

La racine carrée d'un nombre

La *racine carrée* d'un nombre n est définie comme étant le nombre **positif** m tel que $m^2 = n$. On dénote la racine carrée de n comme suit: $\sqrt{n} = m$. Par exemple: $\sqrt{49} = 7$ puisque $7^2 = 49$.

On fait quelques observations sur la *racine carrée* d'un nombre.

- Par définition la racine carrée d'un nombre est toujours positive et donc est unique. Il est considéré comme une erreur d'écrire $\sqrt{25} = \pm 5$ (même si $(-5)^2 = 25$).
 - Par ailleurs il est correct de dire que la solution complète de l'équation $x^2 = 25$ est ± 5 .
- La racine carrée d'un nombre négatif n'est pas définie dans les nombres réels.
 - Par contre il est possible d'agrandir l'ensemble des nombres réels à un ensemble qu'on appelle les nombres *complexes* \mathbb{C} dans lequel une expression telles que $\sqrt{-1}$ a un sens particulier. Mais, comme on dit, ceci est une toute autre histoire.
- La racine carrée respecte les mêmes lois que les exposants. (Voir le fichier intitulée Exposants IV dans les Concepts mathématiques.) On énumère ici ses propriétés:
 - Pour tout nombres réels positifs a et b , $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
 - Pour tout nombres réels positifs a et $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
 - Pour tout nombre réel positif a , $(\sqrt{a})^2 = a$. De plus $\sqrt{a^2} = a$. Les lois des exposants nous permettent donc d'écrire $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
 - * Attention: Si a est un nombre négatif il est possible de prendre la racine carrée de a^2 puisque a^2 est positif.
 - Mais pour $a < 0$ nous devons écrire $\sqrt{a^2} = |a|$. (Voir le fichier intitulé Valeur absolue à la page des Concepts)
 - Par exemple: $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = |-4| = 4$.
 - Il serait faux d'écrire $\sqrt{(-4)^2} = -4$
 - Pour ne pas se tromper on peut écrire: Peu importe la valeur de a

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

- Il est en général **faux** d'écrire $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
 - Car si $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{4+9}$ nous obtiendrions la contradiction suivante:

$$5 = 2 + 3 = \sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Or nous savons que $\sqrt{13} < \sqrt{25} = 5$.

- Nous pouvons trouver assez facilement la racine carrée des carrés parfaits comme 1, 4, 9, 16, 25, 36, etc.. Par contre on ne peut que faire une approximation de la racine carrée des entiers qui ne sont pas des carrés parfaits.
 - Par exemple on peut démontrer assez facilement que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. (Voir le concept Nombres irrationnels à la page de Concepts mathématiques). En général, ceux qui pratiquent les *mathématiques pures* préfèrent tout simplement laisser $\sqrt{2}$ sous cette forme plutôt que d'en écrire une approximation.

Deux propriétés des racines carrées.

- (a) Pour tout nombres positifs a et b , $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- (b) Pour tout nombres positifs a et b où $b \leq a$, $\sqrt{a-b} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Preuve (facultatif):

- (a) Pour la propriété (a), il suffit de voir que

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a+b}^2 &= a+b \\
 &= \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 \\
 &\leq \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 \\
 &= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \quad (\text{Voir le fichier intitulé Algèbre: développement d'expressions algébriques}).
 \end{aligned}$$

Donc $\sqrt{a+b} \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$. Il en découle que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

- (b) Pour la propriété (b), il suffit de voir que

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a} &= \sqrt{a-b+b} \\
 &\leq \sqrt{a-b} + \sqrt{b} \quad (\text{Grâce la propriété (a)})
 \end{aligned}$$

Donc $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}$. Où de façon équivalente $\sqrt{a-b} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

La racine cubique.

Nous en profitons pour parler de la *racine cubique* d'un nombre. La *racine cubique* d'un nombre n est définie comme étant le nombre m tel que $m^3 = n$. On dénote la racine cubique de n comme suit: $\sqrt[3]{n} = m$. Par exemple: $\sqrt[3]{27} = 3$ puisque $3^3 = 27$.

Nous faisons ici encore une fois quelques observations sur la *racine cubique* d'un nombre.

- La définition de la racine cubique d'un nombre est toujours unique; de plus il est possible de prendre la racine cubique d'un nombre négatif.
 - Par exemple, $\sqrt[3]{-8} = -2$ puisque $(-2)^3 = -8$.
 - Il est facile de constater que la racine cubique d'un nombre positif est toujours positive.
 - Aussi on voit que la solution complète de l'équation $x^3 = 64$ est seulement $\sqrt[3]{64} = 4$.
- Comme la racine carrée, les racines cubiques respectent les mêmes lois que les exposants. On énumère ici ses propriétés:
 - Pour tout nombres réels a et b , $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$.
 - Pour tout nombres réels positifs a et $b \neq 0$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.
 - Pour tout nombre réel positif a , $(\sqrt[3]{a})^3 = a$. De plus $\sqrt[3]{a^3} = a$. Les lois des exposants nous permettent donc d'écrire $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.
- Il est en général **faux** d'écrire $\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$.