Математический анализ, часть 3

Лекция 16

Повторение

№1 Уравнение с разделяющимися переменными.

Найти решение задачи Коши: $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2}{x^4}} \quad \boldsymbol{y(1) = -1}$

Решение

1) Переводим уравнение в дифференциальную форму, умножая на $\boldsymbol{dx}$.

$$dy - \frac{3y^2}{x^4}dx = 0$$

2) Разделяем переменные, деля обе части уравнения на $\boldsymbol{y^2}$
(при условии, что $y \neq 0$)

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{3dx}{x^4}$$

3) Берем интегралы:

$$\int \frac{dy}{3y^2} - \int \frac{3dx}{x^4} = \text{c}$$

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{x^3} = \text{c}$$

Выражаем y: $y = \boldsymbol{\frac{x^3}{1-cx^3}}$

4) Находим константу с из условия $\boldsymbol{y(1) = -1}$.

$$-1 = \boldsymbol{\frac{1}{1-c}} \;=>\; c = 2$$

Ответ: частное решение: $\boldsymbol{y = \frac{x^3}{1-2x^3}}$

№2 Однородное линейное уравнение 2 порядка с постоянными коэффициентами.

Найти решение задачи Коши:

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \quad y(1) = 2e^3, \quad y'(1) = 7e^3$$

Решение

Решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

Его корень: $\lambda_1 = 3$ кратности 2.

Общее решение будет иметь вид:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

Ответ: частное решение : $y(x) = e^{3x} + xe^{3x}$

№3 Неоднородное линейное уравнение 2 порядка с постоянными коэффициентами.

Найти решение задачи Коши:

$$y'' - 6y' + 8y = 3e^x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

1) Находим общее решение $\bar{y}$ аналогичного однородного уравнения:

$y'' - 6y' + 8y = 0$

Решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

Его корни: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ – два различных действительных корня.

Общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$\bar{y} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}$$

2) Находим частное решение y^* неоднородного уравнения:

Из вида правой части следует, что частное решение будет иметь вид:

$$y^* = x^m A e^x$$

Для определения m выясним является ли корнем характеристического уравнения число **λ=1**.

Поскольку, это число корнем не является, m=0.

Частное решение имеет вид:
$\boldsymbol{y^* = \mathrm{A}e^x}$

Для определения константы A, продифференцируем частное решение и подставим в исходное уравнение.
$y^{*''} = y^{*'} = y^* = \mathrm{A}e^x$

$\mathrm{A}e^x - 6\mathrm{A}e^x + 8\mathrm{A}e^x = 3e^x$
Разделим на e^x:
$\mathrm{A} - 6\mathrm{A} + 8\mathrm{A} = 3 \Rightarrow \mathrm{A} = \mathbf{1}$

Окончательный вид частного решения: $\boldsymbol{y^* = e^x}$

Окончательный вид общего решения исходного уравнения:
$\boldsymbol{y = \bar{y} + y^* = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} + e^x}$

3) Найдем константы c_1 и c_2.
$\boldsymbol{y(0) = c_1 + c_2 + 1 = 0}$

$y' = 2c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{4x} + e^x$
$\boldsymbol{y'(0) = 2c_1 + 4c_2 + 1 = 0}$

После решения этой системы уравнений, получаем, что
$c_1 = -\frac{3}{2}, \; c_2 = \frac{1}{2}$
Ответ: частное решение : $\boldsymbol{y(x) = -\frac{3}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{4x} + e^x}$

№4 Исследование сходимости числовых рядов

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $\boldsymbol{a_n = \frac{5n^2-3n+2}{8n^2+12n-7}}$.

Решение
Проверим выполнение **необходимого признака** сходимости ряда.

Рассмотрим $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2-3n+2}{8n^2+12n-7} = \mathit{lim}_{x\to\infty} \frac{5-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{8+\frac{12}{n}-\frac{7}{n^2}} = \frac{5}{8} \neq 0}$

Выделенные красным слагаемые стремятся к нулю при n→ ∞.
Необходимый признак сходимости рядов не выполнен!

Ответ: ряд расходится

№5 Исследование сходимости числовых рядов

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $\boldsymbol{a_n = \frac{2n+1}{4^n}}$.

Решение

Используем **признак Даламбера.**

Запишем член ряда с номером n+1:

$a_{n+1} = \frac{2n+3}{4^{n+1}}$

В соответствии с признаком Даламбера, найдем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+3}{4^{n+1}}}{\frac{2n+1}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)4^n}{4^{n+1}(2n+1)} = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = \frac{1}{4} < \mathbf{1}$$

Ответ: ряд сходится.

№6 Исследование сходимости числовых рядов

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $\boldsymbol{a_n = \frac{\sqrt{9n^3+2n}}{6n^2-2n+4}}$

Решение

Используем **подбор ряда сравнения** в виде предельного следствия.

В качестве ряда сравнения возьмем обобщенный гармонический ряд $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}}$

Величину степени $\boldsymbol{\alpha}$ определим как разность максимальных степеней знаменателя и числителя:

$\boldsymbol{\alpha = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}}$

Так как $\boldsymbol{\frac{1}{2} < 1}$, то ряд $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}$ **расходится.**

Найдем далее предел:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{9n^3+2n}}{6n^2-2n+4}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9n^3+2n}\sqrt{n}}{6n^2-2n+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\mathbf{9}+\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n^2}}}}{\mathbf{6} - \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}} + \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{n^2}}} = \frac{1}{2}$$

Выделенные красным слагаемые стремятся к нулю при n→ ∞.

Поскольку, получен конечный предел, ряды ведут себя одинаково (исходный и ряд сравнения).

Ответ: ряд расходится.

№7 Определение области сходимости степенного ряда.

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(x-3)^n}{2^n}$. Найти область сходимости данного ряда.

Решение

Используем признак Даламбера для нахождения радиуса сходимости ряда

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)|(x-3)^{n+1}|}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(n+2)|(x-3)^n|} = \frac{|x-3|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x-3|}{2}$$

Ряд сходится, если $\frac{|x-3|}{2} < 1 => \ -2 < x - 3 < 2 \ => 1 < x < 5$

(1,5) – интервал сходимости ряда.

Проверим сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости.

Пусть $\boldsymbol{x = 1}$.

В этой точке ряд примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(1-3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(n+2)$$

Этот ряд расходится, так как его общий член $a_n = (-1)^n(n+2)$ не стремится к нулю.

Пусть $\boldsymbol{x = 5}$.

В этой точке ряд примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(5-3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)$$

Этот ряд также расходится, так как его общий член $a_n = (n+2)$ не стремится к нулю.

Ответ: область сходимости (1,5)

№8 Разложение функций в ряд Маклорена

Ряд Маклорена в общем виде (степенной ряд):

$$y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.. + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\text{chx}= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.. + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\text{shx}= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots.. + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$(1 + x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))}{n!} x^n$$

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Замечание

Последние два ряда сходятся при **|x|<1.** Остальные – на всей числовой прямой.

Пример

Функцию $\boldsymbol{y = e^{-3x^2}}$ представить в виде степенного ряда $e^{-3x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. В ответ записать $\boldsymbol{a_8}$.

Решение

Разложение функции $\boldsymbol{e^t}$ в ряд Маклорена:

$$\boldsymbol{e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots.. + \frac{t^n}{n!} + \cdots}$$

Пусть $\boldsymbol{t = -3x^2}$. Сделаем замену в разложении функции в ряд:

$$e^{-3x^2} = 1 - \frac{3x^2}{1!} + \frac{3^2 x^4}{2!} - \frac{3^3 x^6}{3!} + \ldots.. + \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

Ответ: $\boldsymbol{a_8 = \frac{3^4}{4!} = \frac{9}{8}}$

№9 Определение суммы ряда

Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(-4)^n}$

Решение

Перепишем ряд в виде: $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n$.

Этот ряд сходится, так как это сумма геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$.

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b}{1-q}$$

$$\mathrm{b} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}, \ q = -\frac{1}{4} \quad => \ S = \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{2}{5}$$

Ответ: $S = -\frac{2}{5}$

№10 Разложение функций в ряд Фурье

Ряд Фурье для функции с периодом 2ℓ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

Его коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n}{\ell}xdx$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx$$

Если $f(x)$ – нечетная, то ее ряд Фурье имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{\ell}x$$

Где $b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}xdx$.

Если $f(x)$ – четная, то ее ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{\ell}x$$

Где $a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx$, $a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n}{\ell}xdx$.

Пример

Функцию $\boldsymbol{f(x) = \pi}$ на интервале $\boldsymbol{0 < x < 2}$, разложить в ряд по синусам, то есть представить в виде $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_k \, sin(\frac{\pi n}{\ell} x)$.

Решение

То, что требуется разложить по синусам, означает, что функцию надо дополнить нечетным образом на отрезок $[-2, 0]$, то есть, должно выполняться условие $f(-x) = -f(x)$ на $[-2, 2]$.

Получится функция $\boldsymbol{f_1(x)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{-\pi, \ \ x \epsilon [-2, 0)} \\ \boldsymbol{\pi, \ \ x \epsilon [0, 2]} \end{Bmatrix}$

В разложении все коэффициенты $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 \boldsymbol{\pi} \, sin(\frac{\pi n}{2} x) dx = -\frac{2\pi}{\pi n} cos(\frac{\pi n}{2} x)|_0^2 = -\frac{2}{n}(cos \, \pi n - cos \, 0) =$$
$$= \frac{2}{k}(cos \, 0 - cos(\pi n)) = \frac{2}{k}(1 - (-1)^k)$$

$$b_n = \begin{Bmatrix} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{n}, & n = 2k + 1 \end{Bmatrix}$$

Подставив коэффициенты в ряд, получаем разложение:

$$f(x) = 4\left(sin \frac{\pi x}{2} + \frac{sin\frac{3\pi x}{2}}{3} + \frac{sin\frac{5\pi x}{2}}{5} + \cdots \right)$$

Ответ: $\boldsymbol{f(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\frac{\pi n x}{2}}{n}}$