Доцент Акопян Р.С.

# Линейная алгебра и аналитическая геометрия

## Лекция 15-16. Тема: «Подготовка к экзамену»

В билете 9 заданий

**1.** Установить размерность пространства $L$ решений однородной системы уравнений, указать базис этого пространства.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$\dim L = 3, \quad (11,-1,8,0,0); \quad (3,-25,0,8,0); \quad (-1,1,0,0,2)$

**Задача** Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

**Решение.** а) Определим ранг матрицы системы. С помощью элементарных преобразований приводим ее к ступенчатому виду.

$$r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 19 & -4 & -5 & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 19 & -4 & -5 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -21 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & -21 & 8 & 3 & 3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -21 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Таким образом, ранг матрицы равен $r = 2$. Тогда размерность пространства решений системы $n - r = 5 - 2 = 3$.

Равносильная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ \quad -21x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$ и запишем общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 3c_1 + 2c_2 + c_3 \\ -21x_2 = -8c_1 - 3c_2 - 3c_3 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{17}{21}c_1 + \frac{4}{7}c_2 - \frac{3}{7}c_3 \\ x_2 = \frac{8}{21}c_1 + \frac{1}{7}c_2 + \frac{1}{7}c_3 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = c_3 \end{cases}$$

Для построения базиса подпространства найдем фундаментальную систему решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{17}{21} \\ \frac{8}{21} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

б) Выписываем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы системы.

$$r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Таким образом, ранг матрицы равен $r = 2$. Тогда размерность пространства решений системы $n - r = 4 - 2 = 2$.

Равносильная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ \qquad\quad x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, тогда:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = c_1 + 2c_2 \\ x_2 = 2c_1 - c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5c_1 + 5c_2 \\ x_2 = 2c_1 - c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

Для построения базиса найдем фундаментальную систему решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найти фундаментальную систему решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выпишем матрицу системы, поставив последнее уравнение на первое место, затем приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $r = r(A) = 2$. Базисный минор при переменных $x_1$, $x_2$ отличен от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$; выбираем $x_1$, $x_2$ в качестве основных переменных и выражаем их через неосновные $x_3$, $x_4$, $x_5$:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -2x_3 + 16x_4 - 3x_5, \\ \qquad 8x_2 = \ \ 7x_3 - 25x_4 + 4x_5. \end{cases} \qquad (*)$$

Для получения фундаментальной системы решений $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ поочередно заменяем неосновные переменные $x_3$, $x_4$, $x_5$ элементами строк единичной матрицы $E_3$.

*1*. При $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ система (*) принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -2, \\ \qquad 8x_2 = 7, \end{cases}$$

откуда $x_1 = \dfrac{19}{8}$, $x_2 = \dfrac{7}{8}$, т.е. получаем базисное решение

$$\boldsymbol{e}_1 = \left( \frac{19}{8};\ \frac{7}{8};\ 1;\ 0;\ 0 \right).$$

2. Аналогично находим еще два базисных решения:

при $x_3 = 0, \quad x_4 = 1, x_5 = 0$ $\qquad e_2 = \left(\frac{3}{8}; \frac{-25}{8}; 0; 1; 0\right);$

при $x_3 = 0, \quad x_4 = 0, x_5 = 1$ $\qquad e_3 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0; 1\right).$

Найденные решения (векторы) $e_1$, $e_2$, $e_3$ образуют фундаментальную систему. Умножив компоненты решений $e_1$, $e_2$, $e_3$ соответственно

на 8, 8, 2, получим фундаментальную систему решений с целыми компонентами:

$$(19; 7; 8; 0; 0), (3; -25; 0; 8; 0), (-1; 1; 0; 0; 2).\blacktriangleright$$

Найти фундаментальные системы решений систем линейных уравнений:

**2.55.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

**2.56.** $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 8x_1 + 9x_2 + 9x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

**2.57.** $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ 11x_1 + 17x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

**2.58.** $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0, \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

**2.55.** (8; –6; 1; 0), (–7; 5; 0; 1). **2.56.** (–9; –3; 11; 0; 0), (3; 1; 0; 11; 0), (–10; 4; 0; 0; 11). **2.57.** (–7; 5; 1; 0), (7; –5; 0; 2). **2.58.** (–9; 3; 4; 0; 0), (–3; 1; 0; 2; 0), (–2; 1; 0; 0; 1).

**2**. Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$. Являются ли линейными преобразования $A,B,C$. Если преобразования оказались линейными, найти матрицу, размерности ядра и образа преобразования.

$$Ax=(4x_1-3x_2-2x_3,x_1,x_1+2x_2^4+3x_3),$$

$$Bx=(4x_1-3x_2-2x_3,x_1,x_1+2x_2+3x_3),$$

$$Cx=(4x_1-3x_2-2x_3,x_1,x_1+2x_2+3)$$

$$B=\begin{pmatrix}4 & -3 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

**Задача** Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$. Проверить, являются ли линейными следующие операторы:

$$\mathbf{A}(x)=(x_1-5x_2-4x_3,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ x_2),$$

$$\mathbf{B}(x)=(x_1-5x_2-4,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ x_2),$$

$$\mathbf{C}(x)=(x_1-5x_2-4x_3^2,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ 0).$$

**Решение.** По определению операций над векторами $x=(x_1,x_2,x_3)$ и $y=(y_1,y_2,y_3)$:

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3),\qquad \lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3).$$

Найдем образы векторов:

$$\mathbf{A}(x+y)=((x_1+y_1)-5(x_2+y_2)-4(x_3+y_3),3(x_1+y_1)-2(x_2+y_2)-(x_3+y_3),x_2+y_2)=$$

$$=(x_1-5x_2-4x_3,3x_1-2x_2-x_3,x_2)+(y_1-5y_2-4y_3,3y_1-2y_2-y_3,y_2)=\mathbf{A}(x)+\mathbf{A}(y);$$

$$\mathbf{A}(\lambda x)=(\lambda x_1-5\lambda x_2-4\lambda x_3,\ 3\lambda x_1-2\lambda x_2-\lambda x_3,\ \lambda x_2)=$$

$$=\lambda(x_1-5x_2-4x_3,3x_1-2x_2-x_3,x_2)=\lambda\,\mathbf{A}(x).$$

Следовательно, оператор **A** является линейным.

Для оператора **B** имеем:

$$\mathbf{B}(\lambda x) = (\lambda x_1 - 5\lambda x_2 - 4, 3\lambda x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda x_3, \lambda x_2),$$

$$\lambda \mathbf{B}(x) = \lambda(x_1 - 5x_2 - 4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2) = (\lambda x_1 - 5\lambda x_2 - 4\lambda, 3\lambda x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda x_3, \lambda x_2).$$

Следовательно, $\mathbf{B}(\lambda x) \neq \lambda \mathbf{B}(x)$ при $\lambda \neq 1$.

Таким образом, оператор **B** не является линейным.

Для оператора **C** имеем:

$$\mathbf{C}(\lambda x) = (\lambda x_1 - 5\lambda x_2 - 4(\lambda x_3)^2, 3\lambda x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda x_3, 0);$$

$$\lambda \mathbf{C}(x) = \lambda(x_1 - 5x_2 - 4x_3^2, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0) = (\lambda x_1 - 5\lambda x_2 - 4\lambda x_3^2, 3\lambda x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda x_3, 0).$$

Следовательно, $\mathbf{C}(\lambda x) \neq \lambda \mathbf{C}(x)$ при $\lambda \neq 1$.

Таким образом, оператор **C** не является линейным.

**Задача.** Найти ранг оператора $f$ пространства $V_3$, если известна матрица оператора

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

*Решение.* Находим $r_A$. Так как

$$\det A=\begin{vmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0+0-6-(2-6+0)=-6+4=-2\neq 0,$$

то $r_A=3$ .

Таким образом, находим ранг и дефект оператора

$\dim \operatorname{Im} f=r_A=3;$

$\dim \ker f=n-r_A=3-3=0$ .

3. Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$, $Ax=(x_2-x_3,x_1,x_1+x_3)$, $Bx=(x_2,2x_3,x_1)$. Найти $ABx$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Задача** Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$. Заданы два линейных оператора $\mathbf{A}(x)=(x_2-x_3,x_1,x_1+x_3)$, $\mathbf{B}(x)=(x_2,2x_3,x_1)$.

Найти оператор $(\mathbf{B}^2+\mathbf{A})(x)$.

**Решение.** Матрицы данных операторов имеют вид

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$B^2+A=\begin{pmatrix}0&0&2\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\3&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$(B^2+A)(x)=\begin{pmatrix}0&1&1\\3&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2+x_3\\3x_1\\x_1+x_2+x_3\end{pmatrix},$$

т.е. $(\mathbf{B}^2+\mathbf{A})(x)=(x_2+x_3;3x_1;x_1+x_2+x_3)$.

4. Показать, что векторы $e_1, e_2, e_3$ образуют базис и найти координаты вектора $x$ в этом базисе. По известному вектору $y_e$ найти вектор $y$.

$$e_1 = (-2,3,0),\ e_2 = (2,-3,4),\ e_3 = (-2,0,-3),\ x = (-4,3,-7),\ y_e = (4,4,3)$$

$x_e=(0,-1,1)$ , $y=(-6,0,7)$

. Показать, что многочлены $f_1, f_2, f_3$ образуют базис и найти координаты многочлена $h$ в этом базисе. По известному вектору $g_f$ найти многочлен $g$.

$$f_1(x) = 4+4x+2x^2,\ f_2(x) = -3-2x^2,\ f_3(x) = -1-x+x^2,\ h(x) = 5-4x+4x^2,\ g_f = (0,-1,2)$$

. По известным векторам $a, b, c$ и их значениям $a_e, b_e, c_e$ в базисе $e_1, e_2, e_3$, найти векторы этого базиса.

$$a_e = (2,-1,1),\ b_e = (1,1,-2),\ c_e = (-1,-1,0),\ a = (-1,3,3),\ b = (-1,-2,-1),\ c = (3,-2,-1)$$

. Показать, что векторы $e_1, e_2, e_3$ и $u_1, u_2, u_3$ образуют базисы и найти матрицу перехода $T_{e\to u}$ . По известным векторам $x$ и $y$ в одном базисе найти их значения в другом.

$$e_1 = (-1,-1,2),\ e_2 = (-2,0,3),\ e_3 = (2,2,-2),\ u_1 = (3,-1,-2),\ u_2 = (1,3,3),\ u_3 = (1,-3,0),$$

$$x_u = (-1,3,-2),\ y_e = (0,3,1)$$

## Преобразование координат вектора при переходе от базиса к базису

$$\begin{cases} e_1' = t_{11}e_1 + t_{12}e_2 + \ldots + t_{1n}e_n \\ e_2' = t_{21}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{2n}e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n' = t_{n1}e_1 + t_{n2}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n \end{cases}$$

$$(e_1'\ e_2'\ \ldots\ e_n') = (e_1\ e_2\ \ldots\ e_n)\cdot T$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \ldots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \ldots & t_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1n} & t_{2n} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

*или*

$$X = TX',$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X' = T^{-1}X$$

# Даны три базиса e, f, g

$$g = e \cdot T_{e \to g}, \quad f = e \cdot T_{e \to f}, \quad g = f \cdot T_{f \to g}$$

$$g = e \cdot T_{e \to g} = f \cdot T_{f \to g} = e \cdot T_{e \to f} \cdot T_{f \to g}$$

$$T_{e \to g} = T_{e \to f} \cdot T_{f \to g}$$

$$T_{f \to g} = T_{e \to f}^{-1} \cdot T_{e \to g}$$

$$e = f \cdot T_{f \to e} = f \cdot T_{e \to f}^{-1}$$

$$X_e = T_{e \to f} \cdot X_f$$

**Задача** Пусть $i, j$ - координатные векторы прямоугольной системы координат на плоскости. Найти разложение вектора $x = i + j$ по базису $e_1, e_2$, если $e_1 = 7i + 4j$, $e_2 = 5i + 3j$.

*Решение.* По определению матрица перехода от базиса $i, j$ к базису $e_1, e_2$ есть матрица

$$T = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Столбец $X$ координат вектора $x$ в базисе $i, j$ имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По формуле (9.7) находим столбец $X_e$ координат вектора $x$ в базисе $e_1, e_2$:

$$X_e = T^{-1} X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**Задача** В базисе $e_1, e_2, e_3$ даны векторы $a_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $a_2 = 2e_2 + 3e_3$, $a_3 = e_2 + 5e_3$.

1) Доказать, что векторы $a_1, a_2, a_3$ образуют базис;
2) Найти координаты вектора $d = 2e_1 - e_2 + e_3$ в базисе $a_1, a_2, a_3$.

**Решение.** 1) Три вектора $a_1, a_2, a_3$ трехмерного пространства образуют базис, если они линейно независимы. Т.е. линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$ только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Подставим координаты векторов $a_1, a_2, a_3$ и запишем векторное равенство

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

то система имеет только нулевое решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и, следовательно, векторы $a_1, a_2, a_3$ образуют базис.

2) Запишем матрицу перехода от старого базиса $e_1, e_2, e_3$ к новому базису $a_1, a_2, a_3$. Столбцы матрицы перехода $T$ есть координаты векторов $a_1, a_2, a_3$ в базисе $e_1, e_2, e_3$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу

$$T^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Столбец координат вектора $d$ в базисе $e_1, e_2, e_3$

Столбец координат вектора $d$ в базисе $e_1, e_2, e_3$

$$d = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тогда по формуле преобразования координат имеем, что

$$\begin{pmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $d$ в базисе $a_1, a_2, a_3$ имеет координаты (2, -2, 1), т.е. $d = 2a_1 - 2a_2 + a_3$.

**Задача** Два базиса $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f_1},\boldsymbol{f_2},\boldsymbol{f_3})$ и $\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{g_1},\boldsymbol{g_2},\boldsymbol{g_3})$ в $R^3$ заданы своими координатами в некотором третьем базисе $\boldsymbol{e}$ в $R^3$. $\boldsymbol{f_1}=(1,1,0)$, $\boldsymbol{f_2}=(1,0,1)$, $\boldsymbol{f_3}=(0,1,1)$, $\boldsymbol{g_1}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{g_2}=(1,2,0)$, $\boldsymbol{g_3}=(-1,0,0)$. Вектор $\boldsymbol{x}$ задан

координатами в базисе $\boldsymbol{g}$: $x=(\frac{3}{2},-2,3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f}$.

$\boxed{T_{e\to g} = T_{e\to f}\cdot T_{f\to g}}$ $\boxed{X_e = T_{e\to f}\cdot X_f}$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ – матрица перехода от $e$ к $f$,

$$T_{e\to g} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – матрица перехода от $e$ к $g$. Чтобы найти матрицу перехода от $f$ к $g$, воспользуемся формулой $T_{e\to g} = T_{e\to f}\cdot T_{f\to g}$. Из этой формулы получим: $T_{f\to g} = T_{e\to f}^{-1}\cdot T_{e\to g}$. Найдем матрицы $T_{e\to f}^{-1}$ и $T_{f\to g}$.

$$T_{e\to f}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$T_{f\to g} = T_{e\to f}^{-1}\cdot T_{e\to g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти координаты вектора $x$ в базисе $f$, воспользуемся формулой

(3). $X_f = T_{f\to g}\cdot X_g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f}$ имеет координаты $\boldsymbol{x} = \left(-\frac{15}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

**Задача** Найти в базисе $f_1(x)=2x^2+3x+1$, $f_2(x)=-3x^2+2x+4$, $f_3(x)=x^2-x-5$ линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ координаты вектора $g(x)=4x^2+x-9$.

Решение.

Пусть $g(x)=\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)+\alpha_3 f_3(x)$. Найдем координаты $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, применяя второй способ из предыдущей задачи.

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}-9\\ 1\\ 4\end{pmatrix},\quad \mathbf{T}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -5\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

$$|\mathbf{T}|=44,\quad \mathbf{S}=\begin{pmatrix}-1 & -5 & -13\\ 11 & 11 & 11\\ 6 & -14 & -10\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\mathbf{T}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{T}|}\cdot\mathbf{S}^T=\frac{1}{44}\begin{pmatrix}-1 & 11 & 6\\ -5 & 11 & -14\\ -13 & 11 & -10\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} -1 & 11 & 6 \\ -5 & 11 & -14 \\ -13 & 11 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координатами вектора $g(x)$ в базисе $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ являются $1, 0, 2$, то есть $g(x) = f_1(x) + 2f_3(x)$.

**Задача** В линейном пространстве столбцов $T_3$ даны три базиса $e_1, e_2, e_3$, $a_1, a_2, a_3$ и $f_1, f_2, f_3$. Известны координаты векторов $a_1, a_2, a_3$ и $f_1, f_2, f_3$ в базисе $e_1, e_2, e_3$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) матрицу перехода от базиса $a_1, a_2, a_3$ к базису $f_1, f_2, f_3$;

б) матрицу обратного перехода $T^{-1}$;

в) координаты векторов $a_1$ и $f_3$ в каждом из базисов $a_1, a_2, a_3$ и $f_1, f_2, f_3$;

г) координаты вектора $y = 5f_1 + 3f_2 + f_3$ в базисе $a_1, a_2, a_3$.

**Решение.** а) Если $T$ есть матрица перехода от базиса $a_1, a_2, a_3$ к базису $f_1, f_2, f_3$, то $(f_1, f_2, f_3) = (a_1, a_2, a_3)T$. В матричном виде это уравнение может быть записано

$$F = AT,$$

где

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решая полученное матричное уравнение, находим матрицу перехода $T$:

$$T = A^{-1}F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Матрица обратного перехода $T^{-1}$:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

в) Найдем координаты вектора $a_1$ в каждом из базисов $a_1, a_2, a_3$ и $f_1, f_2, f_3$.

В первом базисе вектор $a_1$ имеет разложение $a_1 = 1a_1 + 0a_2 + 0a_3$, т.е.

$$(a_1)_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда по формуле преобразования координат находим координаты $a_1$ в базисе $f_1, f_2, f_3$:

$$(a_1)_f = T^{-1}(a_1)_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, найдем координаты $f_3$ в каждом из базисов $a_1, a_2, a_3$ и $f_1, f_2, f_3$. В базисе $f_1, f_2, f_3$ имеем разложение $f_3 = 0f_1 + 0f_2 + f_3$, следовательно,

$$(f_3)_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(f_3)_a = T(f_3)_f = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

г) Координаты вектора $y = 5f_1 + 3f_2 + f_3$ в базисе $a_1, a_2, a_3$ также находим по формуле:

$$(y)_a = T(y)_f = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Т.е. в базисе $a_1, a_2, a_3$ вектор $y$ можно представить в виде

$$y = 3{,}5a_1 - a_2 + 2{,}5a_3.$$

**Задача** В линейном пространстве $P_2(x)$ многочленов не выше второй степени с действительными коэффициентами даны два базиса: $e_1, e_2, e_3$ и $a_1, a_2, a_3$, где $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$ и $a_1 = 1, a_2 = x-2, a_3 = (x-2)^2$.

Найти: а) матрицу перехода от базиса $e_1, e_2, e_3$ к базису $a_1, a_2, a_3$;

б) матрицу обратного перехода $T^{-1}$;

в) координаты вектора $e_3$ в базисе $a_1, a_2, a_3$;

г) разложение элемента $p(x) = 3x^2 - 2x + 1$ в базисе $a_1, a_2, a_3$.

**Решение.** а) Так как

$$\begin{cases} a_1 = 1 = e_1, \\ a_2 = x - 2 = -2e_1 + e_2, \\ a_3 = (x-2)^2 = 4 - 4x + x^2 = 4e_1 - 4e_2 + e_3, \end{cases}$$

то

$$(a_1)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (a_2)_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (a_3)_e = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от базиса $e_1, e_2, e_3$ к базису $a_1, a_2, a_3$ имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Матрица обратного перехода $T^{-1}$:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

в) Координаты вектора $e_3$ в базисе $a_1, a_2, a_3$ найдем по формуле:

$$(e_3)_a = T^{-1}(e_3)_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, верно разложение $x^2 = 4 + 4(x-2) + (x-2)^2$.

г) Найдем разложение элемента $p(x) = 3x^2 - 2x + 1$ в базисе $a_1, a_2, a_3$. Столбец координат элемента $p(x)$ в базисе $e_1, e_2, e_3$:

$$(p)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле преобразования координат получим

$$(p)_a = T^{-1}(p)_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, искомое разложение имеет вид

$$p(x) = 9 + 10(x-2) + 3(x-2)^2.$$

**Задача** В пространстве $R_2$ даны три базиса: $e_1$, $e_2$; $f_1$, $f_2$; $g_1$, $g_2$, причем

$$f_1 = e_1 - e_2, \qquad f_2 = e_1 + e_2, \qquad g_1 = 3e_1 + e_2, \qquad g_2 = 5e_1 + 2e_2.$$

Найти матрицу перехода от базиса $f_1$, $f_2$ к базису $g_1$, $g_2$.

*Решение.* По определению матрица перехода от базиса $e_1$, $e_2$ к базису $f_1$, $f_2$ есть матрица

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица перехода от базиса $e_1$, $e_2$ к базису $g_1$, $g_2$ есть матрица

$$T_{e\to g} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, связь векторов базисов $f$, $e$ и $g$ можно оформить системой:

$$\begin{cases} f = eT_{e\to f}, \\ g = eT_{e\to g}. \end{cases}$$

Из первого равенства находим $e = f \cdot T_{e\to f}^{-1}$. Подставляя во второе равенство, получаем $g = f \cdot T_{e\to f}^{-1} \cdot T_{e\to g}$.

Таким образом, матрицей перехода от базиса $f_1$, $f_2$ к базису $g_1$, $g_2$ является матрица $T_{e\to f}^{-1} \cdot T_{e\to g}$. Вычисляем матрицу $T_{e\to f}^{-1}$:

$$T_{e\to f}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а затем находим произведение $T_{e\to f}^{-1} \cdot T_{e\to g}$:

$$T_{e\to f}^{-1} \cdot T_{e\to g} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица перехода от базиса $f$ к базису $g$ имеет вид

$$T_{e\to f}^{-1} \cdot T_{e\to g} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

5. По известной матрице линейного оператора $A_e$ в базисе $e_1, e_2$, найти $A_u$ в базисе $u_1, u_2$.

$$A_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} e_1 = (1, -2) \\ e_2 = (1, 3) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u_1 = (2, 1) \\ u_2 = (3, -3) \end{matrix}$$

$$A_u = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -\frac{5}{3} & -5 \end{pmatrix}$$

По известной матрице линейного оператора $A_f$ в базисе $f_1, f_2, f_3$, найти $A_g$ в базисе $g_1, g_2, g_3$.

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = x \\ f_3(x) = x^2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} g_1(x) = 1 + 2x \\ g_2(x) = -1 + 2x + x^2 \\ g_3(x) = -1 + x + x^2 \end{matrix}$$

. По известной матрице линейного оператора $A_e$ в базисе $e_1, e_2, e_3$ и разложению базиса $e$ по базису $u$, найти $A_u$ в базисе $u_1, u_2, u_3$ .

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} e_1 &= u_1 - u_2 + u_3 \\ e_2 &= u_2 - 2u_3 \\ e_2 &= -u_1 + 2u_2 - 2u_3 \end{aligned}$$

По известной матрице линейного оператора $A_e$ в базисе $e_1, e_2$ и $B_u$ в базисе $u_1, u_2$, найти $A+B$ и $A-2B$ в базисе $u$.

$$A_e = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B_u = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} e_1 &= (-5;-3) \\ e_2 &= (2;1) \end{aligned} \quad \begin{aligned} u_1 &= (4;3) \\ u_2 &= (-3;-2) \end{aligned}$$

## Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

**Теорема.** ***Матрицы*** $A_e$ ***и*** $A_f$ ***линейного оператора*** $\boldsymbol{A}: L \to L$ ***в различных базисах*** $\boldsymbol{e}$ ***и*** $\boldsymbol{f}$ ***связаны соотношением***

$$A_f = T_{e\to f}^{-1} \cdot A_e \cdot T_{e\to f},$$

где $T_{e\to f}$ матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$.

**Следствие.** Справедливо соотношение $A_e = T_{e\to f} \cdot A_f \cdot T_{e\to f}^{-1}$.

**Задача** Матрицей линейного оператора $f$ в базисе $e_1, e_2$ некоторого линейного пространства является матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $\mathbf{B}$ этого оператора в базисе

$$e_1' = e_2,$$
$$e_2' = e_1 + e_2.$$

Решение.

Согласно теореме

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T},$$

где $\mathbf{T}$ – матрица перехода от базиса $e_1, e_2$ к базису $e_1', e_2'$.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{T}| = -1, \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{T}|} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Задача** В стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ оператор $f$ задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $f_1(x) = 3x^2 + 2x$, $f_2(x) = 5x^2 + 3x + 1$, $f_3(x) = 7x^2 + 5x + 3$.

Решение.

Согласно теореме

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T},$$

где $\mathbf{T}$ – матрица перехода от стандартного базиса $1, x, x^2$ линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ к базису $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$. Элементами первого столбца матрицы $\mathbf{T}$ являются координаты вектора $f_1(x)$ в базисе $1, x, x^2$, второго столбца – координаты вектора $f_2(x)$ в базисе $1, x, x^2$, третьего – координаты вектора $f_3(x)$ в базисе $1, x, x^2$.

Тогда

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&3&5\\3&5&7\end{pmatrix},\quad |\mathbf{T}|=4,\quad \mathbf{T}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{T}|}=\begin{pmatrix}-4&8&-4\\1&-9&6\\1&3&-2\end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-4&8&-4\\1&-9&6\\1&3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&3\\2&3&5\\3&5&7\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-4&8&-4\\6&-9&1\\-2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&3\\2&3&5\\3&5&7\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}4&0&0\\-15&-16&-20\\9&12&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3.75&-4&-5\\2.25&3&4\end{pmatrix}.$$

**Задача.** В пространстве $L_2$ оператор $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2)$: $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}_2=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$ имеет матрицу $A_f=\begin{pmatrix}3&5\\4&3\end{pmatrix}$. Оператор $\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2)$: $\boldsymbol{g}_1=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{g}_2=4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$ имеет матрицу $B_g=\begin{pmatrix}4&6\\6&9\end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{g}$.

<u>Решение.</u> Поскольку матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам, матрицы перехода от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{f}$ и от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{g}$ имеют вид: $T_{e\to f}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$, $T_{e\to g}=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$. Для нахождения матрицы оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{g}$ воспользуемся формулой (1): $A_g=T_{f\to g}^{-1}\cdot A_f\cdot T_{f\to g}$. Для нахождения матрицы перехода от $\boldsymbol{f}$ к $\boldsymbol{g}$ воспользуемся формулой $T_{e\to g}=T_{e\to f}\cdot T_{f\to g}$. Таким образом, $T_{f\to g}=T_{e\to f}^{-1}\cdot T_{e\to g}$. Итак,

$T_{e\to f}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $T_{f\to g} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $T_{f\to g}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$,

$A_g = T_{f\to g}^{-1} \cdot A_f \cdot T_{f\to g} = \begin{pmatrix} 40 & 38 \\ -\frac{71}{2} & -34 \end{pmatrix}$, $A_g + B_g = \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -\frac{59}{2} & -25 \end{pmatrix}$. $A_g + B_g$ – искомая матрица оператора $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{g}$.

6. Линейный оператор $f$ в базисе $e_1, e_2, e_3$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $x$ является собственным вектором оператора $f$. Найти к какому собственному значению он относится, если

$$x = -e_2 - e_3.$$

Ответ: 3

**Задача** Линейный оператор $f$ задан матрицей

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&3&0\\3&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

в некотором базисе $e_1,e_2,e_3$. Выяснить, является ли вектор $x$ собственным вектором этого линейного оператора. Если да, то к какому собственному значению он относится?

1) $x=e_1+e_2+2e_3$;

2) $x=3e_1-3e_2-4e_3$.

Решение.

1) Если вектор $x=e_1+e_2+2e_3$ является собственным вектором линейного оператора $f$, то для некоторого $\lambda\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\lambda\cdot x=\lambda(e_1+e_2+2e_3)=\lambda e_1+\lambda e_2+2\lambda e_3.$$

Аналогично решению предыдущего примера получаем

$$\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\2\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&0\\3&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\lambda&=&3,\\\lambda&=&3,\\2\lambda&=&6\end{cases}\Rightarrow\quad\lambda=3.$$

Следовательно, вектор $x=e_1+e_2+2e_3$ является собственным вектором линейного оператора $f$, относящимся к $\lambda=3$.

2) Если вектор $x = 3e_1 - 3e_2 - 4e_3$ является собственным вектором линейного оператора $f$, то для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lambda \cdot x = \lambda(3e_1 - 3e_2 - 4e_3) = 3\lambda e_1 - 3\lambda e_2 - 4\lambda e_3,$$

откуда

$$\begin{pmatrix} 3\lambda \\ -3\lambda \\ -4\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda = -9, \\ -3\lambda = 9, \\ -4\lambda = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3, \\ \lambda = -3, \\ \lambda = 3. \end{cases}$$

Следовательно, вектор $x = e_1 + e_2 + 2e_3$ не является собственным вектором линейного оператора $f$.

7. Найти собственные значения линейного оператора, заданного матрицей:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Найти собственные векторы для минимального собственного числа.

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=3 \qquad (0,c,c)$

максимального

. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widetilde{A}$ (матрицы $A$):

$$a)\ A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix};\qquad б)\ A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -8\\ -4 & 7 & -4\\ -8 & -4 & 1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е ($\boldsymbol{a}$):

1. Составляем характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\ , \quad \text{или} \quad (2-\lambda)(1-\lambda)-12=0,$$

откуда $\lambda^2-3\lambda-10=0$ и собственные значения матрицы $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=5$.

2. Найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1=-2$:

$$(A-\lambda_1 E)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\ , \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix}4 & 3\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ \text{т.е.}\ \begin{cases}4x_1+3x_2=0,\\ 4x_1+3x_2=0.\end{cases}$$

Полагая $x_2=c_1$, найдем ($x_1=-\dfrac{3}{4}c_1$, $x_2=c_1$), т.е. вектор $\boldsymbol{x}^{(1)}=\left(-\dfrac{3}{4}c_1, c_1\right)$

при любом $c_1\neq 0$ есть собственный вектор оператора $\widetilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda=-2$.

3. Найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 5$:

$$(A - \lambda_2 E)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_2 = c_2$, получим $x_1 = c_2$, $x_2 = c_2$, т.е. вектор $\boldsymbol{x}^{(2)} = (c_2, c_2)$ при любом $c_2 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\widetilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda = 5$.

Р е ш е н и е (*б*):

1. Составляем характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразований уравнение примет вид:

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 81\lambda + 729 = 0.$$

Решая это уравнение, получим:

$$\lambda^2(\lambda - 9) - 81(\lambda - 9) = 0, \text{ или } (\lambda - 9)(\lambda^2 - 81) = 0,$$

откуда собственные значения оператора $A$ (матрицы $A$): $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$.

2. Найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$:

$$(A - 9E)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r = 1$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 3 - 1 = 2$ свободные (неосновные) переменные, например, $x_2$ и $x_3$. Полагая $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$, найдем вектор $\boldsymbol{x}^{(1)} = \left(-\frac{1}{2}c_1 - c_2;\, c_1;\, c_2\right)$, который при любых $c_1$, $c_2$, удовлетворяющих условию $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, есть собственный вектор оператора $\widetilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda = 9$.

3. Аналогично находим, что вектор $\boldsymbol{x}^{(2)} = \left(c_3;\ \frac{1}{2}c_3;\ c_3\right)$ при любом $c_3 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\widetilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda = -9$.▶

8 Привести квадратичную форму $f(x,y)$ к каноническому виду

$g(x',y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, где $\lambda_1 < \lambda_2$, ортогональным преобразованием $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Записать матрицу $C$ преобразования переменных.

$f(x,y) = 3x^2 + 4\sqrt{5}xy + 4y^2$

★ $C = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$

**Пример** Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x_1, x_2) = 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Решение. 1. Матрица данной квадратичной формы

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Характеристические числа матрицы $A$ являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решая это уравнение, находим $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = 5$.

2. Сначала найдем нормированный собственный вектор-столбец матрицы $A$ с собственным числом $\lambda = 20$. Для этого составим систему

$$\left.\begin{aligned} -3u_1 + 6u_2 &= 0, \\ 6u_1 - 12u_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

из которой находим $u_1 = 2u_2$. Следовательно, при любом $t$, отличном от нуля, столбец

$$\begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}$$

является собственным вектор-столбцом матрицы $A$. Столбец

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

является нормированным собственным вектор-столбцом матрицы $A$.

Координаты $v_1$ и $v_2$ собственного вектор-столбца матрицы $A$ с собственным числом $\lambda_2 = 5$ находим из системы

$$\left.\begin{aligned} 12v_1 + 6v_2 &= 0, \\ 6v_1 + 3v_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, получаем $v_2 = -2v_1$. Следовательно, при любом $s$, отличном от нуля, столбец

$$\begin{bmatrix} s \\ -2s \end{bmatrix}$$

является собственным вектор-столбцом матрицы $A$. Столбец

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

является нормированным собственным вектор-столбцом матрицы $A$.

3. Составляем матрицу

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Искомым преобразованием является следующее:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{\sqrt{5}}\,y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\,y_2, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\,y_2. \end{aligned}\right\}$$

**Задача** Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ к каноническому виду. Написать канонический вид.

Решение. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в исходном ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$. Найдем собственные значения матрицы $A$. Для этого решим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ – корни характеристического уравнения. $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в новом базисе $\boldsymbol{f}$ (ортонормированном базисе из собственных векторов матрицы $A$ ). В базисе $\boldsymbol{f}$ квадратичная форма имеет канонический вид $f(\boldsymbol{x}) = f(y_1, y_2) = -y_1^2 + 3y_2^2$.

б) Чтобы построить базис из собственных векторов, надо для каждого собственного значения $\lambda$ решить СЛАУ $(A - \lambda E) \cdot X = O$. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_1 = -1$, найдем из СЛАУ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Общее решение системы имеет вид: $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$. Вектор $\boldsymbol{a_1} = (1,-1)$ является собственным вектором матрицы $A$, отвечающим собственному значению $\lambda_1 = -1$. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_2 = 3$, найдем

из СЛАУ $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Общее решение системы имеет вид: $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$. Вектор $\boldsymbol{a_2} = (1,1)$ является собственным вектором матрицы $A$, отвечающим собственному значению $\lambda_2 = 3$. Нормируя собственные векторы, получим ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы $A$: $\boldsymbol{f_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\boldsymbol{f_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, в котором квадратичная форма имеет указанный канонический вид. Матрица

$U=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ является ортогональной матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$, причем $\Lambda = U^T A\ U$. Изменение базиса привело к линейной замене переменных $X = U \cdot Y$ в квадратичной форме: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \end{cases}$.

9. Привести квадратичную форму $f(x,y,z)$ к нормальному виду $g(x',y',z')$ .

$$f(x,y,z) = x^2 + 4xy + 4xz + 4yz + 4z^2$$

) $g(x',y',z') = x'^2 - y'^2 + z'^2$

Пример. Выяснить, какие из вещественных форм $f_1$, $f_2$, $f_3$ эквивалентны между собой, если

$$f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3,$$

$$f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3,$$

$$f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3.$$

Решение. Приводим каждую форму к каноническому виду. Соответственно получаем:

$$\widetilde{f}_1 = t_1^2 + 4t_2^2 - 4t_3^2,$$

$$\widetilde{f}_2 = u_1^2 - 2u_2^2 - 2u_3^2,$$

$$\widetilde{f}_3 = 16v_1^2 - 4v_2^2 - 16v_3^2,$$

так что

$$r_1 = 3,\ k_1 = 2,\ q_1 = 1,\ s_1 = 1,$$
$$r_2 = 3,\ k_2 = 1,\ q_2 = 2,\ s_2 = -1,$$
$$r_3 = 3,\ k_3 = 1,\ q_3 = 2,\ s_3 = -1.$$

Согласно теореме формы $f_2$ и $f_3$ эквивалентны между собой и не эквивалентны форме $f_1$.

**Теорема** (Закон инерции.) Число положительных и число отрицательных квадратов в каноническом виде, к которому приводится данная вещественная квадратичная форма невырожденным линейным преобразованием переменных с вещественными коэффициентами, не зависит от выбора этого преобразования.

Определение. Число $k$ положительных и число $q$ отрицательных коэффициентов в каноническом виде вещественной квадратичной формы $f$ называется соответственно положительным и отрицательным *индексом инерции*; разность $s = k - q$ называется *сигнатурой* данной квадратичной формы.

**Теорема**. Две вещественные квадратичные формы от $n$ переменных эквивалентны тогда и только тогда, когда эти формы имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры, т. е. когда при приведении их к каноническому виду получаются канонические формы с одинаковым числом квадратов с положительными, отрицательными и нулевыми коэффициентами.

Примеры. 1. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

Решение. Объединяя в одну группу все члены, содержащие $x_1$, и дополняя сумму $2x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ до полного квадрата, получаем:

$$f = 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3\right)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_2x_3 +$$
$$+ 2x_2x_3 = 2y_1^2 + \frac{5}{2}x_2^2 + 2x_3^2 - x_2x_3.$$

Далее объединяем в одну группу все члены, содержащие $x_2$:

$$f = 2y_1^2 + \frac{5}{2}\left(x_2^2 - \frac{2}{5}x_2x_3\right) + 2x_3^2 = 2y_1^2 + \frac{5}{2}\left(x_2 - \frac{1}{5}x_3\right)^2 +$$
$$+ 2x_3^2 - \frac{1}{10}x_3^2 = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 + \frac{19}{10}x_3^2 = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 + \frac{19}{10}y_3^2,$$

где

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3, \\ y_2 &= x_2 - \frac{1}{5}x_3, \\ y_3 &= x_3. \end{aligned}\right\}$$

▷ **Пример** Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Р е ш е н и е. Вначале выделим полный квадрат при переменной $x_1$, коэффициент при квадрате которой отличен от нуля:

$$L = \left[x_1^2 - 2x_1\left(\frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)\right) + \left(\frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)\right)^2\right] - \left(\frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)\right)^2 +$$

$$+ 2x_2x_3 + x_3^2 = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + 6x_2x_3 - 4x_3^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 =$$

$$= \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2.$$

Теперь выделяем полный квадрат при переменной $x_2$, коэффициент при которой отличен от нуля:

$$L = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}\left(x_2 - \frac{32}{9}x_2x_3 + \frac{256}{81}x_3^2\right) +$$

$$+ \frac{9}{4}\cdot\frac{256}{81}x_3^2 - 3x_3^2 = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}\left(x_2 - \frac{16}{9}x_3\right)^2 + \frac{37}{9}x_3^2.$$

Итак, невырожденное линейное преобразование

$$y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\,, \quad y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3, \quad y_3 = x_3$$

приводит данную квадратичную форму к каноническому виду

$$L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2. \;\blacktriangleright$$

# Спасибо за внимание!