Дисциплина: Линейная алгебра и аналитическая геометрия 1 семестр

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Решить уравнение $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Даны вершины треугольника $A(-1,-2,4), B(-4,-2,0), C(3,-2,1)$. Найти косинус угла B треугольника ABC.

3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-3;2;0)$ перпендикулярно плоскости $2x - 5z + 1 = 0$.

4. Составить уравнение гиперболы с фокусами в точках $F_1(0;3)$ и $F_2(0;-3)$ и мнимой полуосью, равной 2.

5. Указать номера ***верных*** утверждений.

Векторное произведение $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$ обладает следующими свойствами:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,

2) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$,

3) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. При каком значении параметра $\boldsymbol{a}$ ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ равен 3?

7. Исследовать систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

В ответе указать ранг матрицы системы, ранг расширенной матрицы и вид СЛАУ (несовместная/определенная/неопределенная).

8. Вычислить $(3-\sqrt{3}i)^{16}$. Ответ представить в алгебраической форме и изобразить на комплексной плоскости.

9. Найти точку симметричную точке $P(5;2;-1)$ относительно плоскости $2x - y + 3z + 23 = 0$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Даны две матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Найти $C = A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}}$.

2. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(1;1;1), B(2;0;2), C(2;2;2)$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2,3,-1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1}$.

4. Составить уравнение эллипса с фокусами в точках $F_1(1;0)$ и $F_2(-1;0)$ и большей полуосью, равной 2.

5. При условии, что определитель не равен нулю, укажите номер ***ошибочного*** утверждения.

1) Если к элементам последнего столбца определителя прибавить соответствующие элементы первого столбца, то определитель не изменит своей величины.
2) При перестановке двух столбцов определитель не изменится.
3) Общий множитель всех элементов столбца можно вынести за знак определителя.

6. При каком значении параметра $\boldsymbol{a}$ матрица будет вырожденной?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

7. Исследовать систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

В ответе указать ранг матрицы системы, ранг расширенной матрицы и вид СЛАУ (несовместная/определенная/неопределенная).

8. Вычислить $\frac{17}{1-4i} - (2+i)^2$.

9. Известно, что $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 5, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

1. Решить уравнение $XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Проверить на компланарность векторы $\vec{a}(1,0,4)$, $\vec{b}(4,2,7)$, $\vec{c}(0,2,5)$.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,3,-1)$ параллельно прямой: $\begin{cases} x = 2t, \\ y = -t + 3, \\ z = t - 2. \end{cases}$

4. Составить уравнение параболы с центром в начале координат и с фокусом в точке $F(0;-2)$.

5. Выберете верное утверждение. Комплексные числа обладают следующими свойствами:
   1) $z - \bar{z} = 2Rez$;
   2) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;
   3) $z + \bar{z} = 2iImz$.

6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -4 & 7 \\ -1 & 2 & -5 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 13 & -1 & 9 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 9 & -8 & 11 \end{vmatrix}$.

7. Найти общее решение системы линейных уравнений, выделить частное решение неоднородной системы $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 17 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 16 \\ x_1 + \quad x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$.

8. Решить уравнение $z^4 + 16 = 0$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

9. Определить тип поверхности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 9z^2 + 2x - 4y = 4$. В ответе записать название поверхности и координаты центра, сделать чертеж.