МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИРЭА – РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Р.С. АКОПЯН, Е.А. ВЕТРЕНКО

ПОДГОТОВКА К ЭКЗАМЕНУ ПО ВТОРОЙ ЧАСТИ КУРСА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Москва – 2020

УДК 512.64
ББК 22.143

Акопян Р.С., Ветренко Е.А. [Электронный ресурс]: методические указания / Акопян Р.С, Ветренко Е.А. — М.: МИРЭА – Российский технологический университет, 2020. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

Разработаны в помощь студентам, изучающим вторую часть курса линейной алгебры и аналитической геометрии. В состав методических указаний входят основные теоретические сведения по теме, приводятся примеры решения задач и упражнения для самостоятельного решения
Предназначено для студентов всех профилей технических направлений бакалавриата и технических специальностей специалитета.

Методические указания издаются в авторской редакции.

Авторский коллектив**:** Акопян РипсимеСергоевна, Ветренко Екатерина Александровна

Рецензент:

Головешкин Василий Адамович, д.т.н., проф. кафедры высшей математики РТУ - МИРЭА

Минимальные системные требования:
Наличие операционной системы Windows, поддерживаемой производителем.
Наличие свободного места в оперативной памяти не менее 128 Мб.
Наличие свободного места в памяти хранения (на жестком диске) не менее 30 Мб.
Наличие интерфейса ввода информации.
Дополнительные программные средства: программа для чтения pdf-файлов (AdobeReader).
Подписано к использованию по решению Редакционно-издательского совета
МИРЭА – Российского технологического университета от ___ __________ 2020 г.
Объем ___ Мб
Тираж 10

Оглавление

1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА 4
1.1. Справочный материал 4
1.2. Задачи с решениями 7
1.3. Задачи для самостоятельного решения 13
2. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО 14
2.1. Справочный материал 14
2.2. Задачи с решениями 15
2.3. Задачи для самостоятельного решения 17
3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ 18
3.1. Справочный материал 18
3.2. Задачи с решениями 21
3.3. Задачи для самостоятельного решения 29
4. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ 31
4.1. Справочный материал 31
4.2. Задачи с решениями 35
4.3. Задачи для самостоятельного решения 43
Литература: 44

1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА
1.1. Справочный материал

1. Рассмотрим множество V элементов $x, y, z,\ldots,$ в котором для любых двух элементов $x \in V$, $y \in V$ определена сумма $x + y \in V$ и для любого элемента $x \in V$ и любого действительного числа λ определено произведение $\lambda x \in V$.

Если введенные операции сложения элементов и умножения на число удовлетворяют следующим аксиомам:

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. $\exists$ нулевой элемент $o \in V$ такой, что $x + o = x \quad \forall x \in V$;
4. $\forall x \in V$ $\exists$ противоположный элемент $(-x) \in V$ такой, что $x + (-x) = o$;
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
7. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
8. $1 \cdot x = x$,

то множество V называется *действительным линейным (или действительным векторным) пространством*. Элементы $x, y, z,\ldots$ этого пространства – *векторами*.

В дальнейшем будем использовать термин *линейное пространство*, подразумевая, что оно является действительным.

Разностью элементов x и y называется элемент z такой, что $y + z = x$. Обозначается $z = x - y$.

Свойства линейных пространств:

1. В линейном пространстве V существует только один нулевой элемент.
2. $\forall x \in V$ $\exists$ единственный противоположный элемент.
3. $\forall x \in V:$ $0 \cdot x = o$, где $o \in V$ -- нулевой элемент.
4. Для любого действительного числа λ и $o \in V$ выполняется $\lambda \cdot o = o$.
5. Элемент $(-1) \cdot x$ является противоположным элементом для $\forall x \in V$.
6. $\forall x, y \in V:$ $x - y = x + (-y)$.

Примеры линейных пространств. Действительными линейными пространствами являются следующие множества (с известными операциями сложения элементов и умножения на действительные числа):

а) множество действительных чисел;

б) множество геометрических векторов в трехмерном пространстве (пространство V_3);

в) множество столбцов с n элементами (пространство T_n);

г) множество матриц размерности $m \times n$ с действительными элементами;

д) множество многочленов степени, не превосходящей натурального числа n (пространство P_n);

е) множество функций, непрерывных на $[a,b]$ (пространство $C[a,b]$).

2. Вектор y называется *линейной комбинацией* системы векторов $x_1, x_2, ..., x_s \subset V$, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$, что

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_s x_s .$$

Говорят, что y линейно выражается через векторы $x_1, x_2, ..., x_s$.

Система векторов $x_1, x_2, ..., x_s$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_s x_s$ равна нулевому элементу, т.е.

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_s x_s = o .$$

В противном случае, если линейная комбинация равна нулевому элементу только при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_s = 0$, то эта система называется *линейно независимой.*

Линейное пространство V называется *n-мерным,* если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов этого пространства линейно зависимы. Записывают $dim(V)=n$.

Совокупность n линейно независимых векторов n-мерного пространства V называется *базисом.*

Каждый вектор линейного n-мерного пространства V может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации базисных векторов.

Разложение вектора x n-мерного пространства V по базису $e_1, e_2, ..., e_n$ имеет вид:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n ,$$

где числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *координатами* вектора в данном базисе.

3. *Переход от старого базиса* $e_1, e_2, ..., e_n$ *к новому базису* $e_1', e_2', ..., e_n'$.

Разложим векторы нового базиса по векторам старого:

$$\begin{cases} e_1' = t_{11}e_1 + t_{12}e_2 + \ldots + t_{1n}e_n \\ e_2' = t_{21}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{2n}e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n' = t_{n1}e_1 + t_{n2}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n \end{cases}$$

или можно записать $(e_1', e_2', \ldots, e_n') = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \cdot T$, где

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \ldots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \ldots & t_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1n} & t_{2n} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

называется *матрицей перехода* от старого базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к новому базису $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ (к-й столбец матрицы T есть столбец координат вектора e_k' в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$).

Ясно, что для обратного перехода $(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (e_1', e_2', \ldots, e_n') \cdot T^{-1}$.

Переход от координат вектора x относительно старого базиса к координатам относительно нового базиса осуществляется по формулам:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

(*формулы преобразования координат при преобразовании базиса).*

4. *Подпространством* линейного пространства V называется такое подмножество $W \subset V$, которое обладает свойствами:

а) $\forall x, y \in W$ сумма $x + y \in W$;

б) $\forall x \in V$ произведение $\lambda \cdot x \in W$.

Любое подпространство само является пространством.

Размерности пространств W и V связаны неравенством: $\dim(W) \le \dim(V)$.

Если $a_1, a_2, \ldots, a_s$-- какие-нибудь векторы линейного пространства V, то множество всех линейных комбинаций этих векторов $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ называется *линейной оболочкой* векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s$ и обозначается через $L(a_1, a_2, \ldots, a_s)$.

Линейная оболочка $L(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ является подпространством в V.

5. Рассмотрим однородную систему *m* линейных уравнений с *n* неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Решение системы будем записывать в виде столбца

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Столбец X есть элемент линейного пространства T_n столбцов с n элементами.

Множество решений данной системы является подпространством пространства T_n. Если ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

меньше n, то система имеет ненулевые решения.

Размерность подпространства множества решений данной системы равна $k = n - r$, где r – ранг матрицы A.

Для построения *базиса* этого подпространства следует найти *фундаментальную систему решений* рассматриваемой системы линейных однородных уравнений.

Подпространство решений линейной однородной системы уравнений можно представить как линейную оболочку $L(f_1, f_2, ..., f_k)$, где $f_1, f_2, ..., f_k$ – фундаментальная система решений данной системы уравнений.

1.2. Задачи с решениями

Задача 1. В базисе e_1, e_2, e_3 даны векторы $a_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $a_2 = 2e_2 + 3e_3$, $a_3 = e_2 + 5e_3$.

1) Доказать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис;
2) Найти координаты вектора $d = 2e_1 - e_2 + e_3$ в базисе a_1, a_2, a_3.

Решение. 1) Три вектора a_1, a_2, a_3 трехмерного пространства образуют базис, если они линейно независимы. Т.е. линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$ только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Подставим координаты векторов a_1, a_2, a_3 и запишем векторное равенство

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

то система имеет только нулевое решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и, следовательно, векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис.

2) Запишем матрицу перехода от старого базиса e_1, e_2, e_3 к новому базису a_1, a_2, a_3. Столбцы матрицы перехода T есть координаты векторов a_1, a_2, a_3 в базисе e_1, e_2, e_3:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу

$$T^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Столбец координат вектора d в базисе e_1, e_2, e_3

$$d = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тогда по формуле преобразования координат имеем, что

$$\begin{pmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор d в базисе a_1, a_2, a_3 имеет координаты (2, -2, 1), т.е. $d = 2a_1 - 2a_2 + a_3$.

Задача 2. В линейном пространстве столбцов T_3 даны три базиса e_1, e_2, e_3, a_1, a_2, a_3 и f_1, f_2, f_3. Известны координаты векторов a_1, a_2, a_3 и f_1, f_2, f_3 в базисе e_1, e_2, e_3:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) матрицу перехода от базиса a_1, a_2, a_3 к базису f_1, f_2, f_3;

б) матрицу обратного перехода T^{-1};

в) координаты векторов a_1 и f_3 в каждом из базисов a_1, a_2, a_3 и f_1, f_2, f_3;

г) координаты вектора $y = 5f_1 + 3f_2 + f_3$ в базисе a_1, a_2, a_3.

Решение. а) Если T есть матрица перехода от базиса a_1, a_2, a_3 к базису f_1, f_2, f_3, то $(f_1, f_2, f_3) = (a_1, a_2, a_3)T$. В матричном виде это уравнение может быть записано

$$F = AT,$$

где

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решая полученное матричное уравнение, находим матрицу перехода T:

$$T = A^{-1}F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Матрица обратного перехода T^{-1}:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

в) Найдем координаты вектора a_1 в каждом из базисов a_1, a_2, a_3 и f_1, f_2, f_3. В первом базисе вектор a_1 имеет разложение $a_1 = 1a_1 + 0a_2 + 0a_3$, т.е.

$$(a_1)_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда по формуле преобразования координат находим координаты a_1 в базисе f_1, f_2, f_3:

$$(a_1)_f = T^{-1}(a_1)_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, найдем координаты f_3 в каждом из базисов a_1, a_2, a_3 и f_1, f_2, f_3. В базисе f_1, f_2, f_3 имеем разложение $f_3 = 0f_1 + 0f_2 + f_3$, следовательно,

$$(f_3)_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(f_3)_a = T(f_3)_f = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

г) Координаты вектора $y = 5f_1 + 3f_2 + f_3$ в базисе a_1, a_2, a_3 также находим по формуле:

$$(y)_a = T(y)_f = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Т.е. в базисе a_1, a_2, a_3 вектор y можно представить в виде

$$y = 3{,}5a_1 - a_2 + 2{,}5a_3.$$

Задача 3. В линейном пространстве $P_2(x)$ многочленов не выше второй степени с действительными коэффициентами даны два базиса: e_1, e_2, e_3 и a_1, a_2, a_3, где $e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2$ и $a_1 = 1,\ a_2 = x - 2,\ a_3 = (x-2)^2$.

Найти: а) матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису a_1, a_2, a_3;

б) матрицу обратного перехода T^{-1};

в) координаты вектора e_3 в базисе a_1, a_2, a_3;

г) разложение элемента $p(x) = 3x^2 - 2x + 1$ в базисе a_1, a_2, a_3.

Решение. а) Так как

$$\begin{cases} a_1 = 1 = e_1, \\ a_2 = x-2 = -2e_1 + e_2, \\ a_3 = (x-2)^2 = 4-4x+x^2 = 4e_1 - 4e_2 + e_3, \end{cases}$$

то

$$(a_1)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (a_2)_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (a_3)_e = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису a_1, a_2, a_3 имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Матрица обратного перехода T^{-1}:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

в) Координаты вектора e_3 в базисе a_1, a_2, a_3 найдем по формуле:

$$(e_3)_a = T^{-1}(e_3)_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, верно разложение $x^2 = 4 + 4(x-2) + (x-2)^2$.

г) Найдем разложение элемента $p(x) = 3x^2 - 2x + 1$ в базисе a_1, a_2, a_3. Столбец координат элемента $p(x)$ в базисе e_1, e_2, e_3:

$$(p)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле преобразования координат получим

$$(p)_a = T^{-1}(p)_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, искомое разложение имеет вид

$$p(x) = 9 + 10(x-2) + 3(x-2)^2.$$

Задача 4. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Решение. а) Определим ранг матрицы системы. С помощью элементарных преобразований приводим ее к ступенчатому виду.

$$r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 19 & -4 & -5 & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 19 & -4 & -5 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -21 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & -21 & 8 & 3 & 3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -21 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Таким образом, ранг матрицы равен $r = 2$. Тогда размерность пространства решений системы $n - r = 5 - 2 = 3$.

Равносильная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ \quad -21x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$ и запишем общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 3c_1 + 2c_2 + c_3 \\ -21x_2 = -8c_1 - 3c_2 - 3c_3 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{17}{21}c_1 + \dfrac{4}{7}c_2 - \dfrac{3}{7}c_3 \\ x_2 = \dfrac{8}{21}c_1 + \dfrac{1}{7}c_2 + \dfrac{1}{7}c_3 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = c_3 \end{cases}$$

Для построения базиса подпространства найдем фундаментальную систему решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{17}{21} \\ \dfrac{8}{21} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{7} \\ \dfrac{1}{7} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{7} \\ \dfrac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

б) Выписываем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы системы.

$$r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Таким образом, ранг матрицы равен $r = 2$. Тогда размерность пространства решений системы $n - r = 4 - 2 = 2$.

Равносильная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ \qquad x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, тогда:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = c_1 + 2c_2 \\ x_2 = 2c_1 - c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5c_1 + 5c_2 \\ x_2 = 2c_1 - c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

Для построения базиса найдем фундаментальную систему решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 5. Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе. По известному вектору y_e найти вектор y.

$$e_1 = (-2,3,0),\ e_2 = (2,-3,4),\ e_3 = (-2,0,-3),\ x = (-4,3,-7),\ y_e = (4,4,3)$$

Задача 6. Показать, что многочлены f_1, f_2, f_3 образуют базис и найти координаты многочлена h в этом базисе. По известному вектору g_f найти многочлен g.

$$f_1(x) = 4 + 4x + 2x^2,\ f_2(x) = -3 - 2x^2,\ f_3(x) = -1 - x + x^2,\ h(x) = 5 - 4x + 4x^2,\ g_f = (0,-1,2)$$

Задача 7. Показать, что многочлены f_1, f_2, f_3 образуют базис и найти координаты многочлена h в этом базисе. По известному вектору g_f найти многочлен g.

$$f_1(x) = -3 + 2x^2,\ f_2(x) = 2 + x + 2x^2,\ f_3(x) = 4 + 4x - 2x^2,\ h(x) = 5 + x,\ g_f = (-1,2,-1)$$

Задача 8. По известным векторам a, b, c и их значениям a_e, b_e, c_e в базисе e_1, e_2, e_3, найти векторы этого базиса.

$$a_e = (1,-1,-1),\ b_e = (-1,1,0),\ c_e = (-1,-1,1),\ a = (-3,-3,1),\ b = (0,2,1),\ c = (-3,-1,1)$$

Задача 9. По известным векторам a, b, c и их значениям a_e, b_e, c_e в базисе e_1, e_2, e_3, найти векторы этого базиса.

$$a_e = (2,-2,1),\ b_e = (-2,3,-1),\ c_e = (0,1,-1),\ a = (1,1,1),\ b = (-3,1,1),\ c = (-1,3,-1)$$

Задача 10. Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 и u_1, u_2, u_3 образуют базисы и найти матрицу перехода $T_{e \to u}$. По известным векторам x и y в одном базисе найти их значения в другом.

$$e_1 = (3,-1,-2),\ e_2 = (-2,-1,0),\ e_3 = (1,3,3),\ u_1 = (-3,1,3),\ u_2 = (-2,-1,1),\ u_3 = (-2,-1,-1),$$
$$x_u = (1,-2,3),\ y_e = (-2,-2,0)$$

Задача 11. Установить размерность пространства решений однородной системы уравнений, указать базис этого пространства.

а)
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

д)
$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

е)
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

2. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

2.1. Справочный материал

1. Действительное линейное пространство называется *евклидовым пространством,* если каждой паре векторов x и y поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое символом (x,y) и называемое *скалярным произведением* векторов x и y, причем, выполнены следующие условия:

1. $(x,y)=(y,x)$;
2. $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$;
3. $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$, где λ – действительное число;
4. $(x,x)\ge 0$, причем $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Длиной вектора x называется число $|x|=\sqrt{(x,x)}$.

Вектор x, длина которого равна единице, называется нормированным. Нетрудно видеть, что если x – ненулевой вектор, то $\dfrac{x}{|x|}$ – нормированный вектор.

Для любых векторов x, y евклидова пространства справедливо неравенство Коши – Буняковского

$$|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y),$$

которое позволяет следующим образом определить угол между ненулевыми векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}.$$

Ненулевые векторы x, y евклидова пространства называются *ортогональными,* если скалярное произведение $(x,y)=0$ (пишут $x \perp y$).

2. В n - *мерном* евклидовом пространстве базис $e_1, e_2, ..., e_n$ называется *ортогональным*, если $(e_i, e_j) = 0$ при $i \ne j$. Если ортогональный базис состоит из нормированных векторов, то этот базис называется *ортонормированным*. Для ортонормированного базиса выполняются равенства

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad i \ne j, \\ 1 & \textit{при} \quad i = j. \end{cases}$$

Если в евклидовом пространстве задан произвольный базис $f_1, f_2, ..., f_n$, то векторы

$$e_1 = f_1, \qquad e_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ik} e_i, \qquad k = 2,3,\ldots,n,$$

где $c_{ik} = \dfrac{(e_i, f_k)}{(e_i, e_i)}$, образуют ортогональный базис в этом пространстве (*процесс ортогонализации Шмидта*).

2.2.Задачи с решениями

Задача 1. Применить процесс ортогонализации к системе векторов $f_1 = (1,-2,2)$, $f_2 = (-1,0,-1)$, $f_3 = (5,-3,-7)$ евклидова пространства, если скалярное произведение двух произвольных векторов $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ определяется по формуле: $(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Решение. Полагаем $g_1 = f_1 = (1,-2,2)$. Вектор g_2 найдем по формуле

$$g_2 = f_2 - c_{12} g_1, \quad \text{где} \quad c_{12} = \frac{(g_1, f_2)}{(g_1, g_1)} = \frac{1\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 + 2\cdot(-1)}{1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + 2\cdot 2} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $g_2 = f_2 - (-\frac{1}{3}) g_1 = (-1,0,-1) + \frac{1}{3}(1,-2,2) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

Наконец, вектор g_3 находим в виде следующей линейной комбинации: $g_3 = f_3 - c_{13}g_1 - c_{23}g_2$. Посчитаем значения коэффициентов $c_{13},\ c_{23}$:

$$c_{13} = \frac{(g_1, f_3)}{(g_1, g_1)} = \frac{1\cdot 5 + (-2)\cdot(-3) + 2\cdot(-7)}{1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + 2\cdot 2} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3},$$

$$c_{23} = \frac{(g_2, f_3)}{(g_2, g_2)} = \frac{-\frac{2}{3}\cdot 5 + (-\frac{2}{3})\cdot(-3) + (-\frac{1}{3})\cdot(-7)}{-\frac{2}{3}\cdot(-\frac{2}{3}) + (-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{2}{3}) + (-\frac{1}{3})\cdot(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно,

$$g_3 = f_3 - (-\frac{1}{3})g_1 - g_2 = (5,-3,-7) + \frac{1}{3}(1,-2,2) - (-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}) = (6,-3,-6).$$

Векторы g_1, g_2, g_3 образуют ортогональную систему векторов.

Задача 2. Рассматривается евклидово пространство многочленов не выше второй степени. Скалярное произведение двух произвольных многочленов $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определено равенством $(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt$. Построить ортонормированный базис этого пространства, применив метод ортогонализации к базису $f_1 = t^2$, $f_2 = t$, $f_3 = 1$.

Решение. Сначала построим ортогональный базис g_1, g_2, g_3. Пусть $g_1 = f_1 = t^2$, тогда $g_2 = f_2 - c_{12}g_1 = t - c_{12}t^2$, где

$$c_{12} = \frac{(g_1, f_2)}{(g_1, g_1)} = \frac{\int_0^1 t^2 t\,dt}{\int_0^1 t^2 t^2\,dt} = \frac{\int_0^1 t^3\,dt}{\int_0^1 t^4\,dt} = \frac{1/4}{1/5} = \frac{5}{4}.$$

Таким образом, $g_2 = t - \frac{5}{4}t^2$. Найдем теперь

$$g_3 = f_3 - c_{13}g_1 - c_{23}g_2 = 1 - c_{13}t^2 - c_{23}(t - \frac{5}{4}t^2).$$

Посчитаем значения коэффициентов $c_{13},\ c_{23}$:

$$c_{13}=\frac{(g_1,f_3)}{(g_1,g_1)}=\frac{\int\limits_0^1 t^2\cdot 1dt}{\int\limits_0^1 t^2t^2\,dt}=\frac{\int\limits_0^1 t^2\,dt}{\int\limits_0^1 t^4\,dt}=\frac{1/3}{1/5}=\frac{5}{3},$$

$$c_{23}=\frac{(g_2,f_3)}{(g_2,g_2)}=\frac{\int\limits_0^1 (t-\frac{5}{4}t^2)\cdot 1dt}{\int\limits_0^1 (t-\frac{5}{4}t^2)(t-\frac{5}{4}t^2)\,dt}=\frac{\int\limits_0^1 (t-\frac{5}{4}t^2)\,dt}{\int\limits_0^1 (t^2-\frac{10}{4}t^3+\frac{25}{16}t^4)\,dt}=\frac{1/12}{1/48}=4.$$

Отсюда $\quad g_3=1-\frac{5}{3}t^2-4(t-\frac{5}{4}t^2)=1-4t+\frac{10}{3}t^2.$

Для построения ортонормированного базиса найдем длины векторов $g_1=t^2,\ g_2=t-\frac{5}{4}t^2,\ \ g_3=1-4t+\frac{10}{3}t^2$:

$$|g_1|=\sqrt{(g_1,g_1)}=\sqrt{\int\limits_0^1 t^4dt}=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad |g_2|=\sqrt{(g_2,g_2)}=\sqrt{\int\limits_0^1 (t-\frac{5}{4}t^2)^2\,dt}=\frac{1}{\sqrt{48}}=\frac{1}{4\sqrt{3}},$$

$$|g_3|=\sqrt{(g_3,g_3)}=\sqrt{\int\limits_0^1 (1-4t+\frac{10}{3}t^2)^2\,dt}=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, векторы $e_1=\frac{g_1}{|g_1|}=\sqrt{5}t^2$, $e_2=\frac{g_2}{|g_2|}=\sqrt{3}(4-5t^2)$, $e_3=\frac{g_3}{|g_3|}=3-12t+10t^2$, образуют ортонормированный базис.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3. Применить процесс ортогонализации к системе векторов f_1, f_2, f_3 евклидова пространства, если скалярное произведение двух произвольных векторов $x=(x_1,x_2,x_3)$ и $y=(y_1,y_2,y_3)$ определяется по формуле: $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$.

а) $f_1=(2,-2,2)$, $\quad f_2=(-3,0,1)$, $\quad f_3=(4,-3,-4)$,

б) $f_1=(2,-1,3)$, $\quad f_2=(1,4,-1)$, $\quad f_3=(0,-5,5)$,

в) $f_1=(1,2,0)$, $\quad f_2=(3,-1,1)$, $\quad f_3=(0,1,1)$.

Задача 4. Рассматривается евклидово пространство многочленов не выше второй степени. Скалярное произведение двух произвольных многочленов $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определено равенством $(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt$. Построить ортонормированный базис этого пространства, применив метод ортогонализации к базису $f_1 = (t+1)^2$, $f_2 = t+1$, $f_3 = 1$.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

3.1. Справочный материал

1. *Линейным оператором* в линейном пространстве V называется всякое отображение **A**: $V \to V$ пространства V в себя, обладающее свойствами

$$\mathbf{A}(\lambda x) = \lambda \mathbf{A}(x), \qquad \mathbf{A}(x+y) = \mathbf{A}(x) + \mathbf{A}(y).$$

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ – некоторый фиксированный базис в линейном пространстве V. Так как $\mathbf{A}(e_1)$, $\mathbf{A}(e_2), \ldots$, $\mathbf{A}(e_n)$ – векторы пространства V, то каждый из них можно разложить единственным образом по векторам базиса $e_1, e_2, ..., e_n$:

$$\mathbf{A}(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n,$$

$$\mathbf{A}(e_1) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{n2}e_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{A}(e_1) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{nn}e_n.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей линейного оператора* **A** в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$.

Заданием матрицы оператор определяется однозначно, а именно: если $y = \mathbf{A}(x)$, то $Y = AX$, где X, Y – столбцы координат векторов x, y и A – матрица оператора **A** в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

2. Пусть A и A' – матрицы оператора **A** в базисах $e_1, e_2, ..., e_n$ и $e_1^{'}, e_2^{'}, ..., e_n^{'}$, а $T = T_{e \to e'}$ – матрица перехода от базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ к базису $e_1^{'}, e_2^{'}, ..., e_n^{'}$. Тогда *формула преобразования матрицы оператора* имеет вид

$$A' = T^{-1} A T.$$

3. *Сумма и произведение линейных операторов*, а также произведение линейного оператора на число определяется равенствами:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(x) = \mathbf{A}(x) + \mathbf{B}(x),$$

$$(\mathbf{AB})(x) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(x)),$$

$$(\lambda \mathbf{A})(x) = \lambda (\mathbf{A}(x)).$$

Матрицы этих операторов определяются $A+B$, AB, λA соответственно.

Обратным к оператору **A** называется оператор $\mathbf{A}^{-1}$ такой, что

$\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{A} = \mathbf{E}$, где **E** – единичный оператор ($\mathbf{E}(x) = x$). Оператор **A** имеет обратный в том и только в том случае, когда его матрица невырождена (в любом базисе).

4. *Собственные числа и собственные векторы линейного оператора*.

Ненулевой вектор $x \in V$ $(x \neq 0)$ называется *собственным вектором* линейного оператора **A**, если найдется такое действительное число λ, что

$$\mathbf{A}(x) = \lambda x.$$

Тогда число λ называется *собственным числом* линейного оператора **A**, соответствующим вектору x. Если A – матрица оператора **A** в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$, X – столбец координат вектора x, то матричное равенство запишется в виде

$$(A - \lambda E)X = O \quad , \quad X \neq O \quad .$$

Отсюда следует, что число λ есть собственное число оператора **A** в том и только в том случае, если $|A - \lambda E| = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а левая часть – *характеристическим многочленом* линейного оператора **А**.

Характеристический многочлен линейного оператора *не зависит от выбора базиса.*

Для каждого собственного значения λ_p находим все ненулевые решения однородной системы уравнений

$$(A-\lambda_p E)X = O.$$

Каждое ненулевое решение X этой системы является столбцом координат в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ собственного вектора оператора **А**, соответствующего собственному значению λ_p.

Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Если матрица линейного оператора является действительной *симметрической*, то все корни характеристического уравнения – действительные числа. Такой оператор имеет только действительные собственные векторы.

Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям симметричной матрицы, ортогональны.

5. Линейный оператор называется *диагонализируемым*, если существует базис, в котором его матрица является диагональной.

Матрица оператора **А** в базисе, состоящем из его собственных векторов, соответствующих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ является диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

И обратно, если матрица *A* линейного оператора **А** в некотором базисе является диагональной , то все векторы этого базиса – собственные векторы оператора **А** с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Таким образом, сформулируем *критерий диагонализируемости линейного оператора*. Линейный оператор является диагонализируемым тогда и только тогда, когда в линейном пространстве существует базис, каждый вектор которого является собственным вектором этого оператора.

6. Линейный оператор **A** евклидова пространства называется *ортогональным*, если он сохраняет скалярное произведение любых двух векторов x и y этого пространства, т.е. $(\mathbf{A}x, \mathbf{A}y)=(x, y)$.

Ортогональный оператор переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный. Наоборот, если оператор переводит какой-нибудь ортонормированный базис в ортонормированный, то он является ортогональным.

3.2. Задачи с решениями

Задача 1. Пусть $x=(x_1, x_2, x_3)$. Проверить, являются ли линейными следующие операторы:

$$\mathbf{A}(x)=(x_1-5x_2-4x_3,\, 3x_1-2x_2-x_3,\, x_2),$$

$$\mathbf{B}(x)=(x_1-5x_2-4,\, 3x_1-2x_2-x_3,\, x_2),$$

$$\mathbf{C}(x)=(x_1-5x_2-4x_3^2,\, 3x_1-2x_2-x_3,\, 0).$$

Решение. По определению операций над векторами $x=(x_1, x_2, x_3)$ и $y=(y_1, y_2, y_3)$:

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3), \qquad \lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Найдем образы векторов:

$$\mathbf{A}(x+y)=((x_1+y_1)-5(x_2+y_2)-4(x_3+y_3), 3(x_1+y_1)-2(x_2+y_2)-(x_3+y_3), x_2+y_2)=$$

$$=(x_1-5x_2-4x_3,\, 3x_1-2x_2-x_3, x_2)+(y_1-5y_2-4y_3,\, 3y_1-2y_2-y_3, y_2)=\mathbf{A}(x)+\mathbf{A}(y);$$

$$\mathbf{A}(\lambda x)=(\lambda x_1-5\lambda x_2-4\lambda x_3,\, 3\lambda x_1-2\lambda x_2-\lambda x_3,\, \lambda x_2)=$$

$$=\lambda(x_1-5x_2-4x_3,\, 3x_1-2x_2-x_3,\, x_2)=\lambda\,\mathbf{A}(x).$$

Следовательно, оператор **A** является линейным.

Для оператора **B** имеем:

$$\mathbf{B}(\lambda x)=(\lambda x_1-5\lambda x_2-4,\, 3\lambda x_1-2\lambda x_2-\lambda x_3,\, \lambda x_2),$$

$$\lambda\,\mathbf{B}(x)=\lambda(x_1-5x_2-4,\, 3x_1-2x_2-x_3,\, x_2)=(\lambda x_1-5\lambda x_2-4\lambda,\, 3\lambda x_1-2\lambda x_2-\lambda x_3,\, \lambda x_2).$$

Следовательно, $\mathbf{B}(\lambda x)\neq\lambda\,\mathbf{B}(x)$ при $\lambda\neq 1$.

Таким образом, оператор **B** не является линейным.

Для оператора **C** имеем:

$$\mathbf{C}(\lambda x)=(\lambda x_1-5\lambda x_2-4(\lambda x_3)^2,\, 3\lambda x_1-2\lambda x_2-\lambda x_3,\, 0);$$

$\lambda\,\mathbf{C}(x) = \lambda(x_1 - 5x_2 - 4x_3^2,\, 3x_1 - 2x_2 - x_3,\, 0) = (\lambda x_1 - 5\lambda x_2 - 4\lambda x_3^2,\, 3\lambda x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda x_3,\, 0)$.

Следовательно, $\mathbf{C}(\lambda x) \neq \lambda\,\mathbf{C}(x)$ при $\lambda \neq 1$.

Таким образом, оператор **C** не является линейным.

Задача 2. Найти матрицу линейного оператора $y=\mathbf{A}(x) = (2x_1 - 5x_2 - 4x_3,\, 3x_1 - 2x_2 - 2x_3,\, 4x_2)$, где $x = (x_1, x_2, x_3)$ в том базисе, в котором даны координаты векторов $x,\ y$.

Решение. Запишем связь между координатами векторов $x,\ y$

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ y_2 = 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ y_3 = \qquad\quad 4x_2 \end{cases}$$

Следовательно, матрица линейного оператора **A**:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 3 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Найти (в том же базисе) координаты вектора $y=\mathbf{A}(x)$, если оператор **A** задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } x = 3e_1 - 2e_2 - e_3.$$

Решение. В соответствии с формулой связи между вектором x и его образом $y=\mathbf{A}(x)$ получим

$$Y = AX \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix},$$

т.е. $y = 17e_1 + 15e_2 - 9e_3$.

Задача 4. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Заданы два линейных оператора $\mathbf{A}(x) = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $\mathbf{B}(x) = (x_2, 2x_3, x_1)$.

Найти оператор $(\mathbf{B}^2 + \mathbf{A})(x)$.

Решение. Матрицы данных операторов имеют вид

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$B^2+A=\begin{pmatrix}0&0&2\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\3&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$(B^2+A)(x)=\begin{pmatrix}0&1&1\\3&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2+x_3\\3x_1\\x_1+x_2+x_3\end{pmatrix},$$

т.е. $\quad \mathbf{(B^2+A)}(x)=(x_2+x_3;3x_1;x_1+x_2+x_3)$.

Задача 5. Найти матрицу линейного оператора в базисе (e_1',e_2',e_3'), где $e_1'=e_1-e_2-e_3,\quad e_2'=-e_1+e_2+2e_3,\quad e_3'=e_1-2e_2+e_3$, если она задана в базисе (e_1,e_2,e_3) :

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица T перехода от старого базиса к новому имеет вид:

$$T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу T^{-1}.

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}5&3&1\\3&2&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле преобразования матрицы оператора при преобразовании базиса будем иметь

$$A'=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}5&3&1\\3&2&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 11 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица оператора в базисе $\{e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}\}$ имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. 1) Найти матрицу оператора дифференцирования **D** в пространстве P_2 многочленов $p(x)$ степени $n \le 2$ в базисе:

а) $1, x, x^2$; б) $1, 2+x, 1+x-3x^2$.

2) Записать матрицу оператора **A** в базисе $1, x, x^2$, где $\mathbf{A}(p(x)) = xp'(x)$.

Решение. 1) Для составления матрицы оператора дифференцирования **D** в базисе $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$ найдем образы базисных элементов:

$$\mathbf{D}(e_1) = (1)' = 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3,$$

$$\mathbf{D}(e_2) = (x)' = 1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3,$$

$$\mathbf{D}(e_3) = (x^2)' = 2x = 0e_1 + 2e_2 + 0e_3.$$

Отсюда следует, что матрица оператора **D** в базисе e_1, e_2, e_3:

$$D_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, для базиса $a_1 = 1, a_2 = 2+x, a_3 = 1+x-3x^2$ найдем образы базисных элементов

$$\mathbf{D}(a_1) = (1)' = 0 = 0a_1 + 0a_2 + 0a_3,$$

$$\mathbf{D}(a_2) = (2+x)' = 1 = 1a_1 + 0a_2 + 0a_3,$$

$$\mathbf{D}(a_3) = (1+x-3x^2)' = 1-6x = 13a_1 - 6a_2 + 0a_3.$$

Т.е. матрица оператора **D** в базисе a_1, a_2, a_3:

$$D_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу D_a можно найти также с помощью формулы преобразования матрицы оператора при переходе от старого базиса к новому базису.

Матрица перехода имеет вид:

$$T_{e\to a}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&-3\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$D_a=T^{-1}D_eT=\begin{pmatrix}1&-2&-1/3\\0&1&1/3\\0&0&-1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&13\\0&0&-6\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

2) Найдем матрицу оператора **A** в базисе $e_1=1, e_2=x, e_3=x^2$, где **A** $(p(x))=xp'(x)$. Имеем

$$\mathbf{A}(e_1)=x(1)'=0=0e_1+0e_2+0e_3,$$
$$\mathbf{A}(e_2)=x(x)'=x=0e_1+1e_2+0e_3,$$
$$\mathbf{A}(e_3)=x(x^2)'=2x^2=0e_1+0e_2+2e_3.$$

Отсюда следует, что

$$A_e=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Задача 7. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора **A**, заданного в некотором базисе матрицей:

1) $A=\begin{pmatrix}1&4\\1&-2\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

Решение. 1) Собственные числа находятся из характеристического уравнения

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&4\\1&-2-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad\Rightarrow\quad(1-\lambda)(-2-\lambda)-4=\lambda^2+\lambda-6=0;$$

Решая уравнение, получим $\lambda_1=2;\lambda_2=-3.$

Найдем собственный вектор $X_1=(x_1,x_2)$, соответствующий собственному значению $\lambda_1=2$. Для этого составим систему уравнений

$(A-\lambda_1E)X=O$, или $\begin{pmatrix}1-\lambda_1&4\\1&-2-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4\\1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,

т.е.

$$\begin{cases}-x_1+4x_2=0,\\ x_1-4x_2=0.\end{cases}$$

Полагая $x_2 = c_1$, найдем $x_1 = 4c_1$.

Вектор $X_1 = (4c_1, c_1)$ при любом $c_1 \neq 0$ есть собственный вектор линейного оператора **A**, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 2$.

Найдем собственный вектор $X_2 = (x_1, x_2)$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = -3$. Составим систему уравнений

$$(A - \lambda_2 E)X = O, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 4 \\ 1 & -2-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_2 = c_2$, найдем $x_1 = -c_2$.

Вектор $X_2 = (-c_2, c_2)$ при любом $c_2 \neq 0$ есть собственный вектор линейного оператора **A**, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = -3$.

2) Составим характеристическое уравнение для определения собственных чисел

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразований уравнение примет вид:

$-(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1) = -(\lambda + 1)^3 = 0.$

Собственные значения равны: $\lambda_{1,2,3} = -1.$

Составим систему уравнений для нахождения собственных векторов линейного оператора **A**, соответствующих собственному значению $\lambda = -1$.

$$(A - \lambda E)X = O, \text{ или } \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Т.е.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 \qquad - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим эквивалентную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = c$, найдем $x_1 = -c, \quad x_2 = -c$.

Вектор $X = (-c, -c, c)$ при любом $c \neq 0$ есть собственный вектор линейного оператора **A**.

3) Составляем характеристическое уравнение и находим его решение.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Следовательно,

$$(2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) = 0,$$
$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 3) = 0,$$
$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 3) = 0.$$

Собственные значения: $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 3.$

Найдем собственные векторы. При $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases}.$$

Следовательно, собственные векторы данного линейного оператора, относящиеся к $\lambda = 1$,– это векторы с координатами (c_1, c_1, c_2), где c_1, c_2 не равны нулю одновременно.

При $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_3 \\ x_2 = -c_3 \\ x_3 = c_3 \end{cases}.$$

Следовательно, собственные векторы данного линейного оператора, относящиеся к $\lambda = 3$,– это векторы с координатами $(c_3, -c_3, c_3)$, где $c_3 \neq 0$.

Задача 8. Является ли линейный оператор **A**, заданный в некотором базисе матрицей A диагонализируемым?

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Если да, то найти диагональную матрицу этого оператора и указать базис, в котором она имеет такой вид.

Решение. 1) Из определения матрицы линейного оператора следует, что ее порядок равен размерности линейного пространства, т.е. двум. Тогда базис линейного пространства состоит из двух векторов.

В предыдущей задаче найдены собственные значения $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -3$ и собственные векторы этого оператора $X_1 = (4c_1, c_1)$, $X_2 = (-c_2, c_2)$, где $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. Так как собственные векторы, относящиеся к попарно различным собственным значениям, являются линейно независимыми, то в базисе, состоящем из собственных векторов, матрица *A* будет иметь диагональный вид:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Т.е., например, при перехода к новому базису из собственных векторов $X_1 = (4, 1)$, $X_2 = (-1, 1)$, полученных при $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, с матрицей перехода

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица оператора станет диагональной:

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

2) Из предыдущей задачи имеем, что собственные значения $\lambda_{1,2,3} = -1$ и отвечающий им собственный вектор $X = (-c, -c, c)$, где $c \neq 0$. Т.е. любой собственный вектор коллинеарен вектору с координатами (-1, -1, 1). Тогда система из любых трех собственных векторов линейного оператора обязательно содержит пропорциональные векторы, откуда следует, что она является линейно зависимой. Таким образом, так как линейное пространство имеет размерность три, в нем не существует базиса из собственных векторов данного линейного оператора. Получаем, что матрица оператора не может быть приведена к диагональному виду.

3) В предыдущей задаче найдены собственные значения $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 3$ и собственные векторы этого оператора – векторы с координатами (c_1, c_1, c_2), где c_1, c_2 не равны нулю одновременно и $(c_3, -c_3, c_3)$, где $c_3 \neq 0$. Тогда собственные векторы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют базис в линейном пространстве. При переходе к новому базису из собственных векторов с матрицей перехода

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица оператора имеет диагональный вид:

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 9. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными преобразования A, B, C.

$$\begin{aligned} &Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, -3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3), \\ &Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2), \\ &Cx = (x_3^4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3) \end{aligned}$$

Задача 10. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными преобразования A, B, C.

$$\begin{aligned} &Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2), \\ &Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 0, x_2^4 + 2x_3), \\ &Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2x_3) \end{aligned}$$

Задача 11. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $Ax = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $Bx = (x_2, 2x_3, x_1)$. Найти ABx.

Задача 12. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $Ax = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $Bx = (x_2, 2x_3, x_1)$. Найти $(A^2 - B)x$.

Задача 13. По известной матрице линейного оператора A_e в базисе e_1, e_2, найти A_u в базисе u_1, u_2.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 = (1,-2) & u_1 = (2,1) \\ e_2 = (1,3) & u_2 = (3,-3) \end{matrix}$$

Задача 14. По известной матрице линейного оператора A_f в базисе f_1, f_2, f_3, найти A_u в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} f_1(x) = 1 & g_1(x) = 1 + 2x \\ f_2(x) = x & g_2(x) = -1 + 2x + x^2 \\ f_3(x) = x^2 & g_3(x) = -1 + x + x^2 \end{matrix}$$

Задача 15. По известной матрице линейного оператора A_e в базисе e_1, e_2, e_3 и разложению базиса *e* по базису *u*, найти A_u в базисе u_1, u_2, u_3.

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} e_1 = u_1 + u_2 - u_3 \\ e_2 = u_1 + 2u_2 - u_3 \\ e_2 = 2u_2 + u_3 \end{matrix}$$

Задача 16. По известной матрице линейного оператора A_e в базисе e_1, e_2 и B_u в базисе u_1, u_2, найти $A + B$ и $A - 2B$ в базисе *u*.

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} e_1 = (-3;-2) & u_1 = (-4;-3) \\ e_2 = (2;1) & u_2 = (-1;-1) \end{matrix}$$

Задача 17. По известной матрице линейного оператора A_f в базисе f_1, f_2, f_3, найти A_u в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} f_1(x) = 1 & g_1(x) = -3 + x + 2x^2 \\ f_2(x) = x & g_2(x) = -2 + x + x^2 \\ f_3(x) = x^2 & g_3(x) = -2 + x^2 \end{matrix}$$

Задача 18. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей *A*:

а)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

в)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

г)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

д)

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

е)

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 19. Является ли линейный оператор **A**, заданный в некотором базисе матрицей A диагонализируемым?

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Если да, то найти диагональную матрицу этого оператора и указать базис, в котором она имеет такой вид.

Задача 20. В пространстве P_2 многочленов $p(x)$ степени ≤ 2 записать матрицу оператора **A** в базисе:

а) $1, x, x^2$; б) $1, 2+x, 1+x-3x^2$,

где

1) $\mathbf{A}(p(x)) = (x+1)p'(x)$,
2) $\mathbf{A}(p(x)) = xp'(x) - 2p(x)$,
3) $\mathbf{A}(p(x)) = (x^2+1)p''(x)$,
4) $\mathbf{A}(p(x)) = (x^2-x+1)p''(x) + p(x)$,
5) $\mathbf{A}(p(x)) = ((x^2+3x+1)p'(x))'$.

4. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

4.1. Справочный материал

1. *Квадратичной формой* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных называется сумма, каждый член которой является произведением двух переменных с некоторым коэффициентом:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j .$$

Предполагаем, что коэффициенты квадратичной формы a_{ij} – действительные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$.

Квадратичную форму $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно записать в виде:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X^T AX \quad ,$$

где X – матрица-столбец переменных, A – матрица квадратичной формы. A – симметрическая матрица.

2. *Преобразование квадратичной формы линейным оператором.*

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с матрицей A линейным оператором $X = BY$ переводится в квадратичную форму $\tilde{f}(y_1, y_2, ..., y_n)$ с матрицей

$$C = B^T AB.$$

Для всякой квадратичной формы существует такой базис, в котором она имеет *канонический вид*:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 .$$

Т.е., *любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.*

Ранг квадратичной формы равен числу отличных от нуля коэффициентов канонической формы и не меняется при линейных преобразованиях.

3. *Методы приведения квадратичной формы к каноническому виду*:

а) метод Лагранжа;

б) ортогональным преобразованием.

Метод Лагранжа выделения полных квадратов. Будем считать, что коэффициент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, но отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-нибудь другой переменной, то к рассматриваемому случаю можно прийти, изменив нумерацию переменных, что также является некоторым преобразованием).

Рассмотрим часть квадратичной формы, содержащую x_1, т.е.

$$g = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n .$$

Выделим полный квадрат и запишем сумму в виде:

$$g = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - g_1 ,$$

где g_1 – алгебраическая сумма членов, не зависящих от x_1. Если сделать замену

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$y_i = x_i, \quad i = 2, \ldots, n,$$

то квадратичная форма в новом базисе примет вид

$$f(x_1, x_2,...,x_n) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + f_1(y_2,...,y_n).$$

Далее рассуждения повторяются для квадратичной формы $f_1(y_2,...,y_n)$ и т.д.

Если все $a_{ii} = 0$, то сначала делаем вспомогательное преобразование переменных для того, чтобы получить квадрат какого-нибудь переменного с ненулевым коэффициентом.

В результате применения метода Лагранжа всегда получается невырожденное линейное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

Нахождение ортогонального преобразования.

1. Для данной квадратичной формы составляем симметричную матрицу A и находим корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$. Обозначим корни $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_n$. Все корни – действительные.

2. Напишем канонический вид данной квадратичной формы:

$$\tilde{f}(y_1, y_2...,y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2.$$

3. Для каждого корня λ_i $(i = 1,\ldots k)$ кратности m_i находим какую-нибудь одну ортонормированную систему из m_i собственных векторов $(m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n,$ $k -$число различных корней характеристического уравнения). Получим n попарно ортогональных нормированных векторов:

$$e_1' = (t_{11}, t_{21}, \ldots, t_{n1})$$

$$e_2' = (t_{12}, t_{22}, \ldots, t_{n2})$$

………………..

$$e_n' = (t_{1n}, t_{2n}, \ldots, t_{nn}).$$

(Порядок следования векторов $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ соответствует порядку λ_i в каноническом виде.)

4. Искомое ортогональное преобразование задается матрицей T, столбцами которой являются координаты векторов $e_1', e_2', \ldots, e_n'$:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdot & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdot & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdot & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Замена переменных запишется:

$$\begin{cases} x_1 = t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \ldots + t_{1n}y_n \\ x_2 = t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \ldots + t_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = t_{n1}y_1 + t_{n2}y_2 + \ldots + t_{nn}y_n \end{cases}$$

т .е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в связи с неоднозначностью отыскания ортонормированной системы собственных векторов ортогональное преобразование находится также неоднозначно.

Канонический вид квадратичной формы не является однозначно определенным. Однако полученные различными способами канонические формы обладают следующим свойством.

Закон инерции квадратичных форм. Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами канонического вида квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к этому виду.

4.Квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) > 0 \qquad (f(x_1, x_2, ..., x_n) < 0).$$

Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы называются *знакоопределенными.*

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *положительно определена* тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) все собственные значения λ_i матрицы этой формы *A* положительны;

2) все главные миноры матрицы этой формы *A* положительны, т.е. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, где

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(*критерий Сильвестра).*

Квадратичная форма $f(x_1, x_2,...,x_n)$ *отрицательно определена* тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) все собственные значения λ_i матрицы этой формы A отрицательны;

2) все главные миноры матрицы этой формы A нечетного порядка отрицательны, а четного – положительны, т.е. $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0, \dots$

(*критерий Сильвестра).*

Если квадратичная форма знакоопределенная, то все главные миноры матрицы A отличны от нуля.

4.2. Задачи с решениями

Задача 1. Дана квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = -x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

а) записать ее в матричном виде;

б) найти квадратичную форму $f(y_1, y_2, y_3)$, полученную из данной линейным преобразованием $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3$.

Решение. а) Запишем матрицу квадратичной формы. Диагональные элементы симметрической матрицы A квадратичной формы равны коэффициентам при квадратах переменных, а остальные элементы матрицы – половинам соответствующих коэффициентов квадратичной формы. Поэтому

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

б) Матрица B линейного преобразования $X = BY$ имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу C квадратичной формы $\tilde{f}(y_1, y_2, y_3)$ найдем по формуле

$$C = B^T AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $f(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 6y_1y_3 + 2y_2y_3$.

Задача 2. Методом Лагранжа привести к каноническому виду квадратичную форму:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$;

3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Решение. 1) Сгруппируем все члены, содержащие x_1, и дополним их до полного квадрата:

$$f = 2(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_2x_3 - 3x_2x_3 = 2y_1^2 + \frac{5}{2}x_2^2 + 2x_3^2 - x_2x_3.$$

Сгруппируем все члены, содержащие x_2, и дополним их до полного квадрата:

$$f = 2y_1^2 + \frac{5}{2}(x_2^2 - \frac{2}{5}x_2x_3) + 2x_3^2 = 2y_1^2 + \frac{5}{2}(x_2 - \frac{1}{5}x_3)^2 - \frac{1}{10}x_3^2 + 2x_3^2 = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 + \frac{19}{10}x_3^2 =$$

$$= 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 + \frac{19}{10}y_3^2.$$

Итак, невырожденное линейное преобразование

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad x_2 - \frac{1}{5}x_3 \\ y_3 = \quad x_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{9}{10}y_3 \\ x_2 = \quad y_2 + \frac{1}{5}y_3 \\ x_3 = \quad y_3 \end{cases}$$

приводит данную квадратичную форму к каноническому виду

$$f = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 + \frac{19}{10}y_3^2.$$

2)Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4.$$

Здесь коэффициент a_{11} при x_1^2 равен нулю, но $a_{44} = 2 \neq 0$. Сгруппируем все члены, содержащие x_4, и дополним их до полного квадрата:

$$f = 2(x_4^2 + x_2x_4) + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 = 2(x_4 + \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 =$$

$$= 2y_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3$$

Теперь выделим полный квадрат при переменной x_2:

$$f = 2y_1^2 - \frac{1}{2}(x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3) + x_1x_3 = 2y_1^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + 2x_3)^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3 + x_1x_3 =$$

$$= 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_3^2 - x_1x_3,$$

далее – при переменной x_1:

$$f = 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1x_3) + 2x_3^2 = 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + 2x_3^2 =$$

$$= 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2 + \frac{3}{2}x_3^2 = 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2 + \frac{3}{2}y_4^2.$$

Линейное преобразование имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = x_4 + \frac{1}{2}x_2 \\ y_2 = x_2 - x_1 + 2x_3 \\ y_3 = x_1 - x_3 \\ y_4 = x_3 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

3)Для квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3$ имеем, что все $a_{ii} = 0$. Сначала сделаем вспомогательное преобразование, например

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = \qquad y_3 \end{cases}.$$

Получим:

$$f = y_1(y_1 + y_2) + y_1y_3 - 2(y_1 + y_2)y_3 = y_1^2 + y_1y_2 - y_1y_3 - 2y_2y_3.$$

Далее поступаем так же, как в предыдущих случаях.

Задача 3. Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

1) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$,

2) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Решение. 1) Составим симметрическую матрицу данной квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственных значений запишем характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0\,.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = -1,\ \ \lambda_3 = 5$. Это позволяет сразу написать канонический вид квадратичной формы:

$$\tilde{f}(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2\,.$$

Построим теперь матрицу ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к этому каноническому виду. С этой целью найдем собственные векторы, соответствующие найденным характеристическим числам. Для определения координат собственных векторов получаем три системы линейных уравнений.

При $\lambda = 2$:

$$(A-2E)X = \begin{pmatrix} 3-2 & 2 & 0 \\ 2 & 2-2 & 2 \\ 0 & 2 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = O\,,$$

следовательно,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен $r = 2.$ Следовательно, фундаментальная система решений данной системы уравнений состоит из одного решения, например,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = -1$:

$$(A+E)X = \begin{pmatrix} 3+1 & 2 & 0 \\ 2 & 2+1 & 2 \\ 0 & 2 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = O\,,$$

следовательно,

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен $r = 2$ и фундаментальная система решений состоит из одного решения, т.е. собственный вектор

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = 5$:

$$(A-5E)X = \begin{pmatrix} 3-5 & 2 & 0 \\ 2 & 2-5 & 2 \\ 0 & 2 & 1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = O,$$

т.е.

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен $r = 2$ и фундаментальная система решений данной системы уравнений есть, например, собственный вектор

$$X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система собственных векторов X_1, X_2, X_3 образует ортогональную систему векторов. Построим ортонормированную систему собственных векторов e_1, e_2, e_3 :

$$e_1 = \frac{X_1}{|X_1|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{X_2}{|X_2|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{X_3}{|X_3|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Матрица ортогонального преобразования имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Формулы преобразования переменных таковы:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}y_1 + \dfrac{1}{3}y_2 + \dfrac{2}{3}y_3, \\ x_2 = -\dfrac{1}{3}y_1 - \dfrac{2}{3}y_2 + \dfrac{2}{3}y_3, \\ x_3 = -\dfrac{2}{3}y_1 + \dfrac{2}{3}y_2 + \dfrac{1}{3}y_3. \end{cases}$$

2) Составим симметрическую матрицу квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственных значений запишем характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Зная собственные значения, можем написать канонический вид квадратичной формы:

$$\tilde{f}(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2.$$

Построим теперь матрицу ортогонального преобразования. Найдем собственные векторы.

Для собственного значения $\lambda_1 = -2$ собственный вектор X находим из матричного уравнения $(A - \lambda_1 E)X = O$. Т.е. координаты первого собственного вектора являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен $r = 2$. Следовательно, фундаментальная система решений данной системы состоит из одного решения, например,

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для собственного значения $\lambda = 4$ находим два собственных вектора, координаты которых удовлетворяют уравнениям системы

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - \quad x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - \quad x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен $r = 1$. Система равносильна уравнению

$$2x_1 - x_2 - \quad x_3 = 0.$$

Поэтому фундаментальная система решений данной системы состоит из двух решений

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что собственные векторы X_2 и X_3 ортогональны собственному вектору X_1, но не ортогональны между собой. Применим к ним процедуру ортогонализации. Пусть $\hat{X}_2 = X_2$, $\hat{X}_3 = X_3 - a\hat{X}_2$. Из условия ортогональности $\hat{X}_3 \perp \hat{X}_2$ получим: $0{,}5(0{,}5 - 0{,}5a) + (0 - a) = 0$. Следовательно, $a = \frac{1}{5}$.

Нормируя ортогональную систему собственных векторов $X_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3$, получим векторы

$$e_1 = \frac{X_1}{|X_1|} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \frac{\hat{X}_2}{|\hat{X}_2|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \frac{\hat{X}_3}{|\hat{X}_3|} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{15}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix}.$$

Столбцы координат векторов e_1, e_2, e_3 составляют матрицу искомого ортогонального преобразования, т.е. преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду $\tilde{f}(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$ может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму:

1. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

2. .

3. .

4. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$.

Решение. 1. Матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем главные миноры матрицы.

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

По критерию Сильвестра данная квадратичная форма положительно определенная.

2. Матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -2 & 1 \\ -0{,}5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем главные миноры матрицы.

$$\Delta_1 = -1 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -2 & 1 \\ -0{,}5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2{,}5 < 0.$$

По критерию Сильвестра данная квадратичная форма отрицательно определенная.

3. Матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем главные миноры матрицы.

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Данная квадратичная форма не является знакоопределенной.

4.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 5. Привести квадратичную форму *f(x,y,z)* к каноническому виду методом Лагранжа.

1) $f(x,y,z) = x^2 + 4xy + 4xz + 4yz + 4z^2$
2) $f(x,y,z) = 4x^2 + 4xy + 8xz - 3y^2 + 4z^2$
3) $f(x,y,z) = 4x^2 + 8xy + 4xz + 3y^2 - 2z^2$
4) $f(x,y,z) = x^2 + 4xy + 4xz + 3y^2 + 4yz + z^2$
5) $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz - 3y^2 - 6yz - 2z^2$

Задача 6. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.
Записать формулы преобразования координат.

1) $f(x,y) = 6x^2 + 2\sqrt{2}xy + 7y^2$
2) $f(x,y) = 9x^2 - 4xy + 6y^2$
3) $f(x,y) = 3x^2 + 2\sqrt{5}xy + 7y^2$
4) $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz + y^2$
5) $f(x,y,z) = x^2 - 4xy + 2xz - 2y^2 + 3z^2$
6) $f(x,y,z) = -3x^2 + 2xy + 7y^2 - 3z^2$
7) $f(x,y,z) = 3y^2 - 2xy + 4xz - 5y^2 - 2z^2$

Задача 7. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - 2x_2x_3$
2) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3$

4) $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_2x_3$

5) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$

6) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

Литература:

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – СПб: Издательство «Лань», 2008, 256с.
2. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов: Практикум.– М.: Юнити-Дана, 2007, 479с.
3. Ефимов А.В., Поспелов А.С. и др. Сборник задач по математике. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 – М.: Оникс, 2006.

Сведения об авторах

1. Акопян Рипсиме Сергоевна, к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики ИКБСП;
2. Ветренко Екатерина Александровна, к. т.н., доцент кафедры высшей математики ИКБСП.