Дифференциальные уравнения

Литература:
1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления т.2

Повторение материала

№1 Уравнение с разделяющимися переменными (задача Коши).

Найти решение задачи Коши: $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2}{x^4} \quad y(1) = 1$

Решение

1) Переведем уравнение в дифференциальную форму, умножая на dx.

$$dy - \frac{3y^2}{x^4} dx = 0$$

2) Разделим переменные, деля обе части уравнения на y^2,
при условии, что $y \neq 0$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{3dx}{x^4}$$

3) Решение уравнения имеет вид:

$$\int \frac{dy}{3y^2} - \int \frac{3dx}{x^4} = c$$

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{x^3} = c$$

Выразим y:

$$\frac{1}{y} = c - \frac{1}{x^3} \;=>\; y = \frac{x^3}{cx^3 - 1}$$

4) Найдем константу с из условия $y(1) = 1$.

$$1 = \frac{1}{c-1} \;=>\; c = 2$$

Ответ: частное решение: $y = \frac{x^3}{2x^3 - 1}$

№2. Однородное уравнение первого порядка (задача Коши).

Найти решение задачи Коши: $\boldsymbol{y^2 - 2xy + 2x^2y' = 0}$, $\quad \boldsymbol{y(1) = \frac{1}{2}}$

Решение

Решение $y(x)$ ищется в виде $\boldsymbol{y = xu}$, где $u(x)$ - неизвестная функция.
Тогда $\boldsymbol{y' = u + xu'}$.

Разделим уравнение на $2x^2$ при условии, что $x \neq 0$

$$\frac{y^2}{2x^2} - \frac{y}{x} + y' = 0$$

Подставим замену в уравнение:

$$u + xu' + \frac{(ux)^2}{2x^2} - \frac{ux}{x} = 0$$

$$u'x + \frac{1}{2}u^2 = 0$$

Умножим на dx, запишем уравнение в дифференциальной форме:

$$xdu + \frac{1}{2}u^2dx = 0$$

Разделим переменные, разделив на u^2x при условии, что $u \neq 0$, проинтегрируем уравнение.

$$\frac{du}{u^2} + \frac{dx}{2x} = 0$$

$$-\frac{1}{u} + ln\sqrt{|x|} = \tilde{c}$$

Преобразуем, выразив функцию u(x).

$$\frac{1}{u} = ln\sqrt{|x|} + c \quad , c = -\tilde{c}$$

$$u = \frac{1}{ln\sqrt{|x|} + c}$$

Найдем функцию y(x).

$$y = \frac{x}{ln\sqrt{|x|} + c}$$

Используя начальное условие, найдем константу c.

$$y(1) = \frac{1}{ln\sqrt{|1|} + c} = \frac{1}{2} \quad => \; c = 2$$

Ответ: Частное решение: $\boldsymbol{y = \frac{x}{ln\sqrt{|x|} + 2}}$

№3. Линейное уравнение первого порядка (Задача Коши).

Найти решение задачи Коши: $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^3, \quad y(1) = 1$

Решение

Замена: $y(x) = u(x)v(x) \Rightarrow \quad y' = u'v + uv'$

Подставляем вместо y произведение uv

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = x^3$$

Выносим функцию $u(x)$ за скобку.

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = x^3$$

1) Приравниваем к нулю выражение в скобке.

$$v' - \frac{2v}{x} = 0$$

Переводим в дифференциальную форму, умножив на dx. Разделяем переменные, деля обе части уравнения на v:

$$\frac{dv}{v} - \frac{2dx}{x} = 0$$

Берем интегралы, свободную константу полагаем равной нулю, потенцируем. Получаем:

$$v = x^2$$

2) Подставляем найденную функцию $v(x)$ в уравнение

$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = x^3$, учтем, что выражение в скобке равно нулю.

$$u'x^2 = x^3$$

Окончательно, уравнение для определения $u(x)$:

$$u' = x \quad \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2 + c$$

3) Поскольку $y(x) = u(x)v(x)$, то получаем, что

$$y(x) = \frac{1}{2}x^4 + cx^2$$

4) Найдем произвольную константу, используя начальное условие $y(1) = 1$.

$$1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$$

Ответ: частное решение : $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$

№4 Уравнение Бернулли (задача Коши)

Найти решение задачи Коши: $\frac{dy}{dx}-\frac{4y}{x}=\frac{y^3}{x^5}$ $y(1)=\frac{1}{2}$

Решение

Замена: $y(x)=u(x)v(x)$ => $y'=u'v+uv'$

Подставляем вместо y произведение uv

$$u'v+uv'-\frac{4uv}{x}=\frac{y^3}{x^5}$$

Выносим функцию $u(x)$ за скобку.

$$u'v+u\left(v'-\frac{4v}{x}\right)=\frac{y^3}{x^5}$$

1) Приравниваем к нулю выражение в скобке.

$$v'-\frac{4v}{x}=0$$

Переводим в дифференциальную форму, умножив на dx. Разделяем переменные, деля обе части уравнения на v:

$$\frac{dv}{v}-\frac{4dx}{x}=0$$

Берем интегралы, свободную константу полагаем равной нулю, потенцируем. Получаем: $v=x^4$

2) Подставляем найденную функцию $v(x)$ в уравнение

$u'v+u\left(v'-\frac{4v}{x}\right)=\frac{y^3}{x^5}$, учтем, что выражение в скобке равно нулю.

$$u'x^4=\frac{(ux^4)^3}{x^5} \Rightarrow u'=u^3x^3$$

Разделяя переменные, получаем уравнение для определения $u(x)$:

$$\frac{du}{u^3}-x^3dx=0$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$-\frac{1}{2u^2}=\frac{1}{4}x^4+c$$

Выразим из последнего уравнения u(x):

$$u=\pm\sqrt{\frac{2}{-x^2-4c}}$$

Исходя из начального условия, выбираем перед корнем знак «+».

3) Поскольку $y(x) = u(x)v(x)$, то получаем, что решение:

$$y(x) = x^4\sqrt{\frac{2}{-x^2-4c}}$$

4) Найдем произвольную константу, используя начальное условие $y(1) = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} = 1\sqrt{\frac{2}{-1-4c}} \Rightarrow \boldsymbol{c = -\frac{9}{4}}$$

Ответ: частное решение : $\boldsymbol{y(x) = x^4\sqrt{\frac{2}{9-x^2}}}$

№5 Уравнение, допускающее понижение порядка.

Решить уравнение $\boldsymbol{y'' - \frac{y'}{x+1} = 8(x+1)^2}$ **при x**$\boldsymbol{\neq -1}$

Решение

1) В данное уравнение не входит функция y(x), поэтому сделаем замену: **z(x)=y′(x).**

Относительно функции z(x) получаем уравнение: $\boldsymbol{z' - \frac{z}{x+1} = 8(x+1)^2}$

2) Полученное уравнение – линейное первого порядка, поэтому решаем его с помощью замены $\boldsymbol{z(x) = u(x)v(x)} \Rightarrow\ z' = u'v + uv'$

Подставляем вместо z произведение uv:

$$\boldsymbol{u'v + uv' - \frac{uv}{x+1} = 8(x+1)^2}$$

1) Приравниваем к нулю выражение в скобке.

$$v' - \frac{v}{x+1} = 0$$

Переводим в дифференциальную форму, умножив на $\boldsymbol{dx}$. Разделяем переменные, деля обе части уравнения на $\boldsymbol{v}$:

$$\frac{dv}{v} - \frac{dx}{x+1} = 0$$

Берем интегралы, свободную константу полагаем равной нулю, потенцируем. Получаем:

$$\boldsymbol{v = x + 1}$$

3) Подставляем найденную функцию $\boldsymbol{v(x)}$ в уравнение

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x+1}\right) = 8(x+1)^2$$

Учтем, что выражение в скобке равно нулю.

$$u'(x+1) = 8(x+1)^2$$

Окончательно, уравнение для определения $\boldsymbol{u(x)}$:

$$\boldsymbol{u' = 8(x+1) \Rightarrow u = 4x^2 + x + c_1}$$

4) Поскольку $z(x) = u(x)v(x)$, то получаем, что

$$z(x) = (4x^2 + x + 1 + c_1)(x+1) = 4x^3 + 12x^2 + (8 + c_1)x + 1$$

5) Поскольку z(x)=y′(x), проинтегрируем полученную функцию еще раз.

Ответ: $\boldsymbol{y(x) = x^4 + 4x^3 + (4 + \frac{c_1}{2})x^2 + x + c_2}$

№6 Уравнение, допускающее понижение порядка (задача Коши).

Найти частное решение уравнения

$$\boldsymbol{y^2 y'' = (y')^3, \quad y'(0) = 1, y(0) = 1}$$

Решение

Это уравнение, в которое явно не входит независимая переменная x, поэтому функцию $y(x)$ можно трактовать как независимую переменную.

Замена: $\boldsymbol{y' = p(y)}$, $\boldsymbol{y''}(x) = \boldsymbol{p\frac{dp}{dy}}$

Исходное дифференциальное уравнение примет вид:

$$y^2 p\frac{dp}{dy} = p^3$$

Сократим на p, при $p \neq 0$, получим уравнение с разделяющимися переменными.

$$y^2 \frac{dp}{dy} = p^2$$

Переводим уравнение в дифференциальную форму и разделяем переменные.

$$\frac{dp}{p^2} - \frac{dy}{y^2} = 0$$

Интегрируя, получаем:

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{y} + c_1 = \frac{c_1 y - 1}{y}$$

Выразим p и найдем константу, используя начальные условия.

$$p = \frac{y}{1 - c_1 y} \Rightarrow y' = \frac{y}{1 - c_1 y}$$

$$1 = \frac{1}{1-c_1} \Rightarrow c_1 = 0$$

Осталось решить уравнение $y' = y$.
Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dy}{y} = dx$$

После интегрирования: $\ln|y| = x + \ln|c_2|$
Потенцируя, получаем:

$$\boldsymbol{y = c_2 e^x}$$

Находим константу $\boldsymbol{c_2}$: $1 = \boldsymbol{c_2 e^0} \Rightarrow \boldsymbol{c_2 = 1}$

Ответ: частное решение: $\boldsymbol{y = e^x}$

№7 Однородное линейное уравнение 2 порядка с постоянными коэффициентами.

Найти общее решение уравнения:

$$\boldsymbol{y'' - 6y' + 9y = 0}$$

Решение
Решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

Его корень: $\boldsymbol{\lambda_1 = 3}$ кратности 2.
Общее решение будет иметь вид:

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}}$$

№8 Частное решение линейного неоднородного уравнение 2 порядка с постоянными коэффициентами.

Найти вид частного решения уравнения:

$$\boldsymbol{y'' - 6y' + 25y = e^{3x} \sin 4x}$$

Решение
Поскольку в данной правой части находится экспонента и синус, то частное решение будет иметь вид:

$y^*(x) = x^m e^{3x}(A\cos 4x + B\sin 4x)$

Из вида правой части уравнения следует, что число $\alpha = 3 + 4i$ следует проверить – не является ли оно корнем характеристического уравнения. Для этого решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$
Его корни: $\lambda_1 = 3 + 4i$, $\lambda_2 = 3 - 4i$, следовательно, число $\alpha = 3 + 4i$ является корнем этого уравнения, следовательно, **m=1.**

Ответ: $\mathbf{y^*(x) = xe^{3x}(A\cos 4x + B\sin 4x)}$

№ 9 Линейное неоднородное уравнение 2 порядка с постоянными коэффициентами (задача Коши).

Найти решение задачи Коши:
$$\boldsymbol{y'' - 6y' + 8y = 3e^x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0}$$

Решение 1
1) Находим общее решение $\bar{y}$ аналогичного однородного уравнения:
$y'' - 6y' + 8y = 0$

Решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$
Его корни: $\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = 4}$ – два различных действительных корня.
Общее решение однородного уравнения будет иметь вид:
$\bar{y} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}$

2) Находим частное решение $\boldsymbol{y^*}$ неоднородного уравнения:
Из вида правой части следует, что частное решение будет иметь вид:
$\boldsymbol{y^* = x^m A e^x}$
Для определения m выясним является ли корнем характеристического уравнения число **λ=1**.
Поскольку, это число корнем не является, m=0.
Частное решение имеет вид:
$\boldsymbol{y^* = Ae^x}$

Для определения константы A, продифференцируем частное решение и подставим в исходное уравнение.
$y^{*''} = y^{*'} = y^* = Ae^x$

$Ae^x - 6Ae^x + 8Ae^x = 3e^x$
Разделим на e^x:

$A - 6A + 8A = 3 \Rightarrow A = \mathbf{1}$

Окончательный вид частного решения: $\boldsymbol{y^* = e^x}$

Окончательный вид общего решения исходного уравнения:

$\boldsymbol{y = \bar{y} + y^* = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} + e^x}$

3) Найдем константы c_1 и c_2.

$\boldsymbol{y(0)} = \boldsymbol{c_1 + c_2 + 1 = 0}$

$y' = 2c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{4x} + e^x$

$\boldsymbol{y'(0) = 2c_1 + 4c_2 + 1 = 0}$

После решения этой системы уравнений, получаем, что

$c_1 = -\frac{3}{2},\ c_2 = \frac{1}{2}$

Ответ: частное решение : $\boldsymbol{y(x) = -\frac{3}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{4x} + e^x}$

Решение 2

Решим это уравнение методами операционного исчисления.

Составим операторное уравнение:

$$p^2 Y - 6pY + 8Y = \frac{3}{p-1}$$

Выражаем Y

$$Y = \frac{3}{(p-1)(p^2-6p+8)} = \frac{3}{(p-1)(p-2)(p-4)}$$

$$Y = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-4} = \frac{A(p-2)(p-4) + B(p-1)(p-4) + c(p-1)(p-2)}{(p-1)(p-2)(p-4)}$$

Приравняем числители:

$$A(p-2)(p-4) + B(p-1)(p-4) + c(p-1)(p-2) = 3$$

И найдем коэффициенты A,B,C.

Пусть p=1: 3A=3 => A=1

Пусть p=2: -2B=3 => B=$-\frac{3}{2}$

Пусть p=4: 6C=3 => C=$\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{Y = \frac{1}{p-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-4}}$ - изображение решения.

Ответ: частное решение : $\boldsymbol{y(x) = e^x - \frac{3}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{4x}}$