

## ЭКЗАМЕН

### Линейная алгебра и аналитическая геометрия (1 семестр)

Дата и начало экзамена по расписанию сессии.



**Обязательно принести на экзамен**

- 1) Зачетка!!!
- 2) Чистая тетрадь (12 листов) + ручка!

**Калькулятором пользоваться нельзя!**

На обложке тетради:

ФИО, группа

Экзамен по предмету «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

КР 1	КР 2

Номер экзаменационного билета \_\_\_\_\_

На первой странице тетради:

Таблица для ответов

№	Ответ	+/-
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

В экзаменационном билете 9 заданий.

Экзамен письменный. Время выполнения работы – 80 мин (1ч 20 мин).

### Критерии промежуточной аттестации (экзамен)

Оценка	Критерий	
Отлично	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ 9 правильных ответов в билете</li> <li>▪ 8 правильных ответов в билете и <i>одна</i> зачтенная <i>контрольная работа</i></li> <li>▪ 7 правильных ответов в билете и <i>две</i> зачтенные <i>контрольные работы</i></li> </ul>	При наличии верного решения!
Хорошо	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ 8 или 7 правильных ответов в билете</li> <li>▪ 6 правильных ответов в билете и <i>одна</i> зачтенная <i>контрольная работа</i></li> <li>▪ 5 правильных ответов в билете и <i>две</i> зачтенные <i>контрольные работы</i></li> </ul>	
Удовлетворительно	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ 6 или 5 правильных ответов в билете</li> </ul>	
Неудовлетворительно	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ 4 и <i>менее</i> правильных ответов в билете</li> </ul>	

## Полезные ссылки:

Учебный портал РТУ МИРЭА: <https://online-edu.mirea.ru>

Сайт лектора: <https://linal-it-19.mozello.site.com>

## Структура экзаменационного билета

**Задача 1.** Действия над матрицами, транспонирование матриц, нахождение обратной матрицы, решение матричных уравнений.

**Задача 2.** Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов: определение, свойства и приложения (нахождение углов в треугольнике, углов между плоскостями, между прямыми, между прямой и плоскостью, нахождение площадей треугольника и параллелограмма, объемов параллелепипеда и пирамиды, нахождение высоты).

**Задача 3.** Прямая и плоскость в пространстве: канонические, параметрические и общие уравнения прямой, уравнение плоскости (по точке и вектору нормали, по трем точкам).

**Задача 4.** Кривые второго порядка: эллипс, гипербола и парабола: определение, канонические уравнения, основные характеристики.

**Задача 5.** Теория (выбрать верные или ошибочные утверждения из нескольких предложенных).

**Задача 6.** Теория (найти значения параметра исходя из определения и свойств определителя, ранга и вырожденности матрицы).

**Задача 7.** Исследование систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с помощью теоремы Кронекера-Капелли: совместная/несовместная, определенная/неопределенная (нахождение ранга матрицы, общего решения методом Гаусса, выделение ФСР и частного решения).

**Задача 8.** Комплексные числа, действия над комплексными числами. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Возведение в степень и вычисление корня.

**Задача 9.** Аналитическая геометрия в пространстве (исследование взаимного расположения двух прямых в пространстве, нахождение точки пересечения двух прямых, расстояния между прямыми, не лежащими в одной плоскости,

нахождение расстояния от точки до прямой, координат точки, симметричной заданной относительно прямой или плоскости, составление уравнения плоскости, содержащей две прямые, поверхности второго порядка: приведение уравнения поверхности к каноническому виду, определение ее вида, нахождение сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям, нахождение точек пересечения прямой с поверхностью, исследование положения точек относительно поверхности).

### Образец экзаменационного билета

#### Билет № 0

**Задача 1.** Решить матричное уравнений  $AX = B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ .

**или 1.** Решить матричное уравнение  $XA = B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ .

**или 1.** Даны две матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Найти  $C = B^T \cdot A^T$ .

**или 1.** Даны две матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ . Найти  $C = A^T \cdot B^T$ .

**Задача 2.** Даны координаты точек  $A(0; 2; 1)$ ,  $B(-3; 2; 4)$ ,  $C(-1; 0; 2)$ . Найти косинус угла  $C$  треугольника  $ABC$ .

**или 2.** Найти площадь треугольника  $ABC$ , если даны координаты его вершин:  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(3; 4; 5)$ ,  $C(2; 4; 7)$ .

**или 2.** Даны координаты точек  $A(5; 1; -4)$ ,  $B(1; 2; -1)$ ,  $C(3; 3; -4)$ ,  $D(2; 2; 2)$ . Проверить на компланарность векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AD}$ .

**или 2.** Найти угол между прямыми  $l_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-7}{1}$  и  $l_2: \begin{cases} x = 3t + 2, \\ y = 4t - 1, \\ z = -5t + 6. \end{cases}$

**или 2.** Найти угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , если  $\alpha: -x + 2y - 2z = 0$ ,  $\beta: x + 4y - z - 4 = 0$  (ответ записать в градусах).

**или 2.** Найти угол между прямой  $l$  и плоскостью  $\alpha$ , заданными уравнениями:

$l: \frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{0}$  и  $\alpha: 4x - 4z + 11 = 0$ . Ответ дать в градусах.

**или 2.** Найти объем тетраэдра  $ABCD$  с вершинами:  $A(5; 1; -4)$ ,  $B(1; 2; -1)$ ,  $C(3; 3; -4)$ ,  $D(2; 2; 2)$ .

**Задача 3.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(-3; 1; 1)$ , перпендикулярно вектору  $\overrightarrow{BC}$ , если  $B(0; 2; 1)$ ,  $C(-3; 2; 4)$ .

**или 3.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(-4; 3; 1)$  перпендикулярно прямой:  $\frac{x-5}{2} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{7}$ .

**или 3.** Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $A(-7; -3; 2)$  перпендикулярно плоскости:  $x - 4y - 5z + 8 = 0$ .

**или 3.** Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-1; 2; -5)$  параллельно прямой  $l$ :  $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-1}{3}$ .

**или 3.** Составить уравнения прямой, проходящей через точки  $A(-1; 2; 3)$  и  $B(5; -2; 1)$ .

**или 3.** Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки:  $A(1; -3; 4)$ ,  $B(0; -2; -1)$  и  $C(1; 1; -1)$

**Задача 4.** Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами в точках  $F_1(0; 3)$  и  $F_2(0; -3)$  и мнимой полуосью, равной 2.



**или 4.** Составить каноническое уравнение эллипса с большой полуосью, равной 10 и фокусами  $F_1(-8; 0)$  и  $F_2(8; 0)$ .

**или 4.** Составить каноническое уравнение параболы с фокусом в точке  $F(-7; 0)$  и директрисой  $x - 7 = 0$ .

**или 4.** Привести уравнение  $5x^2 + y^2 - 20 = 0$  к каноническому виду, определить тип кривой и найти расстояние между фокусами (в случае параболы, найти расстояние между фокусом и директрисой).

**Задача 5.** Укажите номера **верных** утверждений:

1) Система линейных алгебраических уравнений называется несовместной, если она имеет бесконечно много решений.

2) При векторном умножении ортов координатных осей выполняется равенство:  
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}.$$

3) Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  параллельно вектору  $\vec{s} = (m; n; p)$  имеют вид: 
$$\begin{cases} x = mt - x_0 \\ y = nt - y_0 \\ z = pt - z_0 \end{cases}.$$

**или 5.** Указать номера **ошибочных** утверждений.

- 1) Матрица называется невырожденной, если её ранг отличен от нуля.
- 2) Эллипсом называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки  $F$ , называемой фокусом, и данной прямой  $d$ , называемой директрисой  $F \notin d$ .
- 3) Геометрически модуль комплексного числа  $z = x + iy$  является расстоянием от начала координат  $(0; 0)$  до точки с координатами  $(Re\ z; Im\ z)$ .

**или 5.** Укажите номера **верных** утверждений:

- 1) Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
- 2) На плоскости расстояние от точки  $M_0(x_0; y_0)$  до прямой  $Ax + By + C = 0$  определяется по формуле:  $\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .
- 3) Если два комплексных числа расположены в комплексной плоскости симметрично относительно мнимой оси, то их произведение лежит на мнимой оси.

**Задача 6.** При каком значении параметра  $a$  ранг матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2+a \end{pmatrix}$  равен 3?

**или 6.** При каком значении параметра  $a$  матрица  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a-1 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 14 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 & 12 \end{pmatrix}$  будет вырожденной?

**или 6.** При каком значении параметра  $a$  определитель матрицы  $\begin{pmatrix} 5-a & -12 & 8 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 11 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  равен 30?

**Задача 7.** Исследовать систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -7. \end{cases}$$

В ответе указать ранг расширенной матрицы и вид СЛАУ (совместная/несовместная, определенная/неопределенная).

*или 7.* Найти общее решение системы линейных уравнений, сделать проверку, выделить частное решение неоднородной системы: 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

**Задача 8.** Вычислить  $(3 - \sqrt{3}i)^{16}$ . Ответ представить в алгебраической форме и изобразить на комплексной плоскости.

*или 8.* Вычислить  $\frac{17}{1+4i} - (3 - 4i)(-2 + i) + 11i$ . Ответ записать в алгебраической форме.

*или 8.* Решить уравнение  $z^4 + 16 = 0$ . Результат изобразить на комплексной плоскости.

*или 8.* Вычислить  $\frac{(-2-3i)(5+i)}{1-5i} + 2i$ . Ответ записать в алгебраической форме.

**Задача 9.** Найти точку, симметричную точке М (1; 2; 1) относительно прямой  $l$ :

$$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1}.$$

**или 9.** Найти точку, симметричную точке  $P(5; 2; -1)$  относительно плоскости:  $2x - y + 3z + 23 = 0$ .

**или 9.** Показать, что прямые  $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$  и  $l_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+6}{1}$  лежат в одной плоскости, найти уравнение этой плоскости и если прямые не параллельны, то найти точку пересечения.

**или 9.** Исследовать взаимное расположение прямых  $l_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{0}$  и  $l_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ . Если они не пересекаются, найти расстояние между ними.

**или 9.** Вычислить расстояние от точки  $M(0; 1; 2)$  до прямой  $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ .

**или 9.** Привести уравнение  $4x^2 + y^2 - z^2 - 2y = 0$  к каноническому виду, определить вид поверхности и найти координаты центра канонической системы координат. Найти общие точки поверхности и прямой:  $\frac{x}{0} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-2}{-1}$ .

**или 9.** Уравнение поверхности:  $9x^2 + 4y^2 - z^2 - 18x + 16y - 11 = 0$  привести к каноническому виду. Определить тип поверхности и сделать чертеж. Установить по одну или по разные стороны от поверхности находятся точки  $A(5; 1; 0)$  и  $B(1; 0; 9)$  ?