# Chapitre 3. Combinaison linéaire et SEV

## §1. Reconnaitre une combinaison linéaire.

Etant donné deux vecteurs $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, par exemple $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, ainsi que deux coefficients $s$ et $t$, il est très facile de calculer leur combinaison linéaire $s\vec{\mathbf{v}}_1 + t\vec{\mathbf{v}}_2$. Par exemple

$$2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = (\textit{facile}\ldots).$$

# Chapitre 3. Combinaison linéaire et SEV

§1. Reconnaitre une combinaison linéaire.

Etant donné deux vecteurs $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi que deux coefficients $s$ et $t$, il est très facile de calculer leur combinaison linéaire $s\vec{\mathbf{v}}_1 + t\vec{\mathbf{v}}_2$. Par exemple

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (\textit{facile}\ldots).$$

Question réciproque : Etant donné un troisième vecteur $\vec{\mathbf{b}}$, par exemple $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$, est-il une combinaison linéaire de $\vec{\mathbf{v}}_1$ et $\vec{\mathbf{v}}_2$ ?

§1. Reconnaitre une combinaison linéaire.

Etant donné deux vecteurs $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, par exemple $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, ainsi que deux coefficients $s$ et $t$, il est très facile de calculer leur combinaison linéaire $s\vec{\mathbf{v}}_1 + t\vec{\mathbf{v}}_2$. Par exemple
$$2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = (\textit{facile}\ldots).$$

Question réciproque : Etant donné un troisième vecteur $\vec{\mathbf{b}}$, par exemple $\begin{pmatrix}8\\9\\7\end{pmatrix}$, est-il une combinaison linéaire de $\vec{\mathbf{v}}_1$ et $\vec{\mathbf{v}}_2$ ?

Une méthode naïve est de tester avec toutes sortes de coefficients $s, t$ pour tenter de retrouver $\vec{\mathbf{b}}$ avec $s\vec{\mathbf{v}}_1 + t\vec{\mathbf{v}}_2$.

Est-ce la bonne méthode ?

Question réciproque : Etant donné un troisième vecteur $\vec{\mathbf{b}}$, par exemple $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$, est-il une combinaison linéaire de $\vec{\mathbf{v}}_1$ et $\vec{\mathbf{v}}_2$ ?

Une méthode naïve est de tester avec toutes sortes de coefficients $s, t$ pour tenter de retrouver $\vec{\mathbf{b}}$ avec $s\vec{\mathbf{v}}_1 + t\vec{\mathbf{v}}_2$.
Est-ce la bonne méthode ?

Question réciproque : Etant donné un troisième vecteur $\vec{\mathbf{b}}$, par exemple $\begin{pmatrix}8\\9\\7\end{pmatrix}$, est-il une combinaison linéaire de $\vec{\mathbf{v}}_1$ et $\vec{\mathbf{v}}_2$ ?

Une méthode naïve est de tester avec toutes sortes de coefficients $s, t$ pour tenter de retrouver $\vec{\mathbf{b}}$ avec $s\vec{\mathbf{v}}_1 + t\vec{\mathbf{v}}_2$.
Est-ce la bonne méthode ? **NON**, il y a trop (une infinité) de coefficients à tester.

La bonne méthode est de : poser des coefficients comme des inconnues, et traduire la question en :

$$\boxed{\text{Est-ce que le système} \quad x\vec{\mathbf{v}}_1 + y\vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{\mathbf{b}} \quad \text{admet une solution ?}}$$

Dans notre exemple concret, la question devient :

Est-ce que le système $x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\9\\7\end{pmatrix}$ admet une solution ?

Est-ce que le système $x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\9\\7\end{pmatrix}$ admet une solution ?

On est donc ramené à résoudre ce système. On obtient
$x=2, y=3$.

Est-ce que le système $x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\9\\7\end{pmatrix}$ admet une solution ?

On est donc ramené à résoudre ce système. On obtient
$x = 2, y = 3$.

Ainsi, la réponse de la question initiale est :

Est-ce que le système $x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\9\\7\end{pmatrix}$ admet une solution ?

On est donc ramené à résoudre ce système. On obtient $x=2, y=3$.

Ainsi, la réponse de la question initiale est :

oui, $\begin{pmatrix}8\\9\\7\end{pmatrix}$ s'exprime bien en combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$,

en effet $\begin{pmatrix}8\\9\\7\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ .

Question similaire : En dimension 4, le vecteur $\vec{\mathbf{e}}_4$ est-il une combinaison linéaire de $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$ et $\vec{\mathbf{e}}_3$ ?

Justifier votre réponse.

Est-ce que le système $x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\9\\7\end{pmatrix}$ admet une solution ?

On est donc ramené à résoudre ce système. On obtient
$x = 2, y = 3$.

Ainsi, la réponse de la question initiale est :

oui, $\begin{pmatrix}8\\9\\7\end{pmatrix}$ s'exprime bien en combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$,
en effet $\begin{pmatrix}8\\9\\7\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ .

Question similaire : En dimension 4, le vecteur $\vec{\mathbf{e}}_4$ est-il une combinaison linéaire de $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$ et $\vec{\mathbf{e}}_3$ ?

Justifier votre réponse.
Non. Car le système $x\vec{\mathbf{e}}_1 + y\vec{\mathbf{e}}_2 + z\vec{\mathbf{e}}_3 = \vec{\mathbf{e}}_4$ n'a pas de solution.

# §2. Sous espace vectoriel engendré

L'équation $x - y - 2z = 0$ a pour solution $x = y + 2z$, où $y, z$ peuvent prendre n'importe quelles valeurs réelles. Sous forme vectorielle, l'ensemble des solutions s'écrit

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ (on a remplacé } y, z \text{ par } a, b\text{)}$$

$$= \left\{ \text{toutes les combinaisons linéaires de } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{nouvelle notation}}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ (on a remplacé } y, z \text{ par } a, b\text{)}$$

$$= \left\{ \text{toutes les combinaisons linéaires de } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{nouvelle notation}}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

**Définition et Notation.** On utilise $\langle \vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_m \rangle$ pour désigner l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des $\vec{\mathbf{v}}_i$, ou bien, en écriture ensembliste : $\langle \vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_m \rangle = \{\sum_k a_k \vec{\mathbf{v}}_k, a_k \in \mathbb{R}\} = \{a_1\vec{\mathbf{v}}_1 + a_2\vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + a_m\vec{\mathbf{v}}_m \mid a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}\}$. On appelle cet ensemble le **sous espace vectoriel engendré** (SEV) par les vecteurs $\vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_m$.

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ (on a remplacé } y, z \text{ par } a, b\text{)}$$

$$= \left\{ \text{toutes les combinaisons linéaires de } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{nouvelle notation}}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

**Définition et Notation.** On utilise $\langle \vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_m \rangle$ pour désigner l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des $\vec{\mathbf{v}}_i$, ou bien, en écriture ensembliste : $\langle \vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_m \rangle = \{\sum_k a_k \vec{\mathbf{v}}_k, a_k \in \mathbb{R}\} = \{a_1\vec{\mathbf{v}}_1 + a_2\vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + a_m\vec{\mathbf{v}}_m \mid a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}\}$. On appelle cet ensemble le **sous espace vectoriel engendré** (SEV) par les vecteurs $\vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_m$.

Ainsi, demander si $\vec{\mathbf{b}}$ est une combinaison linéaire des $\vec{\mathbf{v}}_i$ revient à demander si $\vec{\mathbf{b}}$ est un élément de l'ensemble $\langle \vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_m \rangle$, revient à demander si un système (lequel ?) admet une solution (ou plus).

## §3. Réduction suivant les colonnes

On peut résoudre un système $A\vec{x} = \vec{\mathbf{b}}$ en cinq étapes suivantes :

**1.** On forme la matrice compagnon verticale $\left(\frac{A}{Id}\right)$.

**2.** On l'échelonne suivant les colonnes pour obtenir $\left(\frac{B}{H}\right)$.

Exemple : Résoudre $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \rightsquigarrow C_3 - C_1]{C_2 \rightsquigarrow C_2 + C_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \\ 1 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \rightsquigarrow C_3 - C_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Alors $B = ??$, $H = ??$, $\vec{\mathbf{b}} = ??$

**3.** On résout $B\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}}$. **4.** On multiplie la solution $\vec{\mathbf{u}}$ par $H$ pour obtenir $H\vec{\mathbf{u}}$. C'est la solution ! **5.** Vérification finale.

---

Dans notre exemple $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**3.** On résout $B\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}}$. **4.** On multiplie la solution $\vec{\mathbf{u}}$ par $H$ pour obtenir $H\vec{\mathbf{u}}$. C'est la solution ! **5.** Vérification finale.

---

Dans notre exemple $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soit $\vec{\mathbf{u}}$ un nouveau vecteur inconnu en dimension 3 qu'on donne un nom à chaque entrée, par exemple $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

**3.** On résout $B\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}}$. **4.** On multiplie la solution $\vec{\mathbf{u}}$ par $H$ pour obtenir $H\vec{\mathbf{u}}$. C'est la solution ! **5.** Vérification finale.

---

Dans notre exemple $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soit $\vec{\mathbf{u}}$ un nouveau vecteur inconnu en dimension 3 qu'on donne un nom à chaque entrée, par exemple $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

**3.** On résout $B\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}}$ et on trouve $\vec{\mathbf{u}} =$

**3.** On résout $B\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}}$. **4.** On multiplie la solution $\vec{\mathbf{u}}$ par $H$ pour obtenir $H\vec{\mathbf{u}}$. C'est la solution ! **5.** Vérification finale.

---

Dans notre exemple $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soit $\vec{\mathbf{u}}$ un nouveau vecteur inconnu en dimension 3 qu'on donne un nom à chaque entrée, par exemple $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

**3.** On résout $B\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}}$ et on trouve $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ w \end{pmatrix}$, avec $w$ pouvant prendre n'importe quelle valeur.

**4.** Multiplication par H : $H\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 2-2w \\ 1-w \\ w \end{pmatrix}$. Ou bien, sous forme vectorielle : $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w \in \mathbb{R} \right\} \underset{SEV}{\overset{\text{sous forme}}{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

**5.** Vérification.

# Théorème de réduction suivant les colonnes.

Etant donné une matrice $A$ (non nécessairement carrée), lorsqu'on réduit la matrice compagnon verticale $\left(\dfrac{A}{Id}\right)$ à une matrice $\left(\dfrac{B}{H}\right)$ par des opérations des colonnes,

1. la matrice $H$ est carrée et inversible,

# Théorème de réduction suivant les colonnes.

Etant donné une matrice $A$ (non nécessairement carrée), lorsqu'on réduit la matrice compagnon verticale $\left(\frac{A}{Id}\right)$ à une matrice $\left(\frac{B}{H}\right)$ par des opérations des colonnes,

1. la matrice $H$ est carrée et inversible,
2. la matrice $B$ n'est rien d'autre que $AH$,

# Théorème de réduction suivant les colonnes.

Etant donné une matrice $A$ (non nécessairement carrée), lorsqu'on réduit la matrice compagnon verticale $\left(\frac{A}{Id}\right)$ à une matrice $\left(\frac{B}{H}\right)$ par des opérations des colonnes,

1. la matrice $H$ est carrée et inversible,
2. la matrice $B$ n'est rien d'autre que $AH$,
3. l'ensemble $\{\vec{\mathbf{x}}, A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}\}$ est égale à $\{H\vec{\mathbf{u}}, B\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}}\}$,

# Théorème de réduction suivant les colonnes.

Etant donné une matrice $A$ (non nécessairement carrée), lorsqu'on réduit la matrice compagnon verticale $\left(\frac{A}{Id}\right)$ à une matrice $\left(\frac{B}{H}\right)$ par des opérations des colonnes,

1. la matrice $H$ est carrée et inversible,
2. la matrice $B$ n'est rien d'autre que $AH$,
3. l'ensemble $\{\vec{\mathbf{x}}, A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}\}$ est égale à $\{H\vec{\mathbf{u}}, B\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}}\}$,
4. la matrice $A$ est inversible ssi $\left(\frac{A}{Id}\right)$ se réduit à $\left(\frac{Id}{H}\right)$, et dans ce cas $H = A^{-1}$,

# Théorème de réduction suivant les colonnes.

Etant donné une matrice $A$ (non nécessairement carrée), lorsqu'on réduit la matrice compagnon verticale $\left(\frac{A}{Id}\right)$ à une matrice $\left(\frac{B}{H}\right)$ par des opérations des colonnes,

1. la matrice $H$ est carrée et inversible,

2. la matrice $B$ n'est rien d'autre que $AH$,

3. l'ensemble $\{\vec{\mathbf{x}}, A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}\}$ est égale à $\{H\vec{\mathbf{u}}, B\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}}\}$,

4. la matrice $A$ est inversible ssi $\left(\frac{A}{Id}\right)$ se réduit à $\left(\frac{Id}{H}\right)$, et dans ce cas $H = A^{-1}$,

5. Un vecteur $\vec{\mathbf{b}}$ est dans le SEV engendré par les vecteurs colonnes de $A$ ssi $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ admet une solution (ou plus), ssi le nouveau système avec des nouvelles inconnues $B\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}}$ admet une solution (ou plus). et bien plus d'autres propriétés...

# Preuve du théorème

Chaque opération élémentaire suivant les colonnes correspond à multiplier la matrice à droite par une matrice (dite élémentaire) $E$ qui est inversible. Ainsi la suite de réduction se lit

$$\left(\frac{A}{Id}\right) \rightsquigarrow \left(\frac{AE_1}{E_1}\right) \rightsquigarrow \left(\frac{AE_1E_2}{E_1E_2}\right) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\frac{AE_1E_2\cdots E_m}{E_1E_2\cdots E_m}\right) = \left(\frac{AH}{H}\right).$$

Ceci montre que si $\left(\frac{A}{Id}\right)$ se réduit à $\left(\frac{B}{H}\right)$, alors $B = AH$ et $H$ est toujours inversible.

De plus, si $B = id$ alors $AH = Id$, donc $H = A^{-1}$, et $B\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}} \Rightarrow (AH)\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}} \Rightarrow A(H\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{b}} \Rightarrow H\vec{\mathbf{u}}$ est solution de $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.

Réciproquement, si $\vec{\mathbf{x}}$ est une solution de $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, alors, par l'invisibilité de $H$, on peut former $\vec{\mathbf{u}} = H^{-1}\vec{\mathbf{x}}$. Ainsi $B\vec{\mathbf{u}} = B(H^{-1}\vec{\mathbf{x}}) = AHH^{-1}\vec{\mathbf{x}} = A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.

# Interprétation géométrique et applications