КОНСУЛЬТАЦИЯ по дисциплине “Линейная алгебра и аналитическая геометрия”

Часть II.

Экзамен по дисциплине “Линейная алгебра и аналитическая геометрия, часть II” включает задачи по следующим темам:

1. Фундаментальная система решений.

2. Линейные векторные пространства. Базис и размерность линейного пространства.

3. Матрица перехода от одного базиса к другому.

4. Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Преобразование линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора.

5. Операции над линейными операторами.

6. Собственные значения, собственные и присоединенные векторы квадратной матрицы.

7. Квадратичные формы.

8. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью метода собственных векторов.

9. Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа.

Эти темы нужно повторить, прежде чем приступить к решению задач.

Перейдем к разбору примеров задач, входящих в экзаменационный билет.

Пример 1. (Фундаментальная система решений).

<u>Пример 1</u> (Лекция 7. Фундаментальная система решений)

Установить размерность пространства L решений однородной системы уравнений. Указать базис этого пространства.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

<u>Решение:</u>

1. Определим ранг матрицы A.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 10 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 8 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -12 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right) \cdot(-5)\cdot(-3) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 10 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -42 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & -42 & -7 & 7 & 0 \end{array}\right) \cdot(-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 10 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -42 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot\left(-\frac{1}{6}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 10 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 7/6 & -7/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}; \quad \mathrm{rang}(A|B) = \mathrm{rang}\,A = 2.$$

d – размерность пространства решений.

$d = n - r = 5 - 2 = 3.$

Базисные переменные: x_1, x_2.
Свободные переменные: $x_3=c_1,\ x_4=c_2,\ x_5=c_3$
Получаем систему:

$$\begin{cases} x_1+x_2+10c_1+c_2-c_3=0 \\ x_2+7c_1+\frac{7}{6}c_2-\frac{7}{6}c_3=0 \\ x_3=c_1,\ x_4=c_2,\ x_5=c_3 \end{cases};\quad \overline{X}=\begin{pmatrix} -x_2-10c_1-c_2+c_3 \\ -7c_1-\frac{7}{6}c_2+\frac{7}{6}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Находим $\overline{e_1}$: $c_1=1,\ c_2=c_3=0$; $\overline{e_1}=\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Находим $\overline{e_2}$: $c_1=0,\ c_2=1,\ c_3=0$; $\overline{e_2}=\begin{pmatrix} 1/6 \\ -7/6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Находим $\overline{e_3}$: $c_1=c_2=0,\ c_3=1$; $e_3=\begin{pmatrix} -1/6 \\ 7/6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\overline{X}=c_1\overline{e_1}+c_2\overline{e_2}+c_3\overline{e_3}=c_1\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1/6 \\ -7/6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} -1/6 \\ 7/6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $d=3$ – размерность пространства L;
Базис: $\overline{e_1}=(-3,-7,1,0,0)$, $\overline{e_2}=(1/6,-7/6,0,1,0)$, $\overline{e_3}=(-1/6,-7/6,0,1,0)$.

Пример 2. (Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора.)

Пример 2 (Лекция 8–9. Линейные операторы. Преобразование линейного оператора. Матрица линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора)

Пусть $x=(x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными преобразования A, B, C. Если преобразования оказались линейными, найти матрицу, размерности ядра и образа преобразования.

$$Ax=(3x_1+2x_2+x_3,\ x_3,\ 2x_1-3x_2-4x_3),$$
$$Bx=(3x_1+2x_2+x_3,\ 1,\ 2x_1-3x_2-4),$$
$$Cx=(3x_1+2x_2+x_3,\ x_3,\ 2x_1^4-3x_2-4x_3).$$

Решение

Линейным является только преобразование Ax.

Матрица этого преобразования: $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

$\dim \operatorname{Im} Ax = \operatorname{rang} A$ — размерность образа преобразования.

$\dim \ker Ax = n - r$ — размерность ядра преобразования.

Найдем $r = \operatorname{rang} A$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot(-2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 5 & 5 \\ 0 & \underline{-13} & -14 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу к ступенчатому виду.
Из которого видно, что $\operatorname{rang} A = 3$. $n = 3$

Следовательно, $\dim Im = r = 3$, $\dim \ker = n - r = 3 - 3 = 0$.

<u>Ответ</u>:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ – матрица линейного преобразования.

$\dim Im = 3$ – размерность образа преобразования

$\dim \ker = 0$ – размерность ядра преобразования.

Пример 3. (Операции над линейными операторами).

Пример 3. (Лекция 13. Операции над линейными операторами).

Пусть $x=(x_1, x_2, x_3)$, $Ax=(x_2-x_3, x_1, x_1+x_3)$, $Bx=(x_2, 2x_3, x_1)$.
Найти $(B^2-A)x$.

Решение:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^2-A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(B^2-A)x=(-x_2+3x_3, x_1, -x_1+x_2-x_3)$.

Пример 4.1. (Линейные векторные пространства. Базис и размерность линейного пространства.)

Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе (т.е найти x_e). По известному вектору y_e найти вектор y.
$e_1=(-2, 3, 0)$; $e_2=(2, -3, 4)$; $e_3=(-2, 0, -3)$; $x=(-4, 3, -7)$; $y_e=(4, 4, 3)$.

Решение:

1. Проверим, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис.

$$C=(e_1, e_2, e_3), \quad |C| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$$

Вывод: векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис.

2. С помощью уравнения $x = \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ найдем координаты вектора x в заданном базисе, т.е найдем $x_e = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Имеем: $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Получаем систему: $\begin{cases} -2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = -4, \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 3, \\ 4\lambda_2 - 3\lambda_3 = -7. \end{cases}$

Решаем полученную систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -7 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Получаем $\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 2, \\ 4\lambda_2 - 3\lambda_3 = -7; \\ \lambda_3 = 1. \end{cases}$ Следовательно, $\begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 1. \end{cases}$

$$x_e = (0, -1, 1)$$

3. Из уравнения $y = 4e_1 + 4e_2 + 3e_3$ находим вектор y.

Имеем $4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, т.е. $y = (-6, 0, 7)$.

Ответ: векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис; $x_e = (0, -1, 1)$, $y = (-6, 0, 7)$.

Пример 4.2. (Линейные векторные пространства. Базис и размерность линейного пространства.)

Показать, что многочлены f_1, f_2, f_3 образуют базис и найти координаты многочлена h в этом базисе. По известному вектору g_f найти многочлен g. $f_1(x)=-3+2x^2$, $f_2(x)=2+x+2x^2$, $f_3(x)=4+4x-2x^2$, $h(x)=5+x$, $g_f=(-1,2,1)$.

Решение:

1. Перейдем от многочленов к векторам:

$f_1(x)=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$, $f_2(x)=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $f_3(x)=\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$, $h(x)=\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$

Покажем, что векторы f_1, f_2, f_3 образуют базис:

$$|F|=|f_1,f_2,f_3|=\begin{vmatrix}-3&2&4\\0&1&4\\2&2&-2\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1&4\\2&-2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0&4\\2&-2\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}0&1\\2&2\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-10)+16-8=38,\ |F|\neq 0.$$

Следовательно, векторы f_1, f_2, f_3 образуют базис.

2. Найдем координаты многочлена h в этом базисе.

$h=\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3$, т.е. $\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$.

Получаем систему:

$$\begin{cases}-3\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3=5,\\ \alpha_2+4\alpha_3=1,\\ 2\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=-1,\\ \alpha_2=1,\\ \alpha_3=0.\end{cases}$$

В результате $h_f=(-1,1,0)$

3. Вычислим коэффициенты многочлена g, если $g_f=(-1,2,-1)$.

Имеем $g=-1\cdot f_1+2\cdot f_2-1\cdot f_3=-1\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$.

Следовательно, $g(x)=3-2x+4x^2$.

Ответ: Многочлены f_1, f_2, f_3 образуют базис; $h_f=(-1,1,0)$; $g(x)=3-2x+4x^2$.

Пример 4.3. (Линейные векторные пространства. Базис и размерность линейного пространства.)

По известным векторам a, b, c и их значениям a_e, b_e, c_e в базисе e_1, e_2, e_3 найти векторы этого базиса.

$a_e = (3, 0, 2)$, $b_e = (2, 1, 2)$, $c_e = (1, 2, 1)$, $a = (-3, -1, 2)$, $b = (0, -1, 1)$, $c = (3, -2, 2)$.

<u>Решение:</u>

Пусть $e_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

Тогда разложение вектора $a = (-3, -1, 2)$ по базису e_1, e_2, e_3 имеет вид:

$3\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, т.е. $3e_1 + 2e_3 = a$ или $a = 3e_1 + 0e_2 + 2e_3$.

Аналогично получаем $b = 2e_1 + e_2 + 2e_3$, $c = e_1 - 2e_2 + e_3$.

В результате имеем следующую систему: $\begin{cases} 3e_1 + 0e_2 + 2e_3 = a, & (1) \\ 2e_1 + e_2 + 2e_3 = b, & (2) \\ 3e_1 - 2e_2 + 2e_3 = c. & (3) \end{cases}$

Из этой системы имеем: $e_3 = 2\cdot(2) - (1) - (3) = 2b - a - c$.

Подставив координаты векторов a, b, c получаем: $e_3 = 2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Зная, что $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ из первого уравнения находим $e_1 = \frac{1}{3}(a - 2e_3)$.

Получаем $e_1 = \frac{1}{3}(a - 2e_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -1-2 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Зная e_1 и e_3 из второго уравнения находим e_2.

$e_2 = b - 2(e_1 + e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Ответ</u>: $e_1 = (-1, -1, 2)$, $e_2 = (2, -1, 1)$, $e_3 = (0, 1, 2)$.

Пример 4.4. (Линейные векторные пространства. Матрица перехода от одного базиса к другому.)

Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 и u_1, u_2, u_3 образуют базис, и найти матрицу перехода $T_{e\to u}$. По известным векторам в одном базисе найти их значения в другом.

$e_1=(1,-1,1)$, $e_2=(0,-1,1)$, $e_3=(1,2,-1)$; $u_1=(2,-2,3)$, $u_2=(3,3,-1)$, $u_3=(0,3,-1)$;
$x_e=(4,-3,2)$, $y_u=(-1,1,1)$.

Решение:

1. Покажем, что векторы e_1, e_2, e_3 и u_1, u_2, u_3 образуют базис.

1.1. $C=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$, $|C|=-1$, т.е. $|C|\neq 0$. Следовательно, e_1, e_2, e_3 образуют базис.

1.2. $U=(u_1,u_2,u_3)=\begin{pmatrix}2&3&0\\-2&3&3\\3&-1&-1\end{pmatrix}$, $|U|=21$, т.е $|U|\neq 0$. Следовательно, u_1, u_2, u_3 образуют базис.

2. Находим матрицу перехода $T_{e\to u}$.

Так как $U=T_{e\to u}\cdot C$, то $T_{e\to u}=C^{-1}\cdot U$.

2.1. Находим C^{-1}

Имеем $(C|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\-1&-1&2&0&1&0\\1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\cdot(1)\cdot(-1)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&-1&3&1&1&0\\0&1&-2&-1&0&1\end{array}\right)\cdot(1)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&-1&3&1&1&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)\cdot(-1)\sim$

$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-3&-1&-1&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)\cdot(-1)\cdot(3)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&-1\\0&1&0&-1&2&3\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)=(E|C^{-1})$. Следовательно, $C^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix}$.

2.2. Находим $T_{e\to u}=C^{-1}\cdot U=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&0\\-2&3&3\\3&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\3&0&3\\1&2&2\end{pmatrix}$.

Получаем $T_{e\to u}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\3&0&3\\1&2&2\end{pmatrix}$.

3. Учитывая, что $x_u = T^{-1}_{e\to u}\cdot x_e$, найдем сначала $T^{-1}_{e\to u}$, а затем x_u.

3.1. $$(T_{e\to u}\,|\,E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot(-3)\cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 9 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)\cdot(3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1} & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{21} & -6 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(1/21) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1} & 0 & -6 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \underline{1} & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -6/21 & 1/21 & 3/21 \end{array}\right)\cdot(6)\cdot(-4) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1} & 0 & 0 & 6/21 & 6/21 & -3/21 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 3/21 & -4/21 & 9/21 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -6/21 & 1/21 & 3/21 \end{array}\right) = (E\,|\,T^{-1}_{e\to u}).$$

$$T^{-1}_{e\to u} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 6 & 6 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$ Проверка $T_{e\to u}\cdot T^{-1}_{e\to u} = E$.

3.2. $$x_u = T^{-1}_{e\to u}\cdot x_e = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 6 & 6 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 42 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Получили $x_u = (0, 2, -1)$.

4. Так как $y_e = T_{e\to u}\cdot y_u$, то имеем

$$y_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$ В результате $y_e = (-2, 0, 3)$.

<u>Ответ</u>: Векторы e_1, e_2, e_3 и u_1, u_2, u_3 образуют базис;
$$T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\quad x_u = (0, 2, -1);\quad y_e = (-2, 0, 3).$$

Пример 5.1. (Линейные операторы и их матрицы. Преобразование линейного оператора.)

• По известной матрице линейного оператора A_e в базисе e_1, e_2 найти матрицу A_u в базисе u_1, u_2.

$A_e = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; $e_1 = (-2, 3)$, $e_2 = (0, 3)$; $u_1 = (1, -3)$, $u_2 = (-2, 1)$.

Решение:

$T_{e\to u} \cdot A_u = A_e \cdot T_{e\to u}$. Следовательно, $A_u = T^{-1}_{e\to u} \cdot A_e \cdot T_{e\to u}$.

1. Найдем $T_{e\to u} = C^{-1} \cdot U$.

1.1. $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2. $C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$.

1.3. $T_{e\to u} = C^{-1} \cdot U = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/2 & -2/3 \end{pmatrix}$.

2. Найдем $T^{-1}_{e\to u}$.

2.1. $|T_{e\to u}| = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. 2.2. $T^{-1}_{e\to u} = \frac{1}{|T_{e\to u}|} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислим $A_u = T^{-1}_{e\to u} \cdot A_e \cdot T_{e\to u}$.

Имеем $A_u = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/2 & -2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -12 & 10 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/2 & -2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{56}{3} \\ -12 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -\frac{56}{15} \\ -12/5 & -1/5 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A_u = \begin{pmatrix} 1/5 & -56/15 \\ -12/5 & -1/5 \end{pmatrix}$.

Пример 5.2. (Линейные операторы и их матрицы. Преобразование линейного оператора.)

По известной матрице линейного оператора A_f в базисе f_1, f_2, f_3, найти A_g в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} f_1(x) &= 1, \\ f_2(x) &= x, \\ f_3(x) &= x^2 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} g_1(x) &= 1+2x, \\ g_2(x) &= -1+2x+x^2, \\ g_3(x) &= -1+x+x^2. \end{aligned}$$

<u>Решение:</u>

$A_g = T_{f\to g}^{-1} \cdot A_f \cdot T_{f\to g}$.

1. Найдем $T_{f\to g} = F^{-1} \cdot G$.

1.1. $F = (f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$. Следовательно $F^{-1} = E$.

$G = (g_1, g_2, g_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.2. $T_{f\to g} = F^{-1} \cdot G = E \cdot G = G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найдем $T_{f\to g}^{-1}$: $(T_{f\to g} | E) \sim \ldots \sim (E | T_{f\to g}^{-1})$.

Имеем $(T_{f\to g} | E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot (-4) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(1) \\ \cdot(-1) \end{matrix}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \cdot (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) = (E \mid T_{f\to g}^{-1})$. Получаем $T_{f\to g}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислим $A_g = T_{f\to g}^{-1} \cdot A_f \cdot T_{f\to g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

<u>Ответ</u>: $A_g = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Пример 5.3. (Линейные операторы и их матрицы. Преобразование линейного оператора.)

По известной матрице линейного оператора A_e в базисе e_1, e_2, e_3 и разложению этого базиса по базису u_1, u_2, u_3, найти матрицу A_u в базисе u. $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} e_1 = u_1 + 2u_2 - 2u_3, \\ e_2 = u_2 - u_3, \\ e_3 = 2u_1 + 2u_2 - u_3. \end{cases}$

Решение:

1. Из разложения базиса e_1, e_2, e_3 по базису u_1, u_2, u_3 можно выписать матрицу перехода $T_{u\to e}$. Имеем $T_{u\to e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

A_u можно найти по формуле (2):

$$A_u = T^{-1}_{e\to u} \cdot A_e \cdot T_{e\to u}. \quad (2)$$

Следовательно, нужно найти матрицу перехода $T_{e\to u}$ из формулы (3):

$$T_{e\to u} = T^{-1}_{u\to e} \quad (3)$$

2. Находим $T^{-1}_{u\to e}$, зная что $(T_{u\to e} | E) \sim \ldots \sim (E | T^{-1}_{u\to e})$

Имеем:

$$(T_{u\to e} | E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-2) \cdot(2) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 1 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot(-2) \cdot(2) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Следовательно, $T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $T^{-1}_{e\to u} = T_{u\to e}$.

3. Находим $A_u = T^{-1}_{e\to u} \cdot A_e \cdot T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A_u = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

Пример 5.4. (Линейные операторы и их матрицы. Операции над линейными операторами.)

По известной матрице линейного оператора A_e в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ и $\bar{B}_u$ в базисе u_1, u_2, найти $A+B$ и $A-2B_u$ в базисе u.

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_u = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \bar{e}_1 = (-1, 2); \\ \bar{e}_2 = (-1, 1) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bar{u}_1 = (2, -3) \\ \bar{u}_2 = (-3, 5). \end{matrix}$$

Решение:

$A+B = A_u + B_u$, $A-2B = A_u - 2B_u$.

B_u – известна, следовательно, надо найти A_u.

1. $C = (\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $|c| = -1+2 = 1$.

$U = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $A_ч = T^{-1}_{c \to ч} \cdot A_e \cdot T_{e \to ч}$.

Надо найти $T_{e\to ч} = C^{-1} \cdot U$, а затем $T^{-1}_{e\to ч}$.

Имеем

$$T_{e\to ч} = C^{-1}\cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad |T_{e\to ч}| = -1+2 = 1.$$

$$T^{-1}_{e\to ч} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\underline{A_ч} = T^{-1}_{e\to ч} \cdot A_e \cdot T_{e\to ч} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_ч + B_ч = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad A_ч - 2B_ч = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Ответ</u>: $A+B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $A-2B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

<u>Пример 6</u>. (Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы.)

Линейный оператор f в базисе e_1, e_2, e_3 задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Вектор x является собственным вектором оператора f. Найти к какому собственному значению он относится, если $x = 3e_1 - 5e_2 + e_3$.

<u>Решение:</u>

1. Найдем собственные значения уравнения. Имеем:

$$\det(A - \alpha E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) - 8(2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)(-(1-\lambda)(1+\lambda) - 8) = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 9\right) = (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+3) = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

2. Находим к какому из найденных собственных значений относится вектор $x = 3e_1 - 5e_2 + e_3$, исходя из определения $Ax = \lambda x$, где x – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ.

Имеем: $A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \cdot x = -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$\lambda_2 \cdot x = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 \cdot x = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix}$. Получаем $Ax = \lambda_2 x$.

<u>Ответ</u>: Вектор x относится к собственному значению $\lambda_2 = 2$

<u>Пример 7.</u> (Собственные значения, собственные и присоединенные векторы квадратной матрицы.)

Найти собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}4&1&0\\1&4&0\\-1&1&5\end{pmatrix}$.

Найти собственные векторы для минимального собственного числа.

<u>Решение:</u>

1. Найдем собственные значения уравнения. Имеем:

$$\det(A-\alpha E)=\begin{vmatrix}4-\lambda&1&0\\1&4-\lambda&0\\-1&1&5-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)^2(5-\lambda)-(5-\lambda)=$$

$$=(5-\lambda)\cdot((4-\lambda)^2-1)=(5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-3)=0.$$

Следовательно, $\lambda_1=3, \lambda_{2,3}=5$.

Минимальное собственное значение: $\lambda_1=3$.

2. Найдем собственный вектор, соответствующий $\lambda_1=3$:

Имеем $(A-\alpha_1 E)\cdot x=0$. Получаем $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\-1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Решаем методом Гаусса. Получаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&1&0&0\\-1&1&2&0\end{array}\right)\cdot(-1)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&0&0&0\\-1&1&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\-1&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\cdot(1)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&2&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\cdot\frac{1}{2}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\cdot(-1)\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3&\end{matrix}\\\left(\begin{array}{ccc|c}\underline{1}&0&-1&0\\0&\underline{1}&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}.$$

Базисные переменные: x_1, x_2. Свободная переменная $x_3 = c$.

Имеем: $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_3 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = -c \\ x_3 = c \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Полагая $c = 1$, имеем $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Ответ</u>: собственные значения $\lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = 5$; минимальному собственному значению $\lambda_1 = 3$ соответствует собственный вектор: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Пример 8.</u> (Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью метода собственных векторов.)

Привести квадратичную форму $f(x,y)=4x^2+4xy+y$ к каноническому (диагональному) виду $g(\tilde{x},\tilde{y})=\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2$, где $\lambda_1<\lambda_2$, ортогональным преобразованием $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$. Запишите матрицу C преобразования переменных.

<u>Решение</u>:

1. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица квадратичной формы.
2. Найдем собственные значения матрицы A.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)-4=\lambda^2-5\lambda=\lambda(\lambda-5)=0.$$

Собственные значения: $\begin{cases} \lambda_1=0, \\ \lambda_2=5. \end{cases}$

Следовательно, канонический вид будет следующим:

$$\underline{g(\tilde{x},\tilde{y})=5\tilde{x}^2.}$$

Убедимся в этом.

4. Проверим, что векторы e_1 и e_2 ортогональны, вычислив соответствующее скалярное произведение. Имеем $e_1 \cdot e_2 = (1,-2)\cdot(2,1) = 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 = 0$.

Вывод: векторы e_1 и e_2 ортогональны.

5. Ортонормируем полученные собственные векторы.

Длины векторов: $|e_1| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$, $|e_2| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

Соответствующие ортонормированные векторы:

$$e_1^\circ = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad e_2^\circ = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Они ортогональны. Действительно $e_1^\circ \cdot e_2^\circ = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})\cdot(2/\sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}) =$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = 0.$

6. Запишем матрицу преобразований переменных C:

$$C=\left(e_1^0, e_2^0\right)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y}\end{pmatrix}.$$

Вывод: Для перехода к каноническому виду в исходной квадратичной форме надо сделать замену:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y},\\ y=-\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y}.\end{cases}$$

7. Находим канонический вид квадратичной формы методом собственных векторов

Имеем: $g(\tilde{x},\tilde{y})=4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right)^2+4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right)+\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right)^2=$

$=\frac{1}{5}\left(4\tilde{x}^2+16\tilde{x}\tilde{y}+16\tilde{y}^2-8\tilde{x}^2-16\tilde{x}\tilde{y}+4\tilde{x}\cdot\tilde{y}+8\tilde{y}^2+4\tilde{x}^2-4\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{y}^2\right)=5\tilde{y}^2.$

Пусть $x=\tilde{y}$. Тогда $g(\tilde{y},\tilde{x})=5\tilde{y}^2$.

Ответ: $g(\tilde{y},\tilde{x})=5y^2$. Матрица преобразований: $C=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$.

Пример 9. (Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа.)

Приведём квадратичную форму $f(x,y,z)$ к нормальному виду $g(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, используя метод Лагранжа.

$$f(x,y,z)=4x^2+8xy+4xz+3y^2-2z^2.$$

Решение:

1. Запишем матрицу квадратичной формы и определим её ранг.

Имеем: $A=\begin{pmatrix}4&4&2\\4&3&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$, $|A|=4\cdot\begin{vmatrix}3&0\\0&-2\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}4&0\\2&-2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}4&3\\2&0\end{vmatrix}=4\cdot(-6)-4\cdot(-8)+2\cdot(-6)=-4$

$|A|=-4$, т.е. $|A|\neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rang} A=3$. Такой же ранг имеет соответствующая этой матрице квадратичная форма.

2-3. Выделим полные квадраты в $f(x,y,z)$. Имеем:

$$f(x,y,z)=(4x^2+8xy+4xz)+3y^2-2z^2=\left((2x)^2+2\cdot 2x\cdot(2y+z)+(2y+z)^2\right)-(2y+z)^2+3y^2-2z^2=$$

$$=(2x+2y+z)^2-y^2-4yz-3z^2=(2x+2y+z)^2-\left(y^2+2y\cdot 2z+(2z)^2\right)+4z^2-3z^2=(2x+2y+z)^2-(y+2z)^2+z^2.$$

4. Выпишем формулы перехода от старых переменных к новым и соответствующую матрицу B.

Имеем: $\begin{cases}\tilde{x}=2x+2y+z,\\ \tilde{y}=y+2z,\\ \tilde{z}=z.\end{cases}$ $B=\begin{pmatrix}2&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $|B|=2$, $|B|\neq 0\Rightarrow \operatorname{rang} B=3$. $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\\\tilde{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

5. Используя новые переменные получим канонический вид исходной квадратичной формы. Имеем $g(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=\tilde{x}^2-\tilde{y}^2+\tilde{z}^2$, $\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. $\operatorname{rang}\tilde{A}=3$.

Так как модули всех чисел, стоящих на главной диагонали матрицы $\tilde{A}$ равны 1, то эта матрица описывает нормальный вид исходной квадратичной формы.

Ответ: Нормальный вид $g(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=\tilde{x}^2-\tilde{y}^2+\tilde{z}^2$.