Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
Физико-технологический институт

Р. М. МИНЬКОВА

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Р. М. Минькова

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

*Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве **учебно-методического пособия** для студентов,
обучающихся по направлениям подготовки:*
140800.62 – Ядерные физика и технологии;
141401.65 – Ядерные реакторы и материалы;
141405.65 – Технологии разделения изотопов и ядерное топливо;
140801.65 – Электроника и автоматика физических установок;
010900.62 – Прикладная математика и физика;
210100.62 – Электроника и наноэлектроника;
201000.62 – Биотехнические системы и технологии;
200100.62 – Приборостроение;
221700.62 – Стандартизация и метрология;
230100.62 – Информатика и вычислительная техника;
230400.62 – Информационные системы и технологии

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
М62

Рецензенты:
кафедра прикладной математики (протокол № 2 от 22. 10. 13 г.), (канд. физ.-мат. наук, доц. Ю. Б. Мельников, зав. каф. прикладной математики Уральского государственного экономического университета);
канд. физ.-мат. наук М. Ф. Прохорова, старший научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН

Научный редактор − канд. физ.-мат. наук, доц. Н. В. Чуксина

Минькова, Р. М.
М62 Функции комплексного переменного в примерах и задачах : учебно-методическое пособие / Р. М. Минькова. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 56 с.

ISBN 978-5-7996-1216-0

В данной работе разбирается решение типовых примеров и задач по следующим темам курса «Функции комплексного переменного»: функции комплексного переменного, их дифференцирование, интегрирование, разложение в ряды Тейлора и Лорана, вычеты и их применения, операционное исчисление.
Издание предназначено для студентов физико-технологического института.

Библиогр.: 10 назв. Рис. 25.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-7996-1216-0

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Кратко напомним понятие комплексных чисел и действия с ними.

1.1. Определение, изображение, формы записи комплексного числа

Комплексным числом z называют выражение вида $z = x + iy$, где x, y – действительные числа, i – так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$.

Комплексное число $z = x + iy$ изображают точкой M плоскости с координатами x, y или ее радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис. 1). Длину вектора $\overrightarrow{OM}$ называют модулем комплексного числа z и обозначают $|z|$ или r:

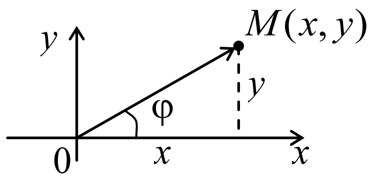

Рис. 1

$$|z| = r = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол φ между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением оси *ox* называют аргументом комплексного числа z. Угол φ определяется неоднозначно, с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$; то значение φ, которое заключено между $-\pi$ и π, обозначают $\arg z$ и называют главным значением аргумента.

Наряду с **алгебраической формой** $z = x + iy$ комплексного числа рассмотрим еще две формы записи.

Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (рис.1), то комплексное число $z = x + iy$ можно записать ***в тригонометрической форме:*** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Введя функцию $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, комплексное число можно записать в **показательной форме**: $z = r \cdot e^{i\varphi}$. Итак, имеем три формы записи комплексного числа

$$\boxed{z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r \cdot e^{i\varphi}.}$$

Пример 1.1. Записать комплексные числа $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Найдем модули и аргументы этих чисел:

$$\left|1 + i\sqrt{3}\right| = 2, \ \arg\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \operatorname{argtg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3};$$

$$|1 - i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1 - i) = -\operatorname{argtg}1 = \frac{-\pi}{4}.$$

Тогда

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{\frac{-\pi}{4}i}.$$

1.2. Действия с комплексными числами

При сложении (вычитании) двух комплексных чисел складываются (соответственно вычитаются) их действительные и мнимые части.

Умножение двух комплексных чисел в алгебраической форме определяется по правилам умножения двучленов с учетом равенства $i^2 = -1$.

При умножении двух комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах их модули умножаются, а аргументы складываются:

$$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.}$$

При делении двух комплексных чисел в алгебраической форме нужно числитель и знаменатель дроби умножить на число, сопряженное знаменателю.

При делении двух комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\boxed{|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \arg z = \arg z_1 - \arg z_2\ .}$$

Возведение в степень комплексного числа в алгебраической форме осуществляется по правилам возведения в степень двучлена с учетом того, что $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $\quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$ и т. д.

При возведении комплексного числа z в большую степень удобно использовать его тригонометрическую или показательную формы:

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}\ .}$$

При извлечении корня из комплексного числа z удобно использовать тригонометрическую форму записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.\end{gathered}}$$

Таким образом, **корень степени n из комплексного числа z имеет n различных значений.**

Пример 1.2. Вычислить: 1) z^{40}, если $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$, 2) $w=\sqrt{1+i\sqrt{3}}$,

3) $z=\sqrt{7-24i}$.

Решение. 1. Воспользуемся примером 1.1 и учтем, что

$$|z|=\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|=\frac{\left|1+i\sqrt{3}\right|}{|1-i|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

$$\arg z=\arg\frac{1+3i}{1-i}=\arg(1+3i)-\arg(1-i)=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7\pi}{12}.$$

Тогда $\left|z^{40}\right|=\left(\sqrt{2}\right)^{40}=2^{20}, \quad \arg z^{40}=40\arg z=\dfrac{7\pi}{12}\cdot 40=\dfrac{70}{3}\pi,$

$$z^{40}=2^{20}\left(\cos\frac{70\pi}{3}+i\sin\frac{70\pi}{3}\right)=2^{20}\left(\cos\left(24\pi-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(24\pi-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=2^{20}\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2^{20}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2^{19}\left(1+i\sqrt{3}\right).$$

2. Из примера 1.1 следует, что $1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Тогда $w=\sqrt{1+i\sqrt{3}}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi/3+2\pi k}{2}+i\sin\dfrac{\pi/3+2\pi k}{2}\right)$.

При $k=0$ и при $k=1$ получим два значения корня:

$$w_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi/3}{2}+i\sin\frac{\pi/3}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right),$$

$$w_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi/3+2\pi}{2}+i\sin\frac{\pi/3+2\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right).$$

3. При извлечении корня из комплексного числа $7-24i$ использовать тригонометрическую форму записи комплексного числа нерационально. Воспользуемся другим способом. Учтем, что

$$7-24i=16-9-24i=4^2+(3i)^2-2\cdot 4\cdot 3i=(4-3i)^2.$$

Тогда $z=\sqrt{7-24i}=\sqrt{(4-3i)^2}=\pm(4-3i)$.

Замечание. Если Вы не смогли выделить полный квадрат в подкоренном выражении, то вычислить $\sqrt{7-24i}$ можно по определению: $\sqrt{7-24i}=x+iy$, где $x, y-$действительные числа. Для их отыскания возведем в квадрат обе части равенства и приравняем действительные и мнимые части комплексных чисел:

$$7-24i=(x+iy)^2=x^2+2xyi-y^2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x^2-y^2=7, \\ xy=-12. \end{cases}$$

Решим получившуюся систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ xy=-12, \end{cases} \Rightarrow\; y=\frac{-12}{x},\; x^2-\frac{144}{x^2}=7 \;\Rightarrow x^4-7x^2-144=0 \;\Rightarrow \begin{cases} x_1=4, \\ x_2=-4, \end{cases} \begin{cases} y_1=-3, \\ y_2=3. \end{cases}$$

Таким образом, $\sqrt{7-24i}$ имеет два значения $(4-3i)$ и $(-4+3i)$.

Пример 1.3. Решить уравнение $z^2-(2+i)z+7i-1=0$.

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления корней квадратного уравнения и результатом предыдущего примера:

$$z_{1,2}=\frac{(2+i)\pm\sqrt{(2+i)^2-28i+4}}{2}=\frac{(2+i)\pm\sqrt{7-24i}}{2}=\frac{(2+i)\pm\sqrt{(4-3i)^2}}{2}=$$

$$=\frac{(2+i)\pm(4-3i)}{2} \quad\Rightarrow\quad z_1=\frac{(2+i)+(4-3i)}{2}=3-i, \quad z_2=\frac{(2+i)-(4-3i)}{2}=$$

$$=-1+2i.$$

Пример 1.4. Решить систему уравнений $\begin{cases} (2+i)z_1+(3-i)z_2=4+2i, \\ (5-2i)z_1+(2+3i)z_2=-5i. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся при решении системы методом Крамера. Вычислим определители:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2+i & 3-i \\ 5-2i & 2+3i \end{vmatrix}=(2+i)(2+3i)-(5-2i)(3-i)=-12+19i,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 4+2i & 3-i \\ -5i & 2+3i \end{vmatrix}=(4+2i)\cdot(2+3i)-(3-i)\cdot(-5i)=7+31i,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2+i & 4+2i \\ 5-2i & -5i \end{vmatrix}=(2+i)\cdot(-5i)-(4+2i)\cdot(5-2i)=-19-12i.$$

Тогда

$$z_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{7+31i}{-12+19i}=\frac{(7+31i)\cdot(-12-19i)}{(-12+19i)\cdot(-12-19i)}=\frac{505-505i}{505}=1-i,$$

$$z_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-19-12i}{-12+19i}=\frac{19i^2-12i}{-12+19i}=\frac{i(-12+19i)}{-12+19i}=i.$$

Пример 1.5. Указать, какие линии определяются следующими уравнениями:
1) $\mathrm{Re}\, z^2 = 1$; 2) $z = z_0 + \mathrm{R}\,\mathrm{e}^{i\varphi}$; 3) $|z - 3 + 2i| = 3$; 4) $|z - 2i| + |z + 2i| = 6$,
5) $|z - 3 + 2i| = |z|$.

Решение. 1. Выделим действительную часть функции z^2:

$$\mathrm{Re}\, z^2 = \mathrm{Re}(x + iy)^2 = \mathrm{Re}\left(x^2 + 2xyi - y^2\right) = x^2 - y^2.$$

Тогда уравнение $\mathrm{Re}\, z^2 = 1$ примет вид $x^2 - y^2 = 1$. Это уравнение определяет равностороннюю гиперболу ($a = b = 1$) с центром в точке (0, 0).

2). Запишем равенство $z = z_0 + \mathrm{R}\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ в виде

$$x + iy = (x_0 + iy_0) + R(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

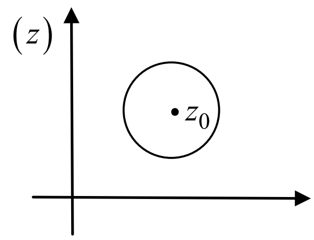

Рис. 2

Приравняем действительные и мнимые части:

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\varphi, \\ y = y_0 + R\sin\varphi. \end{cases}$$

Если $\varphi \in [0, 2\pi)$, то эти уравнения определяют окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ с центром в точке (x_0, y_0) радиуса R (рис. 2); если $\varphi \in [0, \pi]$, то уравнения определяют верхнюю половину окружности.

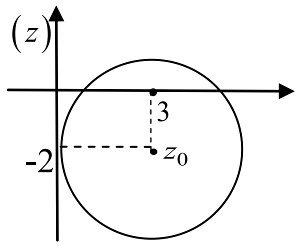

Рис. 3

Так как $|z - z_0|$ есть расстояние точек z от точки z_0 и оно постоянно (равно R), то уравнение окружности с центром в точке z_0 радиуса R можно записать и в другом виде $|z - z_0| = R$.

Итак, уравнение окружности с центром в точке z_0 радиуса R имеет вид

$$\boxed{z = z_0 + Re^{i\varphi}, \ \ \varphi \in [0, 2\pi) \quad \text{или} \quad |z - z_0| = R.}$$

3. Уравнение $|z - 3 + 2i| = 3$ запишем в виде $|z - (3 - 2i)| = 3$; следовательно, оно определяет окружность с центром в точке $z_0 = 3 - 2i$ радиуса $R = 3$ (рис. 3).

4. В уравнении $|z - 2i| + |z + 2i| = 6$ модуль $|z - 2i|$ есть расстояние точки z от точки $z_0 = 2i$, а модуль $|z + 2i| = |z - (-2i)|$ есть расстояние точки z от точки $z_1 = -2i$. Следовательно, уравнение $|z - 2i| + |z + 2i| = 6$ определяет множество точек z, сумма расстояний от

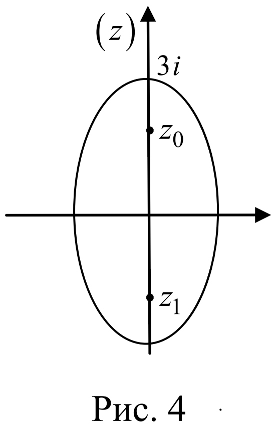

Рис. 4

которых до двух заданных точек $z_0 = 2i$ и $z_1 = -2i$ есть величина постоянная, равная 6 и большая, чем расстояние между z_0 и z_1. Такое множество точек есть эллипс с фокусами в точках z_0, z_1, причем длина оси эллипса, на которой лежат фокусы, равна 6 (рис. 4).

5. В уравнении $|z-3+2i| = |z|$ модуль $|z-3+2i|$ есть расстояние точки z от точки $z_0 = 3-2i$, а модуль $|z| = |z-0|$ есть расстояние точки z от точки $z_1 = 0$. В связи с этим уравнение $|z-3+2i| = |z|$ определяет множество точек z равноудаленных от точек $z_0 = 3-2i$ и $z_1 = 0$. Это множество точек есть серединный перпендикуляр к отрезку $z_0 z_1$ (рис. 5).

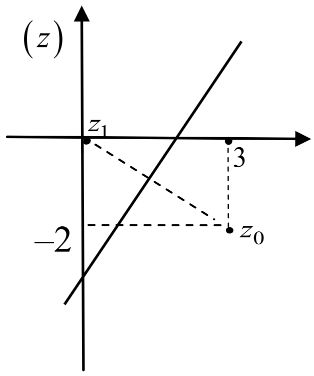

Рис. 5

2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Функции $e^z, \sin z, \cos z$

Функции $e^z, \sin z, \cos z$ для любого действительного z определяются как суммы следующих рядов:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \tag{2.1}$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \tag{2.2}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \tag{2.3}$$

Связь между функциями $e^z, \sin z, \cos z$

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z}, \quad \boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}, \quad \boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}. \tag{2.4}$$

Эти формулы называют ***формулами Эйлера.***

Свойства функций $e^z, \sin z, \cos z$

1. $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

2. Функция e^z имеет период $T = 2\pi i$.

3. Функции $\sin z, \cos z$ имеют период $T = 2\pi$.

4. Функция $\sin z$ – нечетная, функция $\cos z$ – четная.

5. а) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

б) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2$, в) $\sin 2z = 2\sin z \cdot \cos z$,

г) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$, д) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$.

6. Функции $\sin z$, $\cos z$ – не ограничены на комплексной плоскости.

Например, $\cos(in) = \dfrac{e^{i(in)} + e^{-i(in)}}{2} = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Обратите внимание на то, что свойства 1, 3, 4, 5 функций $e^z, \sin z, \cos z$ такие же, как для соответствующих функций действительной переменной. Свойства же 2 и 6 имеют место только для функций комплексной переменной.

Перечисленные свойства используются при вычислении значений функций $e^z, \sin z, \cos z$ и при решении уравнений, содержащих эти функции.

Пример 2.1. Вычислить $e^{\ln 5 + 3\pi i/2}$.

Решение. Воспользуемся свойством 1, основным логарифмическим тождеством и одной из формул (2.4):

$$e^{\ln 5 + 3\pi i/2} = e^{\ln 5} \cdot e^{3\pi i/2} = 5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -5i\ .$$

Гиперболические функции

Для комплексного аргумента гиперболические синус и косинус вводятся так же, как для действительного аргумента, т. е.

$$\boxed{\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}}\ . \tag{2.5}$$

Перечислим свойства функций $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$.

1. Функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ имеют период $2\pi i$ (также, как функция e^z).

2. Для комплексного аргумента существует следующая связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(iz) &= \operatorname{ch} z, & \sin(iz) &= i\operatorname{sh} z, \\ \operatorname{ch}(iz) &= \cos z, & \operatorname{sh}(iz) &= i\sin z. \end{aligned}} \tag{2.6}$$

3. Для комплексного аргумента (как и для действительного):

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$

$$\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2,$$
$$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2,$$
$$\operatorname{sh} 2z = 2\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z.$$

Пример 2.2. Вычислить $\sin(\pi + i\ln 3), \quad \operatorname{ch}\left(1 - \dfrac{\pi i}{2}\right)$.

Решение. Воспользуемся свойствами функций $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$:

$$\sin(\pi + i\ln 3) = \sin\pi \cdot \cos(i\ln 3) + \cos\pi \cdot \sin(i\ln 3) = -\sin(i\ln 3) =$$
$$= -i \cdot \operatorname{sh}(\ln 3) = -i\,\frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = -i\,\frac{3 - 1/3}{2} = -\frac{4}{3}\,i;$$
$$\operatorname{ch}\left(1 - \frac{\pi i}{2}\right) = \operatorname{ch} 1 \cdot \operatorname{ch}\frac{\pi i}{2} - \operatorname{sh} 1 \cdot \operatorname{sh}\frac{\pi i}{2} = \operatorname{ch} 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} - i\operatorname{sh} 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -i\operatorname{sh} 1.$$

Логарифмическая функция

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.7}$$

Значение этой многозначной функции при $k = 0$ называют главным значением логарифма и обозначают $\ln z$.

На функцию $\operatorname{Ln} z$ распространяется ряд свойств логарифма действительного переменного.

Обобщенные степенная и показательная функции

Степенная функция $w = z^a$ с произвольным комплексным показателем $a = \alpha + i\beta$ определяется равенством

$$\boxed{w = z^a = e^{\operatorname{Ln} z^a} = e^{a \operatorname{Ln} z}.}$$

Показательная функция с произвольным комплексным показателем $a = \alpha + i\beta$ определяется равенством

$$\boxed{w = a^z = e^{\operatorname{Ln} a^z} = e^{z \operatorname{Ln} a}.}$$

Пример 2.3. Вычислить 1) $\operatorname{Ln} i$, 2) 1^i, 3) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$.

Решение. 1. Вычислим модуль и аргумент для $z = i$: $|i| = 1$, $\arg i = \pi/2$. Тогда

$$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\,(\pi/2 + 2\pi k) = \frac{\pi i}{2}(1 + 2k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Главное значение логарифма есть $\ln i = \pi i/2$.

2. Запишем $w=1^i$ в виде

$$w=e^{\mathrm{Ln}1^i}=e^{i\,\mathrm{Ln}1}=e^{i\,(\ln 1+2\pi k i)}=e^{-2\pi k},\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

3. Учитывая, что $\left|\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1,\ \arg\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{4}$, получим:

$$w=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}=e^{\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}}=e^{2i\ln\frac{1+i}{\sqrt{2}}}=e^{2i\cdot\left(\ln 1+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+4\pi k\right)},$$

где $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

Пример 2.4. Решить уравнение $4\cos z+5=0$.

Решение. Используя равенство $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, запишем уравнение в виде $2(e^{iz}+e^{-iz})+5=0$. Умножив это равенство на e^{iz}, получим $2e^{2iz}+5e^{iz}+2=0$ или $2w^2+5w+2=0$, где $w=e^{iz}$. Решения этого квадратного уравнения $w_1=-2,\ w_2=-\dfrac{1}{2}$, т. е. $e^{iz_1}=-2$ и $e^{iz_2}=-\dfrac{1}{2}$. Прологарифмируем эти равенства и учтем, что $\dfrac{1}{i}=\dfrac{1\cdot i}{i\cdot i}=-i$:

$$iz_1=\mathrm{Ln}(-2)=\ln 2+i(\pi+2\pi k),$$

$$z_1=\pi\left(1+2k\right)-i\ln 2,\qquad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots;$$

$$iz_2=\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+i\,(\pi+2\pi n)=-\ln 2+i\,\pi(1+2n),$$

$$z_2=\pi\left(1+2n\right)+i\ln 2,\qquad n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Итак, можно решения уравнения записать в виде

$$z=\pi(2k+1)\pm i\ln 2,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Обратные тригонометрические и гиперболические функции

По определению

$w=\mathrm{Arcsin}\,z$, если $\sin w=z$; $\quad w=\mathrm{Arccos}\,z$, если $\cos w=z$;
$w=\mathrm{Arctg}\,z$, если $\mathrm{tg}\,w=z$; $\quad w=\mathrm{Arcctg}\,z$, если $\mathrm{ctg}\,w=z$;
$w=\mathrm{Arcsh}\,z$, если $\mathrm{sh}\,w=z$; $\quad w=\mathrm{Arcch}\,z$, если $\mathrm{ch}\,w=z$;
$w=\mathrm{Arcth}\,z$, если $\mathrm{th}\,w=z$; $\quad w=\mathrm{Arccth}\,z$, если $\mathrm{cth}\,w=z$.

Пример 2.5. Вычислить $\mathrm{Arcsin}\left(i\right)$.

Решение. Из условия $\mathrm{Arcsin}\left(i\right)=z$ имеем:

$$\sin z=i\ \Rightarrow\ \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=i\ \Rightarrow\ e^{iz}-e^{-iz}=-2\ .$$

Умножив последнее равенство на e^{iz}, получим

$$e^{2iz}+2e^{iz}-1=0 \Rightarrow e^{iz}=-1\pm\sqrt{2} \Rightarrow iz=\mathrm{Ln}\left(-1\pm\sqrt{2}\right).$$

Учтем, что

$$-1+\sqrt{2}>0 \quad \Rightarrow \quad \left|-1+\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1, \quad \arg\left(-1+\sqrt{2}\right)=0;$$

$$-1-\sqrt{2}<0 \quad \Rightarrow \quad \left|-1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}+1, \quad \arg\left(-1-\sqrt{2}\right)=\pi.$$

В связи с этим

$$iz_1=\mathrm{Ln}\left(-1+\sqrt{2}\right)=\ln\left|-1+\sqrt{2}\right|+i\left(\arg\left(-1+\sqrt{2}\right)+2\pi k\right)=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+2\pi ki;$$

$$iz_2=\mathrm{Ln}\left(-1-\sqrt{2}\right)=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(\pi+2\pi k\right)i, \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Учитывая, что $\frac{1}{i}=-i$, получим решения уравнения

$$z_1=2\pi k-i\ln\left(\sqrt{2}-1\right), \quad z_2=\pi+2\pi k-i\ln\left(\sqrt{2}+1\right), \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функция называется **дифференцируемой** в точке, если она имеет в этой точке производную

$$\boxed{f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}}.$$

Для функций комплексного переменного справедливы правила дифференцирования суммы, произведения, частного, правило дифференцирования сложной функции, формулы дифференцирования элементарных функций:

$$\left[f(z)+g(z)\right]'=f'(z)+g'(z),$$

$$\left[f(z)\cdot g(z)\right]'=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z),$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)\cdot g(z)-f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)},$$

$$\left[f\left(w(z)\right)\right]_z'=f_w'\cdot w_z',$$

$$(\sin z)'=\cos z,\ (\cos z)'=-\sin z,\ \left(e^z\right)'=e^z,\ \left(z^n\right)'=nz^{n-1},$$

$$(\ln z)'=\frac{1}{z}\ (z\neq 0),\ (\mathrm{sh}\, z)'=\mathrm{ch}\, z,\ (\mathrm{ch}\, z)'=\mathrm{sh}\, z.$$

Кроме элементарных функций есть другие функции комплексного переменного, например $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z^2$, $\operatorname{Im}\left(\bar{z}-z^3\right)$ и т. д. Как проверить их дифференцируемость?

Функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ будет дифференцируемой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия Коши – Римана:

$$\boxed{u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x}.$$

Пример 3.1. Выяснить, являются ли функции а) $f(z)=z\cdot e^{3z}$, б) $f(z)=5\bar{z}-3iz$ дифференцируемыми в области определения. Если да, то найти их производные.

Решение

А. Функция $f(z)=z\cdot e^{3z}$ является элементарной функцией, определенной на всей комплексной плоскости; следовательно, она является дифференцируемой на комплексной плоскости. Найдем ее производную

$$f'(z)=\left(z\cdot e^{3z}\right)'=e^{3z}+z\cdot e^{3z}\cdot 3=e^{3z}\cdot(3z+1).$$

Б. Функция $f(z)=5\,\bar{z}-3\,i\,z$ не является элементарной функцией, поэтому следует проверить выполнение условий Коши – Римана. Для этого запишем функцию в виде

$$f(z)=5\bar{z}-3\,i\,z=5(x-i\,y)-3i(x+i\,y)=(5x+3y)+i(-5y-3x).$$

Отсюда $u=5x+3y$ есть действительная часть функции, $v=-5y-3x$ есть ее мнимая часть. Найдем частные производные этих функций:

$$u'_x=5,\;\; u_y{}'=3,\;\; v_x{}'=-3,\;\; v_y{}'=-5.$$

Так как $u_x{}'\neq v_y{}'$, то функция $f(z)=5\bar{z}-3iz$ не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости.

В теории функций комплексного переменного важную роль играет класс функций, называемых аналитическими. Однозначная функция $f(z)$ называется **аналитической** в области D, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Укажем ряд свойств аналитических функций.

1. Функция $f(z)$ является аналитической в области D тогда и только тогда, когда в этой области ее действительная и мнимая части удовлетворяют условиям Коши – Римана.

2. Сумма, разность, произведение, суперпозиция аналитических функций являются функциями аналитическими. Частное аналитиче-

ских функций является аналитической функцией, если знаменатель не обращается в нуль.

3. Пусть функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ является аналитической в области D. Тогда в этой области функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ являются гармоническими, т. е. удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\boxed{u''_{xx}+u''_{yy}=0,\ \ v''_{xx}+v''_{yy}=0.} \tag{3.1}$$

Отметим, что из гармоничности функций $u(x,y), v(x,y)$ не следует аналитичность функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Например, для функции $f(z)=\overline{z}=x-iy$ ее действительная и мнимая части $u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$ являются функциями гармоническими, но не удовлетворяют условиям Коши – Римана, т. е. функция $f(z)=\overline{z}$ не является аналитической.

4. Если известна действительная или мнимая часть аналитической функции $f(z)$, то с точностью до постоянной может быть восстановлена сама функция $f(z)$.

Пусть, например, известна $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)$. Требуется найти $\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)$. Воспользуемся условиями Коши – Римана:

$$v'_x=-u'_y,\ \ v'_y=u'_x. \tag{3.2}$$

Первое из этих равенств проинтегрируем по x с точностью до константы $c(y)$, не зависящей от переменной интегрирования

$$v=-\int u'_y\,dx+c(y).$$

Для отыскания $c(y)$ следует подставить найденную функцию $v(x,y)$ во второе из равенств (3.2).

Пример 3.2. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)$, у которой $\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)=\operatorname{ch}x\cdot\sin y$.

Решение. Проверим гармоничность функции $v(x,y)$:

$$v''_{xx}+v''_{yy}=\operatorname{ch}x\cdot\sin y-\operatorname{ch}x\cdot\sin y=0.$$

Из гармоничности функции $v(x,y)$следует, что она является мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Для отыскания функции $f(z)$ найдем ее действительную часть из условий Коши – Римана:

$$u'_x=v'_y=\operatorname{ch}x\cdot\cos y,\quad u'_y=-v'_x=-\operatorname{sh}x\cdot\sin y. \tag{3.3}$$

Равенство $u'_x = \operatorname{ch} x \cdot \cos y$ проинтегрируем по x

$$u = \int (\operatorname{ch} x \cdot \cos y) dx = \operatorname{sh} x \cdot \cos y + c(y).$$

Для отыскания $c(y)$ подставим найденную функцию $u(x,y)$ во второе из равенств (3.3): $u'_y = -\operatorname{sh} x \cdot \sin y = -\operatorname{sh} x \cdot \sin y + c'(y) \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c \Rightarrow$

$$u = \operatorname{sh} x \cdot \cos y + c.$$

Подставим найденное $u(x,y)$ и заданное $v(x,y)$ в функцию $f(z) = u + iv$ и выразим ее через z, учитывая, что $\operatorname{ch}(iy) = \cos y$, $\operatorname{sh}(iy) = i \sin y$:

$$f(z) = u + iv = (\operatorname{sh} x \cdot \cos y + c) + i \operatorname{ch} x \cdot \sin y =$$

$$= \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}(iy) + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh}(iy) = \operatorname{sh}(x + iy) + c = \operatorname{sh} z + c.$$

Следовательно, $f(z) = \operatorname{sh} z + c$.

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть $z = z(t)$ есть параметрическое уравнение дуги (AB), причем концам дуги A, B соответствуют значения параметров t_A, t_B. Тогда

$$\boxed{\int\limits_{(AB)} f(z) dz = \int\limits_{t_A}^{t_B} f(z(t)) z'(t) dt}.$$

Пример 4.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)} \operatorname{Re} z \, dz$ по отрезку (L) с концами в точках $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + 3i$.

Решение. Уравнение отрезка (L) с концами в точках z_1, z_2 имеет вид:

$$\boxed{z - z_1 = t(z_2 - z_1), \quad 0 \le t \le 1}.$$

В нашем случае $z = (1 + 2i) + t(1 + i) \Rightarrow \operatorname{Re} z = 1 + t$, $dz = (1 + i) dt$,

$$\int\limits_{(L)} \operatorname{Re} z \, dz = \int\limits_0^1 (1 + t)(1 + i) dt = (1 + i)\left(t + \frac{t^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}(1 + i).$$

Пример 4.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)} z \operatorname{Im} z^2 dz$, если контур (L) задан соотношениями $\operatorname{Re} z = 1$, $|\operatorname{Im} z| \le 2$.

Решение. Так как $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, то уравнение контура (L) можно записать следующим образом: $x = 1$, $|y| \le 2$ или $x = 1$, $-2 \le y \le 2$. На линии (L) имеем:

$$z = x + iy = 1 + iy, \quad \operatorname{Im} z^2 = \operatorname{Im}(1 + iy)^2 = 2y, \quad dz = i\,dy.$$

Тогда $\int\limits_{(L)} z\,\mathrm{Im}\,z^2dz = \int\limits_{-2}^{2}(1+iy)\,2yi\,dy = \int\limits_{-2}^{2}2i\left(y+iy^2\right)dy = -\frac{32}{3}.$

Пример 4.3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{(L)}\frac{z}{\overline{z}}dz$ по границе (L) области (D): $\begin{cases}2<|z|<3,\\ \mathrm{Re}\,z<0,\\ \mathrm{Im}\,z<0.\end{cases}$

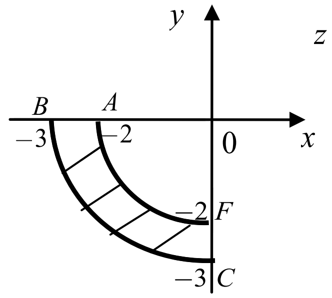

Рис. 6

Решение. Изобразим область D на плоскости (z) (рис. 6). Граница области – линия L – состоит из двух дуг окружностей (дуги BC и FA) и двух отрезков (AB и CF), следовательно, интеграл по контуру L будет равен сумме четырех интегралов. Выберем обход контура против часовой стрелки.

Вычислим каждый из интегралов.

1. На отрезке (AB) имеем: $y=0,\ z=x,\ \overline{z}=x,\ dz=dx$ и

$$\int\limits_{(AB)}\frac{z}{\overline{z}}dz = \int\limits_{-2}^{-3}\frac{x}{x}dx = -1.$$

2. На отрезке (CF) имеем: $x=0,\ z=iy,\ \overline{z}=-iy,\ dz=i\,dy,\ y\in[-3,-2]$ и

$$\int\limits_{(CF)}\frac{z}{\overline{z}}dz = \int\limits_{-3}^{-2}\frac{iy}{-iy}\,i\cdot dy = -i.$$

3. На дуге BC имеем:

$$|z|=3,\ z=3e^{i\varphi},\ \overline{z}=3e^{-i\varphi},\ dz=3ie^{i\varphi}d\varphi,\ \varphi\in[\pi,3\pi/2],$$

$$\int\limits_{(BC)}\frac{z}{\overline{z}}dz = \int\limits_{\pi}^{3\pi/2}\frac{3e^{i\varphi}}{3e^{-i\varphi}}\cdot 3ie^{i\varphi}d\varphi = \int\limits_{\pi}^{3\pi/2}e^{3i\varphi}3i\,d\varphi = e^{3i\varphi}\Big|_{\pi}^{3\pi/2} =$$

$$=\left(\cos\frac{9\pi}{2}+i\sin\frac{9\pi}{2}\right)-\left(\cos 3\pi+i\sin 3\pi\right)=1+i.$$

4. На дуге (FA) имеем: $|z|=2,\ z=2e^{i\varphi},\ \overline{z}=2e^{-i\varphi},\ dz=2ie^{i\varphi}d\varphi$ и

$$\int\limits_{(FA)}\frac{z}{\overline{z}}dz = \int\limits_{3\pi/2}^{\pi}2ie^{3i\varphi}d\varphi = \frac{2}{3}e^{3i\varphi}\Big|_{3\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{3}(-1-i).$$

Следовательно, $\int\limits_{(L)}\frac{z}{\overline{z}}dz = -1-i+1+i+\frac{2}{3}(-1-i) = -\frac{2}{3}(1+i).$

Интегральная теорема Коши

Пусть функция $f(z)$ является **аналитической** в **односвязной** области D. Тогда интеграл от этой функции по любой замкнутой кривой L из области D равен нулю, т. е. $\oint\limits_{(L)} f(z)dz = 0$.

Если функция является аналитической в односвязной области, но линия интегрирования незамкнута, то интеграл $\int\limits_{(AB)} f(z)dz$ не зависит от формы кривой. Такой интеграл обозначают $\int\limits_A^B f(z)\,dz$ и к нему применимы такие же методы вычисления, как при интегрировании функции действительной переменной, например, метод подведения под знак дифференциала, метод интегрирования по частям.

Пример 4.4. Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)} z e^{z^2} d z$:

а) по дуге (L_1) параболы $y = x^2$ от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1+i$,

б) по отрезку (L_2) прямой, соединяющему эти точки.

Решение. Так как функция $f(z) = z e^{z^2}$ аналитична всюду на комплексной плоскости, то $\int\limits_{(L)} z e^{z^2} dz$ не зависит от формы пути интегрирования, т. е.

$$\int\limits_{(L_1)} z e^{z^2} dz = \int\limits_{(L_2)} z e^{z^2} dz = \int\limits_0^{1+i} z e^{z^2} dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1+i} e^{z^2} d z^2 = \frac{1}{2} e^{z^2} \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{2}\left(e^{(1+i)^2} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2i} - 1\right) = \frac{1}{2}(\cos 2 - 1) + \frac{i}{2}\sin 2.$$

Пример 4.5. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{5 + z^2 + z\cdot\cos z}{\left(z^2+1\right)\cdot(z+3)^2}\, dz.$$

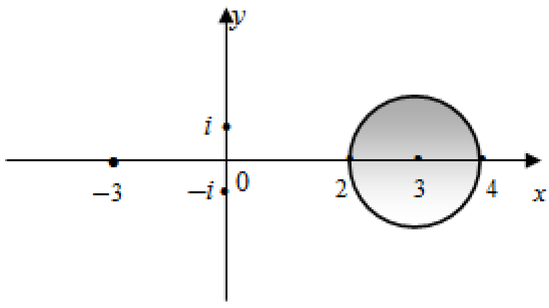

Рис. 7

Решение. Подынтегральная функция не определена в точках $z = \pm i$, $z = -3$. Построим контур интегрирования $|z-3| = 1$. Это есть окружность с центром в точке $z = 3$ радиусом 1 (рис. 7). Особые точки функции

$z=-3,\ z=i,\ z=-i$ лежат вне этой окружности. В связи с этим внутри окружности функция $f(z)=\dfrac{5+z^2+z\cdot\cos z}{\left(z^2+1\right)\cdot\left(z+3\right)^2}$ является аналитической и по теореме Коши $\oint\limits_{|z-3|=1}\dfrac{5+z^2+z\cdot\cos z}{\left(z^2+1\right)\cdot\left(z+3\right)^2}\,dz=0.$

Интегральные формулы Коши

Интегральные формулы Коши можно записать в виде

$$\oint\limits_L\frac{f(z)dz}{z-a}=2\pi i\cdot f(a),\quad \oint\limits_L\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}=\frac{2\pi i}{n!}\cdot f^{(n)}(a)\quad n=1,2,3,... \qquad (4.1)$$

и использовать для вычисления соответствующих интегралов при условии, что точка a находится внутри контура L, функция является аналитической внутри контура L.

Пример 4.5. Вычислить интегралы

$I_1=\int\limits_{|z-3|=1}\dfrac{\operatorname{ch}z}{z^2-1}dz,\ I_2=\int\limits_{|z-1|=1}\dfrac{\operatorname{ch}z}{z^2-1}dz.$

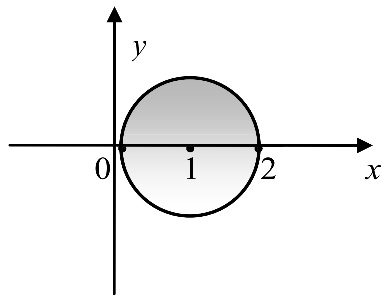

Рис. 8

Решение. В первом интеграле нули знаменателя $z=\pm1$ функции $\dfrac{e^{iz}}{z^2-1}$ находится вне контура интегрирования $|z-3|=1$ (рис. 7); поэтому внутри этого контура подынтегральная функция является аналитической и по теореме Коши интеграл I_1 равен нулю.

Во втором интеграле точка $z=1$ находится внутри контура интегрирования $|z-1|=1$ (рис. 8), поэтому по первой из формул (4.1) имеем

$$I_2=\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\operatorname{ch}z}{z^2-1}dz=\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\operatorname{ch}z}{(z-1)(z+1)}dz=\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\frac{\operatorname{ch}z}{z+1}}{(z-1)}dz=2\pi i\left.\frac{\operatorname{ch}z}{z+1}\right|_{z=1}=\pi i\operatorname{ch}1\ .$$

Пример 4.6. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{|z|=1}\dfrac{1}{z^2}\sin\dfrac{\pi}{z+3}dz.$

Решение. Внутри контура $|z|=1$ функция $\sin\dfrac{\pi}{z+3}$ является аналитической, так как особая точка $z=-3$ находится вне контура, поэтому по второй из формул (4.1) при $n=1$ имеем

$$I=\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z^2}\sin\frac{\pi}{z+3}dz=\frac{2\pi i}{1!}\left(\sin\frac{\pi}{z+3}\right)'\Bigg|_{z=0}=2\pi i\cos\frac{\pi}{z+3}\cdot\frac{-\pi}{(z+3)^2}\Bigg|_{z=0}=$$

$$=2\pi i\cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{-\pi}{9}=\frac{-\pi^2 i}{9}.$$

Пример 4.7. Вычислить интеграл $I=\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{dz}{\left(z^2-(2+i)z+2i\right)^3}$.

Решение. Нули знаменателя $z_1=i,\ z_2=2$ легко находятся по теореме Виета, поэтому функция разлагается на множители;

$$\left(z^2-(2+i)z+2i\right)^3=(z-i)^3(z-2)^3.$$

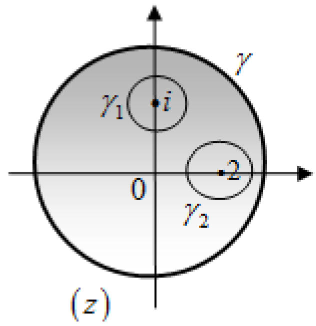

Рис. 9

Точки $z_1=i,\ z_2=2$ находятся внутри контура γ (рис. 9). Построим окружности γ_1, γ_2 с центрами в этих точках достаточно малых радиусов таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали внутри контура γ. В многосвязной области, ограниченной внешним контуром γ и внутренними контурами γ_1, γ_2, подынтегральная функция является аналитической (так как нули знаменателя не входят в эту область), поэтому по теореме Коши для многосвязной области интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам:

$$I=\int\limits_{|z|=3}\frac{dz}{(z-i)^3(z-2)^3}=\int\limits_{\gamma_1}\frac{dz}{(z-i)^3(z-2)^3}+\int\limits_{\gamma_2}\frac{dz}{(z-i)^3(z-2)^3}.$$

В интеграле по кривой γ_1, окружающей точку $z_1=i$, в знаменателе оставим $(z-i)^3$, а в интеграле по кривой γ_2, окружающей точку $z_2=2$, в знаменателе оставим $(z-2)^3$ и применим для каждого интеграла вторую из формул Коши (4.1) при $n=2$:

$$I=\int_{\gamma_1}\frac{(z-2)^{-3}}{(z-i)^3}dz+\int_{\gamma_2}\frac{(z-i)^{-3}}{(z-2)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\left\{\left[(z-2)^{-3}\right]''\Big|_{z=i}+\left[(z-i)^{-3}\right]''\Big|_{z=2}\right\}=$$

$$=\pi i(-3)(-4)\left\{(z-2)^{-5}\Big|_{z=i}+(z-i)^{-5}\Big|_{z=2}\right\}=12\pi i\left\{\frac{1}{(i-2)^5}+\frac{1}{(2-i)^5}\right\}=0.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)}|z|dz$, где (L): $|z|=1,\ -\dfrac{\pi}{2}\le\arg z\le\dfrac{\pi}{2}.$

Ответ: $2i$.

2. Вычислить интеграл $\oint\limits_{(L)}|z|\cdot\bar{z}\,dz$ по границе L области $\begin{cases}|z|<1,\\ \pi/2<\arg z<\pi\end{cases}$ (обход контура против часовой стрелки).

Ответ: $\pi\cdot i/2$.

3. Вычислить $\int\limits_{(L)}(z-1)\cos z\,dz$ по отрезку z_1z_2: $z_1=-\pi/2,\ z_2=\pi/2.$

Ответ: -2.

4. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=1}\dfrac{e^z\cos z+\sin z^2-5z+3}{\left(z^2-5z-6\right)^2}dz.$

Ответ: 0.

5. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

5.1. Числовые ряды

Необходимый и достаточный признак сходимости ряда:

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+i\,y_n)$ сходится $\Leftrightarrow$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ сходятся.

Пример 5.1. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}+\dfrac{i}{3^{n+1}}\right)$ на сходимость и найти его сумму.

Решение. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ является знакочередующимся и сходится по признаку Лейбница, так как его члены по абсолютной величине убывают и стремятся к нулю. Для вычисления его суммы запишем ряд Тейлора для функции $\cos x$:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n!)}\ .$$

В частности, при $x=1$ получим $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^{n+1}}$ является геометрической прогрессией с первым членом $b_1=\dfrac{1}{3}$, знаменателем $q=\dfrac{1}{3}$ и суммой $\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{1/3}{1-1/3}=\dfrac{1}{2}$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}+\dfrac{i}{3^{n+1}}\right)$ сходится и его сумма $S=\cos 1+\dfrac{1}{2}i$.

Пример 5.2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+i\sqrt{\dfrac{27n^3+5}{3n^7-1}}\right)$ на сходимость.

Решение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится как эталонный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ при $p>1$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{27n^3+5}{3n^7-1}}$ ведет себя так же, как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{27n^3}{3n^7}}=3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, т. е. сходится. Следовательно, исходный ряд сходится.

Необходимый признак сходимости ряда:
если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$.

Пример 5.3. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\ln n}+i\,\dfrac{3n^4+1}{10n^4-3}\right)$ на сходимость.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\ln n}+i\,\dfrac{3n^4+1}{10n^4-3}\right)=i\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4}{10n^4}=i\dfrac{3}{10}\neq 0$, то заданный ряд расходится.

Достаточный признак сходимости ряда: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ сходится и называется абсолютно сходящимся рядом.

Пример 5.4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^{2n}}{\cos(in)}$ на сходимость.

Решение. Рассмотрим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(1+i)^{2n}}{\cos(in)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|1+i|^{2n}}{\operatorname{ch}n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(\sqrt{2}\right)^{2n}}{e^n+e^{-n}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{e^n+e^{-n}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{e^n+e^{-n}}$ ведет себя так же, как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{e^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{e}\right)^n$. Последний ряд сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\dfrac{2}{e}$, меньшим единицы, поэтому исходный ряд сходится абсолютно.

5.2. Степенные ряды

Степенной ряд в комплексной области есть ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n=a_0+a_1\left(z-z_0\right)+a_2\left(z-z_0\right)^2+\ldots,$$

где a_n $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$, z, z_0 – комплексные числа.

Степенной ряд в комплексной области обладает следующими свойствами.

1. Областью сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$ является круг.
2. Сумма степенного ряда внутри круга сходимости является функцией аналитической.
3. Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать любое число раз и почленно интегрировать.

Пример 5.5. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{4-3i}\right)^n$.

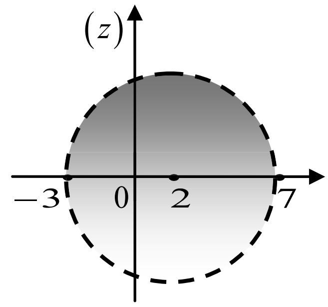

Рис. 10

Решение. Ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $q=\frac{z-2}{4-3i}$, поэтому ряд сходится, если $|q|<1$, т. е.

$$|q|=\left|\frac{z-2}{4-3i}\right|=\frac{|z-2|}{|4-3i|}=\frac{|z-2|}{5}<1 \quad\Rightarrow\quad |z-2|<5.$$

Областью сходимости ряда является круг с центром в точке $z_0=2$ и радиусом $R=5$ (рис. 10).

Пример 5.6. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}(z-i)^n$.

Решение. Применим признак Даламбера для ряда из модулей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|z-i|^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n|z-i|^n}=\frac{|z-i|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{|z-i|}{3}.$$

Если $|z-i|>3$, то ряд расходится; если $|z-i|<3$, то ряд сходится, т. е. областью сходимости ряда является круг с центром в точке $z_0=i$ и радиусом $R=3$ (рис. 11). На границе круга, т. е. при $|z-i|=3$ нужны дополнительные исследования, которые проводить не будем.

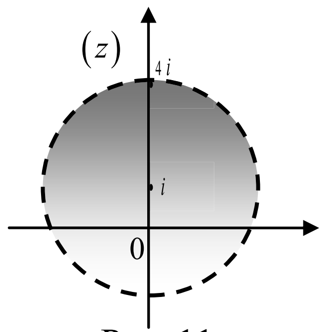

Рис. 11

5.3. Ряды Тейлора и Лорана

Функция $f(z)$, **аналитическая в круге** $|z-z_0|<R$, разлагается в этом круге **в ряд Тейлора** по степеням $(z-z_0)$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n.$$

Функция $f(z)$, **аналитическая в кольце** $r<|z-z_0|<R$, разлагается в этом кольце **в ряд Лорана** по степеням $(z-z_0)$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n.$$

Ряды Лорана и Тейлора внутри их области сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать, при этом область сходимости вновь полученных рядов не изменится.

При разложении функции в ряд сначала нужно найти область сходимости; для этого не надо использовать признак Даламбера (в отличие от функции действительного переменного); достаточно найти круг или кольцо аналитичности функции.

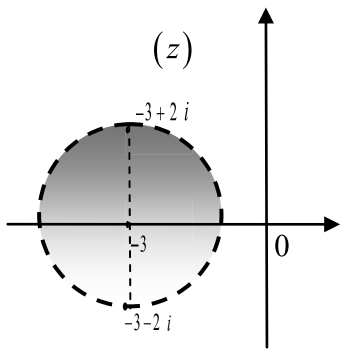

Рис. 12

Пример 5.7. Функцию $f(z)=e^{z^2-2z}$ разложить в ряд в окрестности точки $z_0=1$. Указать область сходимости полученного ряда.

Решение. Функция $f(z)=e^{z^2-2z}$ является аналитической на всей комплексной плоскости, следовательно, ее можно разложить в ряд Тейлора по степеням $z-z_0$ в круге $|z-z_0|<\infty$. Преобразуем функцию $f(z)=e^{z^2-2z}=e^{(z-1)^2-1}=e^{-1}\cdot e^{(z-1)^2}$ и воспользуемся известным разложением функции $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$; $|z|<\infty$. Получим

$$f(z)=\frac{1}{e}\cdot e^{(z-1)^2}=\frac{1}{e}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n}}{n!},\quad |z-1|<\infty.$$

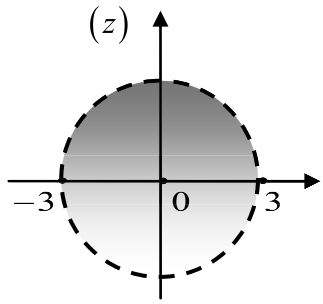

Рис. 13

Пример 5.8. Разложить в ряд по степеням $(z+3)$ функцию $f(z)=\ln\left(z^2+6z+13\right)$; указать область сходимости ряда.

Решение. 1. Найдем сначала точки, где функция не определена:

$$z^2+6z+13=0 \Rightarrow z=-3\pm\sqrt{9-13}=-3\pm 2i$$

Расстояние от этих точек до точки $z_0=-3$ равно 2 (рис. 12). В связи с этим функция $f(z)$ аналитична в круге $|z+3|<2$ и разлагается в этом круге в ряд по степеням $(z+3)$.

2. Преобразуем функцию к виду $\ln(1+w)$ и воспользуемся известным разложением $\ln(1+w)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{w^n}{n}$, $|w|<1$. Тогда

$$f(z)=\ln\left(z^2+6z+13\right)=\ln\left((z+3)^2+4\right)=\ln\left[4\left(1+\frac{(z+3)^2}{4}\right)\right]=$$

$$=\ln 4+\ln\left(1+\frac{(z+3)^2}{4}\right)=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(z+3)^{2n}}{4^n\cdot n},\quad \left|z+3\right|<2.$$

Пример 5.9. Функцию $f(z)=\dfrac{z-2}{z+3}$ разложить в ряд по степеням z.

Решение. Функция $f(z)$ имеет особую точку $z=-3$, следовательно, является аналитической а) в круге $\left|z\right|<3$, б) в кольце $3<\left|z\right|<\infty$. Найдем ряды для функции $f(z)$ в каждой из этих областей, выделив сначала целую часть функции:

$$f(z)=\frac{z-2}{z+3}=\frac{(z+3)-5}{z+3}=1-\frac{5}{z+3}.$$

А. Для разложения в круге $\left|z\right|<3$ в знаменателе из двух величин z и 3 вынесем за скобку большую по модулю, т. е. 3 (рис. 13):

$$f(z)=1-\frac{5}{z+3}=1-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1+z/3}=1-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1-(-z/3)}.$$

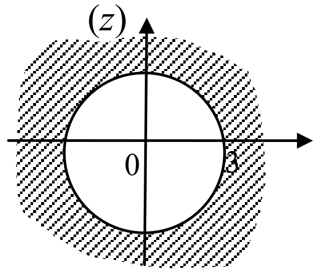

Рис. 14

Получившуюся дробь $\dfrac{1}{1-(-z/3)}$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\dfrac{b_1}{1-q}$, где $b_1=1$, $q=-\dfrac{z}{3}$, причем $\left|q\right|=\dfrac{\left|z\right|}{3}<1$. Учтем, что $\dfrac{b_1}{1-q}=b_1+b_1q+b_1q^2+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_1q^n$, если $\left|q\right|<1$. Тогда $f(z)=1-\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{1}{1-(-z/3)}=$

$$=1-\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z/3)^n=1-\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n}\qquad\left(\left|z\right|<3\right).$$

Б. Для разложения в кольце $3<\left|z\right|<\infty$ (рис. 14) в знаменателе дроби $\dfrac{5}{z+3}$ из двух величин z и 3 вынесем за скобку большую по модулю, теперь это z:

$$f(z)=1-\frac{5}{z+3}=1-\frac{5}{z}\cdot\frac{1}{1+3/z}=1-\frac{5}{z}\cdot\frac{1}{1-(-3/z)}.$$

Дробь $\frac{1}{1-(-3/z)}$ можно рассматривать как сумму $\frac{b_1}{1-q}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1=1$, $q=-3/z$, причем $|q|=|-3/z|=3/|z|<1$. Учтем, что

$$\frac{b_1}{1-q}=b_1+b_1q+b_1q^2+...=\sum_{n=0}^{\infty}b_1q^n, \text{ если } |q|<1.$$

Тогда

$$f(z)=1-\frac{5}{z}\cdot\frac{1}{1-(-3/z)}=1-\frac{5}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-3/z)^n=1-5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{z^{n+1}} \quad (3<|z|<\infty).$$

Пример 5.10. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{\left(z^2-4\right)^2}$ в ряд:

1) в окрестности точки $z_0=-2$, 2) в кольце $4<|z+2|<\infty$.

Решение. 1. Функция не определена в точках $z_1=2,\ z_2=-2$. Расстояние от первой из этих точек до точки $z_0=-2$ равно 4; вторая из этих точек совпадает с z_0. В связи с этим функция $f(z)$ аналитична в кольце $0<|z+2|<4$ (рис. 15) и разлагается в этом кольце в ряд Лорана по степеням $(z+2)$. Представим функцию в виде:

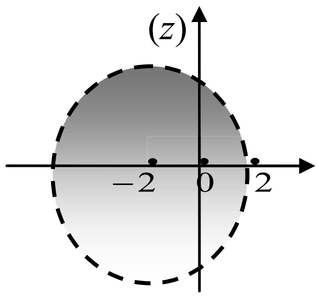

Рис. 15

$$f(z)=\frac{1}{\left(z^2-4\right)^2}=\frac{1}{(z+2)^2}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}, \quad \frac{1}{(z-2)^2}=-\left(\frac{1}{z-2}\right)'.$$

Преобразуем дробь $\frac{1}{z-2}$, выделив в ее знаменателе $(z+2)$: $\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+2)-4}$. В знаменателе из двух величин $(z+2)$ и (-4) вынесем за скобку большую по модулю в кольце $0<|z+2|<4$, т. е. (-4):

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+2)-4}=\frac{1}{-4}\cdot\frac{1}{1-(z+2)/4}.$$

Тогда дробь $\frac{1}{1-(z+2)/4}$ можно рассматривать как сумму $\frac{b_1}{1-q}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1=1$, $q=(z+2)/4$, причем $|q|=|z+2|/4<1$. Учтем, что $\frac{b_1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}b_1q^n$, если $|q|<1$. Тогда

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+2)-4}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+2}{4}}=-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{4}\right)^{n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^{n}}{4^{n+1}}\quad\left(0<\left|z+2\right|<4\right).$$

$$\frac{1}{(z-2)^2}=-\left(\frac{1}{z-2}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{4^{n+1}}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,(z+2)^{n-1}}{4^{n+1}};$$

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-4)^2}=\frac{1}{(z+2)^2}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}=\frac{1}{(z+2)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,(z+2)^{n-1}}{4^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,(z+2)^{n-3}}{4^{n+1}}.$$

2. В кольце $4<\left|z+2\right|<\infty$ (рис. 16) преобразуем дробь $\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{(z+2)-4}$, вынося в ее знаменателе из двух величин $(z+2)$ и (-4) большую по модулю, т.е. теперь $(z+2)$:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+2)-4}=\frac{1}{(z+2)}\cdot\frac{1}{1-4/(z+2)}$$

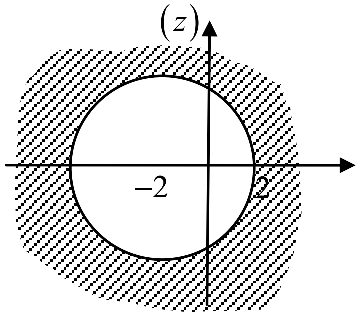

Рис. 16

Дробь $\dfrac{1}{1-4/(z+2)}$ можно рассматривать как сумму $\dfrac{b_1}{1-q}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, $b_1=1,\ q=4/(z+2)$, причем $\left|q\right|=4/\left|z+2\right|<1$. Учтем, что $\dfrac{b_1}{1-q}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_1q^n$, если $\left|q\right|<1$. Тогда

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+2)-4}=\frac{1}{(z+2)}\cdot\frac{1}{1-4/(z+2)}=\frac{1}{z+2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(4/(z+2)\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z+2)^{n+1}};$$

$$\frac{1}{(z-2)^2}=-\left(\frac{1}{z-2}\right)'=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z+2)^{n+1}}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n+1)}{(z+2)^{n+2}};$$

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-4)^2}=\frac{1}{(z+2)^2}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}=\frac{1}{(z+2)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n+1)}{(z+2)^{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n+1)}{(z+2)^{n+4}}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Разложить функцию $f(z)=\sin(2z+1)$ в ряд по степеням $(z+1)$, указать область сходимости ряда.

2. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$ в ряд и указать область сходимости ряда: а) в окрестности точки $z_0=0$, б) в окрестности бесконечности.

3. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$ в ряд в кольце $2<|z-1|<\infty$.

Ответы

1) $f(z)=\cos 1\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n+1}(z+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}-\sin 1\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n}(z+1)^{2n}}{(2n)!}, \quad |z+1|<\infty;$

2а) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-1}, \; 0<|z|<1;$ 2б) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{n+2}}, \quad 1<|z|<\infty;$

3) $f(z)=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{z-1}+5\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{(z-1)^{n+1}}=\dfrac{1}{z-1}+5\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{(z-1)^{n+1}}.$

6. ВЫЧЕТЫ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

6.1. Нули функции

Точка $z=a$ является нулем функции $f(z)$ порядка k, если функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z), \text{ где } \varphi(a)\neq 0. \tag{6.1}$$

Теорема 6.1 (о порядке нуля). Точка $z=a$ является нулем аналитической функции $f(z)$ порядка k тогда и только тогда, когда

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0, \; f^{(k)}(a)\neq 0, \tag{6.2}$$

т. е. порядок нуля равен порядку первой отличной от нуля производной.

Пример 6.1. Найти нули функции $f(z)=\left(z^2+4\right)^3(z-1)$ и определить их порядок.

Решение. Функция $f(z)=\left(z^2+4\right)^3(z-1)$ имеет три нуля: $z=2i$, $z=-2i$, $z=1$. Разложим функцию $f(z)$ на множители:

$$f(z)=(z-2i)^3(z+2i)^3(z-1).$$

Запишем функцию $f(z)$ в виде (6.1) тремя способами:

$$f(z)=(z-2i)^3\varphi_1(z), \text{ где } \varphi_1(z)=(z+2i)^3(z-1), \; \varphi_1(2i)\neq 0;$$

$$f(z)=(z+2i)^3\varphi_2(z), \text{ где } \varphi_2(z)=(z-2i)^3(z-1), \; \varphi_2(-2i)\neq 0;$$

$$f(z)=(z-1)\varphi_3(z), \quad \text{где } \varphi_3(z)=(z+2i)^3(z-2i)^3, \; \varphi_3(1i)\neq 0.$$

Отсюда следует, что $z=2i$, $z=-2i$ нули третьего порядка, а $z=1$ нуль первого порядка.

Пример 6.2. Найти нули функции $f(z)=\left(e^{iz}-1\right)^4$ и определить их порядок.

Решение. Найдем нули функции, учитывая, что период функции e^{iz} равен $2\pi i$:

$$f(z)=\left(e^{iz}-1\right)^4=0 \Rightarrow e^{iz}=1 \Rightarrow iz_k=0+2\pi ki \Rightarrow z_k=2\pi k \ \left(k=0,\pm 1,\pm 2...\right).$$

Определим порядок нуля сначала для функции $g(z)=e^{iz}-1$. Функцию $g(z)$ записать в виде (6.1) здесь не удается, но зато легко воспользоваться теоремой 6.1. Так как $g'(z_k)=e^{iz_k}=1\neq 0$, то точки $z_k=2\pi k$ являются нулями первого порядка для функции $g(z)=e^{iz}-1$, т. е. эту функцию можно представить в виде $g(z)=e^{iz}-1=(z-z_k)\cdot\varphi(z)$, $\varphi(z_k)\neq 0$. Тогда

$$f(z)=\left(e^{iz}-1\right)^4=(z-z_k)^4\cdot\varphi^4(z),\ \varphi^4(z_k)\neq 0.$$

В связи с этим точки $z_k=2\pi k$ являются нулями четвертого порядка для функции $f(z)$.

Пример 6.3. Определить порядок нуля $z_0=0$ для функции

$$f(z)=2\cos z^3+z^6-2.$$

Решение. Воспользуемся разложением в ряд функции $\cos z$:

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+...\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z)=2\cos z^3+z^6-2=2\left(1-\frac{z^6}{2!}+\frac{z^{12}}{4!}-\frac{z^{18}}{6!}+...\right)+z^6-2=z^{12}\left(\frac{1}{4!}-\frac{z^6}{6!}+...\right).$$

Таким образом, функция представима в виде (6.1):

$$f(z)=z^{12}\varphi(z),\quad \text{где}\ \varphi(0)=\left.\left(\frac{1}{4!}-\frac{z^6}{6!}+...\right)\right|_{z=0}=\frac{1}{4!}\neq 0.$$

В связи с этим $z_0=0$ является для функции $f(z)=2\cos z^3+z^6-2$ нулем порядка $k=12$.

Отметим, что для отыскания порядка нуля по порядку первой отличной от нуля производной пришлось бы дифференцировать функцию 12 раз.

6.2. Особые точки функции

Особые точки функции − это точки, в которых нарушается ее аналитичность. Различают три типа изолированных особых точек.

Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ − конечен, то z_0 называют **устранимой** особой точкой.
Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, то z_0 называют **полюсом**.
Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует, то z_0 называют **существенно особой** точкой.

Порядок полюса − это натуральное число k, такое, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k$ отличен от нуля и бесконечности. Более удобно определять порядок полюса, используя связь полюса с нулями.

Теорема 6.2. Пусть z_0 есть нуль порядка k функции $\varphi(z)$ и нуль порядка n функции $\psi(z)$; тогда для функции $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ точка z_0 есть полюс порядка $n-k$, если $k<n$, и устранимая особая точка, если $k\ge n$.

Замечание
Если $\varphi(z_0)\ne 0$, то можно записать $\varphi(z)=(z-z_0)^0\cdot\varphi(z)$ и считать z_0 нулем функции $\varphi(z)$ порядка $k=0$. Теорема 6.2 остается справедливой и в этом случае.

Пример 6.4. Определить типы особых точек функций

$$1)\ f(z)=\frac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{z^4},\quad 2)\ f(z)=\frac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{(z-2\pi)^5},\quad 3)\ f(z)=\frac{1}{\left(e^{iz}-1\right)^4}.$$

Решение

1. Нуль знаменателя $z_0=0$ функции $f(z)=\dfrac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{z^4}$ является для числителя нулем порядка $k=4$ (см. пример 6.2) и для знаменателя нулем порядка $n=4$. Так как $k=n$, то по теореме 6.2 точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой для функции $f(z)$.

2. Нуль знаменателя $z_0 = 2\pi$ функции $f(z) = \dfrac{\left(e^{iz} - 1\right)^4}{(z - 2\pi)^5}$ является для числителя нулем порядка $k = 4$ (пример 6.2), а для знаменателя нулем порядка $n = 5$. Так как $n > k$, то по теореме 6.2 точка $z_0 = 2\pi$ является полюсом порядка $n - k = 5 - 4 = 1$ для функции $f(z)$.

3. Нули знаменателя $z_k = 2\pi k$ функции $f(z) = \dfrac{1}{\left(e^{iz} - 1\right)^4}$ для числителя, равного $1 = (z - z_k)^0$ являются нулями порядка $k = 0$, а для знаменателя нулями порядка $n = 4$. Так как $n > k$, то по теореме 6.2 точки $z_k = 2\pi k$ являются полюсами порядка $n - k = 4 - 0 = 4$ для функции $f(z)$.

Тип особой точки можно также охарактеризовать через разложение функции в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Теорема 6.3.

1. Если в разложении функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 **нет отрицательных степеней** $(z - z_0)$, то z_0 является **устранимой** особой точкой.
2. Если ряд Лорана содержит **конечное число отрицательных степеней**, т. е. $f(z) = \dfrac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \ldots + \dfrac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots\ (c_{-k} \neq 0)$, то z_0 является **полюсом** порядка k.
3. Если ряд Лорана содержит **бесконечно много отрицательных степеней** $(z - z_0)$, то z_0 **является существенно особой** точкой.

Пример 6.5. Определить тип особой точки функции $f(z) = z^5 \sin\dfrac{1}{z^2}$.

Решение. Точка $z = 0$ является особой точкой функции $f(z) = z^5 \sin\dfrac{1}{z^2}$.

Ряд Лорана этой функции в окрестности точки $z = 0$ имеет вид

$$f(z) = z^5 \sin\frac{1}{z^2} = z^5\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - .....\right) = z^3 - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^5} - ....,$$

т. е. содержит бесконечно много отрицательных степеней z; поэтому точка $z = 0$ является существенно особой точкой данной функции.

6.3. Вычеты функции в ее особых точках

Вычет функции $f(z)$ **в ее особой точке** z_0 есть число, равное коэффициенту c_{-1} разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

$$\boxed{\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z) = c_{-1}}\,. \tag{6.3}$$

В устранимой особой точке

$$\boxed{\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z) = 0}\,. \tag{6.4}$$

В полюсе первого порядка

$$\boxed{\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z) = \lim_{z\to z_0}\left(f(z)\cdot(z-z_0)\right)}\,, \tag{6.5}$$

$$\boxed{\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}\ \text{, если}\ \begin{array}{c}\varphi(z_0)\neq 0,\\ \psi(z_0)=0,\ \psi'(z_0)=0.\end{array}}\,. \tag{6.6}$$

В полюсе *k*-го порядка

$$\boxed{\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[f(z)\cdot(z-z_0)^k\right]}\,. \tag{6.7}$$

Пример 6.6. Найти вычеты в особых точках для функций:

$$1)\ f(z)=\frac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{z^4},\ \ 2)\ f(z)=\frac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{(z-2\pi)^5},$$

$$3)\ f(z)=z^5\cdot\sin\frac{1}{z^2},\ \ 4)\ f(z)=z^2\cdot\sin^6\frac{1}{z}.$$

Решение. 1. Особая точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой для функции $f(z)=\dfrac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{z^4}$ (см. пример 6.4), поэтому $\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z)=0.$

2. Особая точка $z_0=2\pi$ является полюсом первого порядка для функции $f(z)=\dfrac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{(z-2\pi)^5}$ (см. пример 6.4). Формула (6.6) здесь неприменима, так как $\varphi(z_0)=\left.\left(e^{iz}-1\right)^4\right|_{z_0=2\pi}=0$. Поэтому применим формулу (6.5):

$$\underset{z=2\pi}{\text{Выч}}\, f(z) = \lim_{z\to 2\pi}\left(f(z)\cdot(z-2\pi)\right) = \lim_{z\to 2\pi}\frac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{(z-2\pi)^5}\cdot(z-2\pi) = \left(\lim_{z\to 2\pi}\frac{e^{iz}-1}{z-2\pi}\right)^4 =$$

$$= \left(\lim_{z\to 2\pi}\frac{\left(e^{iz}-1\right)'}{\left(z-2\pi\right)'}\right)^4 = \left(\lim_{z\to 2\pi}\frac{i\,e^{iz}}{1}\right)^4 = e^{8\pi i} = e^0 = 1.$$

3. Точка $z=0$ является особой точкой для функции $f(z)=z^5\sin\frac{1}{z^2}$. Ряд Лорана этой функции в окрестности точки $z=0$ имеет вид (см. пример 6.5): $f(z)=z^5\sin\frac{1}{z^2}=z^3-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^5}-....$, поэтому

$$\underset{z=0}{\text{Выч}}\, f(z) = c_{-1} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

4. Точка $z=0$ является особой точкой для функции $f(z)=z^2\cdot\sin^6\frac{1}{z}$. Так как функция четная, то ряд Лорана этой функции в окрестности точки $z=0$ не содержит нечетных степеней z, в частности, не содержит $\frac{1}{z}$; поэтому коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен нулю и, значит, $\underset{z=0}{\text{Выч}}\, f(z)=c_{-1}=0.$

Пример 6.7. Найти вычеты в особых точках для функций:

1) $f(z)=\operatorname{ctg} z$, 2) $f(z)=\frac{z^3}{1+z^2}$.

Решение. 1. Для функции $f(z)=\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}$ найдем особые точки:

$$\sin z = 0 \Rightarrow z_k = \pi k \ \left(k=0,\pm 1,\pm 2\,...\right).$$

Так как $\cos z_k \neq 0,\ \sin z_k = 0,\ \left(\sin z_k\right)' \neq 0$, то применим формулу (6.5):

$$\underset{z=z_k}{\text{Выч}}\, f(z) = \underset{z=z_k}{\text{Выч}}\frac{\cos z}{\sin z} = \left.\frac{\cos z}{\left(\sin z\right)'}\right|_{z=z_k} = 1.$$

2. Для функции $f(z)=\frac{z^3}{1+z^2}$ найдем особые точки:

$$z^2+1=0 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow z=\pm i.$$

Так как $\left.z^3\right|_{z=\pm i}\neq 0,\ \left.\left(1+z^2\right)\right|_{z=\pm i}=0,\ \left.\left(1+z^2\right)'\right|_{z=\pm i}\neq 0$, то выгодно применить формулу (6.5):

$$\underset{z=\pm i}{\text{Выч}}\, f(z) = \underset{z=\pm i}{\text{Выч}} \frac{z^3}{1+z^2} = \left.\frac{z^3}{\left(1+z^2\right)'}\right|_{z=\pm i} = \left.\frac{z^2}{2}\right|_{z=\pm i} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 6.8. Найти вычеты в особых точках функции $f(z) = \dfrac{1}{z\left(e^{2z}-1\right)}$.

Решение. Найдем особые точки функции, учитывая период $T = 2\pi i$ функции e^z:

$$z\left(e^{2z}-1\right) = 0 \;\Rightarrow\; z_0 = 0,\; 2z_k = 0 + 2\pi k i \;\Rightarrow\; z_0 = 0,\; z_k = \pi k i \;\left(k = \pm 1, \pm 2, \ldots\right).$$

1. Исследуем особые точки $z_k = \pi k i$ $\left(k = \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$. Функцию выгодно записать в виде $f(z) = \dfrac{1/z}{e^{2z}-1}$. Так как в точках z_k имеем $1/z \neq 0,\; e^{2z}-1 = 0,\; \left(e^{2z}-1\right)' \neq 0$, то применима формула (6.6):

$$\underset{z=z_k}{\text{Выч}}\, f(z) = \underset{z=z_k}{\text{Выч}} \frac{1/z}{e^{2z}-1} = \left.\frac{1/z}{\left(e^{2z}-1\right)'}\right|_{z=z_k} = \frac{1}{2z_k e^{2z_k}} = \frac{1}{2\pi k i}.$$

2. Исследуем особую точку $z_0 = 0$ функции $f(z) = \dfrac{1}{z\left(e^{2z}-1\right)}$. Эта точка для функции $e^{2z}-1$ является нулем первого порядка, так как $\left(e^{2z}-1\right)' = \left.2e^{2z}\right|_{z=0} \neq 0$; поэтому

$$e^{2z}-1 = (z-0)\cdot\varphi(z) = z\cdot\varphi(z), \text{ где } \varphi(0) \neq 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow z\left(e^{2z}-1\right) = z^2\cdot\varphi(z), \text{ где } \varphi(0) \neq 0.$$

Отсюда следует, что $z_0 = 0$ является для знаменателя нулем порядка $n = 2$. Для числителя равного $1 = \left(z - z_0\right)^0$ точка $z_0 = 0$ является нулем порядка $k = 0$. В связи с этим по теореме 6.2 точка $z_0 = 0$ является полюсом порядка $n - k = 2 - 0 = 2$ для функции $f(z)$. Вычет функции в этой точке вычислим по формуле (6.7):

$$\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to z_0}\left(f(z)\cdot(z-z_0)^2\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2}{z\left(e^{2z}-1\right)}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{e^{2z}-1}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{\left(e^{2z}-1\right) - z\cdot 2e^{2z}}{\left(e^{2z}-1\right)^2}.$$

Получили неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия учтем, что

$$e^{2z}=1+\frac{2z}{1!}+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\ldots \;\Rightarrow\quad e^{2z}-1=2z+o(z),\quad e^{2z}-1\sim 2z.$$

Под знаком предела знаменатель $\left(e^{2z}-1\right)^2$ заменим на эквивалентную бесконечно малую $4z^2$. Тогда

$$\operatorname*{Выч}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\left(e^{2z}-1\right)-z\cdot 2e^{2z}}{\left(e^{2z}-1\right)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\left(2z+2z^2+4z^3/3+\ldots\right)-2z\cdot\left(1+2z+2z^2+\ldots\right)}{(2z)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{-2z^2-8z^3/3+\ldots}{4z^2}=-\frac{1}{2}.$$

Примеры для самостоятельного решения

Определить тип особых точек следующих функций и найти вычеты в этих точках: 1) $f(z)=\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$; 2) $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z+\pi}$; 3) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh} z^2}{z}$.

Ответы: 1) $z=0,\ z=-1$ – полюсы второго порядка,

$$\operatorname*{Выч}_{z=0} f(z)=-2,\ \operatorname*{Выч}_{z=-1} f(z)=2;$$

2) $z=-\pi$ – существенно особая точка, $\operatorname*{Выч}_{z=-\pi} f(z)=-\dfrac{1}{2}$;

3) $z=0$ – устранимая особая точка, $\operatorname*{Выч}_{z=0} f(z)=0$.

6.4. Применение вычетов к вычислению интегралов

Вычисление интегралов $\oint\limits_L f\ z\ dz$

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области D с границей (L) за исключением особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащих внутри D. Тогда

$$\oint\limits_{(L)} f(z)dz=2\pi i\cdot\left[\operatorname*{Выч}_{z=z_1} f(z)+\operatorname*{Выч}_{z=z_2} f(z)+\ldots+\operatorname*{Выч}_{z=z_n} f(z)\right]. \qquad (6.8)$$

Пример 6.9. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{tg} z}{z} dz$.

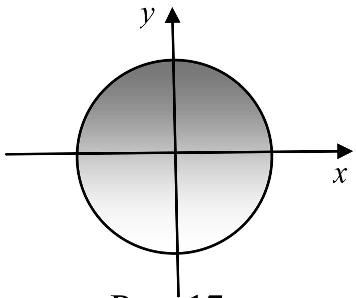

Рис. 17

Решение. Построим контур интегрирования $|z|=2$. Это – окружность с центром в начале координат радиусом $R=2$ (рис. 17). В области $D: |z|<2$ функция $f(z)=\frac{\operatorname{tg} z}{z}$ аналитична всюду, кроме точек $z=0, z=\frac{\pi}{2}, z=-\frac{\pi}{2}$; другие особые точки $z_k=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k=1, \pm 2, \pm 3 \ldots$ лежат вне области и поэтому не учитываются. Точка $z=0$ является устранимой особой точкой, так как $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\operatorname{tg} z}{z}=1$, поэтому $\underset{z=0}{\text{Выч}} f(z)=0$.

Для вычисления вычета в точках $z=\frac{\pi}{2}, z=-\frac{\pi}{2}$ воспользуемся тем, что

$$\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \text{ в случае, когда } \varphi(z_0)\neq 0,\ \psi(z_0)=0,\ \psi'(z_0)\neq 0.$$

В связи с этим представим функцию в виде $\frac{\operatorname{tg} z}{z}=\frac{(\sin z)/z}{\cos z}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, проверим выполнение условий $\varphi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin(\pm\pi/2)}{\pm\pi/2}\neq 0$, $\psi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=$ $=\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\psi'(z_0)=-\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$ и вычислим вычет:

$$\underset{z=\pm\pi/2}{\text{Выч}}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(\pm\pi/2)}{\psi'(\pm\pi/2)}=\left.\frac{(\sin z)/z}{(\cos z)'}\right|_{z=\pm\pi/2}=\left.\frac{\sin z}{-z\cdot\sin z}\right|_{z=\pm\pi/2}=\mp\frac{2}{\pi}.$$

Тогда $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{tg} z}{z}dz=2\pi i\left(\underset{z=0}{\text{Выч}} f(z)+\underset{z=\pi/2}{\text{Выч}} f(z)+\underset{z=-\pi/2}{\text{Выч}} f(z)\right)=0.$

Пример 6.10. Вычислить интеграл $\oint\limits_{(L)}\frac{z^2+1}{z-i}\operatorname{sh}\frac{1}{z}\,dz$, если (L): $z=1+4e^{it}, t\in[0,2\pi]$.

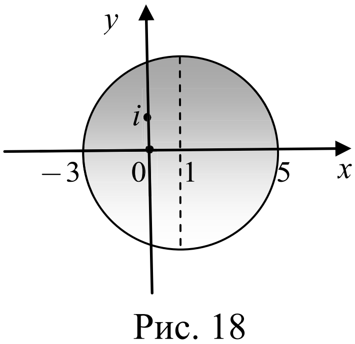

Рис. 18

Решение. Построим контур (L) – окружность с центром в точке $z_0=1$ и радиусом 4 (рис.18).

Найдем особые точки функции $f(z)=\frac{z^2+1}{z-i}\operatorname{sh}\frac{1}{z}$.

Это точки $z=0,\ z=i$; они расположены внутри области $(D)\colon |z|<4$, поэтому

$$\oint\limits_{(L)} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\underset{z=0}{\text{Выч}}\, f(z) + \underset{z=i}{\text{Выч}}\, f(z)\right).$$

Для вычисления вычета функции $f(z)$ в точке $z=0$ разложим функцию в ряд в окрестности этой точки:

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z-i}\operatorname{sh}\frac{1}{z} = \frac{(z-i)\cdot(z+i)}{z-i}\operatorname{sh}\frac{1}{z} = (z+i)\cdot\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}+\ldots..\right) =$$

$$= 1+\frac{i}{z}+\frac{1}{3!z^2}+\frac{i}{3!z^3}+\ldots$$

Следовательно, $\underset{z=0}{\text{Выч}}\, f(z) = c_{-1} = i$.

Для вычисления вычета функции $f(z)$ в точке $z=i$ определим тип особой точки. Точка $z=i$ является устранимой особой точкой, так как

$$\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)\cdot(z+i)}{z-i}\operatorname{sh}\frac{1}{z} = \lim_{z\to i}\left[(z+i)\cdot\operatorname{sh}\frac{1}{z}\right] =$$

$$= 2i\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{1}{i}\right) = 2i\cdot\operatorname{sh}(-i) = -2i^2\cdot\sin 1 = 2\sin 1.$$

В связи с этим $\underset{z=i}{\text{Выч}}\, f(z) = 0$ и $\oint\limits_{(L)} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\underset{z=0}{\text{Выч}}\, f(z) + \underset{z=i}{\text{Выч}}\, f(z)\right) =$ $= 2\pi i\cdot(i+0) = -2\pi.$

Пример 6.11. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{(L)} \frac{z\,dz}{\left(z^2-(1+3i)z+3i\right)^2},\ \text{где}\ (L)\colon \frac{(x-1)^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1.$$

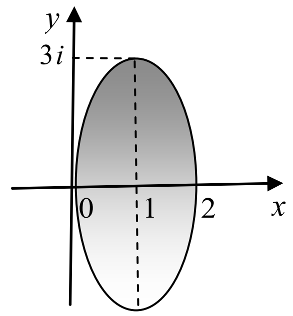

Рис. 19

Решение. Контур (L) есть эллипс с центром в точке $(1;0)$ и полуосями $a=1,\ b=3$ (рис. 19). Найдем особые точки подынтегральной функции $f(z)$, решив уравнение $z^2-(1+3i)z+3i=0$. По теореме Виета корни уравнения равны $z=1,\ z=3i$. Внутрь контура попадает только одна особая точка $z=1$. Это – полюс второго порядка, так как $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2\cdot(z-3i)^2}$, поэтому по формуле (6.7) при $k=2$ имеем

$$\underset{z=1}{\text{Выч}}\, f(z)=\lim_{z\to 1}\left(\frac{z\cdot(z-1)^2}{(z-1)^2\cdot(z-3i)^2}\right)'=\lim_{z\to 1}\left(\frac{z}{(z-3i)^2}\right)'=\lim_{z\to 1}\frac{-3i-z}{(z-3i)^3}=\frac{-7+24i}{250}.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{(L)}\frac{z\,dz}{\left(z^2-(1+3i)z+3i\right)^2}=2\pi i\,\underset{z=1}{\text{Выч}}\, f(z)=2\pi i\cdot\frac{-7+24i}{250}=-\frac{\pi(24+7i)}{125}.$$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

$$\oint\limits_{|z+i|=3}\frac{e^z dz}{z^3-\pi i z^2},\quad \oint\limits_{|z-\pi|=4}\frac{z\,dz}{\sin z},\quad \oint\limits_{(L)} z^2\sin\frac{1}{z}dz,\ (L):\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Ответы: $\frac{2+\pi i}{\pi^2}$, $2\pi^2 i$, $-\frac{\pi i}{3}$.

Вычисление интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Пусть функция $f(z)=\frac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ есть отношение двух многочленов, где $n-k>1$ и $z_1, z_2, \ldots, z_N$ есть нули знаменателя $Q_n(z)$, лежащие в верхней полуплоскости. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Res} f(z_k). \tag{6.9}$$

Пример 6.12. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$.

Решение. Так как подынтегральная функция является четной, то

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}.$$

Функция $f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}$ есть отношение многочлена степени $k=2$ к многочлену степени $n=4$, т. е. условие $n-k>1$ выполняется. Функция $f(z)$ в верхней полуплоскости имеет две особые точки $z=i$, $z=2i$, поэтому по формуле (6.9)

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}+\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}\right].$$

Для функции $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}=\dfrac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}$ точки $z=i,\, z=2i$ являются полюсами первого порядка. В связи с этим для вычисления вычетов воспользуемся формулой (6.5):

$$I=\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}+\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}\right]=$$

$$=\pi i\left[\lim_{z\to i}\frac{z^2\cdot(z-i)}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}+\lim_{z\to 2i}\frac{z^2\cdot(z-2i)}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}\right]=$$

$$=\pi i\left[\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)\left(z^2+4\right)}+\lim_{z\to 2i}\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)(z+2i)}\right]=\pi i\left[\frac{-1}{2i\cdot 3}+\frac{-4}{-3\cdot 4i}\right]=\frac{\pi}{6}.$$

Вычисление интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx$$

Пусть функция $f(z)=\dfrac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ есть отношение двух многочленов, где $k<n$ и $z_1, z_2, \ldots, z_N$ есть нули знаменателя $Q_n(z)$, лежащие в верхней полуплоскости. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)e^{iaz}\right],\ a>0. \tag{6.10}$$

Отметим, что $e^{iax}=\cos ax+i\sin ax$, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx+i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx.$$

Следовательно, можно записать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx\right],$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx = \operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx\right] \qquad (6.11)$$

и воспользоваться формулой (6.10) и для этих типов интегралов.

Пример 6.13. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos x}{x^2-2x+5}dx$.

Решение. Воспользуемся первой из формул (6.11):

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos x}{x^2-2x+5}dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+5}dx .$$

Функция $f(z) = \frac{(z-1)}{z^2-2z+5}$ есть отношение многочлена степени $k=1$ к многочлену степени $n=2$, т. е. условие $k<n$, необходимое для применения формулы (6.10), выполняется. Найдем нули знаменателя z^2-2z+5 функции $f(z)$: это точки $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 1-2i$; в верхней полуплоскости находится первая из них. В связи с этим применяя формулу (6.10), получим

$$I = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+5}dx\right] = \operatorname{Re}\left[2\pi i \operatorname*{Выч}_{z=z_1} \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+5}\right].$$

Вычет в точке $z=z_1$ для функции вида $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ в случае, когда $\varphi(z_1)\neq 0$, $\psi(z_1)=0$, $\psi'(z_1)\neq 0$**,** можно вычислить по формуле $\operatorname*{Выч}_{z=z_1}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_1)}{\psi'(z_1)}$,

поэтому

$$I = \operatorname{Re}\left[2\pi i \operatorname*{Выч}_{z=z_1} \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+5}\right] = \operatorname{Re}\left[2\pi i \left.\frac{(z-1)e^{iz}}{\left(z^2-2z+5\right)'}\right|_{z=z_1}\right] = \operatorname{Re}\left[2\pi i \left.\frac{(z-1)e^{iz}}{2z-2}\right|_{z=z_1}\right] =$$
$$= \operatorname{Re}\left[\pi i\, e^{i(1+2i)}\right] = \operatorname{Re}\left[\pi i\, e^{-2}e^{i}\right] = \operatorname{Re}\left[\pi i\, e^{-2}(\cos 1 + i\sin 1)\right] = -\pi e^{-2}\sin 1.$$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^3\sin x}{\left(x^2+1\right)^2}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}dx .$$

Ответы: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $\frac{-\pi}{27}$, $\frac{\pi}{4e}$, $\frac{\pi}{12e^2}(2e-1)$.

7. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

7.1. Оригинал и его изображение

Комплекснозначная функция $f(t)=u(t)+iv(t)$ вещественного аргумента t называется **оригиналом**, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $f(t)$ кусочно-непрерывна;

2) $f(t)=0$ при $t<0$;

3) $|f(t)|\le M\cdot e^{s_0 t}$, число s_0 называют показателем роста функции $f(t)$.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция

$$\boxed{F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.}$$

Основные свойства изображений удобно свести в следующую таблицу:

№	Оригинал	Изображение
1	$\lambda f(t)+\mu g(t)$	$\lambda F(p)+\mu G(p)$
2	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
3	$f''(t)$	$p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$
4	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
5	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$
6	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(p)dp$
7	$f(t-\alpha)\cdot\eta(t-\alpha)$	$F(p)\cdot e^{-\alpha p}$
8	$f(t)\cdot e^{\alpha t}$	$F(p-\alpha)$

№	Оригинал	Изображение
12	1	$\frac{1}{p}$
13	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
14	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
15	$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
16	$\cos\alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
17	$\operatorname{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
18	$\operatorname{ch}\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
19	$t\cdot\sin\alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$

№	Оригинал	Изображение
9	$f(t)*g(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau$	$F(p)\cdot G(p)$
10	$f(t)*g'(t)+f(t)\cdot g(0)$	$p\cdot F(p)\cdot G(p)$
11	$f(t)$ с периодом T	$\dfrac{1}{1-e^{-pT}}\int\limits_0^T f(t)\cdot e^{-pt}\,dt$

№	Оригинал	Изображение
20	$t\cdot\cos\alpha t$	$\dfrac{p^2-\alpha^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$
21	$t\cdot\operatorname{sh}\alpha t$	$\dfrac{2p\alpha}{\left(p^2-\alpha^2\right)^2}$
22	$t\cdot\operatorname{ch}\alpha t$	$\dfrac{p^2+\alpha^2}{\left(p^2-\alpha^2\right)^2}$

Более подробные таблицы приведены, например, в [2], [6], [7].

Тот факт, что $F(p)$ есть изображение для $f(t)$, записывают кратко так:

$$F(p)\doteqdot f(t) \text{ или } f(t)\doteqdot F(p).$$

Пример 7.1. Найти изображения следующих оригиналов:

$$1)\ \frac{1-\cos t}{t},\quad 2)\ \int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau,\quad 3)\ t^2\cos t.$$

Решение. 1. Из таблицы изображений (см. формулы 12, 16 и 6) получим

$$1-\cos t\doteqdot\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1},$$

$$\frac{1-\cos t}{t}\doteqdot\int\limits_p^\infty\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\right)dp=\left(\ln p-\frac{1}{2}\ln\left(p^2+1\right)\right)\Bigg|_p^\infty=$$

$$=\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\Bigg|_p^\infty=\ln 1-\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}=\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}.$$

2. Из таблицы изображений (см. формулы 15, 6 и 4) получим:

$$\sin t\doteqdot\frac{1}{p^2+1},\qquad \frac{\sin t}{t}\doteqdot\int\limits_p^\infty\frac{dp}{p^2+1}=\operatorname{arctg}p\Big|_p^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p=\operatorname{arcctg}p,$$

$$\int\limits_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\doteqdot\frac{\operatorname{arcctg}p}{p}.$$

3. Из таблицы изображений (см. формулы 20 и 5) получим:

$$t\cos t\doteqdot\frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2},\qquad t^2\cos t\doteqdot-\left(\frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}\right)'=\frac{2p\left(p^2-3\right)}{\left(p^2+1\right)^3}.$$

Важную роль в приложениях играют функции

$$\boxed{\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}\qquad \eta_{[a,\,b]}(t)=\begin{cases}1, & t\in[a,b],\\ 0, & t\notin[a,b],\end{cases}}$$

называемые соответственно функцией Хэвисайда и единичной функцией отрезка $[a,b]$.

> Единичная функция $\eta_{[a,\,b]}(t)$ отрезка $[a,b]$ представима в виде $\eta_{[a,\,b]}(t)=\eta(t-a)-\eta(t-b)$ и имеет изображение $\eta_{[a,\,b]}(t)\doteqdot\dfrac{1}{p}e^{-pa}-\dfrac{1}{p}e^{-pb}$.

Пример 7.2. Найти изображение функции, заданной графиком (рис. 20).

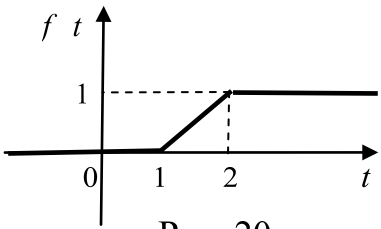

Рис. 20

Решение. Функция $f(t)$ равна сумме двух вспомогательных функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (рис. 21, рис. 22). Так как

$f_1(t)=(t-1)\cdot\eta_{[1,2]}(t)=(t-1)[\eta(t-1)-\eta(t-2)],$

$f_2(t)=\eta(t-2)$, то $f(t)=f_1(t)+f_2(t)=$

$$=(t-1)\cdot[\eta(t-1)-\eta(t-2)]+\eta(t-2)=$$

$$=(t-1)\cdot\eta(t-1)-(t-2)\cdot\eta(t-2).$$

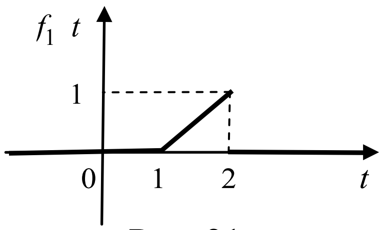

Рис. 21

По таблице изображений (см. формулы 13 и 7) имеем:

$$t\cdot\eta(t)\doteqdot\frac{1}{p^2},\quad (t-1)\cdot\eta(t-1)\doteqdot\frac{e^{-p}}{p^2},\quad (t-2)\cdot\eta(t-2)\doteqdot\frac{e^{-2p}}{p^2}.$$

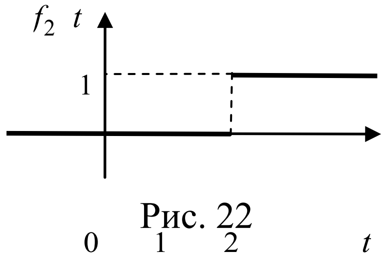

Рис. 22

Для функции $f(t)$ получим изображение:

$$f(t)\doteqdot\frac{e^{-p}}{p^2}-\frac{e^{-2p}}{p^2}=\frac{e^{-p}-e^{-2p}}{p^2}.$$

Пример 7.3. Найти оригиналы по изображениям: 1) $F(p)=\dfrac{2p-3}{p^2+4p+13}$; 2) $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)\left(p^2+4\right)}$; 3) $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$.

Решение. 1. Выделим в знаменателе полный квадрат $p^2+4p+13=(p+2)^2+9$ и преобразуем функцию

$$F(p)=\frac{2p-3}{p^2+4p+13}=\frac{2(p+2)-7}{(p+2)^2+9}=2\frac{(p+2)}{(p+2)^2+9}-7\frac{1}{(p+2)^2+9}.$$

По таблице изображений (формулы 16 и 15) имеем:

$$\frac{p}{p^2+9} \doteqdot \cos 3t,\ \ \frac{1}{p^2+9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9} \doteqdot \frac{1}{3}\sin 3t \ \Rightarrow\ 2\frac{p}{p^2+9} - 7\frac{1}{p^2+9} \doteqdot 2\cos 3t - \frac{7}{3}\sin 3t.$$

Тогда, используя формулу 8 из таблицы изображений, получим

$$f(t) = 2e^{-2t}\cos 3t - \frac{7}{3}e^{-2t}\sin 3t.$$

2. Разложим функцию $F(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{p+2}{(p+1)(p-2)\left(p^2+4\right)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Приведя к общему знаменателю, получим:

$$p+2 = A(p-2)\left(p^2+4\right) + B(p+1)\left(p^2+4\right) + \left(Cp\ \ +D\right)(p+1)(p-2).$$

Равенство верно при любом p:

при $p=2$ имеем $4 = 24B \Rightarrow B = 1/6$,

при $p=-1$ имеем $1 = -15A \Rightarrow A = -1/15$,

при $p=0$ имеем $2 = -8A + 4B - 2D \Rightarrow D = -2/5$;

сравним коэффициенты при p^3: $0 = A + B + C \Rightarrow C = -1/10$.

Итак,

$$F(p) = -\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{-p/10 - 2/5}{p^2+4} =$$

$$= -\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{p^2+4}.$$

Тогда, используя таблицу изображений (формулы 14, 15, 16), получим:

$$f(t) = -\frac{1}{15}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t.$$

3. Запишем $F(p)$ в виде $F(p) = e^{-3p}\dfrac{1}{(p+1)^2}$ и найдем сначала оригинал

для функции $\dfrac{1}{(p+1)^2}$, используя формулы 13 и 8 из таблицы:

$$\frac{1}{p^2} \doteqdot t,\ \ \frac{1}{(p+1)^2} \doteqdot t\cdot e^{-t} = t\cdot e^{-t}\cdot\eta(t).$$

Тогда, применяя формулу 7 таблицы изображений, получим:

$$F(p) = e^{-3p}\cdot\frac{1}{(p+1)^2} \doteqdot (t-3)\cdot e^{-(t-3)}\cdot\eta(t-3).$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти изображения следующих оригиналов:

а) $\int_0^t \operatorname{sh} t dt$; б) $\sin^2 t$; в) $f(t)$ (рис. 23).

2. Найти оригинал по данному изображению:

а) $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$; б) $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$;

в) $F(p) = \dfrac{1}{7 - p + p^2}$.

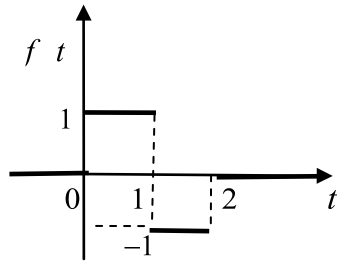

Рис. 23

Ответы: 1. а) $\dfrac{1}{p(p^2-1)}$; б) $\dfrac{2}{p(p^2+4)}$; в) $\dfrac{(1-e^{-p})^2}{p}$.

2. а) $\dfrac{1}{9}\left(e^{-2t} - e^t + 3te^t\right)$; б) $e^{t-1}\eta(t-1) - \eta(t-1)$; в) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9} e^{t/2} \cdot \sin\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t$.

7.2. Применение операционного исчисления

Использование операционного метода основано на том, что при переходе от оригинала к изображению операции дифференцирования и интегрирования заменяются более простыми операциями умножения и деления. В связи с этим операционный метод удобно применять для решения дифференциальных и интегральных уравнений. Для этого следует:

1) перейти от оригиналов к их изображениям (при этом дифференциальные и интегральные уравнения перейдут в алгебраические);
2) из алгебраических уравнений найти изображения;
3) по изображениям восстановить оригиналы.

Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пример 7.4. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} x'' + x = 2\,te^t + 4\sin t, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Перейдем в уравнении от оригиналов к изображениям:

$x(t) \risingdotseq X(p) \;\Rightarrow\; x''(t) \risingdotseq p^2X - p\,x(0) - x'(0) = p^2X,\; t\,e^t \risingdotseq \dfrac{1}{(p-1)^2},\; \sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}.$

Используя свойство линейности, получим уравнение относительно изображения $X(p)$: $p^2X + X = \dfrac{2}{(p-1)^2} + \dfrac{4}{p^2+1}$. Отсюда

$$X(p) = \frac{2}{(p-1)^2\left(p^2+1\right)} + \frac{4}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

По изображению восстановим оригинал. Рассмотрим каждое из слагаемых.

1. Слагаемое $\dfrac{2}{(p-1)^2\left(p^2+1\right)}$ разложим на простейшие дроби:

$$\frac{2}{(p-1)^2\left(p^2+1\right)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Приведя к общему знаменателю, получим:

$$2 = A(p-1)\left(p^2+1\right) + B\left(p^2+1\right) + (Cp+D)(p-1)^2.$$

Равенство верно при любом p:

при $p=1$ имеем $2=2B \Rightarrow B=1$; при $p=0$ имеем $2=-A+B+D$.

Сравним коэффициенты при p^3 и p^2: $0=A+C,\; 0=-A+B+D-2C$.

Решим систему $\begin{cases} B=1, \\ -A+B+D=2, \\ A+C=0, \\ -A+B+D-2C=0. \end{cases}$ Получим: $C=1,\; A=-1,\; D=0,\; B=1.$

Тогда $\dfrac{2}{(p-1)^2(p^2+1)} = -\dfrac{1}{p-1} + \dfrac{1}{(p-1)^2} + \dfrac{p}{p^2+1} \risingdotseq -e^t + t\,e^t + \cos t$.

2. Слагаемое $\dfrac{4}{(p^2+1)^2}$ можно рассматривать как произведение изображений $\dfrac{4}{p^2+1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$. По свойству об изображении свёртки (формула 9 из таблицы изображений) получим

$$\frac{4}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1} \doteq 4\sin t * \sin t = 4\int_0^t \sin\tau\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau = 2\int_0^t (\cos(2\tau-t)-\cos t)\,d\tau =$$

$$= \sin(2\tau - t)\Big|_0^t - 2\tau\cos t\Big|_0^t = 2\sin t - 2t\cos t.$$

Окончательно имеем $x(t) = -e^t + t\,e^t + \cos t + 2\sin t - 2t\cos t$.

Пример 7.5. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0, \end{cases} \quad \text{(см. рис.24).}$$

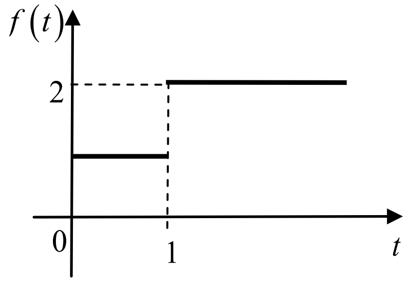

Рис. 24

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, тогда

$$x''(t) \risingdotseq p^2 X - p\,x(0) - x'(0) = p^2 X - p \ .$$

Найдем изображение функции $f(t)$, представив ее в виде суммы $\eta(t)$ и $\eta(t-1)$:

$$f(t) = \eta(t) + \eta(t-1) \risingdotseq \frac{1}{p} + \frac{e^{-p}}{p}.$$

Перейдем в исходном уравнении к изображениям и найдём $X(p)$:

$$p^2 X - p + X = \frac{1}{p} + \frac{e^{-p}}{p} \ \Rightarrow\ X\left(p^2+1\right) = \frac{p^2+1}{p} + \frac{e^{-p}}{p} \ \Rightarrow\ X = \frac{1}{p} + \frac{e^{-p}}{p\left(p^2+1\right)}.$$

Восстановим оригиналы, используя таблицу изображений (формулы 12, 15, 4, 7):

$$\frac{1}{p} \risingdotseq 1 = 1 \cdot \eta(t), \quad \frac{1}{(p^2+1)} \risingdotseq \sin t, \quad \frac{1}{p\,(p^2+1)} \risingdotseq \int_0^t \sin\tau\, d\tau = -\cos\tau\,\Big|_0^t =$$

$$= 1 - \cos t = (1 - \cos t)\cdot\eta(t), \quad \frac{e^{-p}}{p\left(p^2+1\right)} \risingdotseq \left(1 - \cos(t-1)\right)\cdot \eta(t-1).$$

Тогда $x(t) = \eta(t) + \left(1 - \cos(t-1)\right)\cdot\eta(t-1)$.

Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Дюамеля

Метод Дюамеля выгодно применять при решении уравнения со сложной правой частью $f(t)$ или при решении нескольких уравнений с одинаковыми левыми и различными правыми частями.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = f(t), \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Метод Дюамеля решения этой задачи состоит в следующем:

1) рассмотреть задачу с правой частью, равной единице

$$\begin{cases} a x_1''(t) + b x_1'(t) + c x_1(t) = 1, \\ x_1(0) = 0,\ x_1'(0) = 0; \end{cases} \tag{7.2}$$

2) в задаче (7.2) перейти к изображениям $X_1(p)\left(ap^2 + bp + c\right) = \dfrac{1}{p}$ и восстановить оригинал $x_1'(t)$ по его изображению $p X_1(p) = \dfrac{1}{a p^2 + bp + c}$;

3) решение исходной задачи (7.1) найти по формуле

$$x(t) = f(t) * x_1'(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot x_1'(t - \tau)\, d\tau.$$

Пример 7.6. Решить задачу Коши $\begin{cases} x''(t) + x'(t) = \dfrac{e^t}{\left(e^t + 1\right)^2}, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0. \end{cases}$

Решение. Для функции $f(t) = \dfrac{e^t}{\left(e^t + 1\right)^2}$ изображение найти сложно, поэтому применим метод Дюамеля. Для этого запишем вспомогательную задачу с правой частью, равной единице:

$$\begin{cases} x_1''(t) + x_1'(t) = 1, \\ x_1(0) = 0,\ x_1'(0) = 0. \end{cases}$$

Перейдем от оригиналов к их изображениям, полагая $x_1(t) \doteqdot X_1(p)$ и учитывая, что $x_1'(t) \doteqdot pX_1(p)$, $x_1''(t) \doteqdot p^2 X_1(p)$, $1 \doteqdot \dfrac{1}{p}$. Получим:

$$X_1(p)\left(p^2 + p\right) = \frac{1}{p} \ \Rightarrow\ p X_1(p) = \frac{1}{p^2 + p} = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \ \Rightarrow\ x_1'(t) = 1 - e^{-t}.$$

Решение исходной задачи найдем по формуле

$$x(t) = f(t) * x_1'(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot x_1'(t - \tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{e^\tau}{\left(e^\tau + 1\right)^2} \cdot \left(1 - e^{-(t-\tau)}\right) d\tau =$$

$$=\int_0^t \frac{d\left(e^{\tau}+1\right)}{\left(e^{\tau}+1\right)^2}-e^{-t}\int_0^t \frac{\left(e^{\tau}+1\right)-1}{\left(e^{\tau}+1\right)^2}d\left(e^{\tau}+1\right)=\left(1+e^{-t}\right)\int_0^t \frac{d\left(e^{\tau}+1\right)}{\left(e^{\tau}+1\right)^2}-e^{-t}\int_0^t \frac{d\left(e^{\tau}+1\right)}{\left(e^{\tau}+1\right)}=$$

$$=\left[\left(1+e^{-t}\right)\cdot\frac{-1}{\left(e^{\tau}+1\right)}-e^{-t}\ln\left(e^{\tau}+1\right)\right]_{\tau=0}^{\tau=t}=\left(1+e^{-t}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e^t+1}\right)-e^{-t}\ln\frac{e^t+1}{2}.$$

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Операционный метод решения системы линейных дифференциальных уравнений аналогичен методу решения одного линейного дифференциального уравнения. Переходя от оригиналов к изображениям, получим систему линейных алгебраических уравнений; решим ее одним из известных способов, например, методом Гаусса, или по формулам Крамера; затем по найденным изображениям восстановим оригиналы.

Пример 7.7. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'+y'-y=e^t, \\ 2x'+y'+2y=\cos t, \\ x(0)=y(0)=0. \end{cases}$$

Перейдем от оригиналов к изображениям. Пусть

$$x(t)\doteqdot X(p),\ \ y(t)\doteqdot Y(p).$$

Тогда

$$x'(t)\doteqdot pX-x(0)=pX,\ \ y'(t)\doteqdot pY,\ \ e^t\doteqdot\frac{1}{p-1},\ \ \cos t\doteqdot\frac{p}{p^2+1}.$$

Дифференциальные уравнения для оригиналов перейдут в алгебраические уравнения для изображений:

$$\begin{cases} pX+pY-Y=\dfrac{1}{p-1}, \\ 2pX+pY+2Y=\dfrac{p}{p^2+1}. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на (-2) и сложив его со вторым, получим

$$Y\cdot(4-p)=\frac{p}{p^2+1}-\frac{2}{p-1}\quad \text{или}\quad Y(p)=-\frac{p}{(p^2+1)(p-4)}+\frac{2}{(p-1)(p-4)}.$$

Из первого уравнения

$$pX=\frac{1}{p-1}-(p-1)Y \quad \text{или} \quad X(p)=\frac{1}{p(p-1)}+\frac{(p-1)}{(p^2+1)(p-4)}-\frac{2}{p(p-4)}.$$

По изображениям восстановим оригиналы:

$$\frac{1}{p(p-1)}\doteqdot\int_0^t e^{\tau}d\tau=e^t-1;\quad \frac{-2}{p(p-4)}\doteqdot-2\int_0^t e^{4\tau}d\tau=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{4t}.$$

Разложим функцию $\dfrac{p-1}{\left(p^2+1\right)\left(p-4\right)}$ на простейшие дроби

$$\frac{p-1}{(p^2+1)(p-4)}=\frac{A}{p-4}+\frac{Bp+C}{p^2+1};\ \text{тогда}\ p-1=A(p^2+1)+(Bp+C)(p-4).$$

При $p=4$ имеем $3=17A \Rightarrow A=\dfrac{3}{17}$; при $p=0$ имеем $-1=A-4C\Rightarrow C=\dfrac{5}{17}$.

Приравняем коэффициенты при p^2: $0=A+B \Rightarrow B=-3/17$. Тогда

$$\frac{p-1}{(p^2+1)(p-4)}=\frac{3}{17}\cdot\frac{1}{p-4}-\frac{3}{17}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{5}{17}\cdot\frac{1}{p^2+1}\doteqdot\frac{3}{17}e^{4t}-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\sin t.$$

Окончательно получим

$$x(t)=e^t-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{4t}+\frac{3}{17}e^{4t}-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\sin t=e^t-\frac{1}{2}-\frac{11}{34}e^{4t}-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\sin t.$$

Восстановим $y(t)$ по его изображению:

$$Y(p)=-\frac{p}{\left(p^2+1\right)\left(p-4\right)}+\frac{2}{(p-1)(p-4)}.$$

Разложим каждое слагаемое на простейшие дроби:

$$\frac{-p}{(p^2+1)(p-4)}=\frac{A_1}{p-4}+\frac{B_1p+C_1}{p^2+1};\qquad \frac{2}{(p-1)\,(p-4)}=\frac{D_1}{p-1}+\frac{D_2}{p-4}.$$

Получим: $-p=A_1(p^2+1)+(B_1p+C_1)(p-4)$ и $D_1(p-4)+D_2(p-1)=2$.

При $p=4$ имеем $-4=17A_1 \Rightarrow A_1=-\dfrac{4}{17}$, $3D_2=2\Rightarrow D_2=\dfrac{2}{3}$;

При $p=0$ имеем $0=A_1-4C_1\Rightarrow C_1=-\dfrac{1}{17}$, $-4D_1-D_2=2\Rightarrow D_1=-\dfrac{2}{3}$.

Сравним коэффициенты при p^2: $0=A_1+B_1\Rightarrow B_1=-A_1=\dfrac{4}{17}$. Тогда

$$Y(p)=\frac{-p}{(p^2+1)(p-4)}+\frac{2}{(p-1)(p-4)}=$$

$$=-\frac{4}{17}\cdot\frac{1}{p-4}+\frac{4}{17}\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{p^2+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-4}=$$

$$=\frac{22}{51}\cdot\frac{1}{p-4}+\frac{4}{17}\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{p^2+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-1};$$

$$y(t)=\frac{22}{51}e^{4t}-\frac{2}{3}e^{t}+\frac{4}{17}\cos t-\frac{1}{17}\sin t.$$

Запишем решение системы: $\begin{cases} x(t)=e^{t}-\frac{1}{2}-\frac{11}{34}e^{4t}-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\sin t, \\ y(t)=\frac{22}{51}e^{4t}-\frac{2}{3}e^{t}+\frac{4}{17}\cos t-\frac{1}{17}\sin t. \end{cases}$

Решение интегрального уравнения типа свертки

Интегральным уравнением называют уравнение, в котором неизвестная функция входит под знак интеграла. Мы рассмотрим лишь интегральное уравнение типа свертки, т. е. уравнение вида

$$x(t)=f(t)+\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

В этом уравнении интеграл является сверткой функций $g(t)$ и $x(t)$ (см. формулу 9 в таблице изображений) и уравнение может быть записано в виде

$$x(t)=f(t)+g(t)*x(t).$$

Переходя к изображениям, получим простейшее уравнение

$$X(p)=F(p)+G(p)\cdot X(p).$$

Из этого уравнения следует найти изображение $X(p)$ и по изображению восстановить оригинал $x(t)$.

Пример 7.8. Найти функцию $x(t)$ из уравнения

$$x(t)=\sin t+2\int_0^t \cos(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Решение. Интеграл в данном уравнении является сверткой функций $\cos t$ и $x(t)$, поэтому уравнение можно записать в виде

$$x(t)=\sin t+2\cos t*x(t).$$

Перейдем от оригиналов к изображениям, учитывая, что

$$x(t)\doteqdot X(p),\quad \sin t\doteqdot\frac{1}{p^2+1},\quad \cos t\doteqdot\frac{p}{p^2+1},\quad \cos t*x(t)\doteqdot\frac{p}{p^2+1}\cdot X(p).$$

Тогда интегральное уравнение для оригинала перейдет в алгебраическое уравнение для изображения

$$X(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{2p}{p^2+1}\cdot X(p)\quad \text{или}\quad X(p)=\frac{1}{(p-1)^2}.$$

По изображению $X(p)$ найдем оригинал. Так как $\frac{1}{p^2}\doteqdot t$, то $\frac{1}{(p-1)^2}\doteqdot te^{t}$ (по формуле 8 в таблице изображений). Таким образом, $x(t)=te^{t}$.

Вычисление несобственных интегралов

Пусть оригинал $f(t)$ имеет изображение $F(p)$. Тогда из определения изображения следует, что

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = F(p)\,.}$$

Пример 7.9. Вычислить интегралы; 1) $\int_0^{+\infty} t^4 \cdot e^{-2t}dt$, 2) $\int_0^{+\infty} t\cos 2t \cdot e^{-3t}dt$.

Решение. 1. Интеграл $\int_0^{+\infty} t^4 \cdot e^{-2t}dt$ есть изображение оригинала t^4 при $p=2$, т. е. $\int_0^{+\infty} t^4 \cdot e^{-2t}dt = \left.\frac{4!}{p^5}\right|_{p=2} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 4} = \frac{3}{4}$.

Здесь использована формула № 13 из таблицы изображений.

2. Интеграл $\int_0^{+\infty} t\cos 2t \cdot e^{-3t}dt$ есть изображение оригинала $t\cos 2t$ при $p=3$, т.е.

$$\int_0^{+\infty} t\cos 2t \cdot e^{-3t}dt = \left.\frac{p^2-2^2}{\left(p^2+2^2\right)^2}\right|_{p=3} = \frac{5}{169}.$$

Здесь использована формула № 20 из таблицы изображений.

Пример 7.10. Вычислить интегралы

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}\cdot e^{-2t}dt,\quad 2)\ \int_0^{+\infty} t^2\cos t \cdot e^{-t}dt.$$

Решение. 1. Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}\cdot e^{-2t}dt$ есть изображение оригинала $\frac{1-\cos t}{t}$ при $p=2$. Изображение этого оригинала было найдено в примере 7.1: $\frac{1-\cos t}{t} \risingdotseq \ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$, поэтому

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}\cdot e^{-2t}dt = \left.\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}\right|_{p=2} = \ln\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

2. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^2\cos t\cdot e^{-t}dt$ есть изображение оригинала $t^2\cos t$ при $p=1$. Изображение этого оригинала было найдено в примере 7.1:

$t^2\cos t \doteqdot \dfrac{2p\left(p^2-3\right)}{\left(p^2+1\right)^3}$, поэтому $\int\limits_0^{+\infty} t^2\cos t\cdot e^{-t}dt = \left.\dfrac{2p\left(p^2-3\right)}{\left(p^2+1\right)^3}\right|_{p=1} = -\dfrac{1}{2}.$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить задачу Коши $\begin{cases} x''+x=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0, \end{cases}$ (рис. 25).

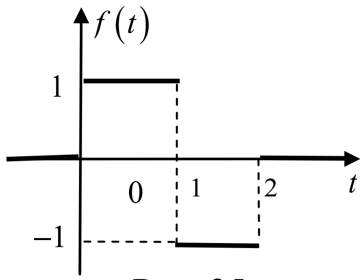

Рис. 25

2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x'=-y, \\ y'=2x+2y, \end{cases} \quad x(0)=y(0)=1.$$

3. Найти функцию $x(t)$ из уравнения

$$x(t)=e^t-2\int\limits_0^t \cos(t-\tau)\,x(\tau)d\tau.$$

Ответы: 1) $x(t)=2\left[\sin^2\dfrac{t}{2}\cdot\eta(t)-2\sin^2\dfrac{t-1}{2}\cdot\eta(t-1)+\sin^2\dfrac{t-2}{2}\cdot\eta(t-2)\right]$;

2) $x(t)=e^t(\cos t-2\sin t)$, $y(t)=e^t(\cos t+3\sin t)$; 3) $x(t)=\operatorname{ch}t-t\cdot e^{-t}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Краснов М. Л. Вся высшая математика : учебник. Т. 4. / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко. М. : Эдиториал УРСС, 2005. 352 с.
2. Пчелин Б. К. Специальные разделы высшей математики : учебник / Б. К. Пчелин. М. : Высшая школа, 1972. 462 с.
3. Сидоров В. Ю. Лекции по теории функций комплексного переменного / В. Ю. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. М. : Наука, 1982. 488 с.
4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. М. : Айрис-пресс, 2004. 603 с.
5. Мышкис А. Д. Математика для технических вузов. Специальные курсы / А. Д. Мышкис. СПб. : Лань, 2002. 640 с.
6. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. М. : Наука, 1980. 946 с.
7. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М. : Наука, 1977. 831 с.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б. П. Демидовича. М. : Астрель, 2003. 495 с.
9. Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. Ч. 4 / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. М. : Наука, 2000. 464 с.
10. Минькова Р. М. Функции комплексного переменного и операционное исчисление : учебное пособие / Р. М. Минькова. Екатеринбург : УГТУ–УПИ, 2010. 98 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Минькова Ревекка Максовна

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Редактор *Л. С. Гудкова*
Компьютерный набор *Р. М. Миньковой*
Компьютерная верстка *Я. П. Бояршинова*

Подписано в печать 16.06.2014. Формат 60×90 1/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 3,5.
Уч.-изд. л. 2,5. Тираж 150 экз. Заказ № 1163.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8(343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8(343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru