РАЗБОР ЗАДАЧ

Задача 1 (Транспонирование, умножение матриц, решение матричных уравнений).

1. Даны две матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$
 и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

Решение.
$$B^{T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, A^{T} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C = B^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -24 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ:
$$\binom{2}{11} - \frac{-24}{3}$$
.

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Найти сумму диагональных элементов матрицы $C = A \cdot B^T$.

Решение.
$$C = A \cdot B^T = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Ответ: 0

3. Решить матричное уравнение AX = B, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 24 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}$$
Other:
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Решить матричное уравнение XA = B, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 26 & 47 \\ 16 & 33 \end{pmatrix} =$$

Морозова Т.А.

OTBET:
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 2 (Нахождение углов в треугольнике, углов между прямыми и плоскостями с помощью скалярного произведения).

1. Дан треугольник ABC с вершинами A(1; 1; 1), B(3; 2; 2), C(8; 0; 4). Найти величину угла ВАС.

Решение:

$$\overrightarrow{AB} = (2; 1; 1); \overrightarrow{AC} = (7; -1; 3).$$

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|};$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 7 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 16,$$
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{7^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{59}$
Тогда $\cos \varphi = \frac{16}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{59}}$, а $\varphi = \arccos \frac{16}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{59}}$.

2. Найти значение параметра t, при котором векторы

 $\vec{a}(t,1-t,7)$ и $\vec{b}(t+1,2,-2)$ будут ортогональны.

Решение.

$$t(t+1)+2(1-t)-14=0;$$

$$t^2$$
-t-12=0;

$$t = -3$$
; $t = 4$.

3. Найти угол между прямыми: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1}$; $\frac{x+1}{4} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+5}{3}$.

Решение. Направляющие векторы: $\overrightarrow{q_1}(2; -3; 1); \overrightarrow{q_2}(4; -2; 3).$

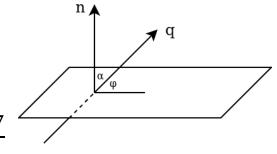
$$cos\varphi = \frac{|(\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2})|}{|\overrightarrow{q_1}| \cdot |\overrightarrow{q_2}|} = \frac{17}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{29}}; \varphi = arccos(\frac{17}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{29}})$$

4. Найти угол между плоскостями 2x - 3y + 4 = 0 и

$$3x + 4y - z + 5 = 0$$

Решение.
$$\vec{n}_1$$
 (2; -3; 0)и \vec{n}_2 (3; 4; -1); $\cos \varphi = \frac{|-6|}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \frac{6}{13\sqrt{2}}$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{3}{13}\sqrt{2}\right)$$



5. Найти угол между прямой
$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-7}{4}$$

и плоскостью: 2x + 3y - z - 5 = 0;

Выпишем направляющий вектор прямой и нормаль к плоскости: $\vec{q}(1; -2; 4); \vec{n}(2; 3; -1)$

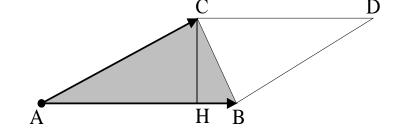
$$\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{(n,q)}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{q}|} = \frac{|2-6-4|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}} = \frac{8}{7\sqrt{6}}; \varphi = arcsin(\frac{8}{7\sqrt{6}})$$

Задача 3 (Нахождение площадей и объемов с помощью векторного и смешанного произведений).

1. Вычислить площадь треугольника ABC, если A(1; 1; 1), B(3; 2; 2), C(8; 0; 4).

Решение:
$$\overrightarrow{AB} = (2; 1; 1); \overrightarrow{AC} = (7; -1; 3);$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|.$$



$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{J} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k}.$$

Тогда
$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-9)^2} = \sqrt{16 + 1 + 81} = 7\sqrt{2}$$
 и $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2}$

2. Даны координаты вершин тетраэдра *ABC*D

$$A(1; 1; 1), B(-1; 2; -1), C(2; 1; 0),$$

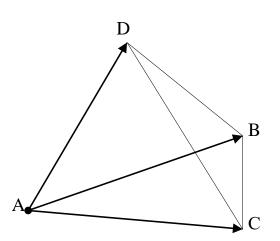
D(2; 2; 2). Найдите объем тетраэдра.



Объём параллелепипеда, построенного на векторах \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AD} вычисляется с помощью смешанного произведения трех векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AD} ;

$$V_{\text{nap}} = |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \overrightarrow{\cdot AD}|$$

Объём пирамиды
$$ABCD$$
 $V_{\text{пир }ABCD} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \overrightarrow{\cdot AD} \right|$



$$\overrightarrow{AB} = (-2,1,-2); \overrightarrow{AC} = (1,0,-1); \overrightarrow{AD} = (1,1,1);$$

Смешанное произведение равно определителю, составленному из координат векторов, записанных по строкам:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

$$V_{\text{пир } ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |-6| = 1.$$

3. При каких значениях параметра t векторы $\overline{a} = t\overline{i} - t^2\overline{j} + t^3\overline{k}$; $\overline{b} = 2\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$; $\overline{c} = -4\overline{i} + 2\overline{j} + 5\overline{k}$ компланарны?

Решение:
$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} t & -t^2 & t^3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -t & t^2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = t \cdot (-3 + t \cdot 6 + t^2 \cdot 0) = -3t + 6t^2 = 0; t = 0; t = 0,5$$

Ответ: 0; 0.5

Задача 4(Уравнение плоскости и уравнение прямой в пространстве).

1. Дана точка A(1,0,-3) и плоскость : x-3z+8=0. Составить уравнение перпендикуляра к плоскости, проходящего через точку A.

Решение: Зная уравнение плоскости, выпишем нормаль $\bar{n}(1;0;-3)$; тогда *каноническое* уравнение искомой прямой:

$$rac{x-1}{1} = rac{y}{0} = rac{z+3}{-3}.$$
 $x = t+1$ $y = 0$ $z = -3t-3$

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M(1;2;3), параллельно прямой $\frac{x-9}{2} = \frac{y+10}{3} = \frac{z-5}{-4}$;

Otbet:
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}$$

3. Дана точка A(1,0,-3) и прямая l: $\frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-7}{4}$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно к прямой l.

Решение. Направляющий вектор $\vec{q} = (2; -1; 4)$ прямой l является одновременно перпендикуляром к искомой плоскости.

Воспользуемся формулой: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ Поэтому уравнение плоскости имеет вид 2(x-1)-1y+4(z+3)=0,откуда 2x-y+4z+10=0.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(1;1;-1) параллельно плоскости x-2y+3z-5=0. Решение.

$$(x-1)-2(y-1)+3(z+1)=0 => x-2y+3z+4=0.$$

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки A(1; 2; 3), B(-1; 4; 6) и C(2; 4; 5).

Решение.

1 способ. Найдем два вектора, параллельных плоскости АВС.

$$\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 3), \overrightarrow{AC} = (1; 2; 2).$$

В качестве точки плоскости возьмем точку А, хотя можно выбрать

любую точку.
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель по первой строке, получим:

$$(x-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$
 Откуда $(x-1) \cdot (-2) - (y-2) \cdot (-7) + (z-3) \cdot (-6) = 0.$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим окончательно:

$$-2x + 7y - 6z + 6 = 0$$

2 способ. Найдем нормаль к искомой плоскости:

$$\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 7j - 6k.$$

$$\vec{n}(-2; 7; -6)$$

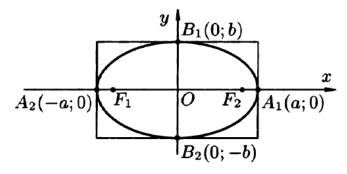
Составим уравнение плоскости, проходящую через точку A (можно выбрать любую точку) и имеющую вектор нормали $\vec{n}(-2;7;-6)$.

$$-2(x-1) + 7(y-2) - 6(z-3) = 0 = >$$
 $-2x + 7y - 6z + 6 = 0$ Other: $2x - 7y + 6z - 6 = 0$

Задача 5 (Кривые и поверхности второго порядка).

Эллипс

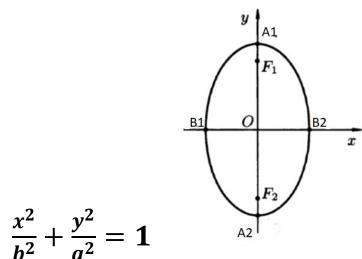
1)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
; a - большая полуось, b - малая полуось



*Кафедра ВМиП*Морозова Т.А.

 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ – левый и правый фокусы эллипса; 2c – фокусное расстояние.

2)



$$F_1(0;c)$$
 и $F_2(0;-c)$;

1. Составить каноническое уравнение эллипса с большой полуосью, равной 10 и фокусами $F_1(-8;0)$ и $F_2(8;0)$.

Решение . Из условия: a = 10; c = 8;

$$b = \sqrt{100 - 64} = 6$$
; фокусы на оси ОХ=> $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

Otbet:
$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

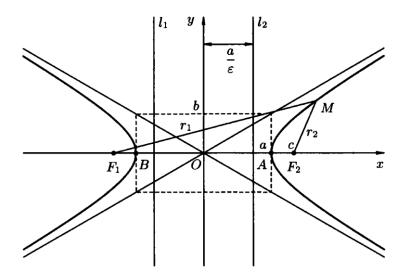
2. Составить каноническое уравнение эллипса с большой полуосью, равной 10 и фокусами $F_1(0;-8)$ и $F_2(0;8)$.

Решение аналогично предыдущей задачи. Только фокусы расположены на оси OY=>

Otbet:
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

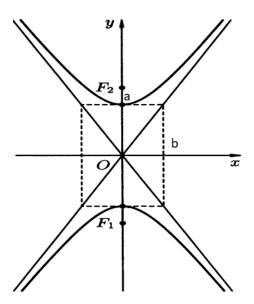
$$\Gamma unepбona \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

 $(a-\partial e reve{u}cm в u m e n b + a s n o n y o c b, b-м + u m a s n o n y o c b); c=\sqrt{a^2+b^2}$



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
; $F_1(-c; 0)$ in $F_2(c; 0)$; $F_1F_2 = 2c$;

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = \mathbf{1}$$
 $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c);$



1. Написать каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью, равной 8 и с фокусами $F_1(-10,0)$; $F_2(10,0)$.

Решение. Из условия задачи: a = 8; c = 10;

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$$
; фокусы расположены на оси ОХ.

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

2. Написать каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью, равной 8 и с фокусами $F_1(0, -10)$; $F_2(0, 10)$.

Решение. $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 6$; фокусы на оси OY =>

$$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$$
или
$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = -1$$

3. Определить тип кривой и найти расстояние между фокусами.

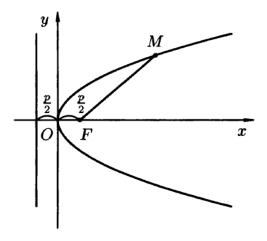
$$36x^2 - 64y^2 - 2304 = 0$$

Решение.

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$
; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$.

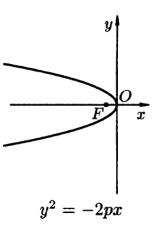
Гипербола. $F_1F_2=20$.

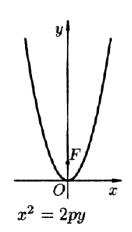
Парабола

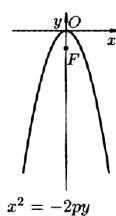


 $y^2 = 2px;$

р>0 (расстояние от фокуса до директрисы)

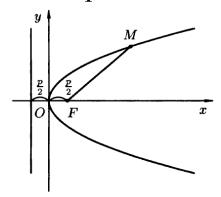






1. Составить уравнение параболы, если фокус F(2;0) а директриса : x=-2.

Решение. Нанесем фокус и директрису на чертеж. Понимаем, что это парабола вида:



$$p=4; => y^2 = 8x$$

Ответ:
$$y^2 = 8x$$

2. Составить уравнение параболы, директриса которой задана уравнением y - 5 = 0, а фокус находится в точке F(0;-7).

Решение. p=12; O(0;-1);
$$x^2 = -24(y+1)$$

Задача б. (Комплексные числа).

1. Вычислить $\frac{2-3i}{5+i} + (1+i)^2$. Решение.

$$\frac{2-3i}{5+i} + (1+i)^2 = \frac{(2-3i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} + (1+2i+i^2) = \frac{7-17i}{26} + 2i = \frac{7}{26} + \frac{35i}{26}$$

Морозова Т.А.

Otbet:
$$\frac{7}{26} + \frac{35i}{26}$$

2. Вычислить $\frac{(-2-3i)(5+i)}{1-5i} + 2i$. Ответ записать в алгебраической форме.

Решение.
$$\frac{(-2-3i)(5+i)}{1-5i} + 2i = \frac{(-10-15i-2i-3i^2)}{(1-5i)} + 2i =$$

$$=\frac{(-7-17i)+2i-10i^2}{(1-5i)}=\frac{-7-17i+2i+10}{(1-5i)}=\frac{3-15i}{1-5i}=3.$$

Ответ: 3.

Задача 7. (Аналитическая геометрия в пространстве. Разные задачи).

1. Дана плоскость x + y - 2z - 6 = 0 и вне ее точка M(1;1;1). Найти проекцию точки на плоскость.

Решение. Проведем через точку M прямую \bot плоскости: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$;

В параметрическом виде: $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$

Подставим уравнения прямой в уравнение плоскости и найдем точку пересечения прямой и плоскости:

$$(1+t)+(1+t)-2(1-2t)-6=0 => t=1=>$$

К(2;2;-1)- проекция М на плоскость;

Ответ: (2;2;-1)

2. Дана прямая: прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ вне её точка M(1;1;1). Найти проекцию точки M на прямую.

Решение.

1) Построим плоскость, проходящую через точку M, \bot данной прямой

$$2(x-1) + 3(y-1) - (z-1) = 0; 2x + 3y - z - 4 = 0;$$

2) Найдём проекцию точки M на прямую — точку K, как точку пересечения данной прямой и построенной плоскости. Для этого представим прямую в

параметрическом виде и подставим в уравнение плоскости: $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3t, \\ z = -1 - t. \end{cases}$

$$2(1+t)+9t+1+t-4=0$$
; =>t=1/14; x=8/7; y=3/14; z=-15/14

K(8/7; 3/14; -15/14)-проекция точки M на прямую.

Ответ: К(8/7; 3/14; -15/14).

Задача 8 (Исследование СЛАУ).

1. Определить вид системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Указать номер *правильного* утверждения.

- 1) система совместная определенная;
- 2) система совместная неопределенная;
- 3) система несовместная определенная;
- 4) система несовместная.

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -6 \\ 2 & 5 & -4 & | & 0 \\ 1 & 3 & -3 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 12 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 2 & | & 8 \end{pmatrix}$$

 $Rg(A)=rg(\tilde{A})=3=n($ числу неизвестных)=>система имеет единственное решение.

Ответ: 1

2. Определить вид системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -8 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Указать номер *правильного* утверждения.

- 1) система совместная определенная;
- 2) система совместная неопределенная;
- 3) система несовместная определенная;
- 4) система несовместная.

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -6 \\ 2 & 5 & -6 & | & -8 \\ 1 & 3 & -3 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

 $Rg(A)=rg(\tilde{A})=2$ < n => система имеет бесконечно много решений. Ответ: 2

3. Определить вид системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -7 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Указать номер *правильного* утверждения.

- 1) система совместная определенная;
- 2) система совместная неопределенная;

- 3) система несовместная определенная;
- 4) система несовместная.

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -6 \\ 2 & 5 & -6 & | & -7 \\ 1 & 3 & -3 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

 $Rg(A)=2; rg(\tilde{A})=3 =>$ система несовместная; Ответ: 4

Задача 9.

Теоретический вопрос.