки совпадают, можно сделать вывод что переменная x2 – *фиктивная* переменная,
3) Поскольку при проецировании грани 2) 4) 8) 6) на грань 1) 3) 7) 5) жирные точки **<u>не</u>** совпадают, можно сделать вывод что переменная x3 – *существенная* переменная.
Далее мы можем получить таблицу истинности для функции f(x1,x3), рассмотрев ее значения на грани 1) 2) 6) 5):

	x1	x3	f
1)	0	0	0
2)	0	1	1
5)	1	0	1
6)	1	1	0

Нетрудно понять, что

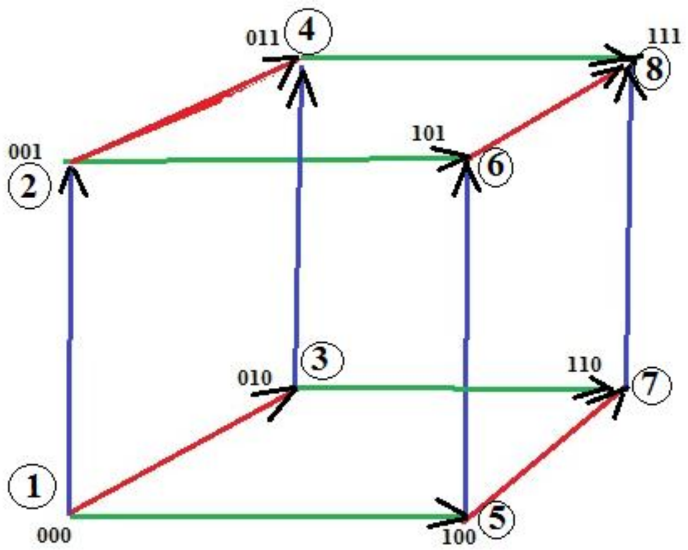
f=x1 ⊕ x3 .

Установление наличия монотонности с использованием бинарного куба

Определим частичный порядок на бинарных наборах:

Бинарный набор $a_1a_2a_3 \geq b_1b_2b_3$, если $a_i \geq b_i$ для $i = 1, 2, 3$.

Этот порядок хорошо виден на бинарном кубе (порядок указан стрелками):



Здесь мы видим, что набор 8 больше всех остальных, наборы 4, 6 и 8 больше чем набор 2 и т. д.

Булева функция 3-х переменных будет *монотонной* ($f \in M$), если

$$a_1a_2a_3 \geq b_1b_2b_3 \;\Rightarrow f(a_1a_2a_3) \geq f(b_1b_2b_3) .$$

Пусть булева функция задана строкой ее значений на бинарных наборах:

$$f = (e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6\ e_7\ e_8) .$$

Если $f \in M$ и $e_1 = 1$, то очевидно, что на всех наборах значение этой функции будет равно 1, поскольку все остальные наборы больше первого набора, то есть в этом случае $f \equiv 1$ - **постоянная функция**.

Рассуждая аналогично, если $f \in M$ и $e_8 = 0$, то на всех наборах значение этой функции будет равно 0, поскольку все остальные наборы меньше восьмого набора, то есть в этом случае $f \equiv 0$ - **постоянная функция**.

Итак, если $f \in M$ и $f \neq const$, то

1) $e_1 = 0$ **и** $e_8 = 1$.

Далее, учитывая частичный порядок на наборах, получим:

2) если $e_2 = 1$**, то** $\begin{cases} e_4 = 1 \\ e_6 = 1 \end{cases}$

3) если $e_3 = 1$**, то** $\begin{cases} e_4 = 1 \\ e_7 = 1 \end{cases}$

4) если $e_5 = 1$**, то** $\begin{cases} e_6 = 1 \\ e_7 = 1 \end{cases}$

Примеры:

$f = (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) \in M$,

$f = (1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) \notin M$,

$f = (0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1) \notin M$,

$f = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1) \in M$.

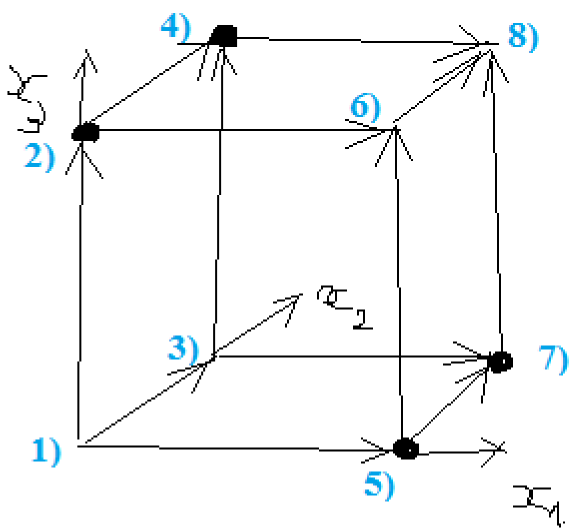
Замечание.

Можно сразу установить наличие или отсутствие монотонности функции, записав соответствующие значения функции около вершин бинарного куба со стрелками. **Для монотонной функции нельзя попасть**, **двигаясь по стрелкам** из вершины, помеченной единицей, в вершину, помеченную нулем. (**Из жирной точки в нежирную**)

Пример:

f=(01011010)

Эта функция ***не** является монотонной*. Из жирной точки 2), например, можно попасть в нежирную точку 6).



Замечание.

Запомнив стандартную нумерацию вершин бинарного куба можно сразу по строке значений булевой функции выделять на кубе жирные точки и быстро решать многие задачи.