COURS 8 Les matrices comme familles de vecteurs

[MOTS-CLÉS : FAMILLE DES LIGNES, DES COLONNES, RANG, INVERSE, ÉCHELONNEMENT]

K est un corps quelconque, en pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

1 Famille des vecteurs lignes ou colonnes d'une matrice

- Une colonne de la matrice A à n lignes et p colonnes est formée de n scalaires, et peut être considérée comme un élément de K^n, à savoir un vecteur de dimension n. La matrice A contient p colonnes, et donc peut être regardée comme une famille de p éléments de K^n.
- Il en va de même avec les lignes, qui forment une famille de n éléments de K^p.

Une matrice de type $n \times p$ peut être lue comme la famille de ses p vecteurs colonnes ou comme la famille de ses n vecteurs lignes.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ a_{2,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ (a_{1,1}\ a_{1,2}\ \cdots\ a_{1,p}), (a_{2,1}\ a_{2,2}\ \cdots\ a_{2,p}), \cdots, (a_{n,1}\ a_{n,2}\ \cdots\ a_{n,p}) \right\}$$

- On privilégie plutôt l'écriture avec les colonnes, et on note souvent $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{pmatrix}$ où C_1 est la première colonne de A et ainsi de suite.

2 Rang d'une matrice et premières propriétés

Le rang d'une matrice $n \times p$ est le rang de la famille de ses p vecteurs colonnes $C_1, \cdots, C_p$.

- Le rang est inférieur ou égal au nombre de lignes (voir en fiche 7 le rang dans K^n) et au nombre de colonnes.

Exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Le rang est inférieur ou égal à 2 (le nombre de lignes), et vaut donc 1 ou 2. Les deux premières colonnes forment clairement une famille libre (elles ne sont pas proportionnelles), et le rang est donc exactement 2. Cela signifie que les trois colonnes forment une famille liée : on trouve $C_3 = 5C_1 - C_2$.

Exemple 2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Comme on a $n = p = 3$, le rang vaut 1, 2 ou 3. Les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles et forment une famille libre :

le rang est au moins égal à 2. On constate que $C_3 = C_1 + C_2$, ce qui montre que les trois colonnes forment une famille liée, et le rang ne peut donc pas être égal à 3. Il est ainsi égal à 2.

- Le rang est égal à 1 lorsque toutes les colonnes sont proportionnelles. Il est supérieur ou égal à 2 quand il y a deux colonnes non proportionnelles.
- On ne change pas le rang en permutant des lignes ou des colonnes.
- Le rang d'une matrice est supérieur ou égal au rang de toute sous-matrice (voir exercice 7).

Méthodologie et Logiciel

Le paragraphe 7 confirmera le calcul du rang par l'échelonnement bien connu. Les logiciels de calcul formel ont une instruction calculant le rang. Mais si la matrice contient un paramètre, cette instruction n'identifie pas les cas particuliers, ne lance aucune discussion, et est donc dangereuse.

Exemple 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où m est un paramètre. L'instruction `rank(A)` du logiciel Xcas donne un rang égal à 3. C'est vrai dans le cas général, sauf que pour $m = 1$ le rang est clairement égal à 1, et qu'il est égal à 2 pour $m = -2$ (la somme des colonnes est nulle.)

3 Rang d'une matrice inversible

Théorème 1. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son rang est égal à sa dimension.

Démonstration en ligne

Méthodologie

- Une matrice carrée est inversible si et seulement si sa forme échelonnée est triangulaire supérieure avec des scalaires tous non nuls sur la diagonale.
- Une matrice carrée A est inversible si et seulement si le système $AX = 0$ admet $X = 0$ comme unique solution.

4 Rang et produit par une matrice inversible

Théorème 2. Quand on multiplie à droite ou à gauche par une matrice inversible, on ne change pas le rang.

Démonstration en ligne

- Autrement dit, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, pour Q inversible de dimension n et P inversible de dimension p, QA et AP ont le même rang que A. Plus généralement, avec P et Q inversibles, le produit QAP a le même rang que A.

Échelonner une matrice A revient à trouver une matrice inversible Q telle que $E = QA$ soit échelonnée. L'échelonnement conserve donc le rang.

5 Transposition et rang d'une matrice

- On a le résultat fondamental suivant :

Théorème 3. Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

Démonstration en ligne

- Cela signifie donc que :

Théorème 3 bis. Le rang de la famille des vecteurs colonnes d'une matrice est égal au rang de la famille des vecteurs lignes de cette matrice.

- Dans les propriétés du rang du paragraphe 2, on peut donc remplacer le mot « colonne » par « ligne ».

Méthodologie

Le rang d'une matrice se calcule soit avec les colonnes soit avec les lignes.

6 Théorie et pratique de l'échelonnement d'une matrice

- Échelonner la matrice A consiste à écrire $A = PE$ où P est une matrice carrée inversible et E une matrice échelonnée ayant les mêmes dimensions que A. Cela se fait avec deux types d'opérations élémentaires (a) permuter deux lignes d'une matrice (b) remplacer la ligne L_k par $L_k - \alpha L_j$. Ces opérations sont faciles à faire. La matrice initiale A a le **même rang que la matrice échelonnée E**.

Méthodologie

Cet échelonnement est très naturel, et on le pratique comme avec les systèmes linéaires. Ne pas chercher à fabriquer la matrice inversible P.

- Le théorème sur la transposition affirme que :

Théorème 4. Le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de **lignes** non identiquement nulles de cette matrice.

En effet, les lignes non identiquement nulles d'une matrice échelonnée forment une famille libre, et donnent le rang de la matrice via ses lignes.

Exemple 4.a : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On fait apparaître au moins un 0 en tête de la ligne L_2 en la remplaçant par $L_2 - L_1$, et au moins un 0 en tête de L_3 en la remplaçant par $L_3 - 3L_1$. On obtient $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -5 \\ 0 & -4 & 14 & -8 \end{pmatrix}$. On fait apparaître au moins un nouveau 0 en début de L_3 en la remplaçant par $L_3 - 2L_2$, ce qui donne $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice a été échelonnée.

Exemple 4.b : Comme il y a trois lignes non identiquement nulles, le rang de E, et donc celui de A, est égal à 3. Les trois lignes de la matrice sont linéairement indépendantes. On peut aussi trouver trois colonnes linéairement indépendantes, mais notre échelonnement en ligne ne permet pas de dire lesquelles.

Exemple 4.c : Les coefficients $a_{1,1} = 1$ et $b_{2,2} = -2$, qui jouent un rôle fondamental, sont appelés pivot dans les diverses matrices calculées.

- Si l'un des pivots est nul, soit on permute deux lignes pour faire apparaître un pivot non nul, soit (si c'est impossible) on se décale d'un cran vers la droite. Des exemples sont donnés en exercice.

Méthodologie

Si A est de rang r, la forme échelonnée nous donne une famille de r **lignes** linéairement indépendantes de A. S'il n'y a eu aucune permutation de lignes dans l'échelonnement, ce sont les r premières lignes de A qui sont indépendantes. Sinon, il faut bien garder la trace des lignes permutées, et redonner à chaque ligne son vrai numéro dans A, si l'on souhaite connaître une famille de r lignes indépendantes.

7 Finalement : comment calculer le rang ?

- La mise en pratique est déjà connue, on vient simplement de la justifier rigoureusement dans les paragraphes précédents. Le théorème 4 nous dit que :

Sachant que le rang se calcule avec les lignes aussi bien qu'avec les colonnes, on échelonne la matrice A comme on a l'habitude de faire. Le rang est égal au **nombre de lignes non identiquement nulles** de la forme échelonnée.

- Cette possibilité de travailler avec les lignes **ou** avec les colonnes donne beaucoup de liberté dans la façon de procéder, ce qui est expliqué dans le paragraphe suivant.

8 Échelonner avec les colonnes plutôt qu'avec les lignes ?

- **Rang d'une matrice :** quand on veut **à la fois** trouver le rang d'une matrice A **et** trouver une famille libre maximale de **colonnes** dans cette matrice, on travaille avec la matrice **transposée** ${}^tA$, qui est de même rang : c'est cette transposée que l'on échelonne. Les lignes de la transposée sont les colonnes de A. Quand on a échelonné ${}^tA$ et trouvé une famille libre maximale de **lignes** de ${}^tA$, on a en fait trouvé une famille libre maximale de **colonnes** de la matrice A de départ.
- **Rang d'une famille de vecteurs de K^n :** pour trouver le rang d'une famille de p vecteurs de K^n, et en extraire une sous-famille libre maximale, on échelonne la matrice à p lignes et n colonnes où les p vecteurs sont stockés dans les **lignes**.

Exemple 5.a : Cherchons une sous-famille libre maximale de la famille $X_1 = (1,2,0,-1)$, $X_2 = (2,1,1,1)$, $X_3 = (3,3,1,0)$, $X_4 = (4,-1,3,5)$, $X_5 = (9,6,4,2)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$. On écrit la matrice 5×4 contenant les différents vecteurs **en ligne** :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 9 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 5.b : On commence par remplacer L_2 par $L_2 - 2L_1$, L_3 par $L_3 - 3L_1$, L_4 par $L_4 - 4L_1$ et L_5 par $L_5 - 9L_1$, pour mettre des 0 en tête des lignes L_2,L_3,L_4,L_5. Il vient $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & 3 & 9 \\ 0 & -12 & 4 & 11 \end{pmatrix}$. On peut continuer l'échelonnement, mais on constate que $L_3 = L_2$ et $L_4 = 3L_2$: on peut enlever les lignes L_3 et L_4, et notre matrice a le même rang que $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.

Exemple 5.c : On y remplace L_3 par $L_3 - 4L_2$, et on obtient la matrice échelonnée $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de rang 3. La famille de vecteurs est de rang 3. Attention, la dernière ligne de E correspond au vecteur X_5, et c'est donc la famille X_1,X_2,X_5 qui est libre.

Méthodologie finale

- Si l'on cherche uniquement le rang de A ou bien si l'on cherche une famille maximale de **lignes** indépendantes, on échelonne A.
- Si l'on cherche le rang de A et une famille maximale de **colonnes** indépendantes, on échelonne sa transposée.
- Pour une famille de vecteurs, où l'on a en général besoin de connaître une sous-famille libre maximale, on échelonne la matrice obtenue en mettant les vecteurs en **ligne**.

9 Rang d'une matrice avec Xcas

L'instruction `rank(a)` calcule le rang de la matrice a.
Attention, si la matrice contient un paramètre, `rank` calcule le rang dans le cas le plus général et ne s'occupe pas des cas particuliers où ce rang peut diminuer.

10 Ailleurs dans d'autres livres ou sur Internet

- Ici, nous échelonnons les matrices en ligne, l'idée venant de l'échelonnement en ligne des systèmes linéaires : c'est plus visuel et plus manuel, puisque nous lisons un texte en ligne, et les unes après les autres. Mais il est tout à fait possible de privilégier un échelonnement suivant les colonnes d'une matrice. Au lieu de construire une matrice échelonnée triangulaire supérieure, la technique construit alors une matrice triangulaire inférieure. C'est une autre façon de voir et de procéder, mais elle n'apporte rien de plus, elle ne permet aucune conclusion plus rapide.
- Il faut savoir qu'elle existe, on la rencontre ailleurs. Il faut surtout comprendre que c'est la même chose que de travailler en ligne, à une transposition près des matrices ! Rien de neuf sous le soleil, donc...

Je m'entraîne en ligne

Exercices supplémentaires 5,6,7,8
www.lienmini.fr/exalgebre8

Exercice 1

Trouver, sans aucun calcul, hormis d'éventuelles permutations de lignes ou de colonnes, le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Trouver des combinaisons linéaires simples de lignes, et calculer le rang de A. Avec un minimum de calculs, exprimer la colonne C_3 comme combinaison linéaire de C_1 et C_2.

Exercice 3

Échelonner $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 4 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$. Donner son rang r et indiquer une famille de r lignes indépendantes dans cette matrice.

Exercice 4

On reprend la matrice A précédente. En échelonnant sa transposée, trouver trois colonnes de A formant une famille libre.

Exercice 1

- A est échelonnée, son rang est égal à 2. On peut aussi dire que ses deux premières colonnes sont clairement indépendantes, et que le rang ne peut pas dépasser 2.
- En permutant les lignes de B pour avoir $\begin{pmatrix} L_3 \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$, on a une matrice échelonnée de rang 3. Il en va donc de même pour B.
- Le rang de C est inférieur ou égal à 3. Les deux dernières lignes sont proportionnelles, et la dernière ne sert à rien pour le rang. C a le rang de $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$, qui est échelonnée de rang 3. La matrice C est de rang 3.
- Dans D, on a $L_3 = L_1 + L_2$. Seules les deux premières lignes sont indépendantes, et la matrice est de rang 2.

Exercice 2

On a aisément $L_4 = 2L_2$ et $L_1 = L_3 - L_2$. Parmi les quatre lignes, les deux premières sont indépendantes, mais on ne peut pas trouver trois lignes indépendantes. Le rang est donc égal à 2. Les colonnes C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles, et C_3 en est donc une combinaison linéaire $C_3 = aC_1 + bC_2$. En regardant les deux premières lignes, on a tout de suite $a = 3$ et $b = 2$, ce qui se vérifie ensuite sur les deux dernières lignes.

Exercice 3

On remplace L_2 par $L_2 + L_1$, L_3 par $L_3 - 4L_1$ et L_4 par $L_4 - 4L_1$ pour mettre des 0 en tête des lignes 2,3,4. On obtient $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -17 \\ 0 & 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$. On remplace L_3 par $L_3 + 3/5L_2$ et L_4 par $L_4 - 2/5L_2$, pour faire apparaître des 0 en deuxième colonne des lignes 3 et 4. Il vient $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -21/5 & -58/5 \\ 0 & 0 & -21/5 & -58/5 \end{pmatrix}$. On remplace L_4 par $L_4 - L_3$ et on a finalement $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -21/5 & -58/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice est de rang 3. Comme on n'a fait aucune permutation de lignes, les trois premières lignes de E correspondent aux trois premières lignes de A, et celles-ci forment une famille libre. (On peut remarquer que $L_4 = L_1 + L_2 + L_3$ dans A, ce qui empêche le rang d'être égal à 4.)

Exercice 4

On part de ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 0 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. On remplace L_2 par $L_2 - 2L_1$, L_3 par $L_3 - 3L_1$ et L_4 par $L_4 - 4L_1$ pour faire apparaître des 0 en première colonne à partir de la deuxième ligne. Il vient $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 9 & -17 & -8 \end{pmatrix}$. On remplace L_3 par $L_3 - 3/5L_2$ et L_4 par $L_4 - 9/5L_2$ pour mettre des 0 en deuxième colonne à partir de la troisième ligne. On a $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -21/5 & -21/5 \\ 0 & 0 & -58/5 & -58/5 \end{pmatrix}$, et finalement $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -21/5 & -21/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a bien une matrice de rang 3, on n'a pas fait de permutation de lignes : les lignes L_1, L_2, L_3 de ${}^tA$ sont donc indépendantes, ce qui signifie que les *trois premières colonnes* de A sont indépendantes.