Н.А.Берков, Т.А. Горшунова, Т.А. Морозова,

Е.В. Пронина, О.А. Пихтилькова

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Это надо знать, чтобы сдать экзамен на отлично

Москва 2024

Оглавление

1. Решения задач на матричные операции

Пример 1.1. *Решить матричное уравнение* $AX = B$, *где* $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

◀ Умножая заданное матричное уравнение слева на A^{-1}, получаем:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Находим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$|A| = 5 \cdot 5 - 6 \cdot 4 = 1;\quad A_{11} = 5;\quad A_{21} = -6;\quad A_{12} = -4;\quad A_{22} = 5.$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$

Для вычисления обратной матрицы второго порядка можно использовать более простую формулу.

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Меняем местами диагональные элементы, изменяем знаки элементов стоящих на побочной диагонале и не забываем разделить на определитель.

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + (-6) \cdot 1 & 5 \cdot (-3) + (-6) \cdot 2 & 5 \cdot 1 + (-6) \cdot 0 \\ (-4) \cdot 2 + 5 \cdot 1 & (-4) \cdot (-3) + 5 \cdot 2 & (-4) \cdot 1 + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -27 & 5 \\ -3 & 22 & -4 \end{pmatrix}.$$

$X = \begin{pmatrix} 4 & -27 & 5 \\ -3 & 22 & -4 \end{pmatrix}.$

Проверка:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -27 & 5 \\ -3 & 22 & -4 \end{pmatrix} =$$

▶

$$= \begin{pmatrix} 20 - 18 & -135 + 132 & 25 - 24 \\ 16 - 15 & -108 + 110 & 25 - 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & -27 & 5 \\ -3 & 22 & -4 \end{pmatrix}.}$

Пример 1.2. *Решить матричное уравнение* $XA = B$, *где*
$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

◀ Умножая заданное матричное уравнение справа на A^{-1}, получаем:

$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Матрица A^{-1}, получена в предыдущем примере
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5+4 & -6-5 \\ 10-4 & -12+5 \\ 15 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 6 & -7 \\ 15 & -18 \end{pmatrix}.$$

$X = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 6 & -7 \\ 15 & -18 \end{pmatrix}$.

Проверка:

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 6 & -7 \\ 15 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45-44 & 54-55 \\ 30-28 & 36-35 \\ 75-72 & 90-90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

▶

Ответ: $\boxed{X = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 6 & -7 \\ 15 & -18 \end{pmatrix}}$.

Пример 1.3. *Даны 2 матрицы* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Найдите* $C = A^T \cdot B$.

◀

$$C = A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1) & 1\cdot(-3)+(-3)\cdot 0 & 1\cdot 2+(-3)\cdot 1 \\ (-2)\cdot(-2)+(3)\cdot(-1) & (-2)\cdot(-3)+3\cdot 0 & (-2)\cdot 2+3\cdot 1 \\ (-4)\cdot(-2)+2\cdot(-1) & (-4)\cdot(-3)+2\cdot 0 & (-4)\cdot 2+2\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 6 & 12 & -6 \end{pmatrix}.$$ ▶

Ответ: $\boxed{C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 6 & 12 & -6 \end{pmatrix}}$.

Пример 1.4. *Даны две матрицы* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = B^T \cdot A^T$.

◀$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$C = B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -24 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}.$$ ▶

Ответ: $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -24 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}}$.

2. Векторы

Пример 2.1. *Вычислите площадь треугольника* $\triangle\ ABC$, *если* $A(1;1;1)$, $B(1;2;3)$, $C(-1;2;1)$.

◀Площадь $\triangle\ ABC$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, которая в соответствии с определением векторного произведения равна модулю векторного произведения этих векторов:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ и их векторное произведение:

$$\overline{AB} = (1-1;2-1;3-1) = (0;1;2), \quad \overline{AC} = (-1-1;2-1;1-1) = (-2;1;0),$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Вычисляем модуль вектора $\mathbf{\bar{a}} = (a_x; a_y; a_z)$ по формуле:

$$|\mathbf{\bar{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Окончательно: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$. ▶

Ответ: $\boxed{S_{\triangle ABC} = \sqrt{6}.}$

Пример 2.2. *Найдите внутренний угол A $\triangle$ ABC, если $A(1;1;1)$, $B(1;2;3)$, $C(-1;2;1)$.*

◀ Внутренний угол A $\triangle$ ABC равен углу между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Найдем их координаты, вычитая из координат конца координаты начала вектора: $\overline{AB}(0;1;2)$, $\overline{AC}(-2;1;0)$.

$$\cos A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \frac{0+1+0}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{(-2)^2+1^2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle A = \arccos\frac{1}{5}. \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{\angle A = \arccos\frac{1}{5}.}$

Пример 2.3. *Даны координаты точек $A(0;2;1)$, $B(-3;2;4)$, $C(-1;0;2)$. Найти внутренний угол C треугольника (ответ записать в градусах).*

▶ Внутренний угол C треугольника ABC: $\angle ACB$ – это угол между векторами $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$. Найдём косинус угла $\angle ACB$ с помощью скалярного произведения векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

$$\overrightarrow{CA} = (1;2;-1)\,, \quad \overrightarrow{CB} = (-2;2;2) \Rightarrow$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA}\,,\,\overrightarrow{CB}}\right) = \frac{(\overrightarrow{CA}\,,\,\overrightarrow{CB})}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\,.$$

Найдём скалярное произведение и длины векторов:
$(\overrightarrow{CA}\,,\,\overrightarrow{CB}) = 1\cdot(-2)+2\cdot2+(-1)\cdot2 = 0 \Rightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA}\,,\,\overrightarrow{CB}}\right) = 0 \Rightarrow$
$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB} \Rightarrow \angle ACB = 90°$. ▶

Ответ: $\boxed{90°.}$

Пример 2.4. *Вычислить площадь треугольника, заданного координатами своих вершин $A(1;2;3)$, $B(3;4;5)$, $C(2;4;7)$.*

◀ Рассмотрим треугольник ABC. Чтобы найти S_{ABC} нужно сначала найти площадь параллелограмма S_{ABDC}, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABDC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|.$$

$$\overrightarrow{AB} = (2;2;2), \overrightarrow{AC} = (1;2;4) \Rightarrow$$

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j}^{\rightarrow} + 2\vec{k}.$$

$$\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{2\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{\sqrt{14}\ .}$

Пример 2.5. *Установить, будут ли компланарны векторы* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *и* $\overline{CD}$, *если даны координаты точек:* $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$.

◀ Найдем координаты векторов, вычитая из координат конца координаты начала:

$\overline{AB} = (-1;-1;6)$, $\overline{BC} = (-1;1;-4)$, $\overline{CD} = (3;-1;2)$.

Вычислим значение определителя $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -1(2-4) + 1(-2+12) + 6(1-3) = 2 + 10 - 12 = 0.$

Определитель равен нулю, следовательно вектора компланарны. ▶

Ответ: $\boxed{\textbf{Векторы } \overline{AB}, \overline{BC} \textbf{ и } \overline{CD} \textbf{ компланарны.}}$

Пример 2.6. *Проверить компланарность векторов:* $\bar{\mathbf{a}} = (5, 7, -2)$, $\bar{\mathbf{b}} = (-3, 1, 3)$ *и* $\bar{\mathbf{c}} = (1, -4, 6)$.

◀ Три вектора некомпланарны, если их смешанное произведение не равно нулю.

Если заданы координаты векторов, то смешанное произведение находится по формуле:

$$(\bar{\mathbf{a}}\,\bar{\mathbf{b}}\,\bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Найдём смешанное произведение для заданных векторов:

$$(\bar{\mathbf{a}}\,\bar{\mathbf{b}}\,\bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 18 - 7 \cdot (-21) - 2 \cdot 11 = 90 + 147 - 22 = 215 \neq 0. ▶$$

Ответ: $\boxed{\textbf{Векторы } \bar{\mathrm{a}},\ \bar{\mathrm{b}},\ \bar{\mathrm{c}} \textbf{ некомпланарны}}$.

3. Прямая и плоскость

Пример 3.1. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку* $A(-3;1;1)$, *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{BC}$, *если* $B(0;2;1)$, $C(-3;2;4)$.

◀ Так как искомая плоскость перпендикулярна вектору $\overrightarrow{BC}$, то в качестве нормального вектора можно взять вектор $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{BC} = (-3;0;3)$.

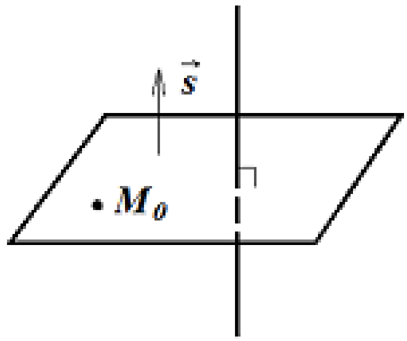
Искомое уравнение плоскости найдем по формуле:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

$-3(x+3) + 0(y-1) + 3(z-1) = 0 \Rightarrow -3x + 3z - 12 = 0 \Rightarrow x - z + 4 = 0.$ ▶

Ответ: $\boxed{x - z + 4 = 0.}$

Пример 3.2. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(-4;3;1)$ *перпендикулярно прямой:* $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z+1}{7}$.



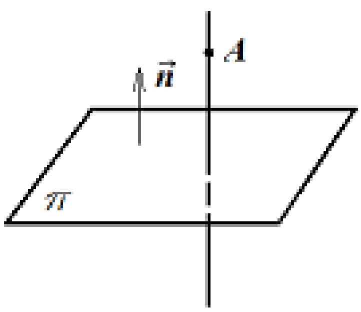
◀ За нормальный вектор $\overrightarrow{n}$ искомой плоскости примем направляющий вектор данной прямой $\overrightarrow{s} = (2;-5;7)$. Используем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-4;3;1)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n}$:

$$2(x+4) - 5(y-3) + 7(z-1) = 0 \;\Rightarrow$$

$2x - 5y + 7z + 16 = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-4;3;1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z+1}{7}$. ▶

Ответ: $\boxed{2x - 5y + 7z + 16 = 0.}$

Пример 3.3. *Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку* $A(-7;-3;2)$ *перпендикулярно плоскости:* $x - 4y - 5z + 8 = 0$.



◀ Вектор нормали данной плоскости $\overrightarrow{n} = (1; -4; -5)$ перпендикулярен ей и по условию должен быть параллелен искомой прямой. Значит, направляющий вектор искомой прямой:

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n} = (1; -4; -5).$$

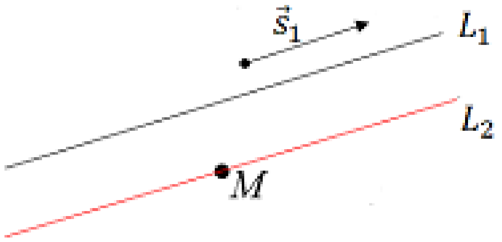
Найдем канонические уравнения прямой по формуле:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

$$\frac{x+7}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-2}{-5}\ .$$ ▶

Ответ: $\boxed{\frac{x+7}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-2}{-5}\ .}$

Пример 3.4. *Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-1; 2; -5)$ параллельно прямой*
$L_1: \ \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z-1}{3}$.



◀ Из канонических уравнений прямой L_1 найдем координаты направляющего вектора:

$$\overrightarrow{s_1} = \{1; -5; 3\}\,.$$

Составим параметрические уравнения прямой $L_2 \parallel \overrightarrow{s_1}$, проходящей через точку $M(-1; 2; -5)$: $L_2: \begin{cases} x = t - 1, \\ y = -5t + 2, \\ z = 3t - 5. \end{cases}$ ▶

Ответ: $\boxed{L_2: \begin{cases} x = t - 1, \\ y = -5t + 2, \\ z = 3t - 5. \end{cases}}$

Пример 3.5. *Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(-1; 2; 3)$ и $B(5; -2; 1)$.*

◀ Канонические уравнения прямой, проходящей через точки A и B имеют вид:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \Rightarrow \frac{x+1}{5+1} = \frac{y - 2}{-2-2} = \frac{z-3}{1-3} \Rightarrow$$

$\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y-\ 2}{-4}=\dfrac{z-3}{-2}$ или $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-\ 2}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$.
$\vec{s}=(3;-2;-1)$ – направляющий вектор прямой AB.

Из канонических уравнений получим параметрические уравнения прямой AB:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-\ 2}{-2}=\frac{z-3}{-1}=t\ \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{3}=t \\ \dfrac{y-\ 2}{-2}=t \\ \dfrac{z-3}{-1}=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1, \\ y=-2t+2, \\ z=-t+3. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-\ 2}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ – канонические уравнения прямой AB;
$\begin{cases} x=3t-1, \\ y=-2t+2, \\ z=-t+3 \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой AB.

Пример 3.6. *Даны три вершины треугольника $A(3;5)$, $B(0;-2)$ и $C(-4;6)$. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC. Привести уравнение к параметрическому виду.*

◀ Найдём вектор задающий направление прямой:
$\overline{BC}=(-4-0;6-(-2))=(-4;8)$.

В качестве направляющего вектора прямой возьмём вектор коллинеарный вектору BC: $\bar{\mathbf{s}}=0{,}25\overline{BC}=(-1;2)$.

Далее, используя формулу для канонического уравнения прямой, имеющей направляющий вектор $\bar{\mathbf{s}}=(m;n)$ и проходящей через заданную точку $M_0=(x_0;y_0)$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Получаем искомое каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-5}{2}.$$

Присваивая левой и правой части этого уравнения значения t, получаем параметрическое уравнение заданной прямой:

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-5}{2}=t \Rightarrow \begin{cases} x=3-t, \\ y=5+2t. \end{cases}$$ ▶

Ответ: $\boxed{\begin{cases} x=3-t, \\ y=5+2t. \end{cases}}$

Пример 3.7. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;1;1)$ параллельно плоскости $2x-2y+2z+1=0$.*

◀ Для решения данной задачи используем формулу уравнения плоскости с заданным нормальным вектором $\overline{\mathbf{n}} = (A; B; C)$ и содержащей точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3.1}$$

В качестве нормального вектора возьмём нормальный вектор заданной плоскости $\overline{\mathbf{n}} = (2, -2, 2)$, т.к. они параллельны. Получим:

$$2(x - 2) - 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0. \tag{3.2}$$

или после упрощения: $x - y + z - 2 = 0$. ▶

Замечание 3.1. *В качестве нормального вектора* $\overline{\mathbf{n}}$ *лучше сразу выбрать вектор* $\overline{\mathbf{n}} = (1, -1, 1)$. *Тогда не надо делить уравнение (3.2) на 2.*

Ответ: $\boxed{x - y + z - 2 = 0.}$

Пример 3.8. *Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(2; 0; 3)$ *перпендикулярно вектору* $\overline{\mathbf{n}} = (3; 2; -1)$.

◀ Применяея формулу (3.1), получаем $3(x - 2) + 2(y - 0) - (z - 3) = 0$. Упрощая, находим: $3x + 2y - z - 3 = 0$. ▶

Ответ: $\boxed{3x + 2y - z - 3 = 0.}$

Пример 3.9. *Написать уравнение плоскости* α, *проходящей через точку* $M(-3; -1; 2)$ *параллельно плоскости* $\beta\ :\ 2x - y + 2z - 11 = 0$.

◀ В качестве нормального вектора искомой плоскости α можно выбрать любой вектор коллинеарный нормальному вектору плоскости β:
$\overline{\mathbf{n}}_\alpha = \overline{\mathbf{n}}_\beta = (2; -1; 2)$.

Подставляя в формулу (3.1) координаты нормального вектора $\overline{\mathbf{n}}_\alpha$ и заданной точки M, получим уравнение плоскости α:

$\alpha :\ 2(x + 3) - (y + 1) + 2(z - 2) = 0 \ \Rightarrow\ 2x - y + 2z + 1 = 0.$ ▶

Ответ: $\boxed{\alpha :\ 2x - y + 2z + 1 = 0.}$

Пример 3.10. *Найдите уравнение плоскости α, проходящей через три точки:* $A(1;1;1)$, $B(-4;2;-1)$, $C(-2;2;3)$.

◀ Находим нормальный вектор $\overline{\mathbf{n}}$ плоскости α. Очевидно, что он коллинеарен вектору $[\overline{AB}, \overline{AC}]$.

Найдём вектора $\overline{AB} = (-4-1; 2-1; -1-1) = (-5; 1; -2)$ и $\overline{AC} = (-2-1; 2-1; 3-1) = (-3; 1; 2)$.

Находим векторное произведение: $[\overline{AB}, \overline{AC}]$.

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= (2+2)\bar{i} - (-10-6)\bar{j} + (-5+3)\bar{k} = 4\bar{i} + 16\bar{j} - 2\bar{k}.$$

В качестве нормального вектора плоскости выбираем вектор $\overline{\mathbf{n}} = 0{,}5[\overline{AB}, \overline{AC}] = 2\bar{i} + 8\bar{j} - \bar{k}$.
Используя всё ту же формулу для уравнения плоскости (3.1) имеющую нормальный вектор $\overline{\mathbf{n}} = (A; B; C)$ и содержащую точку $M(x_0; y_0; z_0)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

получаем $2(x-1) + 8(y-1) - (z-1) = 0$. Раскрывая скобки, получаем $2x + 8y - 2z - 9 = 0$.▶

Ответ: $\boxed{2x + 8y - z - 9 = 0.}$

Пример 3.11. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0\,(-4; 3; 1)$ *перпендикулярно прямой:*$\begin{cases} x - 3y + z - 5 = 0, \\ 2x + y - z + 7 = 0. \end{cases}$

◀ Прямая задана своими общими уравнениями, поэтому направляющий вектор прямой

$$\overrightarrow{s} = [\overline{n_1}, \overline{n_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Он же является нормалью к искомой плоскости. Используем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\,(-4; 3; 1)$, если известен вектор нормали.

$2\,(x+4) + 3\,(y-3) + 7\,(z-1) = 0 \;\Rightarrow\; 2x + 3y + 7z - 8 = 0.$

Ответ: $\boxed{2x + 3y + 7z - 8 = 0.}$

4. Задачи на кривые и поверхности второго порядка

Пример 4.1. *Составьте канонические уравнение эллипса с меньшей полуосью равной* 4 *и фокусами* $F_1(-3;0)$ *и* $F_2(3;0)$.

◀ Согласно условию задачи, фокусы находятся на оси Ox и центр эллипса в начале координат. Следовательно, канонические уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b, a^2=b^2+c^2.$$

Расстояние между фокусами равно $3-(-3)=6$. Следовательно, $c=6/2=3$. По условию задачи меньшая полуось $b=4$. Находим большую полуось, $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

Записываем канонические уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Ответ: $\boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.}$

Пример 4.2. *Составьте канонические уравнение эллипса с меньшей полуосью равной* 12 *и фокусами* $F_1(0;\ -9)$ *и* $F_2(0;\ 9)$.

◀ Согласно условию задачи, фокусы находятся на оси Oy и центр эллипса в начале координат. Следовательно, канонические уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1,\ a>b, a^2=b^2+c^2.$$

Расстояние между фокусами равно 18. Следовательно, $c=9$.

По условию задачи меньшая полуось $b=12$. Находим большую полуось $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{12^2+9^2}=15$.

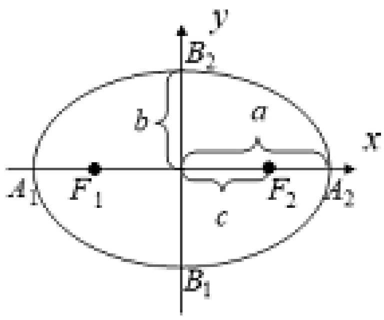
Записываем канонические уравнение эллипса

$$\frac{y^2}{225}+\frac{x^2}{144}=1.$$

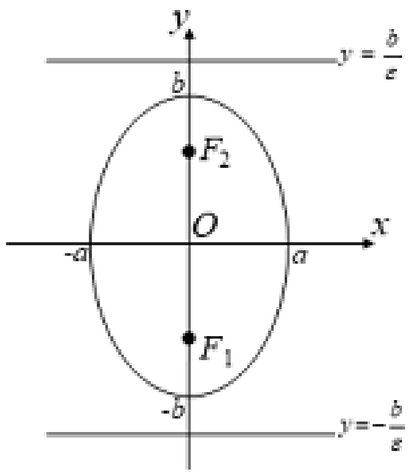
▶

Ответ: $\boxed{\frac{y^2}{225}+\frac{x^2}{144}=1.}$

Пример 4.3. *Составить каноническое уравнение эллипса с большой полуосью, равной* 10 *и фокусами* $F_1(-8;0)$ *и* $F_2(8;0)$.



◄ Эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, a – большая полуось, b – малая полуось, $F_1\,(-c;0)$ и $F_2\,(c;0)$ – левый и правый фокусы эллипса, 2 – фокусное расстояние, с $=\sqrt{a^2-b^2}$.



Эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, b – большая полуось, a – малая полуось, $F_1\,(0;c)$ и $F_2\,(0;-c)$ фокусы эллипса, 2 – фокусное расстояние, с $=\sqrt{b^2-a^2}$.

Так как фокусы эллипса лежат на оси Ox, то

$$a=10,\ c=8\Rightarrow b^2=a^2-c^2, b^2=36\Rightarrow$$

$\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$ – каноническое уравнение эллипса. ►

Ответ: $\boxed{\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1.}$

Пример 4.4. *Напишите уравнение кривой, такой, что сумма расстояний, от каждой точки которой до двух заданных точек $F_1(-12;0)$ и $F_2(12;0)$ равна 40.*

Определение 4.1. *Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, равна постоянной величине, большей чем расстояние между фокусами.*

Т.е. $|MF_1| + |MF_2| = 2a$. На лекции было выведено канонические уравнение эллипса:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \ a > b, a^2 = b^2 + c^2.$$

Параметр a называется большой полуосью, b – малой полуосью, c – половина расстояния между фокусами.

◀ Следовательно, из условия задачи получаем: большая полуось $a = 20$, $c = 12$.

Находим малую полуось $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$.

Записываем канонические уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{256} = 1. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{256} = 1.}$

Пример 4.5. *Составьте канонические уравнение гиперболы с действительной полуосью равной 4 и фокусами $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$.*

◀ Согласно условию задачи, фокусы находятся на оси Ox и центр гиперболы в начале координат. Следовательно, канонические уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ c > a, c^2 = a^2 + b^2.$$

Расстояние между фокусами равно $5 - (-5) = 10$. Следовательно, $c = 10/2 = 5$.

По условию задачи действительная полуось $a = 4$. Находим мнимую полуось $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Записываем канонические уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

▶

Ответ: $\boxed{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.}$

Пример 4.6. *Составьте канонические уравнение гиперболы с мнимой полуосью равной* 12 *и фокусами* $F_1(0;-15)$ *и* $F_2(0;15)$.

◀ Согласно условию задачи, фокусы находятся на оси Oy и центр гиперболы в начале координат. Следовательно, канонические уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,\ c>a, c^2=a^2+b^2.$$

Расстояние между фокусами равно $30 \Rightarrow c=15$.

По условию задачи мнимая полуось $b=12$. Находим действительную полуось $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$.

Записываем канонические уравнение гиперболы

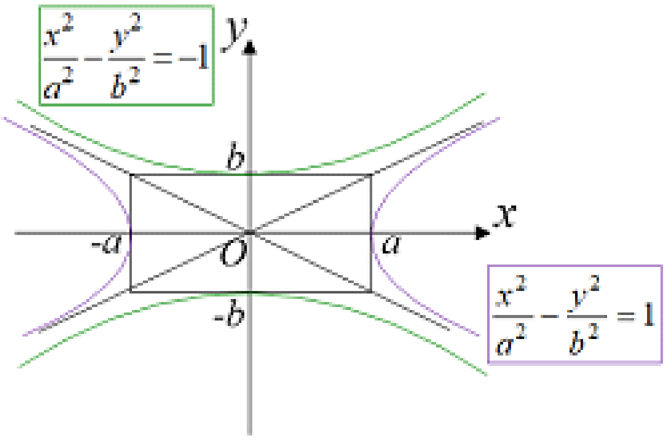
$$\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{81}=1.$$

▶

Ответ: $\boxed{\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{81}=1.}$

Пример 4.7. *Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами в точках* $F_1\,(0;3)$ *и* $F_2\,(0;-3)$ *и мнимой полуосью, равной* 2.

◀ Гипербола: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a – действительная полуось, b – мнимая полуось), $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, $F_1F_2=2c$.



Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ (b – действительная полуось, a – мнимая полуось), $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$.

Так как фокусы гиперболы лежат на оси Oy, то каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, a=2,\ c=3 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=5 \Rightarrow$$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = -1$ – каноническое уравнение гиперболы. ►

Ответ: $\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = -1.}$

Пример 4.8. *Напишите уравнение кривой, такой, что модуль разности расстояний, от каждой точки которой до двух заданных точек $F_1(-20;0)$ и $F_2(20;0)$ равна 32.*

◄

Определение 4.2. *Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, равен постоянной положительной величине, меньшей чем расстояние между фокусами.*

Т.е. $\Big||MF_1| - |MF_2|\Big| = 2a$. На лекции было выведено канонические уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ c > a, c^2 = a^2 + b^2.$$

Параметр a называется действительной полуосью, b – мнимой полуосью, c – фокусное расстояние.

Следовательно, из условия задачи получаем: действительная полуось $a = 16,\ \ c = 20$. Находим мнимую полуось $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 144.$

Записываем канонические уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

►

Ответ: $\boxed{\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{144} = 1.}$

Определение 4.3. *Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой **фокусом**, и данной прямой d, называемой **директрисой** ($F \notin d$).*

$$y^2 = 2px. \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) называется каноническим уравнением параболы. Параметр p равен расстоянию от фокуса до директрисы. При этом фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$.

Пример 4.9. *Составьте уравнение параболы с центром в начале координат и с фокусом в точке $F(4;0)$.*

◀ Поскольку расстояние от вершины параболы до фокуса равно $\frac{p}{2}$, следовательно параметр $p = 8$. Вершина параболы находится в начале координат, фокус расположен на положительно части оси Ox, поэтому каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 16x.$$

▶

Ответ: $\boxed{y^2 = 16x.}$

Пример 4.10. *Для параболы заданной уравнением $y^2 = 4x$ определите координаты фокуса.*

◀ Уравнение задаёт $y^2 = 4x$ параболу с вершиной в начале координат и фокусом на положительной части оси Ox. Сравнивая заданное уравнение с каноническим уравнением параболы (4.1), получаем значение параметра $2p = 4 \Rightarrow p = 2$. Фокус расположен в точке с координатами $\left(\frac{p}{2}; 0\right) = (1;0)$. ▶

Ответ: $\boxed{F(1;0).}$

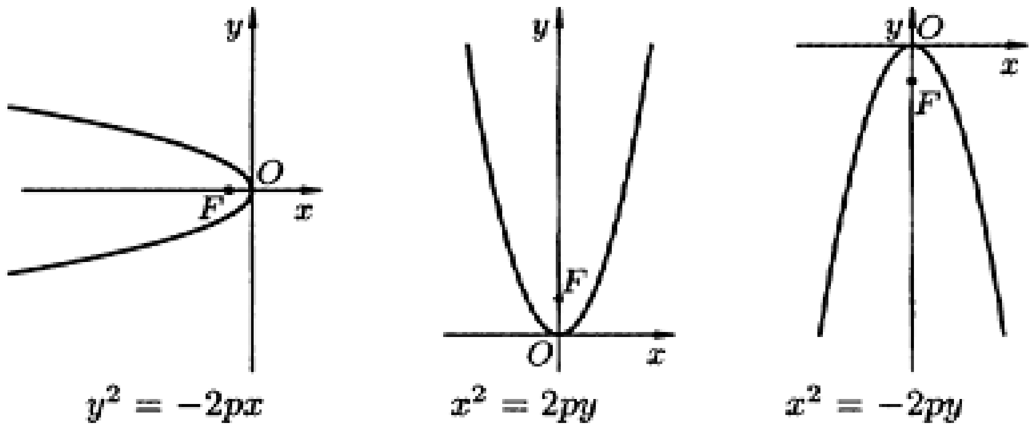
Пример 4.11. *Для параболы заданной уравнением $y = -8x^2$ определите координаты фокуса.*

◀ Перепишем заданное уравнение в виде: $x^2 = -\frac{1}{8}y$. Получили каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и фокусом на отрицательной части оси Oy. Сравнивая заданное уравнение с каноническим уравнением параболы (4.1), получаем значение параметра $2p = \frac{1}{8} \Rightarrow p = \frac{1}{16}$. Следовательно, фокус расположен в точке с координатами $\left(0; -\frac{p}{2}\right) = \left(0; -\frac{1}{32}\right)$. ▶

Ответ: $\boxed{F\left(0; -\frac{1}{32}\right).}$

Пример 4.12. *Составить каноническое уравнение параболы, если ее фокус находится в точке* $F(-7;0)$, *а уравнение директрисы имеет вид:* $x-7=0$.

◀ Расстояние от фокуса F до директрисы называется ***параметром*** параболы и обозначается через p $(p>0)$.



Варианты расположения параболы:

Так как $F(-7;0)$ и уравнение директрисы: $x=7$, то каноническое уравнение параболы будет иметь вид: $y^2=-2px$, параметр $p=14 \Rightarrow$
$y^2=-28x$ – каноническое уравнение параболы.

Ответ: $\boxed{y^2=-28x.}$

Пример 4.13. *Привести уравнение* $9x^2+4y^2-36=0$ *к каноническому виду, определить тип кривой и найти расстояние между фокусами (в случае параболы, найти расстояние между фокусом и директрисой).*

◀ $9x^2+4y^2-36=0 \Rightarrow 9x^2+4y^2=36 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1.$

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ – каноническое уравнение эллипса,
с полуосями $a=2$ и $b=3$, $a=2$ – малая полуось, $b=3$ – большая полуось, так как $b>a \Rightarrow c^2=b^2-a^2=9-4=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$. Следовательно, расстояние между фокусами: $2c=2\sqrt{5}$. ▶

Ответ: $\boxed{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\ 2c=2\sqrt{5}.}$

Пример 4.14. *Привести уравнение* $y^2+6x=0$ *к каноническому виду, определить тип кривой и найти расстояние между фокусами (в случае параболы, найти расстояние между фокусом и директрисой).*

◀ $y^2+6x=0 \Rightarrow y^2=-6x.$

$y^2=-6x$ – каноническое уравнение параболы $(y^2=-2px)$.

Так как $2p=6 \Rightarrow p=3$ – параметр параболы (расстояние между фокусом и директрисой), координаты фокуса: $F(-\dfrac{3}{2};0)$, уравнение директрисы: $x=\dfrac{3}{2}$.
▶

Ответ: $\boxed{y^2 = -6x\text{, **парабола,** } p = 3.}$

Пример 4.15. *Привести уравнение* $20x^2 - 4y^2 - 80 = 0$ *к каноническому виду, определить тип кривой и найти расстояние между фокусами (в случае параболы, найти расстояние между фокусом и директрисой).*

◀ $20x^2 - 4y^2 + 80 = 0 \Rightarrow 20x^2 - 4y^2 = -80 \Rightarrow$
$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{20} = -1$ – каноническое уравнение гиперболы,
$a^2 = 4,\quad b^2 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20}$ – действительная полуось, $a = 2$ – мнимая полуось, фокусы лежат на оси Oy:
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, $F_1(0; -2\sqrt{6})$ и $F_2\left(0; 2\sqrt{6}\right) \Rightarrow 2c = 4\sqrt{6}$ – расстояние между фокусами. ▶

Ответ: $\boxed{\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{20} = -1 - \textbf{гипербола, } 2c = 4\sqrt{6}.}$

Пример 4.16. *Поверхность второго порядка задана уравнением:* $25x^2 - 9y^2 + z^2 - 225 = 0$. *Укажите тип этой поверхности, напишите уравнение сечения поверхности плоскостью* $z = 0$ *и найдите расстояние между фокусами полученной кривой второго порядка.*

◀ Запишем заданную поверхность второго порядка в каноническом виде. Для этого перенесём 225 в правую часть и разделим уравнение на это число.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{225} = 1.$$

Это каноническое уравнение однополостного гиперболоида с осью Oy и полуосями $a = 3, b = 5, c = 15$. В сечении с плоскостью Oxy, получаем эллипс с полуосями: $a = 3$ – действительная полуось и $b = 5$ – мнимая полуось.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Найдём расстояние от центра эллипса до фокусов. $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 25} =$

$= \sqrt{34}$. Следовательно, расстояние между фокусами равно $2\sqrt{34}$. ▶

Ответ: $\boxed{\textbf{Однополостный гиперболоид, } \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1,\ 2\sqrt{34}.}$

Пример 4.17. *Привести к каноническому виду уравнение кривую* $9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y - 199 = 0$, *определить её характеристики и схематически построить её график.*

◀ Для членов, содержащих x, и членов, содержащих y, выполним следующие преобразования с выделением полного квадрата:

$9(x^2+2x+1)-9-16(y^2-4y+4)+64-199=0 \Rightarrow$
$9(x+1)^2-16(y-2)^2=144.$

Делим уравнение на 144, получаем уравнение гиперболы:
$\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1.$

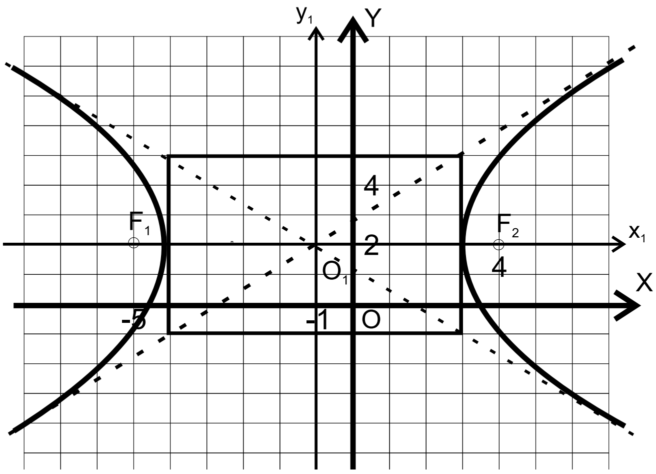


Рисунок 1. *Пример 4.17*

Это уравнение гиперболы с полуосями $a=4$ и $b=3$. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5$. Центр данной гиперболы расположен в точке $O_1(-1;2)$. На рис. 1 эта кривая построена в системе координат Oxy.

Если ввести новые координаты: $x_1=x+1, y_1=y-2$, то уравнение примет канонический вид: $\dfrac{x_1^2}{16}-\dfrac{y_1^2}{9}=1$. ▶

Пример 4.18. *Приведите к каноническому виду уравнение и определите вид кривой и её характеристики:* $4x^2+y^2+8x-6y-3=0.$

◀Выделив полный квадрат, получим уравнение:
$4(x^2+2x+1)-4+(y^2-6y+9)-9-3=0 \Rightarrow$
$4(x+1)^2+(y-3)^2=16.$

Делим уравнение на 16, получаем уравнение эллипса:
$\dfrac{(x+3)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$
с параметрами $a=4$, $b=2$, $c=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.
Таким образом, исходный эллипс имел центр $O_1(-1;3)$ и полуоси

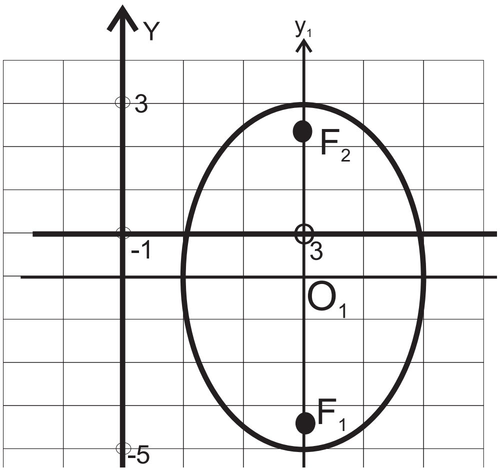


Рисунок 2. *Пример 4.18*

$a = 4$, $b = 2$ и фокусное расстояние $c = 2\sqrt{3}$, (рис. 2). Заметим, что фокальная ось параллельна оси Oy.

Если ввести новые координаты: $x_1 = x+3$, $y_1 = y-2$, то уравнение примет канонический вид: $\dfrac{x_1^2}{4} + \dfrac{y_1^2}{16} = 1$. ▶

5. Теоретические вопросы

Все теоретические вопросы можно посмотреть в тесте: Тренировочный тест по теории 2023-24 уч год
https://online-edu.mirea.ru/mod/quiz/view.php?id=545458

6. Определители высших порядков

Пример 6.1. *При каком значении параметра a матрица* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & a & 3 \end{pmatrix}$ *будет вырожденной?*

◀ Нетрудно заметить, что если $a = 15$, то две последние строки заданной матрицы будут линейно зависимыми, следовательно матрица будет вырожденной.

Единственность данного решения доказывается двукратному разложению определителя по первому столбцу

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & a & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & a & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 12(15 - a).$$

Матрица является вырожденной, если определитель системы равен нулю. Получаем, $a = 15$. ▶

Ответ: $\boxed{a = 15.}$

Пример 6.2. *При каком значении параметра a матрица* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ *будет вырожденной?*

◀ Двукратно раскладываем определитель по первому столбцу

$$detA = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & a & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -5 \cdot 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & 4 \end{vmatrix} = -20(8 - a).$$

Матрица является вырожденной, если определитель системы равен нулю. Получаем, $a = 8$. ▶

Ответ: $\boxed{a = 8.}$

Пример 6.3. *При каких значениях параметра a определитель матрицы A равен 12.* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 3 \\ 0 & a+4 & 4 & 2 \\ 1 & a & 3a & 5 \end{pmatrix}$.

◀ Дважды раскладывая определитель по первой строке, получаем

$$detA = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 3 \\ 0 & a+4 & 4 & 2 \\ 1 & a & 3a & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3-a \\ 0 & a+4 & 4 \\ 1 & a & 3a \end{vmatrix} = -(3-a)\begin{vmatrix} 0 & a+4 \\ 1 & a \end{vmatrix} =$$

$= (3-a)(a+4)$.

Решаем уравнение $(a+4)(3-a) = 12$.

$3a - a^2 + 12 - 4a = 12 \quad \Rightarrow \quad a^2 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -1; \quad a_2 = 0.$ ▶

Ответ: $\boxed{a = \{-1,\ 0\}.}$

Пример 6.4. *Найдите определитель матрицы* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & -8 \\ 3 & -1 & 7 & 4 \\ -4 & 3 & 3 & -12 \\ 4 & -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

◀ Ищем наиболее оптимальное преобразование приводящее заданный определитель к более простому виду. Нетрудно заметить, что второй и четвертый столбцы линейно зависимы. Прибавим к четвёрному столбцу второй умноженный на 4.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 & -8 \\ 3 & -1 & 7 & 4 \\ -4 & 3 & 3 & -12 \\ 4 & -2 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

▶

Ответ: $\boxed{\mathbf{0.}}$

Пример 6.5. *Найдите определитель матрицы* $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

◀ Переставим вторую и третью строки определителя, при этом изменяем знак определителя на противоположный. Получили определитель треугольной матрицы, который равен произведению диагональных элементов.

$$detA = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-2)1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = 16.$$

▶

Ответ: $\boxed{\mathbf{16.}}$

7. Исследование систем линейных алгебраических уравнений

Пример 7.1. *Исследовать систему линейных алгебраических уравнений:*

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & +2x_3 & -4x_4 & = 3, \\ -x_1 & +3x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = 11, \\ 2x_1 & -5x_2 & +2x_3 & +5x_4 & = -18. \end{cases}$$

В ответе указать ранг расширенной матрицы и тип СЛАУ (совместная/несовместная, определенная/неопределенная).

◀ Выпишем расширенную матрицу $A|B$ и выполним над ней элементарные преобразования приводящие систему к равносильной.

$$A|B = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & -2 & 11 \\ 2 & -5 & 2 & 5 & -18 \end{array}\right).$$

(1) К 3-ей строке прибавим 2-ую, умноженную на 2, а затем из 2-ей строки вычтем 1-ую.
(2) Из 2-ой строки вычтем 3-ью, умноженную на 2 и ещё первую строку умножим на -1.
(3) К первой строке прибавляем 3-ю строку и убираем нулевую строку.

$$(A|B) = \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim$$
$$\overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Отметим, что $rang(A) = rang(A|B) = 2$, количество неизвестных равно 4. Следовательно, согласно теореме Кронекера-Капелли заданная система совместна, но неопределённа.

Ответ: $\boxed{rang(A) = rang(A|B) = 2, \ \textbf{система совместна, но неопределённа.}}$

Пример 7.2. *Исследовать систему линейных алгебраических уравнений:*

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & +2x_3 & -4x_4 & = 3, \\ -x_1 & +3x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = 11, \\ 2x_1 & -5x_2 & +2x_3 & +5x_4 & = -10. \end{cases}$$

В ответе указать ранг расширенной матрицы и тип СЛАУ (совместная/несовместная, определенная/неопределенная).

◀ Выпишем расширенную матрицу $A|B$ и выполним над ней элементарные преобразования приводящие систему к равносильной.

$$A|B = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & -2 & 11 \\ 2 & -5 & 2 & 5 & -10 \end{array}\right).$$

(1) К 3-ей строке прибавим 2-ую, умноженную на 2, а затем из 2-ей строки вычтем 1-ую.
(2) Из 2-ой строки вычтем 3-ью, умноженную на 2 и ещё первую строку умножим на -1.
(3) Ко второй строке прибавляем 3-ю строку.

$$(A|B) = \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 12 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim$$
$$\overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{array}\right).$$

Отметим, что $rang(A) = 2$, $rang(A|B) = 3$. Следовательно, согласно теореме Кронекера-Капелли заданная система несовместная. ▶

Ответ: $\boxed{rang(A) = 2, \quad rang(A|B) = 3, \quad \textbf{система несовместная.}}$

Пример 7.3. *Исследовать систему линейных алгебраических уравнений:*

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 3, \\ -x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = 11, \\ 2x_1 & -5x_2 & +2x_3 & = -18. \end{cases}$$

В ответе указать ранг расширенной матрицы и тип СЛАУ (совместная/несовместная, определенная/неопределенная).

◀ Выпишем расширенную матрицу $A|B$ и выполним над ней элементарные преобразования приводящие систему к равносильной.

$$A|B = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 11 \\ 2 & -5 & 2 & -18 \end{array}\right).$$

(1). К 3-ей строке прибавим 2-ую, умноженную на 2, а затем из 2-ей строки вычтем 1-ую.
(2) Из 2-ой строки вычтем 3-ью, умноженную на 2 и ещё первую строку умножим на -1.
(3) К первой строке прибавляем 3-ю строку и убираем нулевую строку.

$$(A|B) = \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim$$
$$\overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Отметим, что $rang(A) = rang(A|B) = 2$, количество неизвестных равно 3. Следовательно, согласно теореме Кронекера-Капелли заданная система совместна, но неопределённа.▶

Ответ: $\boxed{rang(A) = rang(A|B) = 2,\ \textbf{система совместна, но неопределённа.}}$

Пример 7.4. *Исследовать систему линейных алгебраических уравнений:*

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 3, \\ -x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = 10, \\ 2x_1 & -5x_2 & +2x_3 & = -18. \end{cases}$$

В ответе указать ранг расширенной матрицы и тип СЛАУ (совместная/несовместная, определенная/неопределенная).

◀ Выпишем расширенную матрицу $A|B$ и выполним над ней элементарные преобразования приводящие систему к равносильной.

$$A|B = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 10 \\ 2 & -5 & 2 & -18 \end{array}\right).$$

(1). К 3-ей строке прибавим 2-ую, умноженную на 2, а затем из 2-ей строки вычтем 1-ую.
(2) Из 2-ой строки вычтем 3-ью, умноженную на 2 и ещё первую строку умножим на -1.
(3) К первой строке прибавляем 3-ю строку и убираем нулевую строку.

$$(A|B) = \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 4]] \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Отметим, что $rang(A) = 2$, $rang(A|B) = 3$. Следовательно, согласно теореме Кронекера-Капелли заданная система несовместна.▶

Ответ: $\boxed{rang(A) = rang(A|B) = 2, \ \textbf{система несовместна.}}$

Пример 7.5. *Исследовать систему линейных алгебраических уравнений:*

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 3, \\ -x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = 1, \\ 2x_1 & -5x_2 & -x_3 & = 0. \end{cases}$$

В ответе указать ранг расширенной матрицы и тип СЛАУ (совместная/несовместная, определенная/неопределенная).

◀ Выпишем расширенную матрицу $A|B$ и выполним над ней элементарные преобразования приводящие систему к равносильной.

$$A|B = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

(1). К 3-ей строке прибавим 2-ую, умноженную на 2, а затем из 2-ей строки вычтем 1-ую.
(2) Из 2-ой строки вычтем 3-ью, умноженную на 2 и ещё первую строку умножим на -1.
(3) К первой строке прибавляем 3-ю строку и переставляем 2-ю строку после третьей.

$$(A|B) = \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right).$$

Отметим, что $rang(A) = rang(A|B) = 3$, количество неизвестных равно 3. Следовательно, согласно теореме Кронекера-Капелли заданная система совместна и определённая, т.е. существует единственное решение, которое можно найти проводя обратный ход метода Гаусса.▶

Найдём решение данной системы. Продолжим элементарные преобразования расширенной матрицы. Третью строку разделим на 6, и затем к первой строке добавим полученное третье умноженное на 7 и ко второму добавим эту же строку умноженную на 2. Слева получаем единичную матрицу, а справа решение.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right). \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

$x_1 = -8, x_2 = -3, x_3 = -1.$

Ответ: $\boxed{rang(A) = rang(A|B) = 3,\ \textbf{система определённая.}}$

Пример 7.6. *Найти общее решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), сделать проверку, выделить частное решение неоднородной системы:*

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -7, \\ 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = -8, \\ 4x_1 - 9x_2 + 20x_3 = -10. \end{cases}$$

◀

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 8 \\ 4 & -9 & 20 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Прямой ход:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -7 \\ 2 & -5 & 8 & -8 \\ 4 & -9 & 20 & -10 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\cdot(-4)+\mathrm{III}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 12 & 18 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{\mathrm{II}\cdot(-3)+\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow r\,(A \mid B) = r\,(A) = 2.$$

Так как $r(A \mid B) = r\,(A) = 2 < 3$ ($n = 3$ – количество неизвестных), то по теореме Кронекера-Капелли система уравнений совместная и неопределенная (имеет бесчисленное множество решений).

Выберем базисный минор: $\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & 2 & -7 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Входящие в базисный минор переменные x_1 и x_2 – базисные переменные, x_3 – свободная переменная.

Пусть $x_3 =$, где $\in \mathbb{R}$.

Обратный ход:

По полученной ступенчатой матрице выписываем систему:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -7, \\ x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

Выразим базисные переменные через свободную:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - 2x_3 - 7 = 3\,(-4x_3 + 6) - 2x_3 - 7 = -14x_3 + 11, \\ x_2 = -4x_3 + 6. \end{cases}$$

Тогда $x_2 = -4 + 6$, $x_1 = -14 + 11$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14C + 11 \\ -4C + 6 \\ C \end{pmatrix}$$ – общее решение неоднородной СЛАУ.

$$X_{\text{ОН}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_{\text{ОО}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_{\text{ЧН}}}, \text{C} \in \mathbb{R}.$$

$X_{\text{ОО}} = \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ – общее решение соответствующей однородной СЛАУ,

$X_1 = \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ФСР (фундаментальная система решений) однородной СЛАУ,

$X_{\text{ЧН}} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ – частное решение исходной неоднородной СЛАУ.

Проверка:

(1) $\text{A} \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 8 \\ 4 & -9 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – верно;

(2) $\text{A} \cdot X_{\text{ЧН}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 8 \\ 4 & -9 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}$ – верно.

▶

Ответ: $\boxed{X = C \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \text{C} \in \mathbb{R}.}$

8. Комплексные числа

Определение 8.1. *Запись комплексного числа в форме $z = x + iy$ называется* ***алгебраической формой комплексного числа***

$$i^2 = -1.$$

Определение 8.2. *Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется* **сопряженным комплексному числу** *$z = x + iy$.*

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

Пример 8.1. *Запишите комплексное число $z = \dfrac{25(1 - 2i)(2 + i)}{3 - 4i}$ в алгебраической форме.*

◀ $z = \dfrac{25(1 - 2i)(2 + i)}{3 - 4i} = \dfrac{25(2 + i - 4i - 2i^2)}{3 - 4i} = \dfrac{25(4 - 3i)}{3 - 4i} =$
$= \dfrac{25(4 - 3i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \dfrac{25(12 + 16i - 9i - 12i^2)}{9 + 16} = 24 + 7i.$ ▶

Пример 8.2. *Вычислить $\dfrac{(-2 - 3i)(5 + i)}{1 - 5\ i} + 2i$. Ответ записать в алгебраической форме.*

◀
$$\frac{(-2 - 3i)(5 + i)}{1 - 5i} + 2i = \frac{\left(-10 - 15i - 2i - 3i^2\right)(1 + 5i)}{(1 - 5i)(1 + 5i)} + 2i =$$
$$= \frac{(-7 - 17i)(1 + 5i)}{(1 - 5i)(1 + 5i)} + 2i = \frac{-7 - 17i - 35i - 85i^2}{1 - 25i^2} + 2i =$$
$$= \frac{78 - 52i}{26} + 2i = \frac{78}{26} - \frac{52}{26}i + 2i = 3 - 2i + 2i = 3.$$
▶

Ответ: $\boxed{3.}$

Пример 8.3. *Вычислить $\dfrac{17}{1 + 4i} - (3 - 4i)(-2 + i) + 11i$. Ответ записать в алгебраической форме.*

◀ $\dfrac{17}{1 + 4i} - (3 - 4i)(-2 + i) + 11i =$
$= \dfrac{17(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} - (-6 + 8i + 3i - 4i^2) + 11i =$
$= \dfrac{17(1 - 4i)}{1 - 4i^2} - 11i + 2 + 11i = 1 - 4i + 2 = 3 - 4i.$ ▶

Ответ: $\boxed{3 - 4i.}$

Пример 8.4. *Найти действительную и мнимую части комплексного числа* $z = \dfrac{1-\sqrt{3}\ i}{2+3\ i}$.

◀ Умножаем числитель и знаменатель дроби на число, комплексно сопряжённое знаменателю, и в полученном выражении выделяем действительную и мнимую части:

$$\frac{(1-\sqrt{3}\ i)\cdot(2-3\ i)}{(2+3\ i)\cdot(2-3\ i)} = \frac{2-3i-2\sqrt{3}\ i+3\sqrt{3}\ i^2}{4-9\ i^2} =$$
$$= \frac{(2-3\sqrt{3})-i(3+2\sqrt{3})}{13} = \frac{2-3\sqrt{3}}{13} + i\frac{-3-2\sqrt{3}}{13}.$$ ▶

Пример 8.5. *Вычислить* $z = \dfrac{\left(\sqrt{3}-3i\right)^{16}}{6^8}$.

◀Преобразуем заданное числовое выражение:

$$z = \frac{\left(\sqrt{3}-3i\right)^{16}}{6^8} = \frac{(\sqrt{3})^{16}\left(1-\sqrt{3}i\right)^{16}}{2^8\cdot 3^8} = \frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{16}}{2^8}.$$

Комплексное число $z_0 = 1-\sqrt{3}i$ находится в 4-ой четверти комплексной плоскости. Его модуль и аргумент равны:

$$|z_0| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2, \quad arg\ z_0 = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Применяя формулу Муавра

$$z^n = |z|^n\left(cos(n\cdot argz) + i\sin(n\cdot argz)\right).$$

Находим z_0^{16}:

$$z_0^{16} = \left(1-\sqrt{3}i\right)^{16} = 2^{16}\left(\cos\left(-16\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-16\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 2^{16}\left(\cos\left(-6\pi+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(-6\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 2^{16}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{15}\left(-1+\sqrt{3}i\right).$$
$$z = \frac{2^{15}\left(-1+\sqrt{3}i\right)}{2^8} = 128(-1+\sqrt{3}i).$$ ▶

Пример 8.6. *Вычислить: а)* $\dfrac{(1+i)^3}{(-\sqrt{3}-i)^6}$ *; б)* $(1+i)^3(-\sqrt{3}-i)^6$.

◀ Запишем оба числа в тригонометрической форме и возведем их в степень:

$$|1+i| = \sqrt{2}.$$
$$\arg(1+i) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\ +i\sin\frac{\pi}{4}\ \right).$$

$$(1+i)^3=\sqrt{2}^3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3\right)\ +i\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3\right)\ \right)=\sqrt{2}^3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\ +i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\ \right).$$

$$\left|-\sqrt{3}-i\right|=\ 2.$$

$$\arg\left(-\sqrt{3}-i\right)\ =-\pi+arctg\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right)=\frac{-5\pi}{6}.$$

$$-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

$$(-\sqrt{3}-i)^6=2^6\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\cdot 6\right)\ +i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\cdot 6\right)\ \right)=64\left(\cos\left(-\pi\right)\ +i\sin\left(-\pi\right)\ \right).$$

а). $\dfrac{(1+i)^3}{\left(-\sqrt{3}-i\right)^6}=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))=$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{64}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-(-\pi)\right)\ +i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-(-\pi)\right)\ \right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{32}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\ +i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\ \right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{32}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ +isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ \right).$$

б) $(1+i)^3\left(-\sqrt{3}-i\right)^6=z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))=$

$$=2\sqrt{2}\cdot 64\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\pi\right)\ +i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\pi\right)\ \right)=$$

$$=128\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ +i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ \right).$$

►

Ответ. а) $\dfrac{\sqrt{2}}{32}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\ +i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\ \right)$; б) $128\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\ +i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\ \right)$.

Пример 8.7. *Найти* $\sqrt[3]{-1-i}$.

◀ Тригонометрическая форма:

$$-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}\ +i\ \sin\frac{5\pi}{4}\ \right).$$

Для вычисления кубических корней из данного числа воспользуемся формулой

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{argz+2\pi k}{n}\ +i\ \sin\frac{argz+2\pi k}{n}\ \right),\ k=1,\ldots,(n-1)\,.$$

В нашем случае $n=3, k=0,1,2$. Получим три различных значения корня:

$$\sqrt[3]{-1-i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi k}{3}\ +i\mathrm{sin}\,\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),\ k=0,1,2.$$

$$z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}\ +i\ \sin\frac{5\pi}{12}\right),\quad z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}\ +i\ \sin\frac{13\pi}{12}\right),$$

$$z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{12}\ +i\ \sin\frac{21\pi}{12}\right).$$

▶

Пример 8.8. *Найти все корни уравнения* $z^3-64i=0$ *и изобразить их на комплексной плоскости.*

◀ Для решения этой задачи можно использовать формулу извлечения корня n-ной степени из комплексного числа z:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_o+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi_o+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1\ldots,(n-1),$$

где $r=|z|$ – модуль комплексного числа z, а $\varphi_o=\arg z$ – главная часть аргумента. Для рассматриваемого примера: $|z|=64$, $\varphi_o=\dfrac{\pi}{2}$.

Получаем:

$$\begin{aligned} z_1&=4\left(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})\right)=2(i\sqrt{3}+i);\\ z_2&=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=2\left(-\sqrt{3}+i\right);\\ z_3&=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)=-4i.\end{aligned}$$

▶

Ответ: $\boxed{2\left(\sqrt{3}+i\right),\quad 2\left(-\sqrt{3}+i\right),\quad -4i.}$

Пример 8.9. *Вычислить* $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$.

◀Комплексное число $z=\sqrt{3}-i$ находится в 4-ой четверти комплексной плоскости. Его модуль и аргумент равны:
$|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2, \quad arg\ z=\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

Применяя формулу Муавра, находим
$\left(\sqrt{3}-i\right)^5=2^5\left(\cos(-5\cdot\frac{\pi}{6})+i\sin(-5\cdot\frac{\pi}{6})\right)=32\left(-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=$
$=-16\left(\sqrt{3}+i\right)$.▶

Пример 8.10. *Представить комплексное число* $z=\dfrac{\left(-2+2\sqrt{3}\,i\right)^{21}}{2^{42}}$ *в алгебраической форме.*

◀Пусть $z_0=-2+2\sqrt{3}\,i$. Найдём модуль и аргумент этого числа.
$|z_0|=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=4.$

$\arg z_0=\arctan\dfrac{2\sqrt{3}}{-2}=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}.$

По формуле Муавра ()

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

возведём в 21-ю степень число z_0.
$z_0^{21}=|z_0|^{21}\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\cdot 21\right)+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\cdot 21\right)\right)=$
$=4^{21}(\cos(14\pi)+\sin(14\pi)=4^{21}.$

Следовательно, $z=\dfrac{4^{21}}{4^{21}}=1$. ▶

Пример 8.11. *Решить уравнение* $z^3+27=0$. *Изобразить полученное решение на комплексной плоскости* $\boxed{z}$.

◀Из заданного уравнения находим
$z^3=-27 \quad\Rightarrow z=\sqrt[3]{-27}.$

Один из корней известен. Это $z_2=-3$. Точка $z_2=-3$, для которой $|z|=3$, а $arg(-3)=\pi$, на комплексной плоскости является одной из вершин правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $r=3$ (рис. 3), две другие вершины находятся в точках этой окружности z_1 и z_3 с аргументами $\arg\ z_1=\dfrac{\pi}{3}$ и $\arg\ z_3=\dfrac{5\pi}{3}$. ▶

Ответ: $\boxed{z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad z_2=-3,\quad z_3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.}$

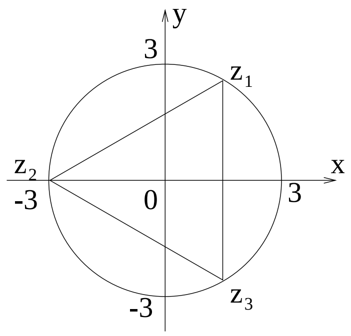


Рисунок 3. *К примеру 8.11*

9. Разные задачи

Пример 9.1. *Пользуясь свойствами векторного произведения, найти площадь треугольника, построенного на этих векторах* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$. *Угол между векторами* $\overline{\mathbf{p}}$ *и* $\overline{\mathbf{q}}$ *равен* $\alpha = 3\pi/4$; $|\overline{\mathbf{p}}\ | = \mathbf{4}; |\overline{\mathbf{q}}| = \mathbf{3}$. $\overline{\mathbf{a}} = \mathbf{3}\overline{\mathbf{p}} + 2\overline{\mathbf{q}}$; $\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{2}\overline{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{q}}$.

◀ Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, равна модулю векторного произведения этих векторов

$S = \left|\left[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}\right]\right|$. Найдём векторное произведение $\overline{a}$ и $\overline{b}$, используя свойства векторного произведения:

1. $[\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}] = 0$. 2. $[\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{q}}] = -[\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}]$.

$\left[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}\right] = [(3\overline{\mathbf{p}} + 2\overline{\mathbf{q}}), (2\overline{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{q}})] = 6[\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}] - 3[\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{q}}] + 4[\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}] - 2[\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{q}}] =$
$= -3[\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{q}}] - 4[\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{q}}] = -7[\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{q}}]$.

$|[\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{q}}]| = \left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right| \cdot |\overrightarrow{q}| \cdot \sin\left(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{p}}, \overrightarrow{\mathbf{q}}}\right) = 4 \cdot 3 \cdot \sin\dfrac{3\pi}{4} = 6\sqrt{2}$.

Итак, площадь параллелограмма

$S = \left|\left[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}\right]\right| = 7\,|[\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{q}}]| = 7 \cdot 6\sqrt{2} = 42\sqrt{2}$.

А площадь треугольника $S_{\triangle} = \dfrac{S}{2} = 21\sqrt{2}$.▶

Ответ: $\boxed{21\sqrt{2}.}$

Пример 9.2. *Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{\mathbf{a}} = 2\vec{\mathbf{p}} + 3\vec{\mathbf{q}}$, $\vec{\mathbf{b}} = 3\vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{q}}$, *если известно, что* $|\vec{\mathbf{p}}| = 4, |\vec{\mathbf{q}}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

◀ Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$.

$$S = \left|[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]\right|$$

.

Значит, чтобы найти площадь нам нужно сначала найти $[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]$.

$$[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] = [2\vec{\mathbf{p}} + 3\vec{\mathbf{q}}, 3\vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{q}}] = \underbrace{[2\vec{\mathbf{p}}, 3\vec{\mathbf{p}}]}_{\vec{0}} + [2\vec{\mathbf{p}}, -\vec{\mathbf{q}}] + [3\vec{\mathbf{q}}, 3\vec{\mathbf{p}}] + \underbrace{[3\vec{\mathbf{q}}, -\vec{\mathbf{q}}]}_{\vec{0}} =$$

$$= -2[\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}] + 9[\vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{p}}] = -2[\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}] - 9[\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}] = -11[\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}] \left|[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]\right| =$$

$$= |-11[\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}]| = 11\,|\vec{\mathbf{p}}| \cdot |\vec{\mathbf{q}}| \cdot \sin 45^\circ = 11 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 88.$$

$$S = 88.$$

►

Ответ: $\boxed{S = 88.}$

Пример 9.3. *Найти расстояние d между прямыми*
$l_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{2}$ *и* $l_2: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+2}{4}$.

◄ Нетрудно заметить, что данные прямые параллельны: $\bar{\mathbf{s}}_1 = (1; 2; 2)$, $\bar{\mathbf{s}}_2 = (2; 4; 4)$.
Следовательно, $\bar{\mathbf{s}}_1 = 0{,}5\bar{\mathbf{s}}_2$. В этом случае можно взять любую точку прямой l_2 и найти расстояние от этой точки прямой l_1.

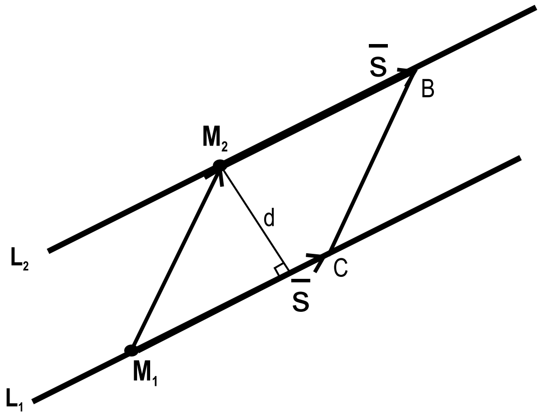


Рисунок 4. *К примеру 9.3*

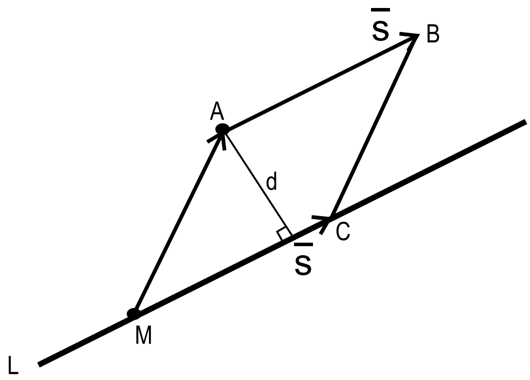


Рисунок 5. *К примеру 9.4*

Возьмём точки $M_1 = (1; 2; -3) \in l_1$ и $M_2(-1; 1; -2) \in l_2$.
$\overrightarrow{M_1M_2} = (-2; -1; 1)$, рис.4.

Задача сводится к определению высоты параллелограмма построенного на векторах $\bar{\mathbf{s}}_1$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$. Для этого надо разделить величину площади параллелограмма $S = |\overline{M_1M_2} \times \bar{\mathbf{s}}_1|$ на длину основания параллелограмма $|\bar{\mathbf{s}}_1|$.

$$d = \frac{|\overline{M_1M_2} \times \bar{\mathbf{s}}_1|}{|\bar{\mathbf{s}}_1|}.$$

$$\overline{M_1M_2} \times \bar{\mathbf{s}}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\bar{i} + 5\bar{i} - 3\bar{i}.$$

$$d = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{50}}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{3}.$$ ►

Ответ: $\boxed{d = \dfrac{5\sqrt{2}}{3}.}$

Пример 9.4. *Найти расстояние d точки $A(1;2;-3)$ до прямой*
$l_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+2}{4}$.

◀Очевидно, что решение данной задачи не отличается от предыдущей. Даже ответ будет тот же, так как уравнение прямой l_2 примера 9.3 и координаты точек $A(1;2;-3)$ и $M_1(1;2;-3)$ совпадают, рис.5. Задача сводится к определению высоты параллелограмма построенного на векторах $\bar{\mathbf{s}} = (1;2;2)$ и вектора $\overrightarrow{M_1A} = (-2;-1;1)$ ▶

Ответ: $\boxed{d = \dfrac{5\sqrt{2}}{3}.}$

Пример 9.5. *Найти проекцию точки $M(1;1;1)$ на прямую*
$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$.

◀ Построим плоскость, проходящую через точку $M \perp$ данной прямой:

$$2\,(x-1) + 3\,(y-1) - (z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 3y - z - 4 = 0$$

Найдём проекцию точки M на прямую, как точку пересечения данной прямой и построенной плоскости. Для этого представим прямую в параметрическом виде и подставим в уравнение плоскости: $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3t, \\ z = -1 - t. \end{cases}$

$$2\,(1+t) + 9t + 1 + t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{14} \Rightarrow$$

$$x = \frac{8}{7};\; y = \frac{3}{14};\; z = \;-\frac{15}{14}.$$

$\left(\dfrac{8}{7}; \dfrac{3}{14}; -\dfrac{15}{14}\right)$ – проекция точки M . ▶

Ответ: $\boxed{\left(\dfrac{8}{7}; \dfrac{3}{14}; -\dfrac{15}{14}\right).}$

Пример 9.6. *Найти точку, симметричную точке $M\,(1;2;1)$ относительно прямой*
$l : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$.

◀ Найдем сначала проекцию точки M на данную прямую l.

Точка M' – проекция точки M на прямую есть точка пересечения данной прямой с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку M. Тогда направляющий вектор $\overrightarrow{s} = (2; -1; 1)$ прямой является вектором нормали $\overrightarrow{n}$ этой плоскости и ее уравнение имеет вид:

$$2 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$2x - y + z - 1 = 0.$$

Найдем точку пересечения прямой l с построенной плоскостью, используя параметрические уравнения прямой l: $\begin{cases} x = 2t, \\ y = -t + 3, \\ z = t - 2. \end{cases}$

Подставим значения $x,\ y,\ z$ в уравнение плоскости:

$$4t - (-t+3) + (t-2) - 1 = 0 \ \Rightarrow 6t = 6 \ \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 2, \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$M'\,(2;\ 2;\ -1)$ – проекция точки M на прямую l.

Точку M'' симметричную точке M относительно прямой l, найдем из условий:

$$x_{M'} = \frac{x_M + x_{M''}}{2} \ \Rightarrow \ x_{M''} = 2x_{M'} - x_M = 2 \cdot 2 - 1 = 3,$$

$$y_{M'} = \frac{y_M + y_{M''}}{2} \ \Rightarrow \ y_{M''} = 2y_{M'} - y_M = 2 \cdot 2 - 2 = 2,$$

$$z_{M'} = \frac{z_M + z_{M''}}{2} \ \Rightarrow \ z_{M''} = 2z_{M'} - z_M = 2 \cdot (-1) - 1 = -3\ .$$

$M''\,(3; 2; -3)$ – точка симметричная точке $(1; 2; 1)$ относительно прямой l. ▶

Ответ: $\boxed{M''\,(3; 2; -3)\,.}$

Пример 9.7. *Найти точку, симметричную точке* $P\,(5; 2; -1)$ *относительно плоскости:* $2x - y + 3z + 23 = 0$.

◀ Проведем через точку P прямую l перпендикулярно плоскости $2x - y + 3z + 23 = 0$. Вектор нормали $\overrightarrow{n} = (2; -1; 3)$ данной плоскости, будет направляющим вектором $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n}$ прямой l, тогда ее параметрические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -t + 2, \\ z = 3t - 1. \end{cases}$$

Подставим уравнения прямой в уравнение плоскости и найдем точку пересечения прямой и плоскости:

$$2\,(2t+5) - (-t+2) + 3\,(3t-1) + 23 = 0 \ \Rightarrow$$

$$14t = -28 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 4, \\ z = -7. \end{cases}$$

$P'(1;4;-7)$ – проекция точки P на данную плоскость.
Точку P'' симметричную точке P относительно плоскости, найдем из условий:

$$x_{P'} = \frac{x_P + x_{P''}}{2} \ \Rightarrow \ x_{P''} = 2x_{P'} - x_P = 2 \cdot 1 - 5 = -3,$$

$$y_{P'} = \frac{y_P + y_{P''}}{2} \ \Rightarrow \ y_{P''} = 2y_{P'} - y_P = 2 \cdot 4 - 2 = 6,$$

$$z_{P'} = \frac{z_P + z_{P''}}{2} \ \Rightarrow \ z_{P''} = 2z_{P'} - z_P = 2 \cdot (-7) + 1 = -13 \ .$$

$P''(-3;6;-13)$ – точка, симметричная точке $P(5;2;-1)$ относительно плоскости: $2x - y + 3z + 23 = 0$. ►

Ответ: $\boxed{(-3;6;-13)}$**.**

Пример 9.8. *Показать, что прямые* $l_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{-2}$ *и* l_2: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+11}{2} = \dfrac{z+6}{1}$ *лежат в одной плоскости, найти уравнение этой плоскости и если прямые не параллельны, то найти точку пересечения.*

◄ Векторы $\overrightarrow{s_1} = (2;-1;-2)$ и $\overrightarrow{s_2} = (1;2;1)$ – направляющие векторы прямых l_1 и l_2. Точки $M_1(1;-2;0) \in l_1$ и $M_2(-1;-11;-6) \in l_2$,
$\overrightarrow{M_1M_2} = (-2;-9;-6)$

Рассмотрим смешанное произведение
$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}) = \begin{vmatrix} -2 & -9 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, значит векторы $\overrightarrow{s_1}$, $\overrightarrow{s_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны и прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости (или параллельны или пересекаются). Так как координаты направляющих векторов не пропорциональны: $\dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{-1}{2} \neq \dfrac{-2}{1}$, то прямые пересекаются.

Найдем точку пересечения прямых.

Уравнения прямой $l_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{-2}$ перепишем в параметрическом виде: $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 2 \\ z = -2t \end{cases}$ и подставим x, y, z в уравнения второй прямой l_2: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+11}{2} = \dfrac{z+6}{1}$ получим:

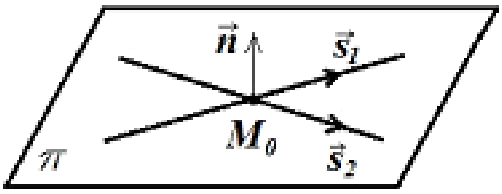
$$\frac{2t+1+1}{1} = \frac{-t-2+11}{2} = \frac{-2t+6}{1} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|c} 4t+4=-t+9 & -t+9=-4t+12 \\ 5\text{t}=5 & 3t=3 \\ t=1 & t=1 \end{array}$$

Оба уравнения дают одно и то же значение $t=1$. Следовательно, координаты точки пересечения: $x=3;\ y=-3;\ z=-2$.

$M_0(3;-3;-2)$ – точка пересечения прямых l_1 и l_2.

Запишем уравнение плоскости, которую задают пересекающиеся прямые l_1 и l_2.



Известна точка $M_0\,(3;-3;-2)$, принадлежащая искомой плоскости, найдем вектор нормали $\overrightarrow{n}$ этой плоскости: $\overrightarrow{s_1}=(2;-1;-2)$ $\overrightarrow{s_2}=(1;2;1)$.

$$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3\,\overrightarrow{i}-4\,\overrightarrow{j}+5\,\overrightarrow{k}\Rightarrow\overrightarrow{n}(3;-4;5).$$

Составим уравнение искомой плоскости:

$$3\,(x-3)-4\,(y+3)+5(z+2)=0\Rightarrow$$

$3x-4y+5z-11=0$ – уравнение плоскости, проходящей через заданные прямые. ►

Ответ: $\boxed{M_0(3;-3;-2),\ 3x-4y+5z-11=0.}$

Пример 9.9. *Исследовать взаимное расположение прямых* $l_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{0}$ $l_2:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. *Если они не пересекаются, найти расстояние между ними.*

◄ Векторы $\overrightarrow{s_1}=(2;1;0)$ и $\overrightarrow{s_2}=(2;2;1)$ – направляющие векторы прямых l_1 и l_2. Точки $M_1(0;1;-2)\in l_1$ и $M_2(-1;-1;2)\in l_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1;-2;4)$.

Рассмотрим смешанное произведение

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2}\right)=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-1+0+16-8-0+4=11\neq0,$$

значит векторы $\overrightarrow{s_1}$, $\overrightarrow{s_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ не компланарны и прямые l_1 и l_2 скрещиваются.

Кратчайшее расстояние между прямыми l_1 и l_2 найдем по формуле:

$$\rho\left(l_1, l_2\right) = \frac{\left|\left(M_1\vec{M}_2, \vec{s_1}, \vec{s_2}\right)\right|}{\left|\left[\vec{s_1}, \vec{s_2}\right]\right|}$$

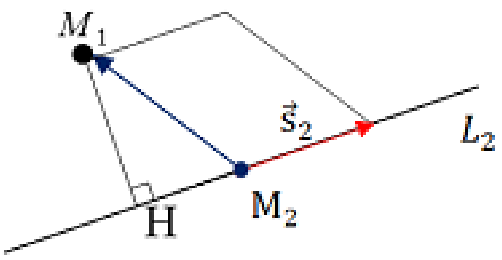
$$\left|\left(M_1\vec{M}_2, \vec{s_1}, \vec{s_2}\right)\right| = 11$$

$$\left[\vec{s_1}, \vec{s_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1; -2; 2) \Rightarrow$$

$$\left|\left[\vec{s_1}, \vec{s_2}\right]\right| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3 \ \Rightarrow \rho\left(l_1, l_2\right) = \frac{11}{3}\ . \ ►$$

Ответ: $\boxed{\textbf{Прямые } l_1 \textbf{ и } l_2 \textbf{ скрещиваются, } \rho\left(l_1, l_2\right) = \frac{11}{3}.}$

Пример 9.10. *Вычислить расстояние от точки* $M_1(0; 1; 2)$ *до прямой* $l: \ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$.



◄ Расстояние $\rho\left(M_1, l\right)$ от точки $M_1(0; 1; 2)$ до прямой l равно длине перпендикуляра HM_1, опущенного из точки M_1 на прямую l. Рассмотрим точку $M_2(1; 0; -1) \in l$ и построим параллелограмм на векторах $\vec{s} = (2;\ 1; 0)$ и $\overrightarrow{M_2M_1} = (-1; 1; 3)$. Высота этого параллелограмма и будет искомым расстоянием $\rho\left(M_1, l\right) = HM_1$.

$$S_{\text{паралл}} = \left|\overrightarrow{HM_1}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| = \left|\overrightarrow{HM_1}\right| \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}\ \left|\overrightarrow{HM_1}\right| \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{HM_1}\right| = \frac{S}{\sqrt{5}}.$$

С другой стороны $S_{\text{паралл}} = \left|\left[\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{s}\right]\right|$

$$\left[\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{s_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$S_{\text{паралл}} = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54} \Rightarrow$$

$$\rho\left(M_1, l\right) = HM_1 = \left|\overrightarrow{HM_1}\right| = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\ .$$

►

Ответ: $\boxed{\rho\left(M_1, l\right) = \dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.}$

Пример 9.11. *Определить тип поверхности* $x^2+2x-y^2+z^2-4z+4=0$. *В ответе указать тип поверхности и координаты ее центра симметрии.*

◄ $x^2+2x+2y^2+z^2-4z+1=0 \Rightarrow$

$$\left(x^2+2x+1\right)-1+2y^2+\left(z^2-4z+4\right)-4+1=0 \Rightarrow$$

$$(x+1)^2+2y^2+\ (z-2)^2=4$$

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{(z-2)^2}{4}=1.$$

Так как $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – каноническое уравнение эллипсоида $\Rightarrow$ $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{(z-2)^2}{4}=1$ – эллипсоид с центром симметрии в точке $(-1;0;2)$. ►

Ответ: $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{(z-2)^2}{4}=1$ – эллипсоид с центром в точке $(-1;0;2)$.

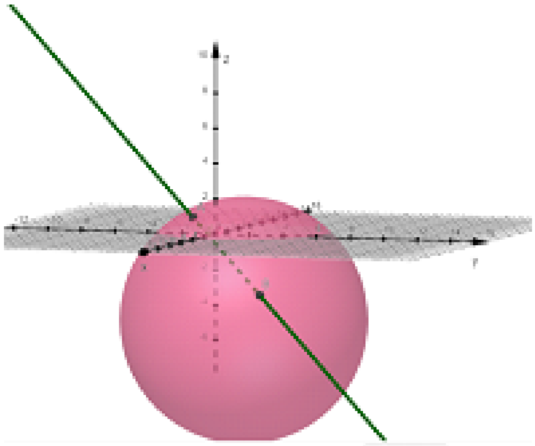
Пример 9.12. *Найти точку (точки) пересечения поверхности, задаваемой уравнением:* $x^2+y^2+z^2+4x-2y+10z-19=0$ *и прямой:* $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y+11}{5}=\dfrac{z-9}{-4}$.

◄ Приведем уравнение поверхности к каноническому виду, выделив полные квадраты по переменным x, y, z.

$$\left(x^2+4x+4\right)-4+\left(y^2-2y+1\right)-1+\left(z^2+10z+25\right)-25-19=0$$

$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=49$ – сфера с центром $(-2;1;-5)$.

Зададим прямую параметрически: $\begin{cases} x=3t-5, \\ y=5t-11, \\ z=-4t+9. \end{cases}$



Найдем параметр t, соответствующий точкам пересечения поверхности и прямой. Подставим параметрические уравнения в уравнение поверхности:

$$(3t-5+2)^2+(5t-11-1)^2+(-4t+9+5)^2=49 \Rightarrow$$

$$(3t-3)^2+(5t-12)^2+(-4t+14)^2=49 \Rightarrow$$

$$9t^2-18t+9+25t^2-120t+144+16t^2-112t+196=49 \Rightarrow$$

$$50t^2-250t+300=0 \Rightarrow$$

$$t^2-5t+6=0 \ \Rightarrow t_1=2, \quad t_2=3.$$

Имеется две точки пересечения прямой с поверхностью:

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=-1 \\ z_1=1 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=4 \\ z_2=-3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M_1\,(1;-1;1) \text{ и } M_2(4;4;-3). \ ►$$

Ответ: $\boxed{M_1(1;-1;1);\, M_2(4;4;-3).}$

Пример 9.13. *Определить тип поверхности, заданной уравнением*

$$2x^2-y^2+2z^2+4x+2y+8z+1=0.$$

◄ Выделим полные квадраты по переменным x, y, z:

$$2\left(x^2+2x+1\right)-2-\left(y^2-2y+1\right)+1+2\left(z^2+4z+4\right)-8+1=0$$

$$2(x+1)^2-(y-1)^2+2(z+2)^2=8$$

$$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{8}+\frac{(z+2)^2}{4}=1.$$

Однополостный гиперболоид, расположенный вдоль оси, параллельной Oy с центром в точке $(-1;1;-2)$. ►

Ответ: $\dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{8}+\dfrac{(z+2)^2}{4}=1$ – однополостный гиперболоид, точка $(-1;1;-2)$ – центр.

Пример 9.14. *Установить тип поверхности, задаваемой уравнением*

$$x^2 - 16y^2 - 4z^2 - 6x + 40z - 347 = 0.$$

◀ Выделим полные квадраты:

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 - 16y^2 - 4(z^2 - 10z + 25) + 100 - 347 = 0.$$

$$(x-3)^2 - 16y^2 - 4(z-5)^2 = 256\ .$$

Поделим обе части на 256:

$$\frac{(x-3)^2}{256} - \frac{y^2}{16} - \frac{(z-5)^2}{64} = 1.$$

Двуполостный гиперболоид, расположенный вдоль оси, параллельной Ox с центром в точке $(3; 0; 5)$. ▶

Пример 9.15. *Установить взаимное расположение точек* $A(-1; 5; 7)$, $B(-3; 4; 0)$, $C(0; 0; -6)$ *и сферы* $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z - 11 = 0$.

◀ Приведем уравнение к каноническому виду, выделив полные квадраты по переменным $x, y.z$

$(x^2 + 2x + 1) - 1 + 9y^2 - 4y + 4) - 4 + (z^2 - 6z + 9) - 9 - 11.$

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$

Если точка принадлежит сфере, то ее координаты обращают уравнение сферы в верное тождество.

Если точка лежит внутри сферы, то расстояние от центра сферы до этой точки будет меньше радиуса, т.е. выполняется неравенство $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 < 25.$

Если точка лежит вне сферы, то расстояние от центра сферы до этой точки будет больше радиуса, т.е. выполняется неравенство $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 > 25.$

Подставим координаты каждой точки в уравнение сферы:

$A(-1; 5; 7) : (-1+1)^2+(5-2)^2+(7-3)^2 = 25$ значит A лежит на сфере.

$B(-34; 0) : (-3 + 1)^2 + (4 - 2)^2 + (0 - 3)^2 < 25$, значит B лежит внутри сферы.

$C(0; 0; 6) : (-3+1)^2+(4-2)^2+(0-3)^2 > 25$, значит C лежит вне сферы.

▶

Пример 9.16. *Найти точку (точки) пересечения поверхности, задаваемой уравнением* $9x^2 + 4y^2 - 36z^2 - 18x + 16y + 216z - 335 = 0$ *и прямой* $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{1}$.

◀ Приведем уравнение поверхности к каноническому виду, выделив полные квадраты по переменным x, y, z. Перегруппируем для начала слагаемые.

Коэффициенты при квадратах переменных x, y, z необходимо выносить за скобку.

$9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 36z^2 + 216z - 335 = 0.$

$9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(y^2 + 4y + 4) - 16 - 36(z^2 - 6z + 9) + 324 - 335 = 0.$

$9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 - 36(z-3)^2 = 36$ поделим обе части на 36.

$\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{9} - (z-3)^2 = 1$ – однополостный гиперболоид.

Зададим прямую параметрически: $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = t + 3. \end{cases}$

Точкам пересечения соответствует некоторый параметр t. Найдем его, подставив параметрические уравнения в уравнение поверхности.

$\dfrac{(2t+1-1)^2}{4} + \dfrac{(3t-2+2)^2}{9} - (t+3-3)^2 = 1.$

$\dfrac{4t^2}{4} + \dfrac{9t^2}{9} - t^2 = 1.$

$t^2 = 1 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -1$ – значит имеется две точки пересечения прямой с поверхностью.

$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -5, \\ z_2 = 2, \end{cases}$. $M_1 = (3; 1; 4); M_2(-1; -3; -6).$ ►

Пример 9.17. *Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые:*
$\begin{cases} x = 4t - 7, \\ y = 2t - 4, \\ z = -t + 3 \end{cases}$ *и* $\dfrac{x+7}{-5} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z-3}{2}$ *(прямые пересекаются.)*

◄ Первая прямая задана уравнениями в форме параметрическими уравнениями, что позволяет указать точку $(-7; -4; 3)$, лежащую на этой прямой, и направляющий вектор $\overrightarrow{s_1} = \{4; 2; -1\}$

Вторая прямая задана каноническими уравнениями, что позволяет также указать точку $(-7; -4; 3)$, лежащую на второй прямой и её направляющий вектор $\overrightarrow{s_2} = \{-5; 1; 2\}$.

Данные прямые имеют общую точку $M_0(-7; -4; 3)$. При этом, вектора $\overrightarrow{s}_1$ и $\overrightarrow{s_2}$ не коллинеарны, поскольку их соответствующие координаты не пропорциональны между собой.

Следовательно, заданные прямые не параллельны и пересекаются ровно в одной точке. В этом случае, действительно, существует единственная плоскость, проходящая через эти прямые.

Известна точка $M_0(-7; -4; 3)$, принадлежащая искомой плоскости, найдем вектор нормали $\overrightarrow{n}$ этой плоскости:

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 4 & 2 & -1\\ -5 & 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\overrightarrow{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-\overrightarrow{j}\cdot\begin{vmatrix}4 & -1\\ -5 & 2\end{vmatrix}+\overrightarrow{k}\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ -5 & 1\end{vmatrix}=5\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}+14\overrightarrow{k}\Rightarrow\overrightarrow{n}=(5;-3;14).$$

Составим уравнение искомой плоскости:

$$5(x+7)-3(y+4)+14(z-3)=0\Rightarrow$$

$5x-3y+14z-19=0$ – уравнение плоскости, проходящей через заданные прямые. ►

Ответ: $\boxed{5x-3y+14z-19=0.}$

Пример 9.18. *Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые:*

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-7}{-1}=\frac{z+5}{2}\qquad\begin{cases}x=t+3\\ y=-t+2\\ z=2t+4\end{cases}\quad\textit{(прямые параллельны)}$$

◄ Первая прямая задана каноническими уравнениями, из которых видно, что прямая проходит через точку $\mathrm{M}_1(-1;7;-5)$ и имеет направляющий вектор $\overrightarrow{\mathrm{s}_1}=(1;-1;2)$.

Вторая прямая задана параметрическими уравнениями, из которых видно, что эта прямая проходит через точку $\mathrm{M}_2(3;2;4)$ и имеет направляющий вектор $\overrightarrow{s_2}=(1;-1;2)$.

Векторы $\overrightarrow{\mathrm{s}_1}$ и $\overrightarrow{\mathrm{s}_2}$ совпадают, следовательно, прямые параллельны и не совпадают, так как проходят через разные точки.

В этом случае существует единственная проходящая через эти прямые плоскость.

Для составления уравнения плоскости: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ возьмём в качестве точки M_0 любую из точек M_1 или M_2. Пусть, например, M_0=$\mathrm{M}_1(-1;7;-5)$.

Вектор нормали $\overrightarrow{n}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{\mathrm{s}_1}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$, лежащим в плоскости. Векторы $\overrightarrow{\mathrm{s}_1}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ неколлинеарные:

$$\overrightarrow{\mathrm{s}_1}=(1;-1;2),\overrightarrow{M_1M_2}=(3+1;2-7;4+5)=(4;-5;9).$$

Тогда вектором нормали искомой плоскости является вектор, равный векторному произведению векторов $\overrightarrow{\mathrm{s}_1}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{s}_1\times\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 4 & -5 & 9\end{vmatrix}=(-9+10)\overrightarrow{i}-(9-8)\overrightarrow{j}+(-5+4)\overrightarrow{k}=$$

$$= \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} \Rightarrow \overrightarrow{n} = (1; -1; -1).$$

Запишем уравнение плоскости:

$$(x+1) - (y-7) - (z+5) = 0 \ \Rightarrow$$

$x - y - z + 3 = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через заданные прямые. ▶

Ответ: $\boxed{x - y - z + 3 = 0}$**.**

Пример 9.19. *Найти уравнения прямой, проходящей через точку* $(-4; -1; -4)$, *перпендикулярно прямым* $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z+4}{-3}$ *и* $\begin{cases} x = 5t - 2, \\ y = -t - 7, \\ z = t + 2. \end{cases}$

◀ Направляющий вектор искомой прямой перпендикулярен направляющим векторам заданных прямых.

Из канонических и параметрических уравнений прямых найдем их направляющие векторы: $\overrightarrow{s_1} = (4; 2; -3)$ и $\overrightarrow{s_2} = (5; -1; 1)$.

Направляющим вектором искомой прямой является вектор $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}$

$$\Rightarrow \ \overrightarrow{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{i} - 19\overrightarrow{j} - 14\overrightarrow{k} \Rightarrow \overrightarrow{s} = (-1; -19; -14).$$

Составим параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-4; -1; -4)$ с найденным направляющим вектором:

$\begin{cases} x = -t - 4, \\ y = -19t - 1, \\ z = -14t - 4 \end{cases}$ – параметрические уравнения искомой прямой.

$\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y+1}{19} = \dfrac{z+4}{14}$ – канонические уравнения. ▶

Пример 9.20. *Найти: проекцию точки* $A(-2; 3; 1)$ *на плоскость* $x - y + 2z - 3 = 0$; *точку симметричную точке* A *относительно плоскости.*

◀ а) Вектор $\overrightarrow{n} = (1; -1; 2)$ перпендикулярен данной плоскости и является направляющим вектором прямой L, проходящей через точку , перпендикулярно плоскости.

Канонические уравнения этого перпендикуляра:

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

Параметрические уравнения прямой AM: $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t + 3 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$, где M – проекция точки A.

Поскольку точка M принадлежит плоскости, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости. Подставим x, y, z точки M в уравнение плоскости:

$$t-2-(-t+3)+2\,(2t+1)-3=0 \Rightarrow\ 6t=6 \Rightarrow t=1.$$

Координаты точки : $\begin{cases} x=1-2=-1 \\ y=-1+3=2 \\ z=2\cdot 1+1=3 \end{cases} \Rightarrow M\,(-1;2;3)$ – проекция точки $A(-2;3;1)$.

б) Точка – середина отрезка AA', следовательно:

$$x_M=\frac{x_A+x_{A'}}{2}\ \Rightarrow\ x_{A'}=2x_M-x_A=-2+2=0.$$

$$y_M=\frac{y_A+y_{A'}}{2}\ \Rightarrow\ y_{A'}=2y_M-y_A=4-3=1.$$

$$z_M=\frac{z_A+z_{A'}}{2}\ \Rightarrow\ z_{A'}=2z_M-z_A=6-1=5.$$

$A'\,(0;1;5)$ – точка симметричная точке A. ►

Ответ: $\boxed{\textbf{а) } M\,(-1;2;3)\,,\ \textbf{б) } A^{'}\,(0;1;5).}$

Пример 9.21. *Найти точку, симметричную точке $A(3;-2;-1)$ относительно прямой*

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{2}.$$

◄ Найдем сначала проекцию точки на данную прямую l.

Точка – проекция точки A на прямую есть точка пересечения данной прямой с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку A. Тогда направляющий вектор $\overrightarrow{s}=(1;-1;2)$ прямой является вектором нормали этой плоскости и ее уравнение имеет вид:

$$1\cdot(x-3)-1\cdot(y+2)+2\cdot(z+1)=0 \Rightarrow$$

$$x-y+2z-3=0.$$

Найдем точку пересечения прямой l с построенной плоскостью, используя параметрические уравнения прямой l: $\begin{cases} x=t+1, \\ y=-t-2, \\ z=2t-1. \end{cases}$ Подставим значения x, y, z в уравнение плоскости:

$$t+1-(-t-2)+2\,(2t-1)-3=0\ \Rightarrow 6t=2\ \Rightarrow t=\frac{1}{3}.$$

$$x_M = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3},\ y_M = -\frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3},\ z_M = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow$$

$M\left(\frac{4}{3};\ -\frac{7}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$ – проекция точки на прямую l.

Точку A' симметричную точке относительно прямой l, найдем из условий:

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \ \Rightarrow\ x_{A'} = 2x_M - x_A = 2 \cdot \frac{4}{3} - 3 = -\frac{1}{3}.$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \ \Rightarrow\ y_{A'} = 2y_M - y_A = 2 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + 2 = -\frac{8}{3}.$$

$$z_M = \frac{z_A + z_{A'}}{2} \ \Rightarrow\ z_{A'} = 2z_M - z_A = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{3}.$$

$A'\left(-\frac{1}{3}; -\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$ – точка симметричная точке $A(3; -2; -1)$ относительно прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$. ►

Ответ: $\boxed{A'\left(-\frac{1}{3}; -\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)}$.