

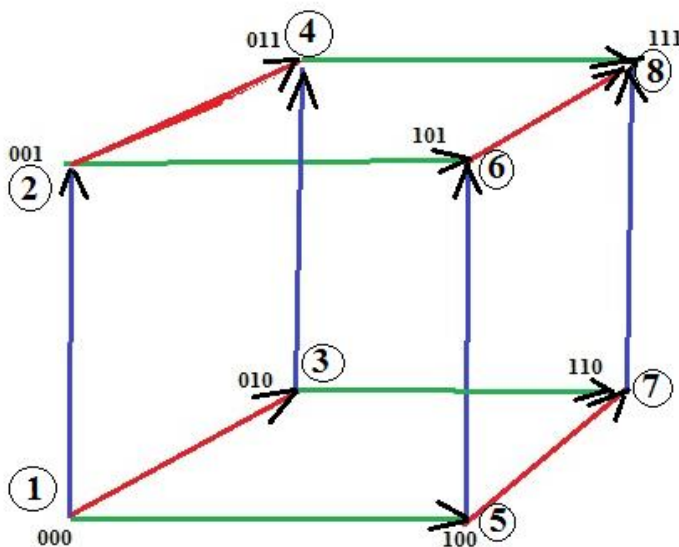
А.Н. Выборнов ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Быстрый способ получения полинома Жегалкина булевой функции 3-х переменных (метод А.Н. Выборнова)

Определим частичный порядок на бинарных наборах:

Бинарный набор $a_1a_2a_3 \geq b_1b_2b_3$, если $a_i \geq b_i$ для $i = 1, 2, 3$.

Этот порядок хорошо виден на бинарном кубе (порядок указан стрелками):



Здесь мы видим, что набор 8 больше всех остальных, наборы 4, 6 и 8 больше чем набор 2 и т. д.

Изложим теперь быстрый способ получения полинома Жегалкина.

- 1) Запишем таблицу истинности функции.
 - 2) Напишем столбец монотонных конъюнкций, соответствующих бинарным наборам (см. пример). Порядок его формирования ясен из примера.
 - 3) Находим самую верхнюю единицу в столбце значений функции. Отмечаем кружком эту единицу – тем самым определяем набор, напротив которого стоит эта единица.
 - 4) Прибавим единицу ко всем значениям функции в наборах больше либо равных отмеченному набору (сложение по модулю 2), результаты записываем в новый столбец. Остальные значения столбца переписываем в новый столбец без изменений.
 - 5) В новом столбце находим самую верхнюю единицу и повторяем действия 3) и 4) пока не получим столбец из нулей.
- Искомый полином Жегалкина состоит из мономов, стоящих в отмеченных строках (см. пример)

	X1	X2	X3		f				
①	0	0	0	1	✓	1	0	0	0
②	0	0	1	X3	✓	0	1	0	0
③	0	1	0	X2	✓	0	1	1	0
④	0	1	1	X2X3		1	0	1	0
⑤	1	0	0	X1		1	0	0	0
⑥	1	0	1	X1X3		0	1	0	0
⑦	1	1	0	X1X2	✓	1	0	0	1
⑧	1	1	1	X1X2X3		0	1	0	1

$$f = 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$$

Еще один пример:

	X1	X2	X3		f					
①	0	0	0	1		0	0	0	0	0
②	0	0	1	X3		0	0	0	0	0
③	0	1	0	X2	✓	1	0	0	0	0
④	0	1	1	X2X3	✓	0	1	0	0	0
⑤	1	0	0	X1	✓	1	1	1	0	0
⑥	1	0	1	X1X3	✓	0	0	0	1	0
⑦	1	1	0	X1X2		0	1	1	0	0
⑧	1	1	1	X1X2X3	✓	1	0	1	0	1

$$f = x_1 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3$$

Обоснование метода А. Н. Выборнова основано на том, что в полиноме Жегалкина участвуют монотонные конъюнкции. По сути, мы накрываем множество единичных наборов интервалами, соответствующим монотонным конъюнкциям, так, чтобы, каждый единичный набор был покрыт нечетное число раз, а неединичные наборы оказались накрыты четное число раз.

Предлагаемый метод А.Н. Выборнова является одним из самых быстрых методов получения полинома Жегалкина. Кроме того знание и учет частичного порядка на бинарных наборах является полезным для быстрого установления наличия или отсутствия монотонности функции 3-х переменных.

На экзамене можно использовать этот метод, оформляя как в примерах.