

## Rappels de cours : Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation

## 1 - Définition intuitive

Soit  $f$  une application linéaire.

- Un vecteur est dit **vecteur propre** par l'application linéaire  $f$  s'il est non nul et si l'application ne fait que modifier sa taille sans changer sa direction.
- Une **valeur propre** associée à un vecteur propre est le facteur de modification de taille, c'est-à-dire le nombre par lequel il faut multiplier le vecteur pour obtenir son image. Ce facteur peut être négatif (renversement du sens du vecteur) ou nul (vecteur transformé en un vecteur de longueur nulle).

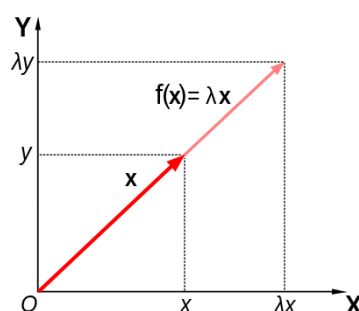


Figure 1: L'application linéaire  $f$  étire le vecteur  $x$  sans changer sa direction.  $x$  est un vecteur propre pour  $f$  et sa valeur propre est  $\lambda$ . (source : wikipedia)

- Un **sous-espace propre** associé à une valeur propre est l'ensemble des vecteurs propres qui ont une même valeur propre et le vecteur nul. Ils subissent tous la multiplication par le même facteur.

Exemple (cas particulier) : Considérons un ballon de baudruche parfaitement sphérique et prenons comme application linéaire une dilatation qui éloigne tous les points du ballon de son centre d'un rapport constant. Cette dilatation agrandit tous les vecteurs d'un même rapport sans changer leur direction. Tous les vecteurs, à l'exception du vecteur nul, sont donc des vecteurs propres et il existe une unique valeur propre. L'espace propre associé à cette valeur propre est donc composé de tous les vecteurs, il s'agit donc de  $\mathbb{R}^3$ . Cette application linéaire est particulière, on dit que c'est une homothétie.

A quoi servent les vecteurs et les valeurs propres en pratique ?

La connaissance des vecteurs et valeurs propres donne une information clé sur l'application linéaire considérée. Il existe de plus de nombreux cas où cette connaissance caractérise totalement l'application linéaire.

## 2 - Définition mathématique

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ , c'est à dire une application linéaire de  $E$  dans  $E$ .

On dit que  $\lambda \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) est une **valeur propre** de  $f$  si et seulement si :

$$(1) \quad \exists x \in E, x \neq 0, \text{ tel que } f(x) = \lambda x$$

Traduction de la définition (1) : "Il existe un vecteur  $x$  appartenant à l'espace vectoriel  $E$ , non nul, tel que l'image du vecteur  $x$  par  $f$  est proportionnelle à  $x$ ."

Le coefficient de proportionnalité est alors la valeur propre  $\lambda$  et  $x$  est un **vecteur propre** associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Propriétés :**

1. Un vecteur propre ne peut pas être associé à deux valeurs propres différentes
2. Par définition d'une valeur propre, un sous-espace propre n'est jamais réduit au vecteur nul.

## 3 - Lien entre le noyau d'une application linéaire $f$ et le déterminant de la matrice associée $A$

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $A$  la matrice carrée associée à l'endomorphisme  $f$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ .

Rappel : On appelle **noyau** de  $f$  et on note  $\text{Ker}(f)$  le sous-espace vectoriel de  $E$  :

$$(2) \quad \text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \text{ tels que } f(x) = 0\}$$

**Propriété** : Le déterminant de la matrice  $A$  est nul si et seulement si le noyau de l'endomorphisme  $f$  associé est non réduit au vecteur nul :

$$(3) \quad (\text{Ker}(f) \neq \{0\}) \iff (\det(A) = 0)$$

## 4 - Calcul des valeurs propres d'un endomorphisme

Soit  $A = (a_{ij})$  la matrice de l'endomorphisme  $f$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$  le vecteur

colonne correspondant au vecteur propre  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ , alors :

$$(4) \quad f(u) = \lambda u$$

$$(5) \quad \implies AX = \lambda X$$

$$(6) \quad \iff (A - \lambda I)X = 0 \quad (I : \text{matrice unité d'ordre } n)$$

Notons  $g$  l'application linéaire associée à la matrice  $(A - \lambda I)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

→ Pour que l'équation (6) ait une solution autre que la solution triviale  $X = 0$ , il faut par définition que le noyau de l'application linéaire  $g$  ne soit pas réduit au vecteur nul, c'est à dire  $\text{Ker}(g) \neq \{0\}$ . D'après la propriété (3), cela signifie que le déterminant de  $A - \lambda I$  doit être égal à 0, c'est à dire :

$$(7) \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Le déterminant  $\det(A - \lambda I)$  est un polynôme en  $\lambda$  de degré  $n$  que l'on appelle le **polynôme caractéristique** de  $A$ . Les valeurs de  $\lambda$  qui annulent ce polynôme, c'est à dire **les racines du polynôme, sont les valeurs propres de  $A$** .

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda_i$  l'ordre de multiplicité de la  $i$ ème racine du polynôme caractéristique. Il peut donc y avoir au maximum  $n$  valeurs propres distinctes, d'ordre de multiplicité 1 chacune.

Exemple : Calculer les valeurs propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ .

Les valeurs propres de  $A$  sont les scalaires  $\lambda_i$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ 6 & -4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(5 - \lambda)(4 + \lambda) + 18 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de  $A$  sont :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 2$ . Ce sont des valeurs propres d'ordre de multiplicité 1 chacune.

## 5 - Calcul des vecteurs propres d'un endomorphisme

### a - Cas des valeurs propres distinctes

Un vecteur propre  $X$  de composantes  $(x, y, \dots, z)$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , associé à la valeur propre  $\lambda$  doit vérifier la relation :

$$(8) \quad AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dots \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour trouver les coordonnées du vecteur propre  $X$  il suffit donc de résoudre un système linéaire.

**Propriété** : Si la matrice  $A$  admet  $n$  valeurs propres, distinctes deux à deux, les  $n$  vecteurs propres associés sont linéairement indépendants et forment une base de l'espace vectoriel  $E$ .

Exemple : Déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ .

Les vecteurs propres obtenus forment-ils une base de  $E = \mathbb{R}^2$  ?

En posant  $x_1$  et  $x_2$  les vecteurs propres associés respectivement à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , on a :

- Pour  $\lambda_1 = -1$  :

$$(A + I)X_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système ci-dessus est équivalent à :  $6x - 3y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$ .

Choix d'un vecteur propre :  $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Donc le sous-espace propre  $E_{\lambda_1}$  associé à  $\lambda_1$  est le

sous-espace engendré seulement par le vecteur  $x_1$  :  $E_{\lambda_1} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

- Pour  $\lambda_2 = 2$  :

$$(A - 2I)X_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système ci-dessus est équivalent à :  $3x - 3y = 0 \iff y = x$ .

Choix d'un vecteur propre :  $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Donc  $E_{\lambda_2} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Comme ici la matrice possède deux valeurs propres distinctes, la famille  $(x_1, x_2)$  forme bien une base de  $\mathbb{R}^2$  (Vérification : le déterminant  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ ).

## b - Cas général

**Propriété :** La dimension de chaque sous-espace propre  $E_{\lambda_i}$  est inférieure ou égale à la multiplicité  $m_i$  de la valeur propre  $\lambda_i$ . Ce qui signifie que pour chaque  $\lambda_i$ , le sous-espace propre  $E_{\lambda_i}$  est engendré par au plus  $m_i$  vecteurs propres.

Exemple : Soit une matrice de taille  $(3, 3)$  ayant une valeur propre  $\lambda_1$  d'ordre de multiplicité 2 et une deuxième valeur propre  $\lambda_2$  d'ordre de multiplicité 1.

→ Alors,  $E_{\lambda_1}$  sera engendré soit par 2 vecteurs propres ( $E_{\lambda_1} = \text{Vect}\{x_1, x'_1\}$  : c'est un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ ) soit par 1 vecteur propre ( $E_{\lambda_1} = \text{Vect}\{x_1\}$  : c'est une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$ ). Et  $E_{\lambda_2}$  sera engendré par 1 vecteur propre ( $E_{\lambda_2} = \text{Vect}\{x_2\}$  : c'est une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$ ).

## 6 - Diagonalisation d'une matrice

Soit  $A = (a_{ij})$  la matrice de l'endomorphisme  $f$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$ .

### a - Cas des valeurs propres distinctes

Rappel : Les vecteurs propres  $x_1, x_2, \dots, x_n$  associés aux  $n$  valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  forment une base  $\mathcal{B}_x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $E$ .

**Propriété :** Si la matrice  $A$  possède  $n$  valeurs propres distinctes, alors on dit qu'elle est diagonalisable ce qui signifie que dans la base  $\mathcal{B}_x$ , la matrice est **diagonale** et égale à :

$$(9) \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec  $D = P^{-1}AP$  (formule de changement de base), où  $P$  représente la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}_x$ , dont les colonnes sont constituées des vecteurs propres  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $A$ .

Exemple : Reprenons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ . On sait qu'elle possède deux valeurs propres distinctes  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 2$  et que les deux vecteurs propres associés sont  $x_1 = (1, 2)$  et  $x_2 = (1, 1)$ .

Alors la matrice  $A$  est diagonalisable et une diagonalisation possible est :  $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , avec la matrice de passage  $P = (x_1 \ x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

### b - Cas général

Considérons ici le cas où les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$  sont d'ordre de multiplicité  $m_i$ . Cela signifie que pour chaque  $\lambda_i$  le sous-espace propre associé est engendré par au plus  $m_i$  vecteurs propres que l'on note  $X_{i,j}, 1 \leq j \leq m_i$ .

**Propriété :** La matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des différents sous-espaces propres est égale à  $n$ .

Dans ce cas, la matrice diagonale  $D$  est la matrice dont les coefficients diagonaux sont les  $\lambda_i$  répétés  $m_i$  fois et la matrice de passage  $P$  sera la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $X_{i,j}$  (l'ordre n'a pas d'importance, mais si on a le vecteur  $X_{i,j}$  sur la  $k$ -ième colonne de  $P$ , alors on a la valeur propre  $\lambda_i$  sur la  $k$ -ième colonne de  $D$ ).

Exemple : Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Après calcul on trouve que  $A$  possède 2 valeurs propres :

- $\lambda_1 = 2$  de multiplicité 2 avec le sous-espace propre associé  $E_{\lambda_1} = \text{Vect} \left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, x'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$
- $\lambda_2 = -3$  de multiplicité 1 avec le sous-espace propre associé  $E_{\lambda_2} = \text{Vect} \left\{ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ .

On a bien :  $\dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) = 2 + 1 = 3$ , donc la matrice  $A$  est diagonalisable et une diagonalisation possible est :  $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ , avec  $P = (x_1 \ x'_1 \ x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

---

## Exercice 1

Soit  $A$  la matrice suivante :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice  $A$ .
2. Calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres de  $A$  et en déduire les sous-espaces propres associés à chacune des valeurs propres.

## Exercice 2

Soit  $A$  la matrice suivante :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice  $A$ .
2. Calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres de  $A$  et en déduire les sous-espaces propres associés à chacune des valeurs propres.
3. Démontrer que  $A$  est diagonalisable.
4. En déduire une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.