КОНСУЛЬТАЦИЯ по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

Часть II.

Экзамен по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия, часть II» включает задачи по следующим темам:

1. **Фундаментальная система решений.**
2. **Линейные векторные пространства. Базис и размерность линейного пространства.**
3. **Матрица перехода от одного базиса к другому.**
4. **Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Преобразование линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора.**
5. **Операции над линейными операторами.**
6. **Собственные значения, собственные и присоединенные векторы квадратной матрицы.**
7. **Квадратичные формы.**
8. **Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью метода собственных векторов.**
9. **Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа.**

Эти темы нужно повторить, прежде чем приступить к решению задач.

Перейдем к разбору примеров задач, входящих в экзаменационный билет.

<u>Пример 1</u> (Фундаментальная система решений).

Установить размерность пространства L решений однородной системы уравнений. Указать базис этого пространства.

$$\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0, \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0. \end{cases}$$

Решение:

1. Определим ранг матрицы A.

Имеем:

$$\left(A\middle|\overline{B}\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 10 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 8 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -12 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right)\cdot(-5)\cdot(-3) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & 1 & 10 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -42 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & -42 & -7 & 7 & 0 \end{array}\right)\cdot(-1) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & 1 & 10 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \underline{-6} & -42 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) \to \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline \end{array}\left(\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & 1 & 10 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 7 & 7/6 & -7/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$r=rang(A|B)=rangA=2.$$

$d-$ размерность пространства решений.

$$d=n-r=5-2=3.$$

Базисные переменные: x_1, x_2.

Свободные переменные: $x_3=c_1, x_4=c_2, x_5=c_3$.

Получаем систему: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10c_1 + c_2 - c_3 = 0, \\ x_2 + 7c_1 + 7/6\,c_2 - 7/6\,c_3 = 0, \\ x_3 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3. \end{cases}$ $\overline{X} = \begin{pmatrix} -x_2 - 10c_1 - c_2 + c_3 \\ -7c_1 - 7/6\,c_2 + 7/6\,c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$

Находим $\overline{e_1}$: $c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0;$ $\overline{e_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

Находим $\overline{e_2}$: $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0;$ $\overline{e_2} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -7/6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

Находим $\overline{e_3}$: $c_1 = c_2 = 0, c_3 = 1;$ $\overline{e_3} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 7/6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$\overline{X} = c_1\overline{e_1} + c_2\overline{e_2} + c_3\overline{e_3} = c_1\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1/6 \\ -7/6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1/6 \\ 7/6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $d = 3 -$ размерность пространства L'; базис: $\overline{e_1} = (-3, -7, 1, 0, 0)$, $\overline{e_2} = (1/6, -7/6, 0, 1, 0)$, $\overline{e_3} = (-1/6, 7/6, 0, 0, 1)$.

Пример 2 (Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора).

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными преобразования A, B, C. Если преобразования оказались линейными, найти матрицу, размерности ядра и образа преобразования.

$$Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$$

$$Bx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 1, 2x_1 - 3x_2 - 4),$$

$$Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3).$$

Решение:

Линейным является только преобразование Ax.

Матрица этого преобразования: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

$\dim Im\ Ax = rang\ A -$ размерность образа преобразования.

$\dim ker\ Ax = n - r -$ размерность ядра преобразования.

Найдем $r = rang\ A$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot (-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot (-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \underline{1} & 5 & 5 \\ 0 & \underline{-13} & -14 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix}$$

Привели матрицу к ступенчатому виду. Из которого видно, что $rang\ A = 3$. $n = 3$.

Следовательно, $\dim Im\ = r = 3$, $\dim ker\ Ax = n - r = 3 - 3 = 0$.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} -$ матрица линейного преобразования.

$\dim Im\ = 3 -$ размерность образа преобразования. $\dim ker\ = 0 -$ размерность ядра преобразования.

<u>Пример 3</u> (Операции над линейными операторами).

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $Ax = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $Bx = (x_2, 2x_3, x_1)$.

Найти $(B^2 - A)x$.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(B^2 - A)x = (-x_2 + 3x_3, x_1, -x_1 + x_2 - x_3)$.

<u>Пример 4.1</u> (Линейные векторные пространства. Базис и размерность линейного пространства).

Показать, что многочлены e_1, e_2, e_3 образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе (т.е. найти x_e). По известному вектору y_e найти вектор y.

$e_1 = (-2,3,0), e_2 = (2,-3,4), e_3 = (-2,0,-3), x = (-4,3,-7), y_e = (4,4,3)$.

Решение:

1. Проверим, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис.

$$c = (e_1, e_2, e_3),\ |c| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$$

Вывод: Векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис.

2. С помощью уравнения $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ найдем координаты вектора x в заданном базисе, т.е. найдем $x_e = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Имеем: $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Получаем систему: $\begin{cases} -2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = -4, \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 3, \\ 4\lambda_2 - 3\lambda_3 = -7. \end{cases}$

Решаем полученную систему методом Гаусса.

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -7 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \underline{4} & -3 & -7 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 \end{array}\right)$. Получаем: $\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 2, \\ 4\lambda_2 - 3\lambda_3 = -7, \\ \lambda_3 = 1. \end{cases}$ Следовательно, $\begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 1. \end{cases}$

$x_e = (0, -1, 1)$.

3. Из уравнения $y = 4e_1 + 4e_2 + 3e_3$ находим вектор y.

Имеем: $y = 4\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, т.е. $y = (-6, 0, 7)$.

Ответ: Векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис. $x_e = (0, -1, 1)$, $y = (-6, 0, 7)$.

Пример 4.2 (Линейные векторные пространства. Базис и размерность линейного пространства).

Показать, что многочлены f_1, f_2, f_3 образуют базис и найти координаты многочлена h в этом базисе. По известному вектору g_f найти многочлен g.

$f_1(x) = -3 + 2x^2, f_2(x) = 2 + x + 2x^2, f_3(x) = 4 + 4x - 2x^2,$

$h(x) = 5 + x, g_f = (-1, 2, -1).$

Решение:

1. Перейдем от многочленов к векторам:

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, f_2(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_3(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, h(x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что векторы f_1, f_2, f_3 образуют базис:

$$|F| = |f_1, f_2, f_3| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-10) + 16 - 8 = 38, |F| \neq 0.$$

Следовательно, векторы f_1, f_2, f_3 образуют базис.

2. Найдем координаты многочлена h в этом базисе.

$$h = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3, \text{ т.е. } \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} -3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 5, \\ \alpha_2 + 4\alpha_3 = 1, \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1, \\ \alpha_2 = 1, \\ \alpha_3 = 0. \end{cases} \quad \text{В результате } \overline{h}_f = (-1,1,0)$$

3. Вычислим коэффициенты многочлена g, если $g_f = (-1,2,-1)$.

Имеем: $g = -1 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 - 1 \cdot f_3 = -1\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Следовательно, $g(x) = 3 - 2x + 4x^2$.

Ответ: Многочлены f_1, f_2, f_3 образуют базис; $\overline{h}_f = (-1,1,0)$, $g(x) = 3 - 2x + 4x^2$.

<u>Пример 4.3</u> (Линейные векторные пространства. Базис и размерность линейного пространства).

По известным векторам a, b, c и их значениям a_e, b_e, c_e в базисе e_1, e_2, e_3, найти векторы этого базиса.

$a_e = (3,0,2), b_e = (2,1,2), c_e = (1,2,1), a = (-3,-1,2), b = (0,-1,1), c = (3,-2,2)$.

Решение:

Пусть $e_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

Тогда разложение вектора $a = (-3,-1,2)$ по базису e_1, e_2, e_3 имеет вид:

$3\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, т.е. $3e_1 + 2e_3 = a$ или $a = 3e_1 + 0e_2 + 2e_3$.

Аналогично получаем: $b = 2e_1 + e_2 + 2e_3$, $c = e_1 - 2e_2 + e_3$.

В результате имеем следующую систему: $\begin{cases} 3e_1 + 0e_2 + 2e_3 = a, (1) \\ 2e_1 + e_2 + 2e_3 = b, (2) \\ 3e_1 - 2e_2 + 2e_3 = c\ (3) \end{cases}$

Из этой системы имеем: $e_3 = 2 \cdot (2) - (1) - (3) = 2b - a - c$.

Подставив координаты векторов a, b, c получаем: $e_3 = 2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Зная, что $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ из первого уравнения находим $e_1 = \frac{1}{3}(a - 2e_3)$.

Получаем $e_1 = \frac{1}{3}(a - 2e_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -1-2 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Зная e_1 и e_3 найдем второго уравнения e_2.

$$e_2 = b - 2(e_1 + e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $e_1 = (-1, -1, 2); e_2 = (2, -1, 1); e_3 = (0, 1, -2)$.

__**Пример 4.4**__ (Линейные векторные пространства. Матрица перехода от одного базиса к другому).

Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 и u_1, u_2, u_3 образуют базисы, и найти матрицу перехода $T_{e\to u}$. По известным векторам в одном базисе найти их значения в другом.

$e_1 = (1, -1, 1), e_2 = (0, -1, 1), e_3 = (1, 2, -1), u_1 = (2, -2, 3), u_2 = (3, 3, -1), u_3 = (0, 3, -1)$,

$x_e = (4, -3, 2), y_u = (-1, 1, 1)$.

Решение:

1. Покажем, что векторы e_1, e_2, e_3 и u_1, u_2, u_3 образуют базисы.

1.1 $c = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|c| = -1$, т.е. $|c| \neq 0$. Следовательно, векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис.

1.2 $u = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $|u| = 21$, т.е. $|u| \neq 0$. Следовательно, векторы u_1, u_2, u_3 также образуют базис.

2. Находим матрицу перехода $T_{e\to u}$.

Так как $U = T_{e\to u} \cdot C$, то $T_{e\to u} = C^{-1} \cdot U$.

2.1 Находим C^{-1}.

Имеем $(C|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot (1) \cdot (-1) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot (1) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot (-1) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot (-1) \cdot (3) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = (E|C^{-1})$. Следовательно, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2 Находим $T_{e\to u} = C^{-1} \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Получаем $T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Учитывая, что $x_u = T_{e\to u}^{-1} \cdot x_e$, найдем сначала $T_{e\to u}^{-1}$, а затем x_u.

3.1 $(T_{e\to u}|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot (-3) \cdot (-1) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 9 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot (3)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1} & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{21} & -6 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot 1/21 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{21} & \frac{1}{21} & \frac{3}{21} \end{array}\right) \cdot (6) \cdot (-4) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{21} & \frac{6}{21} & -\frac{3}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{21} & -\frac{4}{21} & \frac{9}{21} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{21} & \frac{1}{21} & \frac{3}{21} \end{array}\right) = (E|T_{e\to u}^{-1})$

$T_{e\to u}^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 18 \\ 3 & -4 & 9 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Проверка: $T_{e\to u} \cdot T_{e\to u}^{-1} = E$.

3.2 $x_u = T_{e\to u}^{-1} \cdot x_e = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 6 & 6 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 42 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Получили $x_u = (0,2,-1)$.

4. Так как $y_e = T_{e\to u} \cdot y_u$, то имеем:

$y_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. В результате $y_e = (-2,0,3)$.

Ответ: Векторы e_1, e_2, e_3 и u_1, u_2, u_3 образуют базисы; $T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $x_u = (0,2,-1)$, $y_e = (-2,0,3)$.

<u>Пример 5.1</u> (Линейные операторы и их матрицы. Преобразование линейного оператора).

По известной матрице линейного оператора A_e в базисе e_1, e_2 найти матрицу A_u в базисе u_1, u_2.

$A_e = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; $e_1 = (-2,3), e_2 = (0,3); u_1 = (1,-3), u_2 = (-2,1)$.

Решение:

$T_{e\to u} \cdot A_u = A_e \cdot T_{e\to u}$. Следовательно, $A_u = T_{c\to u}^{-1} \cdot A_e \cdot T_{e\to u}$.

1. Найдем $T_{e\to u} = C^{-1} \cdot U$.

1.1 $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2 $C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$.

1.3 $T_{e\to u} = C^{-1} \cdot U = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/2 & -2/3 \end{pmatrix}$.

2. Найдем $T_{c\to u}^{-1}$.

2.1 $|T_{e\to u}| = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$;

2.2 $T^{-1}_{c\to u} = \frac{1}{|T_{e\to u}|} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{6}{5}\begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычисляем $A_u = T^{-1}_{c\to u} \cdot A_e \cdot T_{e\to u}$.

Имеем $A_u = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/2 & -2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -12 & 10 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/2 & -2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{56}{3} \\ -12 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{56}{15} \\ -\frac{12}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Ответ: $A_u = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{56}{15} \\ -\frac{12}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Пример 5.2 (Линейные операторы и их матрицы. Преобразование линейного оператора).

По известной матрице линейного оператора A_f в базисе f_1, f_2, f_3 найти матрицу A_g в базисе g_1, g_2, g_3.

$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, g_1(x) = 1 + 2x, g_2(x) = -1 + 2x + x^2, g_3(x) = -1 + x + x^2$.

Решение:

$A_g = T^{-1}_{f\to g} \cdot A_f \cdot T_{f\to g}$.

1. Найдем $T_{f\to g} = F^{-1} \cdot G$.

1.1 $F = (f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

Следовательно $F^{-1} = E$.

$$G = (g_1, g_2, g_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 $T_{f\to g} = F^{-1} \cdot G = E \cdot G = G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

2. Найдем $T_{f\to g}^{-1}$: $\left(T_{f\to g}\middle|E\right) \sim \ldots \sim \left(E\middle|T_{f\to g}^{-1}\right)$.

Имеем $\left(T_{f\to g}\middle|E\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix}\cdot(-2) \\ \\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \cdot(-4) \\ \end{matrix}$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \cdot(1) \\ \cdot(-1)\end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1)\end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) = \left(E\middle|T_{f\to g}^{-1}\right)$

Получаем $T_{f\to g}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

3. Вычислим $A_g = T_{f\to g}^{-1} \cdot A_f \cdot T_{f\to g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A_g = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

Пример 5.3 (Линейные операторы и их матрицы. Преобразование линейного оператора).

По известной матрице линейного оператора A_e в базисе e_1, e_2, e_3 и разложения этого базиса по базису u_1, u_2, u_3 найти матрицу A_u в базисе u.

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{cases} e_1 = u_1 + 2u_2 - 2u_3, \\ e_2 = u_2 - u_3, \\ e_3 = 2u_1 + 2u_2 - u_3 \end{cases}$$

Решение:

1. Из разложения базиса e_1, e_2, e_3 по базису u_1, u_2, u_3 можно выписать матрицу перехода $T_{u\to e}$.

Имеем $T_{u\to e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

A_u можно найти по формуле (2):

$$A_u = T_{e\to u}^{-1} \cdot A_e \cdot T_{e\to u}. \qquad (2)$$

Следовательно, нужно найти матрицу перехода $T_{e\to u}$ из формулы (3):

$$T_{e\to u} = T_{u\to e}^{-1}. \qquad (3)$$

2. Находим $T_{u\to e}^{-1}$, зная что $(T_{u\to e}|E) \sim \ldots \sim (E|T_{u\to e}^{-1})$.

Имеем

$$(T_{u\to e}|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot(-2)\cdot(2) \\ \\ \\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \cdot 1 \\ \\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \cdot(-2)\cdot(2) \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Следовательно, $T_{e\to u}=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}$. $T_{e\to u}^{-1}=T_{u\to e}$.

3. Находим $A_u=T_{e\to u}^{-1}\cdot A_e\cdot T_{e\to u}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&2\\-2&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&1&2\\-2&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}5&1&4\\5&3&0\\-2&-2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&3&-1\\-1&-1&-4\\2&-6&-4\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A_u=\begin{pmatrix}-3&3&-1\\-1&-1&-4\\2&-6&-4\end{pmatrix}$.

<u>Пример 5.4</u> (Линейные операторы и их матрицы. Операции над линейными операторами).

По известной матрице линейного оператора A_e в базисе $\overline{e}_1,\overline{e}_2$ и B_u в базисе u_1,u_2, найти $A+B$ и $A-2B$ в базисе u.

$A_e=\begin{pmatrix}2&3\\3&-1\end{pmatrix}$; $B_u=\begin{pmatrix}-2&0\\-1&2\end{pmatrix}$;

$\overline{e}_1=(-1,2),\overline{e}_2=(-1,1); u_1=(2,-3), u_2=(-3,5)$.

Решение:

$A+B=A_u+B_u$, $A-2B=A_u-2B_u$.

B_u- известна, следовательно, надо найти A_u.

1. $c=(\overline{e}_1,\overline{e}_2)=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}$; $c^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$, $|c|=-1+2=1$.

   $u=(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}$.

2. $A_u = T_{c\to u}^{-1} \cdot A_e \cdot T_{e\to u}$.

Надо найти $T_{e\to u} = C^{-1} \cdot U$, а затем $T_{e\to u}^{-1}$.

Имеем

$$T_{e\to u} = C^{-1} \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad |T|_{e\to u} = -1 + 2 = 1.$$

$$T_{e\to u}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A_u = T_{e\to u}^{-1} \cdot A_e \cdot T_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}};$$

$$A_u + B_u = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}};$$

$$A_u - 2B_u = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Ответ: $A + B = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

<u>Пример 6</u> (Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы).

Линейный оператор f в базисе e_1, e_2, e_3 задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Вектор x является собственным вектором оператора f. Найти к какому собственному значению он относится, если $x = 3e_1 - 5e_2 + e_3$.

Решение:

1. Найдем собственные значения уравнения. Имеем:

$$\det(A-\alpha E)=\begin{vmatrix}1-\alpha & 1 & 8\\ 0 & 2-\alpha & 0\\ 1 & 0 & -1-\alpha\end{vmatrix}=(1-\alpha)(2-\alpha)(-1-\alpha)-8(2-\alpha)=$$

$$=(2-\alpha)(-(1-\alpha)(1+\alpha)-8)=(2-\alpha)(\alpha^2-9)=(2-\alpha)(\alpha-3)(\alpha+3)=0.$$

Следовательно, $\lambda_1=-3, \lambda_2=2, \lambda_3=3$.

2. Находим к какому из найденных собственных значений относится вектор $x=3e_1-5e_2+e_3$, исходя из определения $Ax=\lambda x$, где x – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ.

Имеем: $A\cdot x=\begin{pmatrix}1 & 1 & 8\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ -10\\ 2\end{pmatrix}$, $\quad\lambda_1\cdot x=-3\cdot\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\ 15\\ -3\end{pmatrix}$,

$\lambda_2\cdot x=2\cdot\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ -10\\ 2\end{pmatrix}$, $\qquad\lambda_3\cdot x=3\cdot\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ -15\\ 3\end{pmatrix}$. Получаем $Ax=\lambda_2 x$.

Ответ: Вектор x относится к собственному значению $\lambda_2=2$.

Пример 7 (Собственные значения, собственные и присоединенные векторы квадратной матрицы).

Найти собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}$.

Найти собственные векторы для минимального собственного числа.

Решение:

1. Найдем собственные значения уравнения. Имеем:

$$\det(A-\alpha E)=\begin{vmatrix}4-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 4-\lambda & 0\\ -1 & 1 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)^2(5-\lambda)-(5-\lambda)=$$

$= (5-\lambda)\cdot((4-\lambda)^2-1) = (5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-3) = 0.$

Следовательно, $\lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = 5$.

Минимальное собственное значение: $\lambda_1 = 3$.

2. Найдем собственный вектор, соответствующий $\alpha_1 = 3$.

Имеем $(A-\alpha_1 E)\cdot x = 0$. Получаем $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Решаем методом Гаусса. Получаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\cdot(-1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\cdot(1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\cdot\frac{1}{2} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\cdot(-1) \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Базисные переменные: x_1, x_2. Свободная переменная $x_3 = c$.

Имеем: $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = -c \\ x_3 = c \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Полагая $c = 1$, имеем $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: собственные значения $\lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = 5$; минимальному собственному значению $\lambda_1 = 3$ соответствует собственный вектор: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Пример 8</u> (Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью метода собственных векторов). Привести квадратичную форму $f(x, y) = 4x^2 + 4xy + y$ к каноническому (диагональному) виду $g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2$,

где $\lambda_1 < \lambda_2$, ортогональным преобразованием $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$. Записать матрицу C преобразования переменных.

Решение:

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы.
2. Найдем собственные значения матрицы A.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) = 0.$$

3. Собственные значения: $\begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$

Следовательно, канонический вид будет следующим: $g(\tilde{x}, \tilde{y}) = 5\tilde{x}^2$.

Убедимся в этом.

4. Проверим, что векторы e_1 и e_2 ортогональны, вычислив соответствующее скалярное произведение.

Имеем $e_1 \cdot e_2 = (1, -2) \cdot (2,1) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0.$

Вывод: Векторы e_1 и e_2 ортогональны.

5. Ортонормируем полученные собственные векторы.

Длины векторов: $|e_1| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$, $|e_2| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Соответствующие ортонормированные векторы:

$$e_1^0=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\ e_2^0=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}.$$

Они ортогональны. Действительно $e_1^0\cdot e_2^0=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=0.$

6. Запишем матрицу преобразований переменных C:

$$C=(e_1^0,e_2^0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y}\end{pmatrix}.$$

Вывод: Для перехода к каноническому виду в исходной квадратичной форме надо сделать замену:

$$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y},\\ y=-\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y}\end{cases}.$$

7. Находим канонический вид квадратичной формы методом собственных векторов.

Имеем: $g(\tilde{x},\tilde{y})=4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right)^2+4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right)+\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right)^2=$

$=\frac{1}{5}(4\tilde{x}^2+16\tilde{x}\tilde{y}+16\tilde{y}-8\tilde{x}^2-16\tilde{x}\tilde{y}+4\tilde{x}\tilde{y}+8\tilde{y}^2+4\tilde{x}^2-4\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{y}^2)=5\tilde{y}^2.$

Пусть $x=\tilde{y}$. Тогда $g(\tilde{y},\tilde{x})=5\tilde{y}^2$.

Ответ: $g(\tilde{y},\tilde{x})=5\tilde{y}^2$. Матрица преобразований: $C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

<u>Пример 9</u> (Приведение квадратичной формы к нормальному виду методом Лагранжа).

Привести квадратичную форму $f(x,y,z)$ к нормальному виду $g(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ используя метод Лагранжа.
$f(x,y,z) = 4x^2 + 8xy + 4xz + 3y^2 - 2z^2$.

Решение:

1. Запишем матрицу квадратичной формы и определим ее ранг.

Имеем: $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $|A| = 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot(-6) - 4\cdot(-8) + 2\cdot(-6) = -4.$

$|A| = -4$, т.е. $|A| \neq 0$. Следовательно, $rang\ A = 3$. Такой же ранг имеет соответствующая этой матрице квадратичная форма.

2-3. Выделим полные квадраты в $f(x,y,z)$. Имеем:

$f(x,y,z) = (4x^2 + 8xy + 4xz) + 3y^2 - 2z^2 = ((2x^2)^2 + 2\cdot 2x\cdot(2y+z) + (2y+z)^2) - (2y+z)^2 + 3y^2 - 2z^2 =$
$= (2x+2y+z)^2 - y^2 - 4yz - 3z^2 = ((2x+2y+z)^2 - y^2 + 2y\cdot 2z + (2z^2)^2) + 4z^2 - 3z^2 =$
$= (2x+2y+z)^2 - (y+2z)^2 + z^2.$

4. Выпишем формулы перехода от старых переменных к новым и соответствующую матрицу B.

Имеем: $\begin{cases} \tilde{x} = 2x + 2y + z, \\ \tilde{y} = y + 2z, \\ \tilde{z} = z \end{cases}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $|B| = 2$, $|B| \neq 0 \Rightarrow rang\ B = 3.$ $\quad \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

5. Используя новые переменные получим канонический вид исходной квадратичной формы.

Имеем $g(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + z^2$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $rang\ A = 3.$

Так как модули всех чисел, стоящих на главной диагонали матрицы $\tilde{A}$ равны 1, то эта матрица описывает нормальный вид исходной квадратичной формы.

Ответ: Нормальный вид $g(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + z^2$.