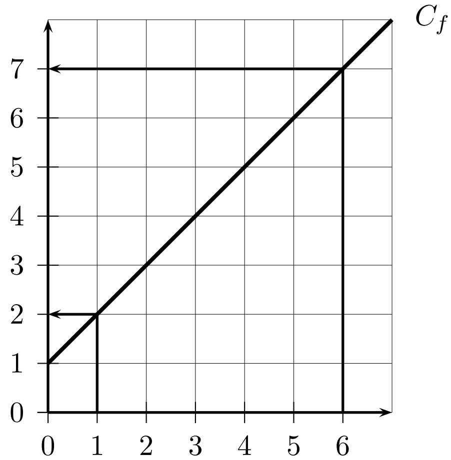
primitives et calcul intégral

Table des matières

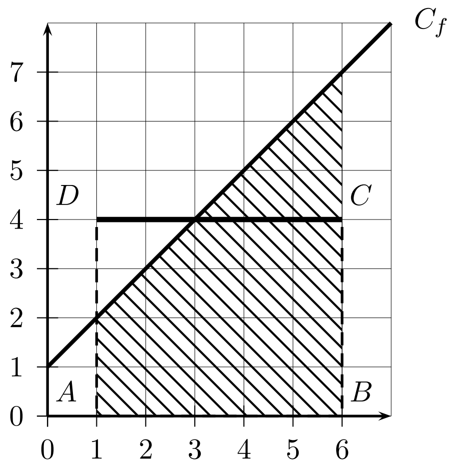
1 introduction

1. en un certain lieu, soit $\boxed{f(x) = x + 1}$ la valeur de la température en degrés mesurée à l'heure x ou $x \in [0; 7]$



par exemple : $\begin{cases} \text{à la date } x = 1 \text{ il fait } f(1) = 1 + 1 = 2 \text{ degrés} \\ \text{à la date } x = 6 \text{ il fait } f(6) = 6 + 1 = 7 \text{ degrés} \end{cases}$

2. on cherche à déterminer la valeur de $\boxed{V_m(f)}$, $\boxed{\text{température moyenne entre les heures } x = 1 \text{ et } x = 6}$

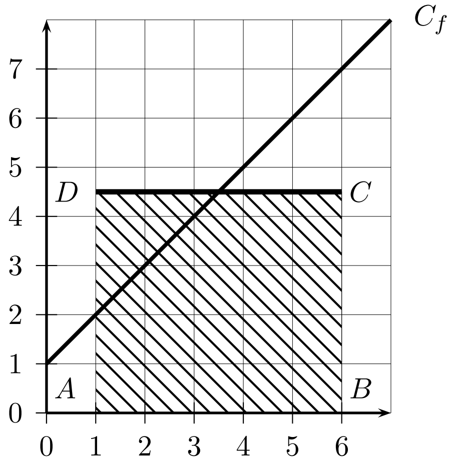


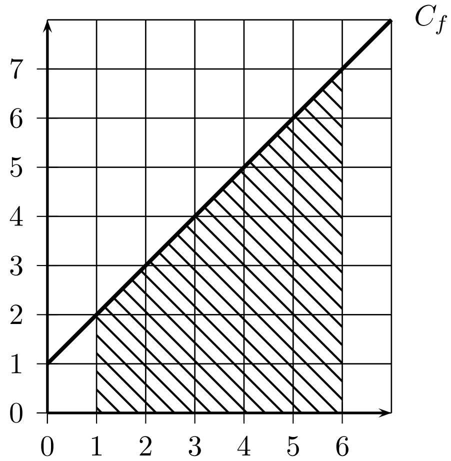
graphiquement on peut estimer que la valeur moyenne vaut $\boxed{V_m(f) \simeq 4}$

3. par définition, la valeur moyenne cherchée est telle que
l'aire sous la courbe entre $x = 1$ et $x = 6$ notée $A = \displaystyle\int_1^6 f(x)dx$ *("intégrale de 1 à 6 de f de x, dx")*
est égale à
l'aire du rectangle $ABCD$ de même largeur (entre $x = 1$ et $x = 6$) soit $largeur \times hauteur = (6-1) \times V_m(f)$

ce qui donne $\displaystyle\int_1^6 f(x)dx = (6-1) \times V_m(f)$

donc : $\boxed{V_m(f) = \dfrac{1}{6-1} \times \displaystyle\int_1^6 f(x)dx}$, il reste à déterminer $\boxed{\displaystyle\int_1^6 f(x)dx}$ *("intégrale de 1 à 6 de f de x, dx")*





4. pour cela on utilise le théorème $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$ où $\boxed{F \text{ est une primitive de } f}$

sachant que $\boxed{F \text{ est une primitive de } f \iff F'(x) = f(x)}$

il suffit alors de trouver une primitive de f où $f(x) = x + 1$

or $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x$

est telle que $F'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x + 1 = x + 1 = f(x)$

donc $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x}$ est une primitive de $\boxed{f(x) = x + 1}$

on a donc : $\displaystyle\int_1^6 f(x)dx = F(6) - F(1)$ avec $\begin{cases} F(6) = \dfrac{1}{2} \times 6^2 + 6 = 18 + 6 = \boxed{24} \\ \\ F(1) = \dfrac{1}{2} \times 1^2 + 1 = 0,5 + 1 = \boxed{1,5} \end{cases}$

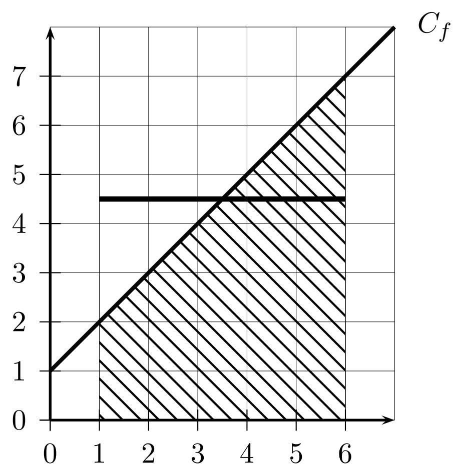
soit : $\displaystyle\int_1^6 f(x)dx = 24 - 1,5 = \boxed{22,5}$

ce qui signifie que l'aire sous la courbe de f pour x allant de 1 à 6 est de $\boxed{22,5 \text{ unités d'aires}}$ *(on peut dénombrer 22,5 carrés d'une unité d'aire sous la courbe)*
finalement
$V_m(f) = \dfrac{1}{6-1} \times \displaystyle\int_1^6 f(x)dx = \dfrac{1}{5} \times 22,5 = 4,5$

la valeur moyenne de f pour allant de 1 à 5 est donc d'exactement $\boxed{4,5}$

ce qui est cohérent avec le résultat évalué graphiquement

graphiquement $V_m(f) \simeq 4$ et algébriquement $V_m(f) = 4,5$



5. synthèse : *(sous certaines conditions vues dans le cours)*

$$\boxed{\text{valeur moyenne de } f \text{ pour } x \text{ compris entre } a \text{ et } b = V_m(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

$$\boxed{\text{intégrale de } f \text{ pour } x \text{ compris entre } a \text{ et } b = I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

$$\boxed{F \text{ est une primitive de } f \iff F'(x) = f(x)}$$

2 primitives d'une fonction

2.1 activités

activité 1

soient F_1 et f les fonctions respectivement définies sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} F_1(x) = 5x^3 + 10x^2 - 5x \\ f(x) = 15x^2 + 20x - 5 \end{cases}$

1. montrer que $F_1'(x) = f(x)$ *(on dit sous cette condition que F_1 est une primitive de f)*
2. montrer que F_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $F_2(x) = 5x^3 + 10x^2 - 5x + 1$ est aussi une primitive de f
3. que dire de F définie par $F(x) = 5x^3 + 10x^2 - 5x + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque ?
4. combien la fonction f admet-elle de primitives ?
5. soit G une primitive quelconque de f, on cherche à quoi ressemble nécessairement G.
   pour cela, on considère la fonction H définie par $H(x) = G(x) - F_1(x)$
   (a) montrer que $H'(x) = 0$
   (b) en déduire que $H(x) = k =$ constante pour tout $x \in \mathbb{R}$
   (c) en déduire que $G(x) = F_1(x) + k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   (d) quelle est nécessairement la forme d'une primitive de f ?
   (e) en déduire la seule et unique primitive F de f telle que $F(0) = 10$

activité 2

soit la fonction f telle $f(x) = 1 + x + e^x - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

1. montrer que F_1 telle que $F_1(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + e^x + \dfrac{1}{x} + lnx$ est une primitive de f
2. trouver une autre primitive F_2 de f
3. trouver la primitive F de f qui vaut 0 pour $x = 1$

activité 3

donner une primitive dans chaque cas en utilisant le tableau des dérivées

1. $f(x) = 0$ a par exemple pour primitive : ...
2. $f(x) = 10$ a par exemple pour primitive : ...
3. $f(x) = x$ a par exemple pour primitive : ...
4. $f(x) = x^2$ a par exemple pour primitive : ...
5. $f(x) = x^3$ a par exemple pour primitive : ...
6. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a par exemple pour primitive : ...
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ a par exemple pour primitive : ...
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ a par exemple pour primitive : ...
9. $f(x) = e^x$ a par exemple pour primitive : ...

activité 4

démontrer chaque proposition

1. si F et G sont des primitives respectives de f et g alors $H = F + G$ est une primitive de $h = f + g$
2. si F est une primitive de f et $k \in \mathbb{R}$ est un réel alors $H = kF$ est une primitive de $h = kf$

2.2 corrigés activités

corrigé activité 1

soient F_1 et f les fonctions respectivement définies sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} F_1(x) = 5x^3 + 10x^2 - 5x \\ f(x) = 15x^2 + 20x - 5 \end{cases}$

1. $F_1'(x) = 15x^2 + 20x - 5$ et $f(x) = 15x^2 + 20x - 5$

   $F_1'(x) = f(x)$
   F_1 est donc une primitive de f

2. $F_2'(x) = 15x^2 + 20x - 5$ et $f(x) = 15x^2 + 20x - 5$

   $F_2'(x) = f(x)$
   F_2 est donc aussi une primitive de f

3. F définie par $F(x) = 5x^3 + 10x^2 - 5x + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f car $F'(x) = f(x)$

4. la fonction f admet alors une infinité de primitives

5. soit G une primitive quelconque de f, on cherche à quoi ressemble nécessairement G.
   pour cela, on considère la fonction H définie par $H(x) = G(x) - F_1(x)$

   a. $H(x) = G(x) - F_1(x)$

   $H'(x) = G'(x) - F_1'(x)$

   $H(x) = f(x) - f(x) = 0$

   $H'(x) = 0$

   b. H est une fonction constante car sa dérivée est nulle pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $H(x) = k =$ constante pour tout $x \in \mathbb{R}$

   c. $H(x) = G(x) - F_1(x) = k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

   $G(x) = F_1(x) + k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

   d. une primitive de f est nécessairement la forme $F(x) = F_1(x) + k$

   e. la seule et unique primitive F de f telle que $F(0) = 10$ est telle que

   $F(x) = F_1(x) + k$ avec $F(0) = 10$

   $F(x) = 15x^2 + 20x - 5 + k$ avec $F(0) = 10$

   $F(0) = 15 \times 0^2 + 20 \times 0 - 5 + k = 10$

   $-5 + k = 10 \Longleftrightarrow k = 15$

   $F(x) = 15x^2 + 20x - 5 + 15$

   $F(x) = 15x^2 + 20x - 10$

corrigé activité 2

soit la fonction f telle $f(x) = 1 + x + e^x - \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

1. F_1 telle que $F_1(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + e^x + \dfrac{1}{x}$ est une primitive de f, en effet :

   $F_1'(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \times 2x + e^x + \dfrac{-1}{x^2}$

   $F_1'(x) = 1 + x + e^x - \dfrac{1}{x^2} = f(x)$

2. une autre primitive F_2 de f est : $F_2(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + lnx + \dfrac{1}{x} + k$ où $k \in \mathbb{R}$

3. primitive F de f qui vaut 0 pour $x = 1$

   $F(1) = 0$ et $F(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + e^x + \dfrac{1}{x} + k$

   $F(1) = 1 + \dfrac{1^2}{2} + e^1 + \dfrac{1}{1} + k = 0$

   $1 + \dfrac{1}{2} + e + 1 + k = 0$

   $k = -\dfrac{5}{2} - e$

   $F(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + lnx + \dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{2} - e$

corrigé activité 3

donner une primitive dans chaque cas en utilisant le tableau des dérivées

(a) $f(x) = 0$ a par exemple pour primitive : $F(x) = k$

(b) $f(x) = 10$ a par exemple pour primitive : $F(x) = 10x + k$

(c) $f(x) = x$ a par exemple pour primitive : $F(x) = x + k$

(d) $f(x) = x^2$ a par exemple pour primitive : $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + k$

(e) $f(x) = x^3$ a par exemple pour primitive : $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + k$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a par exemple pour primitive : $F(x) = ln(x) + k$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ a par exemple pour primitive : $F(x) = \dfrac{-1}{x} + k$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ a par exemple pour primitive : $F(x) = \dfrac{-1}{2x^2} + k$

(i) $f(x) = e^x$ a par exemple pour primitive : $F(x) = e^x + k$

corrigé activité 4

démontrons chaque proposition

1. si F et G sont des primitives respectives de f et g alors $H = F + G$ est une primitive de $h = f + g$

   $H = F + G$

   $H' = F' + G'$

   $H' = f + g$

   $H' = h$

   $H = F + G$ est une primitive de $h = f + g$

2. si F est une primitive de f et $k \in \mathbb{R}$ est un réel alors $H = kF$ est une primitive de $h = kf$ $H = kF$

   $H' = kF'$

   $H' = kf$

   $H' = h$

   $H = kF$ est une primitive de $h = kf$

2.3 à retenir

définition 1 *(primitive d'une fonction)*

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I

$\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I} \iff \boxed{F'(x) = f(x)}$ pour tout $x \in I$

exemple : avec $F(x) = x^2 + 3x$ et $f(x) = 2x + 3$ on a $F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f
remarque : "F est une primitive de f" équivaut à "f est la dérivée de F"

propriété 1 *(forme générale des primitives)*

(1) toute $\boxed{\text{fonction continue}}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{admet des primitives}}$ sur cet intervalle
(2) Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I

$$\begin{cases} \text{si } \boxed{F \text{ est une primitive de } f} \text{ sur } I \\ \text{alors} \\ \boxed{\text{toutes les primitives de } f} \text{ sont de la forme } \boxed{F + k} \text{ où } k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

exemple : avec $F(x) = x^2+3x$ et $f(x) = 2x+3$, toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) = x^2+3x+k$ où k est un nombre réel quelconque
remarque : si on connaît une primitive de f alors on en connaît une infinité

propriété 2 *(tableau des primitives usuelles)*

$F(x)$	$f(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0
$x + k$	1
$2x + k$	2
$-3x + k$	-3
$ax + k$	$a \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{2}x^2 + k$	x
$\frac{1}{3}x^3 + k$	x^2
$\frac{1}{4}x^4 + k$	x^3
$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + k$	x^α où $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$2\sqrt{x} + k$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$ln(x) + k$	$\frac{1}{x}$
$ln(ax + b) + k$	$\frac{a}{ax+b}$
$\frac{-1}{x} + k$	$\frac{1}{x^2}$
$\frac{-1}{2x^2} + k$	$\frac{1}{x^3}$
$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\frac{1}{x^n}$ où $n \in N$et $n > 1$
e^x	e^x
$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	e^{ax+b}

propriété 3 *(primitives et opérations)*

(1) si F et G sont des primitives respectives de f et g sur I alors $\boxed{F+G \text{ est une primitive de } f+g}$ sur I

(2) si F est une primitive de f sur I et $k \in \mathbb{R}$ alors $\boxed{kF \text{ est une primitive de } kf}$ sur I

exemple : une primitive de $f(x) = x^2 + 5x^3$ est $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5 \times \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^4$

propriété 4 *(primitives des formes usuelles)*
soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et u' sa dérivée.
quand cela est possible, on utilise le tableau suivant pour trouver une primitive F d'une fonction f connue.

$F(x)$	$f(x)$	conditions
$\frac{1}{2}u^2$	$u'u$	
$\frac{1}{3}u^3$	$u'u^2$	
$\frac{1}{4}u^4$	$u'u^3$	
$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$u'u^n$	$n \in N$
$\frac{-1}{u}$	$\frac{u'}{u^2}$	$u \neq 0$
$\frac{-1}{2u^2}$	$\frac{u'}{u^3}$	$u \neq 0$
$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	$\frac{u'}{u^n}$	$n \in N$, $n > 1$ et $u \neq 0$
lnu	$\frac{u'}{u}$	$u > 0$
e^u	$u'e^u$	

exemples :

(a) $\boxed{f(x) = (2x+3)e^{x^2+3x+10}}$

$f = u'e^u$ donc $F = e^u$

avec $\begin{cases} u(x) = x^2+3x+10 \\ u'(x) = 2x+3 \end{cases}$

donc $\boxed{F(x) = e^{x^2+3x+10}}$

(b) $\boxed{f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+10}}$

$f = \dfrac{u'}{u}$ donc $F = lnu$

avec $\begin{cases} u(x) = x^2+3x+10 \\ u'(x) = 2x+3 \end{cases}$

donc $\boxed{F(x) = ln(x^2+3x+10)}$

(c) $\boxed{f(x) = (2x+3)(x^2+3x+10)}$

$f = u'u$ donc $F = \dfrac{1}{2}u^2$

avec $\begin{cases} u(x) = x^2+3x+10 \\ u'(x) = 2x+3 \end{cases}$

donc $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{2}(x^2+3x+10)^2}$

(d) $\boxed{f(x) = \dfrac{2x+3}{(x^2+3x+10)^3}}$

$f = \dfrac{u'}{u^3}$ donc $F = \dfrac{-1}{2u^2}$

avec $\begin{cases} u(x) = x^2+3x+10 \\ u'(x) = 2x+3 \end{cases}$

donc $\boxed{F(x) = \dfrac{-1}{2(x^2+3x+10)^2}}$

2.4 exercices

exercice 1 :

Trouver une primitive de f sur D_f dans chaque cas.
puis déterminer la primitive de f qui vaut 0 en 1 pour au moins 2 exemples

1. $f(x) = x - 10$
2. $f(x) = 4x + 3$
3. $f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 2$
4. $f(x) = 4x^2 - 6x + 9$
5. $f(x) = 12x^3 + 7x^2 - 8x + 10$
6. $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = 10e^x + \dfrac{8}{x}$
8. $f(x) = e^{0,2x}$
9. $f(x) = 10e^{0,05x}$
10. $f(x) = \dfrac{8}{8x + 10}$
11. $f(x) = \dfrac{2x + 8}{x^2 + 8x + 12}$
12. $f(x) = (6x - 10)e^{3x^2 - 10x + 4}$

exercice 2 :

Démontrer dans chaque cas que F est une primitive de f

(a) $\begin{cases} f(x) = 10 - 2e^{-0,2x+1} \\ F(x) = 10x + 10e^{-0,2x+1} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{0,36x}}{99 + e^{0,36x}} \\ F(x) = \dfrac{1}{0,36} ln(99 + e^{0,36x}) \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f(x) = 200 + 0,02(x - 7)e^x \\ F(x) = 200x + 0,02(x - 8)e^x \end{cases}$

(d) $\begin{cases} f(x) = e^{-x}(x - 3)^2 \\ F(x) = -e^{-x}(x^2 - 4x + 5) \end{cases}$

(e) $\begin{cases} f(x) = 6x + 28 - 24ln(x) \\ F(x) = 3x^2 + 52x - 24xln(x) \end{cases}$

(f) $\begin{cases} f(x) = 9,3 - 0,048x - \dfrac{2,8e^{2x}}{e^{2x} + 160000} \\ F(x) = 9,3x - 0,024x^2 - 1,4ln(e^{2x} + 160000) \end{cases}$

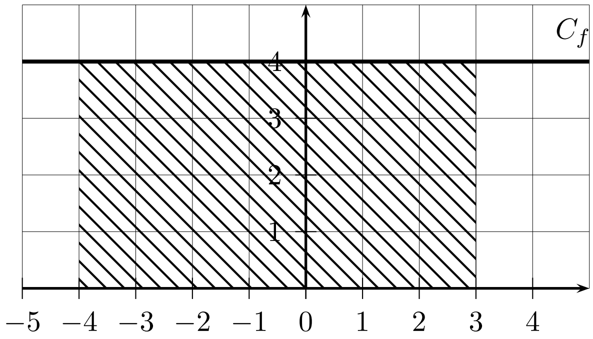
2.5 corrigés exercices

3 intégrale d'une fonction

3.1 activités

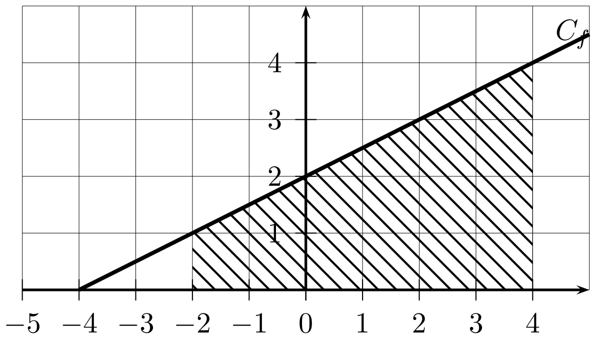
activité 1 : aire sous la courbe, valeur moyenne, aire entre deux courbes et primitives

1. soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4$



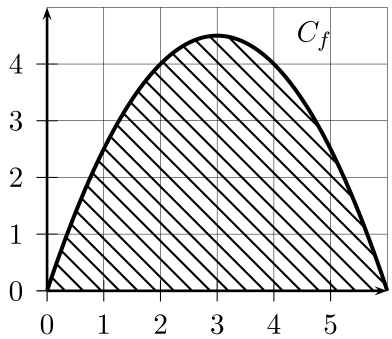
   (a) calculer l'aire du rectangle hachuré
   (b) donner une primitive F de f
   (c) calculer $\displaystyle\int_{-4}^{3} f(x)dx = F(3) - F(-4)$
   comparer les deux résultats
   (d) un artisan fabrique 4 objets par heure.
   quel nombre d'objets aura t-il fabriqué sachant qu'il a déja travaillé 4h et qu'il va encore travailler 3h ?
   (e) en déduire la valeur moyenne m de f sur $[-4; 3]$ sachant que $m = \dfrac{1}{3-(-4)} \displaystyle\int_{-4}^{3} f(x)dx$

2. soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$



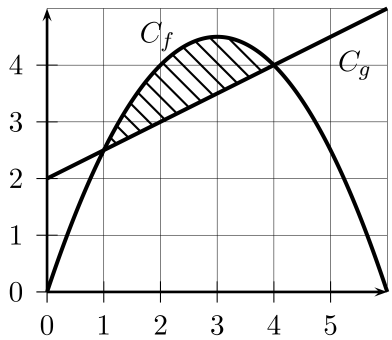
   (a) calculer l'aire du trapèze hachuré
   (rappel : Aire $= \dfrac{b+B}{2} \times h$)
   (b) donner une primitive F de f
   (c) calculer $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)dx = F(4) - F(-2)$
   comparer les deux résultats
   (d) en déduire la valeur moyenne m de f sur $[-2; 4]$ sachant que $m = \dfrac{1}{4-(-2)} \displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)dx$

3. soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x$



   (a) encadrer l'aire parabolique hachurée par deux entiers.
   (b) donner une primitive F de f
   (c) calculer $\displaystyle\int_{0}^{6} f(x)dx = F(6) - F(0)$
   comparer les deux résultats
   (d) en déduire la valeur moyenne m de f sur $[0; 6]$

4. soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x$
   soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$



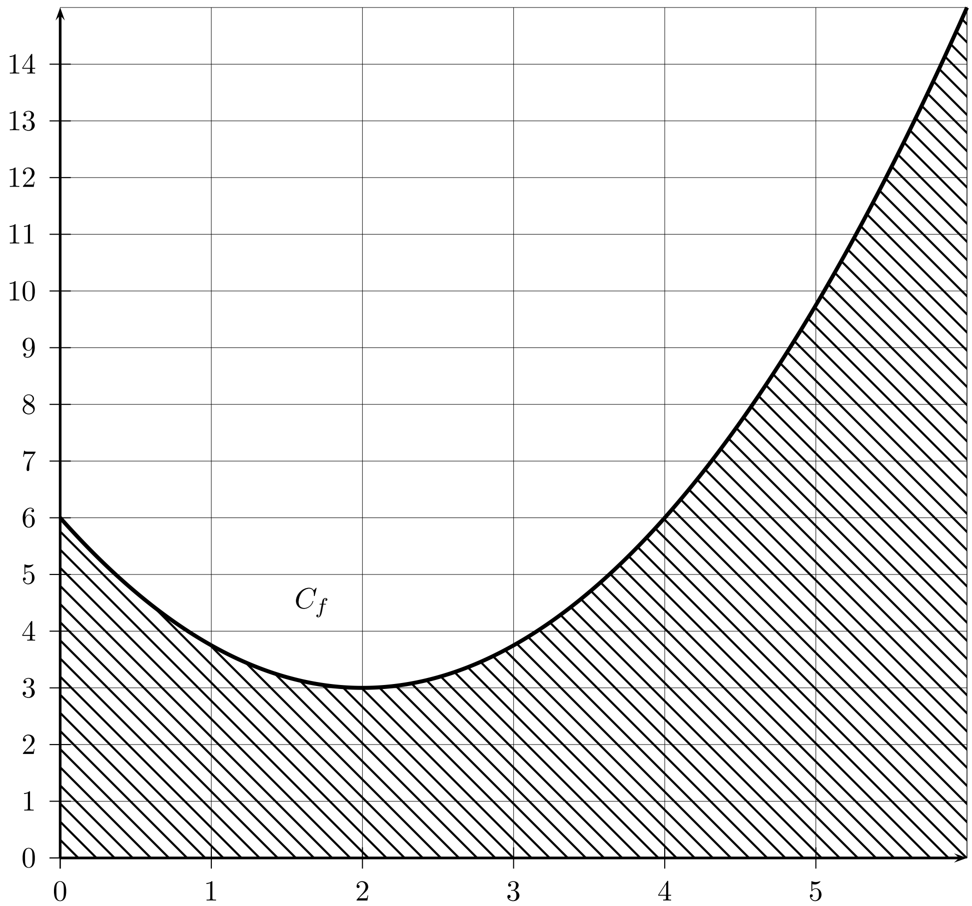
   (a) encadrer l'aire hachurée par deux entiers.
   (b) donner F et G des primitives respectives de f et g
   (c) calculer $\displaystyle\int_{1}^{4} f(x)dx - \int_{1}^{4} g(x)dx$ comme ci dessus.
   comparer les résultats du a. et du c.

activité 2 : **Terminales ES - Sujet Callédonie 2005**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ par : $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 6$

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessous est représentative de f dans un repère orthonormal du plan d'origine O.

La partie hachurée ci-contre est limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d' équation $x = 6$.



1. Calculer, en unités d'aire, l'aire S de la partie hachurée.
   En déduire l'aire en cm^2 sachant que 1 unité a pour mesure 2cm en abscisses et 0,75cm en ordonnées

2. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\ ;\ 6]$ et la représenter sur le graphique.

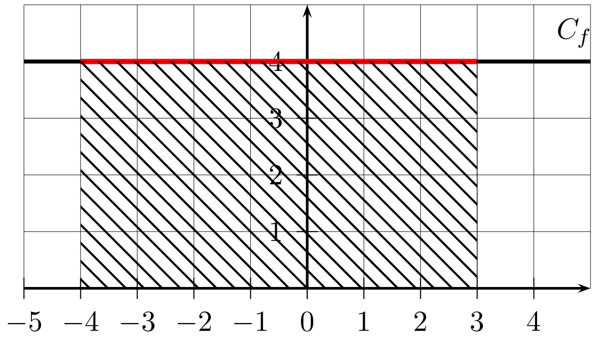
3. On considère un point M appartenant à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse x avec $x \in [0\ ;\ 6]$.
   La parallè le à l'axe des ordonnées passant par M coupe l'axe des abscisses en un point H.
   La parallè le à l'axe des abscisses passant par M coupe l'axe des ordonnées en un point K.
   On appelle $R(x)$ l'aire, en unités d'aire, du rectangle OHMK.
   Prouver que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 6]$, $R(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x$.

4. On se propose de rechercher toutes les valeurs possibles de x de l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ telles que l'aire $R(x)$ du rectangle OHMK soit égale à l'aire hachurée S.
   (a) Montrer que le problème précédent revient à résoudre l'équation $g(x) = 0$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ par :
   $$g(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36.$$
   (b) Étudier les variations de g sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ et dresser le tableau de variation de g. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ une solution unique α.
   Donner une valeur approchée de α au centième et placer alors le point M sur le graphique

3.2 corrigés activités

corrigé activité 1 : aire sous la courbe, valeur moyenne, aire entre deux courbes et primitives

1. soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4$



   (a) aire du rectangle hachuré :
   Aire = longueur × largeur = $7 \times 4 = \boxed{28 \text{ U.A.}}$

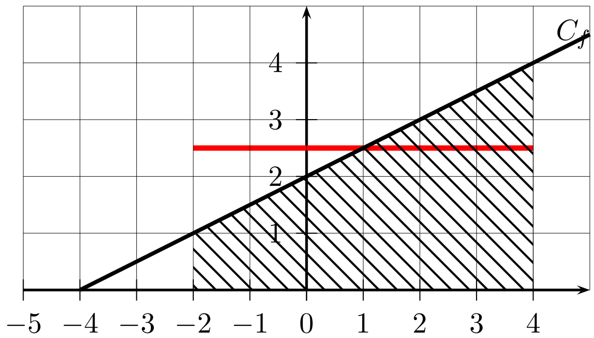
   (b) une primitive F de f $\boxed{F(x) = 4x}$

   (c) $\int_{-4}^{3} f(x)dx = F(3) - F(-4) = 4 \times 3 - 4 \times (-4)$
   $\int_{-4}^{3} f(x)dx = 12 + 16 = \boxed{28}$
   $\boxed{\int_{-4}^{3} f(x)dx = \text{aire du rectangle}}$

   (d) il aura fabriqué $\boxed{28 \text{ objets}}$.

   (e) valeur moyenne m de f sur $[-4; 3]$: $m = \dfrac{1}{3-(-4)} \displaystyle\int_{-4}^{3} f(x)dx = \dfrac{1}{7} \times 28 = \boxed{4}$

– soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$



1. aire du trapèze hachuré :

   aire = aire du rectangle + aire du triangle

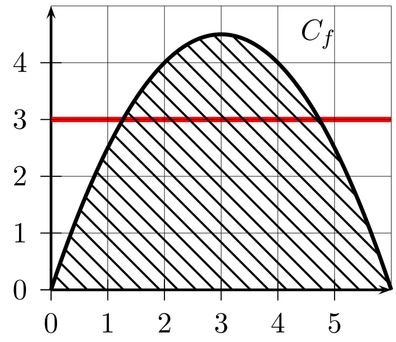
   aire $= 6 \times 1 + \dfrac{6 \times 3}{2} = 6 + 9 = \boxed{15 \text{ U.A.}}$

2. une primitive F de f
   $F(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}x^2 + 2x = \boxed{\dfrac{1}{4}x^2 + 2x}$

3. $\int_{-2}^{4} f(x)dx = F(4) - F(-2) = (\frac{1}{4} \times 4^2 + 2 \times 4) - (\frac{1}{4} \times (-2)^2 + 2 \times (-2))$
   $\int_{-2}^{4} f(x)dx = F(4) - F(-2) = 12 - (-3) = \boxed{15}$
   $\boxed{\int_{-2}^{4} f(x)dx = \text{aire du trapèze}}$

4. valeur moyenne m de f sur $[-2; 4]$: $m = \dfrac{1}{4-(-2)} \displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)dx = \dfrac{1}{6} \times 15 = \dfrac{5}{2} = \boxed{2{,}5}$

– soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x$



1. $\boxed{17 \leq \text{aire parabolique hachurée} \leq 18}$

2. une primitive F de f

   $F(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}x^3 + 3 \times \dfrac{1}{2}x^2 = \boxed{-\dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2}$

3. $\displaystyle\int_0^6 f(x)dx = F(6) - F(0)$

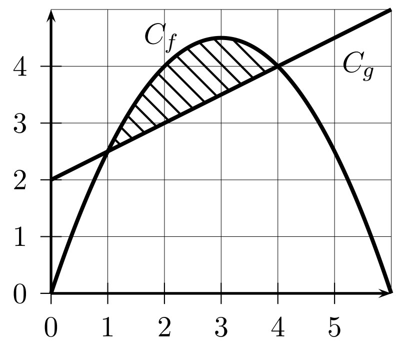
   $\displaystyle\int_0^6 f(x)dx = (-\frac{1}{6} \times 6^3 + \frac{3}{2} \times 6^2) - (-\frac{1}{6} \times 0^3 + \frac{3}{2} \times 0^2) = 18 - 0 = \boxed{18 \text{ U.A.}}$

   $\boxed{\displaystyle\int_0^6 f(x)dx = \text{aire parabolique hachurée}}$

4. valeur moyenne m de f sur $[0; 6]$: $m = \dfrac{1}{6-0}\displaystyle\int_0^6 f(x)dx = \frac{1}{6} \times 18 = \boxed{3}$

– soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x$

soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$



1. $\boxed{2 \leq \text{aire hachurée} \leq 3}$

2. F et G des primitives respectives de f et g

   $\boxed{F(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2}$ et $\boxed{G(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 2x}$

3. $\displaystyle\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx$

   $\displaystyle\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = F(4) - F(1) - ((G(4) - G(1))$

   $\displaystyle\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = F(4) - F(1) - ((G(4) - G(1))$

   $F(4) = -\dfrac{1}{6} \times 4^3 + \dfrac{3}{2} \times 4^2 = -\dfrac{32}{3} + 24 = \dfrac{40}{3}$

   $F(1) = -\dfrac{1}{6} \times 1^3 + \dfrac{3}{2} \times 1^2 = \dfrac{4}{3}$

   $G(4) = \dfrac{1}{4} \times 4^2 + 2 \times 4 = 12$

   $G(1) = \dfrac{1}{4} \times 1^2 + 2 \times 1 = \dfrac{3}{2}$

   $\displaystyle\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = \frac{40}{3} - \frac{4}{3} - (12 - \frac{9}{4}) = 2,25$

   ce résultat est cohérent avec celui du a.

corrigé activité 2 : **Terminales ES - Sujet Callédonie 2005 : ex 103 page 199**

1. en unités d'aire, l'aire S de la partie hachurée est S $= \displaystyle\int_0^6 f(x)dx$

   S $= \displaystyle\int_0^6 (\frac{3}{4}x^2 - 3x + 6)dx = [F(x)]_0^6 = [0,25x^3 - 1,5x^2 + 6x]_0^6$

   S $= F(6) - F(0) = (0,25 \times 6^3 - 1,5 \times 6^2 + 6 \times 6) - 0 =$ $\boxed{\text{36 unités d'aires}}$

   or une unité d'aire vaut $2 \times 0,75 = 1,5cm^2$ ce qui donne en pour S : $36 \times 1,5 = \boxed{54cm^2}$

2. la valeur moyenne de f sur $[0\ ;\ 6]$ est : $m = \dfrac{1}{6-0}\displaystyle\int_0^6 f(x)dx = \frac{36}{6} = \boxed{6}$

3. $R(x)$ l'aire, en unités d'aire, du rectangle OHMK = longueur $\times$ largeur $= x \times f(x) = \boxed{0,75x^3 - 3x^2 + 6x}$

4. (a) aire $R(x)$ du rectangle OHMK =aire hachurée S
   $\iff 0,75x^3 - 3x^2 + 6x = 36 \iff 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36 = 0 \iff \boxed{g(x) = 0}$

   (b) variations de g sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ et tableau de variation de g.

   - Calcul de $g'(x)$: $\boxed{g'(x) = 2,25x^2 - 6x + 6}$

   - Annulation et signe de $g'(x)$:

   $g'(x)$ est un polynôme de degré 2 de la forme ax^2+bx+c, on utilise la règle du signe de ax^2+bx+c. et pour $g'(x) = 0$ on utilise le discriminant :

   $\Delta = -18 < 0$ donc aucune annulation et on a le tableau de signes suivant.

x	0 6
$g'(x)$	+

   - variations de g :

x	0 6
$g'(x)$	+
$g(x)$	-36 $\nearrow$ 54

$g(0) = -36$

- $\begin{cases} g(0) = -36 \text{ et } -36 < 0 \\ g(6) = 54 \text{ et } 54 > 0 \\ g \text{ est continue sur } [0;6] \text{ en tant que fonction polynômiale de degré 3} \\ g \text{ est strictement croissante sur } [0;6] \end{cases}$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ possède alors une solution unique α dans $[0;6]$

- La calculatrice permet de voir que $4,55 < \alpha < 4,56$ car :

$\begin{cases} f(4,55) \simeq -0,16 < 0 \\ f(4,56) \simeq 0,093 > 0 \end{cases}$ donc $\boxed{\alpha = 4,55 \text{ ou } 4,56}$ à 10^{-2} près.

- conclusion : pour que le rectangle ait la même aire que la surface hachurée, il faut que $\boxed{x = \alpha \simeq 4,55}$

3.3 à retenir

définition 2 *(de l'intégrale)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; F une primitive de f ; a et b deux réels de I.

L'intégrale de a à b de f est le nombre noté : $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$ avec $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$

Remarques :

(1) on lit aussi : *"intégrale de a à b de f de x dx"*

(2) on note aussi : $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

(3) le choix de la primitive de f n'a pas d'effet sur la valeur de l'intégrale.

propriété 5

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b sont deux réels de I, $\alpha \in \mathbb{R}$

(P1) : (*bornes identiques*) : $\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$

(P2) : (*inversion des bornes*) : $\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$

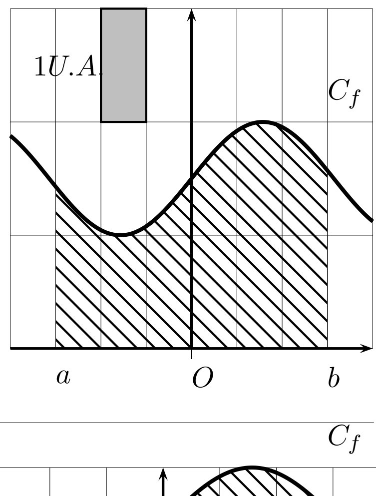
(P3) : (*relation de Chasles*) : $\boxed{\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx}$

(P4) : (*linéarité*) : $\boxed{\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx}$ $\boxed{\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx}$

(P5) : (*intégrale et positivité*) : $\boxed{\text{si } f \geq 0 \text{ sur } I \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \geq 0}$

(P6) : (*intégrale et ordre*) : $\boxed{\text{si } f \geq g \text{ sur } I \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx}$

propriété 6 *(de l'aire "sous" la courbe d'une fonction positive)*

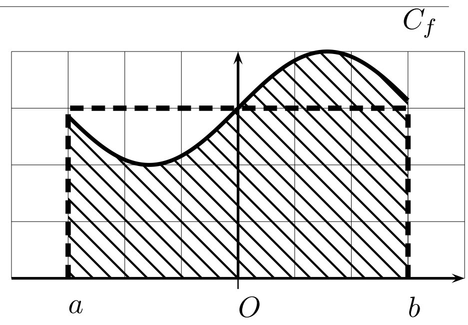


$$\int_a^b f(x)dx = \text{Aire entre} \begin{cases} \bullet \text{ la courbe } C_f \text{ de } f \\ \bullet \text{ l'axe des abscisses} \\ \bullet \text{ la droite verticale d'équation } x = a \\ \bullet \text{ la droite verticale d'équation } x = b \end{cases}$$

où f est positive et continue sur I avec $a < b$ deux réels de I

remarque : *l'aire trouvée est exprimée en unités d'aires (U.A.)*

définition 3 (*valeur moyenne d'une fonction*)



la valeur moyenne de f sur [a ; b] est le nombre m tel que :

$$\boxed{m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

Remarque : C'est la hauteur m du rectangle de largeur $b - a$ qui une aire égale à à l'intégrale.

3.4 exercices

exercice 3 :

1. calculer $A = \int_0^2 x^3 dx$ en utilisant deux primitives distinctes et comparer les résultats
2. démontrer la remarque (3) de la définition 2

exercice 4 :

1. démontrer la propriété (P1)
2. déterminer $A = \int_{10}^{10} x^2 dx + \int_{-4}^{-4} x^3 dx$ sans aucun calculs

exercice 5 :

1. démontrer la propriété (P2)
2. on sait que $A = \int_2^{10} f(x)dx = 12$ que vaut alors $B = \int_{10}^{2} f(x)dx$?

exercice 6 :

1. démontrer la propriété (P3)
2. on sait que $A = \int_2^{10} f(x)dx = 12$ et que $B = \int_{10}^{15} f(x)dx = 8$ que vaut alors $C = \int_2^{15} f(x)dx$?

exercice 7 :

1. démontrer la propriété (P4)
2. on sait que $\int_2^{10} f(x)dx = 12$ et que $\int_2^{10} g(x)dx = 18$

   a. que vaut alors $\int_2^{10} 5f(x)dx$?

   b. que vaut alors $\int_2^{10} (f(x) + g(x))dx$?

   c. que vaut alors $\int_2^{10} (5f(x) - 3g(x))dx$?

exercice 8 :

1. on sait que $f(x) < 10$ sur $[\ 1\ ;\ 5\ ]$ démontrer que $\int_1^5 f(x)dx < 40$
2. on sait que $x^2 < g(x) < x$ sur $[\ 0\ ;\ 1\ ]$ en déduire un encadrement de $\int_0^1 g(x)dx$

exercice 9 :

1. calculer l'aire sous la courbe de la fonction cube entre -2 et 2 et faire une figure
2. calculer l'aire sous la courbe de la fonction carrée entre -2 et 2 et faire une figure

exercice 10 :

1. calculer la valeur moyenne la fonction cube entre -2 et 2 et faire une figure
2. calculer la valeur moyenne de la fonction carrée entre -2 et 2 et faire une figure

exercice 11 :

soit la courbe de la fonction f avec $f(x) = -x + 5 - \frac{4}{x}$ pour $1 \leq x \leq 4$

a. calculer $\int_1^4 (-x + 5 - \frac{4}{x})dx$

b. interpréter le résultat en termes d'aire

c. calculer la valeur moyenne de f pour x compris entre 1 et 4

exercice 12 :

calculer les intégrales suivantes et en déduire les valeurs moyennes associées

a. $\displaystyle\int_0^3 (x-4)dx$

b. $\displaystyle\int_1^2 (t-\frac{1}{t^2})dt$

c. $\displaystyle\int_{-2}^0 4q^3dq$

d. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2-1)dx$

e. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{3}{x+2}dx$

exercice 13 :

1. on sait que $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{0,36x}}{99+e^{0,36x}} \\ \\ F(x) = \dfrac{1}{0,36}ln(99+e^{0,36x}) \end{cases}$

   calculer la valeur moyenne exacte puis approchée à 0,01 près de f sur $[30;40]$

2. on sait que $\begin{cases} f(x) = 200+0,02(x-7)e^x \\ \\ F(x) = 200x+0,02(x-8)e^x \end{cases}$

   (a) calculer la valeur exacte puis approchée à 0,01 près de $\displaystyle\int_1^7 f(x)dx$

   (b) en déduire la valeur moyenne exacte puis approchée à 0,01 près de f sur $[1;7]$

3. on sait que $f(t) = 10e^{0,05t}$

   calculer la valeur moyenne exacte puis approchée à 0,01 près de f sur $[-20;30]$

4. $\begin{cases} f(x) = e^{-x}(x-3)^2 \\ \\ F(x) = -e^{-x}(x^2-4x+5) \end{cases}$

   calculer la valeur moyenne exacte puis approchée à 0,01 près de f sur $[0;10]$

5. $\begin{cases} f(x) = 10-2e^{-0,2x+1} \\ \\ F(x) = 10x+10e^{-0,2x+1} \end{cases}$

   calculer la valeur moyenne exacte puis approchée à 0,01 près de f sur $[1;20]$

6. $\begin{cases} f(x) = 6x+28-24ln(x) \\ \\ F(x) = 3x^2+52x-24xln(x) \end{cases}$

   (a) calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^{12} f(x)dx$

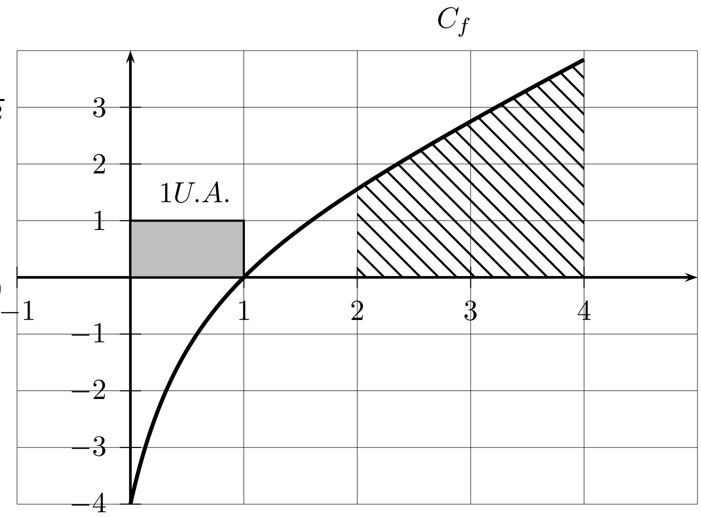
   (b) en déduire la valeur moyenne exacte puis approchée à 0,01 près de f sur $[1;12]$

7. $\begin{cases} f(x) = 9,3-0,048x-\dfrac{2,8e^{2x}}{e^{2x}+160000} \\ \\ F(x) = 9,3x-0,024x^2-1,4ln(e^{2x}+160000) \end{cases}$

   calculer la valeur moyenne exacte puis approchée à 0,01 près de f sur $[0;12]$

exercice 14 :

f est définie sur $]-1\ ;+\infty\ [$ par $f(x) = x - \dfrac{4}{(x+1)^2}$



1. calculer $\displaystyle\int_2^4 f(x)dx$
   interpréter graphiquement le résultat
   (définir la surface par un système d'inéquations)
2. calculer $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$
   cette intégrale est-elle une aire ?
3. calculer la valeur moyenne de f entre 2 et 4

exercice 15 :

f est définie sur $]2\ ;10\ [$ par $f(x) = \dfrac{30(lnx-1)^2}{x}$

a. calculer la dérivée de la fonction g définie sur $]2\ ;10\ [$ par $g(x) = (lnx-1)^3$

b. en déduire une primitive de f sur $]2\ ;10\ [$

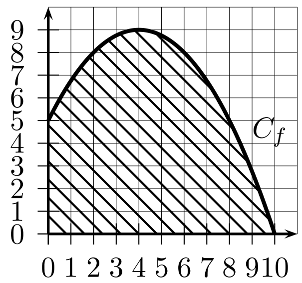
c. en déduire la valeur moyenne de f sur $]2\ ;10\ [$

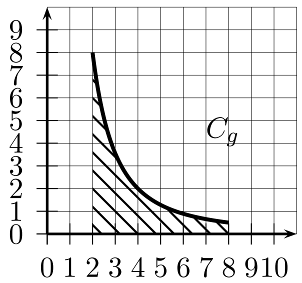
d. étudier les variations de f sur $]2\ ;10\ [$

exercice 16 :

$$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 2x + 5 \\ \\ g(x) = \dfrac{32}{x^2} \end{cases}$$

1. soient les aires hachurées suivantes





   a. calculer l'aire correspondant à f
   b. calculer la valeur moyenne de f sur $[\ 0\ ;\ 10\ ]$
   c. calculer $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$ en déduire $\displaystyle\int_0^8 f(x)dx$

2. a. calculer l'aire correspondant au système : $\begin{cases} 2 \leq x \leq 8 \\ \\ 0 \leq y \leq \dfrac{32}{x^2} \end{cases}$
   b. calculer la valeur moyenne de : $x \longmapsto \dfrac{32}{x^2}$ sur $[\ 2\ ;\ 8\ ]$

exercice 17 :

la capacité pulmonaire d'un humain exprimée en litres dépend de son âge x

on peut la modéliser par la fonction f telle que : $f(x) = \dfrac{110(lnx - 2)}{x}$ pour $x \in [\ 10\ ;\ 90\ ]$

1. étudier les variations de f sur $[\ 10\ ;\ 90\ ]$
2. a. tracer la courbe de f avec 1cm pour 10 ans et 2cm pour 1 litre.
   b. déterminer graphiquement l'intervalle d'âges durant lequel la capacité reste supérieure à 4,5 L
3. a. calculer la dérivée de g avec $g(x) = (lnx - 2)^2$ et en déduire une primitive de f
   b. en déduire la valeur moyenne de la capacité pulmonaire entre 20 et 70 ans à 0,1 L par défaut

exercice 18 : (calcul de surplus)

soit x la quantité (en milliers) d'un certain article disponible sur le marché.
le prix unitaire (en euros) de la demande (des consommateurs) est donné par $f(x) = -9x + 75$
le prix unitaire (en euros) de l'offre (des producteurs) est donné par $g(x) = -x^2 + 16x + 9$

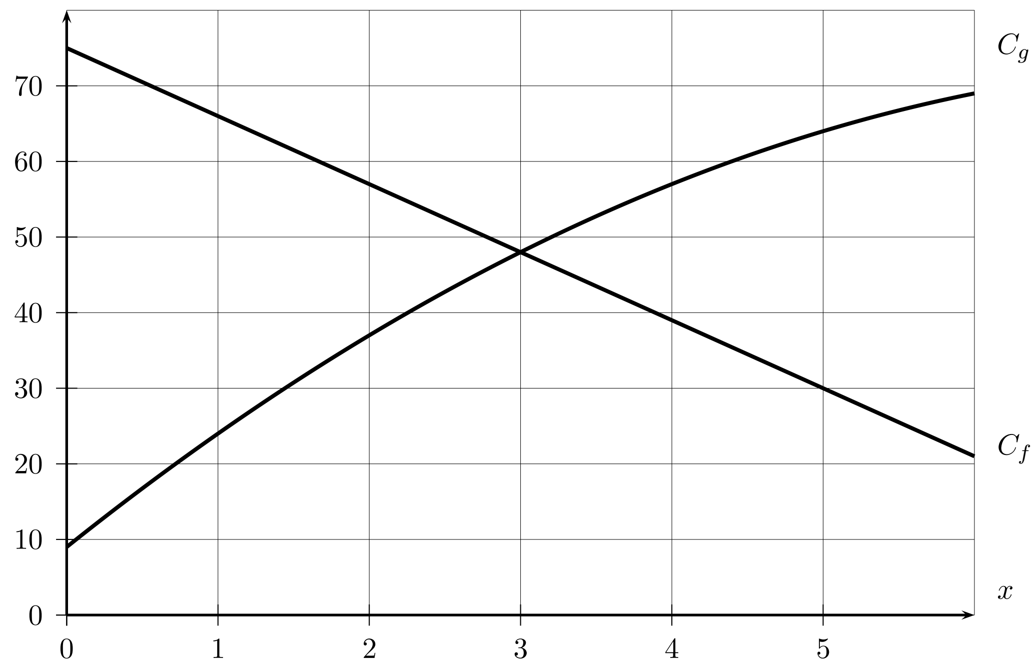
Définition 1 : le prix d'équilibre du marché p_e, est le prix associé à la quantité q_e pour laquelle le prix de la demande est égale au prix de l'offre .

Définition 2 : le surplus des consommateurs est égal à : $S_c = \displaystyle\int_0^{q_e} (f(x) - p_e)dx$

(correspond à l'économie réalisée par les consommateurs qui étaient près à payer plus cher jusqu'àu prix d'équilibre)

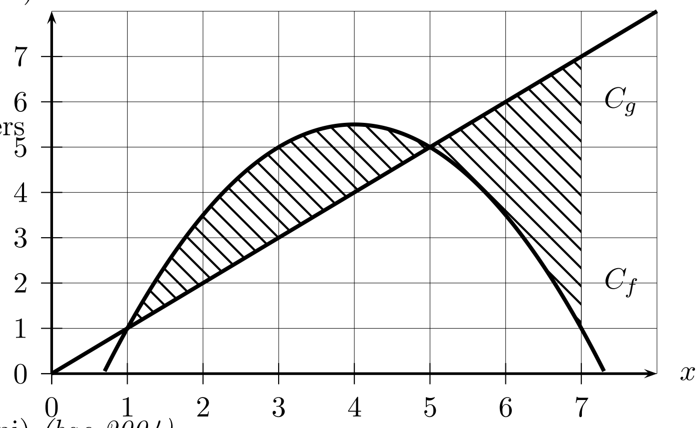
Définition 3 : le surplus des producteurs est égal à : $S_p = \displaystyle\int_0^{q_e} (p_e - g(x))dx$

(correspond à l'économie réalisée par les producteurs qui étaient près à vendre moins cher jusqu'àu prix d'équilibre)



1. déterminer graphiquement le prix d'équilibre ainsi que la quantité à l'équilibre grâce à une des définitions et vérifier par calcul.
2. a. calculer grâce à une des définitions, le surplus des consommateurs à 0,1 mililers d'euros près et interpréter le résultat
   b. écrire S_c sous la forme d'une différence entre deux intégrales et en déduire une interprétation graphique de S_c en termes d'aire (colorier la surface associée).
3. a. calculer grâce à une des définitions, le surplus des producteurs à 0,1 mililers d'euros près.
   b. écrire S_p sous la forme d'une différence entre deux intégrales et en déduire une interprétation graphique de S_p en terme d'aire (colorier la surface associée)

exercice 19 : (aire de la surface entre deux courbes)



1. estimer graphiquement un encadrement de l'aire de la surface hachurée I par deux entiers
2. sachant que : $\begin{cases} f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - \dfrac{5}{2} \\ g(x) = x \end{cases}$

   déterminer la valeur exacte de I

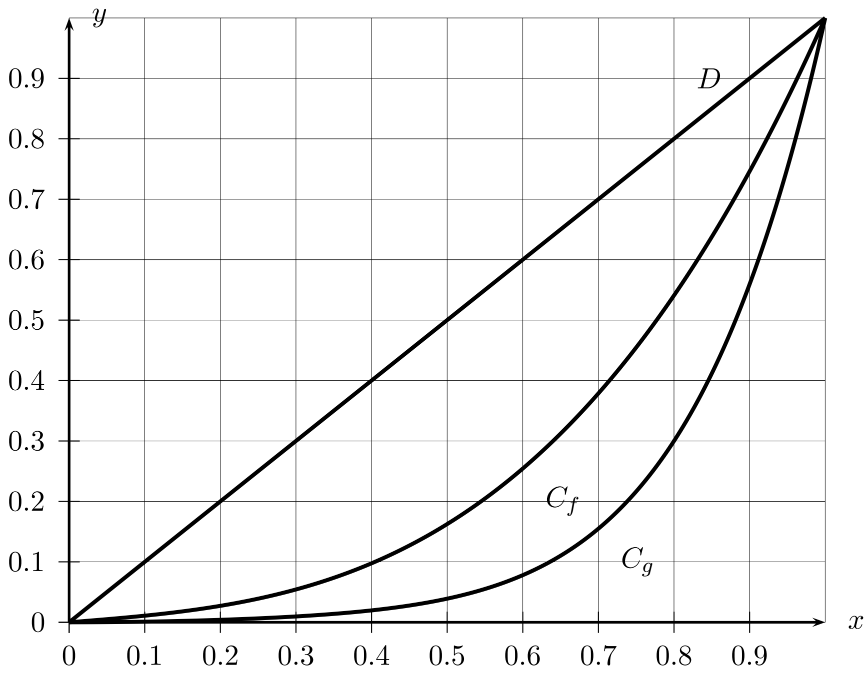
   (considérer deux surfaces)

exercice 20 : (Courbe de Lorentz et Indice de Gini) *(bac 2004)*

- x est la proportion cumulée de la population du pays *(entre 0 = 0% et 1 = 100%).*
- la proportion cumulée des richesses d'un pays F est donnée en fonction de x par $f(x) = 0,9x^3 + 0,1x$ de courbe C_f ci dessous. *(par exemple : dans ce pays, 40% de la population détient 10% de la richesse)*
- la proportion cumulée des richesses d'un pays G est donnée en fonction de x par $g(x) = 0,9x^6 + 0,1x^2$ de courbe C_g
- la droite D d'équation $y = x$ représente la distribution parfaitement égalitaire *(pour tout t avec $0 \leq t \leq 1$ on a : t% de la population détient t% de la richesse)*

Définition 1 : L'indice de Gini associé à une courbe de Lorentz C_f est le nombre $\boxed{I = 2\displaystyle\int_0^1 (x - f(x))dx}$

Définition 2 : $\begin{cases} \text{si } I = 0 \text{ on dit qu'il y a absence d'inégalité} \\ \text{plus } I \text{ est proche de 1 et plus l'inégalité est grande} \\ \text{si } I = 1 \text{ on dit qu'il y a inégalité extrême} \end{cases}$



1. Quelle proportion des richesses du pays G est détenue par 80% de la population ? *(graphiquement)*
2. a. Lequel des deux pays semble le plus inégalitaire ?

   b. Vérifier que l'indice de Gini vaut 0 dans le cas d'un pays parfaitement égalitaire.

   c. i. Calculer l'indice de Gini du pays F à 0,1 près.

   ii. Ecrire I sous la forme du produit par 2 d'une différence entre deux intégrales et en déduire une interprétation graphique de I en termes d'aire *(colorier la surface associée).*

   d. Calculer l'indice de Gini du pays G à 0,1 près.

   e. Comparer les deux pays
3. Représenter ci dessus une courbe de pays extrèmement inégalitaire.

3.5 corrigés exercices

corrigé exercice 1 :

soit la courbe de la fonction f avec $f(x) = -x + 5 - \dfrac{4}{x}$ pour $1 \leq x \leq 4$

a. $\displaystyle\int_1^4 (-x + 5 - \frac{4}{x})dx$

$\displaystyle\int_1^4 (-x+5-\frac{4}{x})dx = [-\frac{x^2}{2}+5x-4lnx]_1^4 = (-\frac{4^2}{2}+5\times4-4ln4)-(-\frac{1^2}{2}+5\times1-4ln1) = \boxed{\frac{15}{2} - 4ln4}$

b. interprétation du résultat en termes d'aire :

l'aire du domaine compris entre la courbe de f et l'axe des abscisses pour x compris entre 1 et 4 vaut $\boxed{\simeq 2 \text{ unités d'aires}}$

c. valeur moyenne de f pour x compris entre 1 et 4

$$m = \frac{1}{4-1}\int_1^4 (-x+5-\frac{4}{x})dx = \frac{1}{3}(\frac{15}{2} - 4ln4) = \boxed{\frac{5}{2} - \frac{4}{3}ln4}$$

corrigé exercice 2 :

calculer les intégrales suivantes et en déduire les valeurs moyennes associées

a. $\displaystyle\int_0^3 (x-4)dx$

$\displaystyle\int_0^3 (x-4)dx = [\frac{x^2}{2} - 4x]_0^3 = (\frac{3^2}{2} - 4\times3) - (\frac{0^2}{2} - 4\times0) = \frac{9}{2} - 12 = \boxed{\frac{15}{2}}$

valeur moyenne de f sur [0 ; 3] : $\displaystyle m = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (x-4)dx = \frac{1}{3}\times\frac{15}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$

b. $\displaystyle\int_1^2 (t - \frac{1}{t^2})dt$

$\displaystyle\int_1^2 (t-\frac{1}{t^2})dt = [\frac{t^2}{2} - \frac{-1}{t}]_1^2 = [\frac{t^2}{2}+\frac{1}{t}]_1^2 = (\frac{2^2}{2}+\frac{1}{2}) - (\frac{1^2}{2}+\frac{1}{1}) = \boxed{1}$

valeur moyenne de f sur [1 ; 2] : $\displaystyle m = \frac{1}{2-1}\int_1^2 (t-\frac{1}{t^2})dt = \boxed{1}$

c. $\displaystyle\int_{-2}^0 4q^3dq$

$\displaystyle\int_{-2}^0 4q^3dq = [q^4]_0^3 = (0^4) - (-2)^4 = \boxed{-16}$

valeur moyenne de f sur [−2 ; 0] : $\displaystyle m = \frac{1}{0-(-2)}\int_{-2}^0 4q^3dq = \frac{1}{2}\times(-16) = \boxed{-8}$

d. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2-1)dx$

$\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2-1)dx = [\frac{x^3}{3} - x]_{-1}^1 = (\frac{1^3}{3} - 1) - (\frac{(-1)^3}{3} - (-1)) = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1 = \boxed{\frac{-4}{3}}$

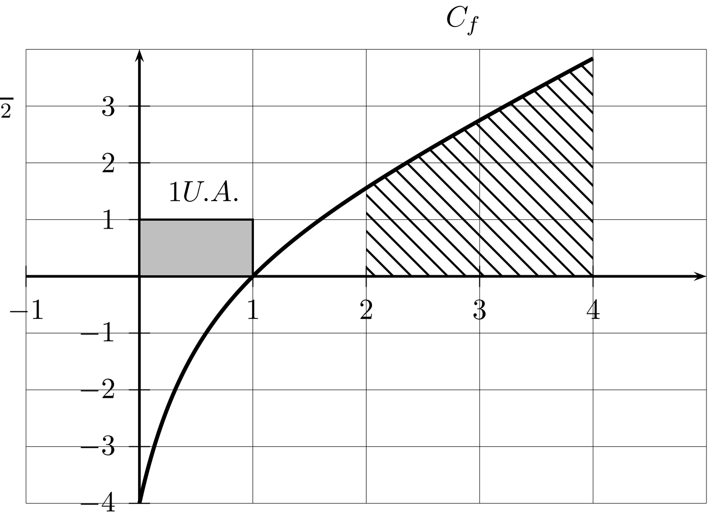
valeur moyenne de f sur [−1 ; 1] : $\displaystyle m = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1 (x^2-1)dx = \frac{1}{2}\times(-\frac{4}{3}) = \boxed{-\frac{2}{3}}$

e. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{3}{x+2}dx$

$$\int_{-1}^{2} \frac{3}{x+2}dx = [3ln(x+2)]_{-1}^{2} = 3ln(2+2) - (3ln(-1+2)) = 3ln4 - 3ln1 = \boxed{3ln4}$$

valeur moyenne de f sur $[\ -1\ ;2\ ]$: $m = \dfrac{1}{3-0}\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{3}{x+2}dx = \frac{1}{2-(-1)} \times 3ln4 = \boxed{ln4}$

corrigé exercice 3 :



f est définie sur $]-1\ ;+\infty\ [$ par $f(x) = x - \dfrac{4}{(x+1)^2}$

1. $\displaystyle\int_{2}^{4} f(x)dx$

$$\int_{2}^{4} f(x)dx = [\frac{x^2}{2} - 4 \times \frac{-1}{x+1}]_{2}^{4}$$
$$\int_{2}^{4} f(x)dx = [\frac{x^2}{2} + \frac{4}{x+1}]_{2}^{4}$$
$$\int_{2}^{4} f(x)dx = (\frac{4^2}{2} + \frac{4}{4+1}) - (\frac{2^2}{2} + \frac{4}{2+1})$$
$$\int_{2}^{4} f(x)dx = 8 + \frac{4}{5} - 2 - \frac{4}{3}$$
$$\int_{2}^{4} f(x)dx = \frac{120}{15} + \frac{12}{15} - \frac{30}{15} - \frac{20}{15} = \frac{82}{15} \simeq \boxed{5,5}$$

interprétation graphique du résultat :

l'aire du domaine définit par le système d'inéquation : $\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ vaut environs $\boxed{\text{5,5 unités d'aires}}$.

2. $\displaystyle\int_{0}^{4} f(x)dx$

$$\int_{0}^{4} f(x)dx = [\frac{x^2}{2} + \frac{4}{x+1}]_{0}^{4}$$
$$\int_{0}^{4} f(x)dx = (\frac{4^2}{2} + \frac{4}{4+1}) - (\frac{0^2}{2} + \frac{4}{0+1})$$
$$\int_{0}^{4} f(x)dx = 8 + \frac{4}{5} - 4$$
$$\int_{0}^{4} f(x)dx = \frac{40}{5} + \frac{4}{5} - \frac{20}{5} = \boxed{\frac{24}{5}}$$

cette intégrale n'est pas une aire car la fonction change de signe entre 2 et 4

3. valeur moyenne de f entre 2 et 4

$$m = \frac{1}{4-2}\int_{2}^{4} f(x)dx = \frac{1}{2} \times \frac{24}{5} = \boxed{\frac{12}{5}}$$

corrigé exercice 4 :

f est définie sur $]2\,;10\,[$ par $f(x)=\dfrac{30(lnx-1)^2}{x}$

a. dérivée de la fonction g définie sur $]2\,;10\,[$ par $g(x)=(lnx-1)^3$

$$g=u^3\Longrightarrow g'=3u^2u' \text{ avec } u=lnx-1\Longrightarrow u'=\frac{1}{x}$$

$$g'(x)=3(lnx-1)^2\times\frac{1}{x}=\boxed{\frac{3(lnx-1)^2}{x}}$$

b. une primitive de f sur $]2\,;10\,[$

$$g'(x)=\frac{3(lnx-1)^2}{x}$$

$$10g'(x)=\frac{30(lnx-1)^2}{x}=f(x)$$

$10g$ est une primitive de f

$\boxed{F(x)=10g(x)=10(lnx-1)^3}$ est une primitive de f sur $]2\,;10\,[$

c. valeur moyenne de f sur $]2\,;10\,[$

$$\int_2^{10}f(x)dx=[10(lnx-1)^3]_2^{10}$$

$$\int_2^{10}f(x)dx=10(ln10-1)^3-10(ln2-1)^3$$

$$\int_2^{10}f(x)dx\simeq 22,39$$

$$m=\frac{1}{10-2}\int_2^{10}f(x)dx$$

$$m\simeq\frac{1}{8}\times 22,39$$

$$m\simeq\boxed{2,8}$$

d. étude des variations de f sur $]2\,;10\,[$

<u>dérivée</u> :

$$f=\frac{u}{v}\Longrightarrow f'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \text{ avec } \left\{\begin{array}{l} u=30(lnx-1)^2\Longrightarrow u'=30\times 2\times(lnx-1)\times\dfrac{1}{x} \quad (*) \\ \\ v=x\Longrightarrow v'=1 \end{array}\right.$$

$(*)$: $(u^2)'=2uu'$

$$f'(x)=\frac{(30\times 2\times(lnx-1)\times\frac{1}{x})\times x-(30(lnx-1)^2)\times 1}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{60(lnx-1)-30(lnx-1)^2}{x^2}=\frac{30(lnx-1)(2-(lnx-1)}{x^2}=\frac{30(lnx-1)(3-lnx)}{x^2}$$

annulation et signe de la dérivée et variations de f sur $]2\ ;10\ [$:

$f'(x) = \dfrac{30(lnx-1)(3-lnx)}{x^2}$ est du signe de $(lnx-1)(3-lnx)$ car 30 et x^2 sont positifs

il reste à étudier les signes de $(lnx-1)$ et $(3-lnx)$:

$lnx - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow lnx \geq 1 \Longleftrightarrow x \geq e^1 \Longleftrightarrow x \geq e$ avec $e \simeq 2,718$

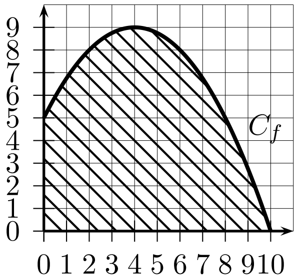
$3 - lnx \geq 0 \Longleftrightarrow -lnx \geq -3 \Longleftrightarrow lnx \leq 3 \Longleftrightarrow x \leq e^3$ avec $e^3 \simeq 20,1$ (hors tableau car $x \in]2\ ;10\ [$)

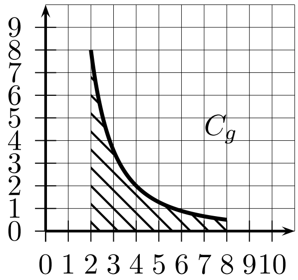
x	2		e		10
$lnx-1$		-	0	+	
$3-lnx$		+	|	+	
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\simeq 1,41$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\simeq 5,09$

$f(e) = \dfrac{30(lne-1)^2}{e} = 0$

corrigé exercice 5 :

$$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 2x + 5 \\ \\ g(x) = \dfrac{32}{x^2} \end{cases}$$





1. soient les aires hachurées suivantes

   a. aire correspondant à f :

   $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 2x + 5$

   $F(x) = -\dfrac{1}{12}x^3 + x^2 + 5x$

   $S_1 = \displaystyle\int_0^{10} f(x)dx = [F(x)]_0^{10} = [-\dfrac{1}{12}x^3 + x^2 + 5x]_0^{10} = F(10) - F(0)$

   $S_1 = (-\dfrac{1}{12} \times 10^3 + 10^2 + 5 \times 10) - 0 = \dfrac{800}{12} = \boxed{\dfrac{200}{3} \text{ U.A.}} \simeq 66,7$

   b. valeur moyenne de f sur $[\ 0\ ;\ 10\ ]$:

   $\dfrac{1}{10-0}\displaystyle\int_0^{10} f(x)dx = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{200}{3} = \boxed{\dfrac{20}{3}} \simeq 6,7$

   c. $\displaystyle\int_0^{4} f(x)dx = F(4) - F(0) = (-\dfrac{1}{12} \times 4^3 + 4^2 + 5 \times 4) - 0 = \dfrac{368}{12} = \boxed{\dfrac{92}{3} \text{ U.A.}} \simeq 30,7$

   on en déduit par symétrie de la courbe que $\displaystyle\int_0^{8} f(x)dx = 2 \times \dfrac{92}{3} = \boxed{\dfrac{184}{3} \text{ U.A.}}$

2. a. aire correspondant au système : $\begin{cases} 2 \leq x \leq 8 \\ \\ 0 \leq y \leq \dfrac{32}{x^2} \end{cases}$

   $g(x) = \dfrac{32}{x^2}$

   $G(x) = -\dfrac{32}{x}$

   $S_2 = \displaystyle\int_2^{8} g(x)dx = [G(x)]_2^8 = [-\dfrac{32}{x}]_2^8 = G(8) - G(2)$

   $S_2 = (-\dfrac{32}{8}) - (-\dfrac{32}{2}) = 12 = \boxed{12 \text{ U.A.}}$

   b. valeur moyenne de : $x \longmapsto \dfrac{32}{x^2}$ sur $[\ 2\ ;\ 8\ ]$:

   $m = \dfrac{1}{8-2}\displaystyle\int_2^{8} g(x)dx = \dfrac{1}{6} \times 12 = \boxed{2}$

corrigé exercice 6 :

la capacité pulmonaire d'un humain exprimée en litres dépend de son âge x

on peut la modéliser par la fonction f telle que : $f(x) = \dfrac{110(lnx-2)}{x}$ pour $x \in [\ 10\ ;\ 90\ ]$

1. variations de f sur $[\ 10\ ;\ 90\ ]$

   • dérivée :

   $$f(x) = \frac{110(lnx-2)}{x} = \frac{110lnx - 220}{x}$$

   $$f'(x) = \frac{(110 \times \frac{1}{x}) \times x - (110lnx - 220) \times 1}{x^2} = \boxed{\frac{330 - 110lnx}{x^2}}$$

   • annulation et signe de $f'(x)$, varations de f :

   $f'(x)$ est du signe du numérateur car un carré est positif

   $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 330 - 110lnx = 0 \Longleftrightarrow lnx = \dfrac{330}{110} \Longleftrightarrow \boxed{x = e^3}$

   $f'(x) < 0 \Longleftrightarrow 330 - 110lnx < 0 \Longleftrightarrow lnx > \dfrac{330}{110} \Longleftrightarrow x > e^3$

   $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 330 - 110lnx > 0 \Longleftrightarrow lnx < \dfrac{330}{110} \Longleftrightarrow x < e^3$

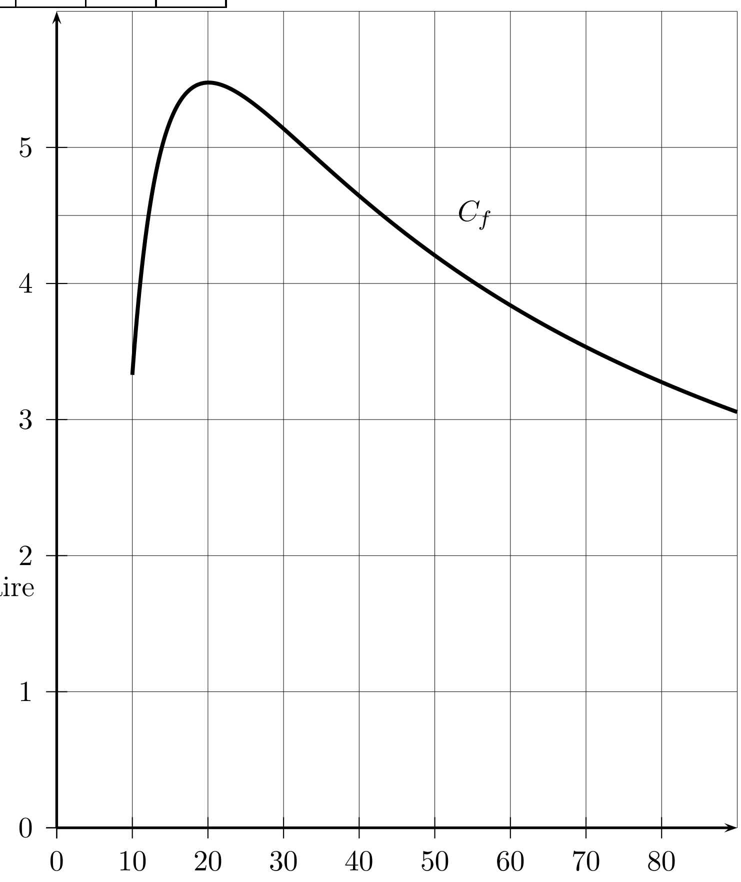
   d'où :

x	10		$e^3 \simeq 20$		90
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\simeq 3,3$	$\nearrow$	$\simeq 5,5$	$\searrow$	$\simeq 3,1$

   $f(10) = \dfrac{110(ln10-2)}{10} \simeq 3,3$

2. a. courbe de f avec 1cm pour 10 ans et 2cm pour 1 litre.

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$f(x)$	3.3	5.5	5.1	4.6	4.2	3.8	3.5	3.3	3.1

   b. graphiquement :

   $\boxed{f(x) > 4,5 \Longleftrightarrow x \in]\ 12\ ;\ 42\ [}$

3. a. $g(x) = (lnx-2)^2 = u^2$

   $g'(x) = 2(lnx-2) \times \dfrac{1}{x} = 2uu'$

   $\boxed{g'(x) = \dfrac{2(lnx-2)}{x}}$

   $\boxed{F(x) = 55 \times (lnx-2)^2}$

   est une primitive de f

   car $F'(x) = 55 \times \dfrac{2(lnx-2)}{x} = f(x)$

   b. valeur moyenne de la capacité pulmonaire entre 20 et 70 ans à 0,1 L par défaut.

   $$m = \frac{1}{70-20}\int_{20}^{70} f(x)dx$$

   $$m = \frac{1}{50}(F(20) - F(70))$$

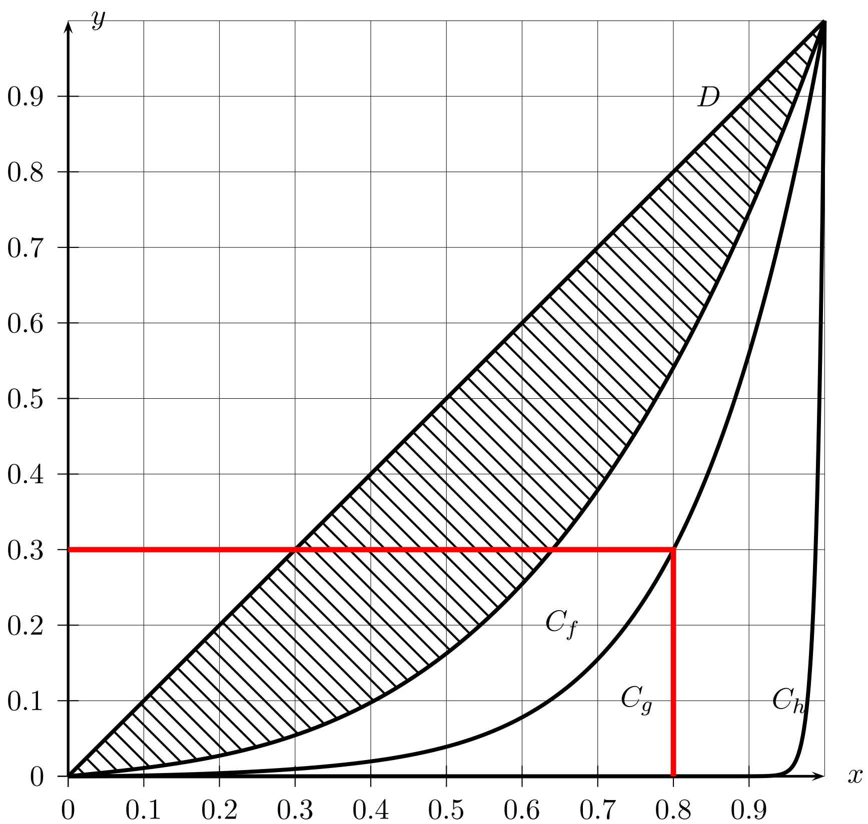
   $m \simeq \boxed{4{,}5 \text{ L}}$

<u>**corrigé exercice 7 :**</u> (Courbe de Lorentz et Indice de Gini) *(bac 2004)*

- x est la proportion cumulée de la population du pays *(entre 0 = 0% et 1 = 100%).*
- la proportion cumulée des richesses d'un pays F est donnée en fonction de x par $f(x) = 0,9x^3 + 0,1x$ de courbe C_f ci dessous. *(par exemple : dans ce pays, 40% de la population détient 10% de la richesse)*
- la proportion cumulée des richesses d'un pays G est donnée en fonction de x par $g(x) = 0,9x^6 + 0,1x^2$ de courbe C_g
- la droite D d'équation $y = x$ représente la distribution parfaitement égalitaire *(pour tout t avec $0 \leq t \leq 1$ on a : t% de la population détient t% de la richesse)*

Définition 1 : L'indice de Gini associé à une courbe de Lorentz C_f est le nombre $\boxed{I = 2\int_0^1 (x - f(x))dx}$

Définition 2 : $\begin{cases} \text{si } I = 0 \text{ on dit qu'il y a absence d'inégalité} \\ \text{plus } I \text{ est proche de 1 et plus l'inégalité est grande} \\ \text{si } I = 1 \text{ on dit qu'il y a inégalité extrême} \end{cases}$



1. $\boxed{30\%}$ des richesses du pays G est détenue par 80% de la population *(graphiquement)*

2. a. le pays G semble le plus inégalitaire :

   car : $\begin{cases} \boxed{30\%} \text{ des richesses du pays } G \text{ est détenue par 80\% de la population} \\ \boxed{\simeq 55\%} \text{ des richesses du pays } F \text{ est détenue par 80\% de la population} \end{cases}$

   b. Indice de Gini dans le cas d'un pays parfaitement égalitaire.

$$I = 2\int_0^1 (x - h(x))dx \text{ avec } h(x) = x$$

$$I = 2\int_0^1 (x - x)dx = 2\int_0^1 0dx = [k]_0^1 = k - k = \boxed{0}$$

c. i. Indice de Gini du pays F à 0,1 près.

$$I = 2\int_0^1 (x - f(x))dx$$
$$I = 2\int_0^1 (x - (0,9x^3 + 0,1x))dx$$
$$I = 2\int_0^1 (-0,9x^3 + 0,9x)dx$$
$$I = 2 \times [-0,9 \times \frac{1}{4}x^4 + 0,9 \times \frac{1}{2}x^2]_0^1 = 2 \times ((-0,9 \times \frac{1^4}{4} + 0,9 \times \frac{1^2}{2}) - (0)) = \boxed{0,45}$$

ii. Ecrire I sous la forme du produit par 2 d'une différence entre deux intégrales et en déduire une interprétation graphique de I en termes d'aire *(colorier la surface associée).*

$$I = 2\int_0^1 (x - f(x))dx = 2(\int_0^1 xdx - \int_0^1 f(x)dx)$$

I = 2(aire du triangle - aire sous la courbe de f)

I = 2(aire entre la droite D et la courbe de f)

d. Calculer l'indice de Gini du pays G à 0,1 près.

$$I = 2\int_0^1 (x - g(x))dx$$
$$I = 2\int_0^1 (x - (0,9x^6 + 0,1x^2))dx$$
$$I = 2\int_0^1 (-0,9x^6 - 0,1x^2 + x)dx$$
$$I = 2 \times [-0,9 \times \frac{1}{7}x^7 - 0,1 \times \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2]_0^1 = 2 \times ((-0,9 \times \frac{1^7}{7} - 0,1 \times \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}) - (0) =\simeq \boxed{0,68}$$

e. Comparer les deux pays

Selon l'indice de Gini :

$\boxed{\text{le pays } G \text{ est beaucoup plus inégalitaire que le pays } F \text{ car } 0,68 > 0,45}$

3. Représenter ci dessus une courbe de pays extrêmement inégalitaire. voir $\boxed{C_h}$

3.6 travaux pratiques

3.6.1 algorithme et calcul d'aire

Algorithme et calcul d'aire

Pour une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$

On veut obtenir une la valeur approchée de : $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

quand on entre les valeurs de a et b ainsi que la formule de la fonction

1. approximation de l'aire par la méthode des rectangles

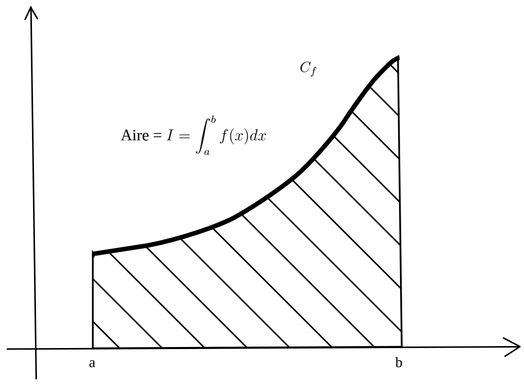
$$\int_a^b f(x)dx = \text{aire sous la courbe entre } a \text{ et } b$$

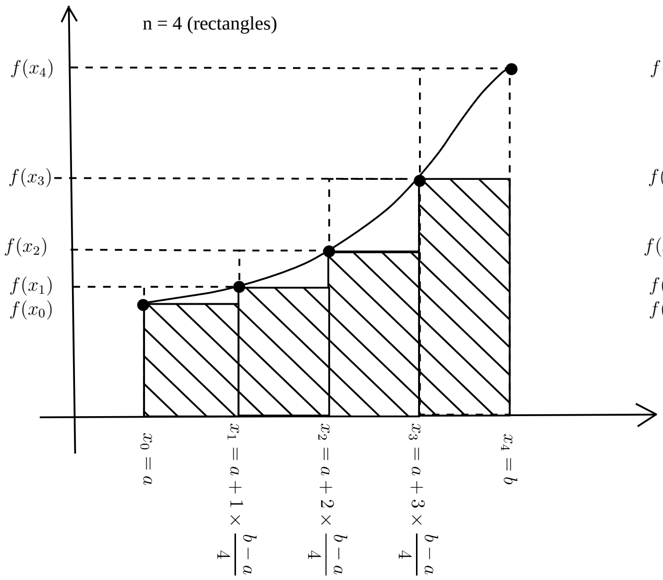
$M =$ somme des aires des rectangles supérieurs

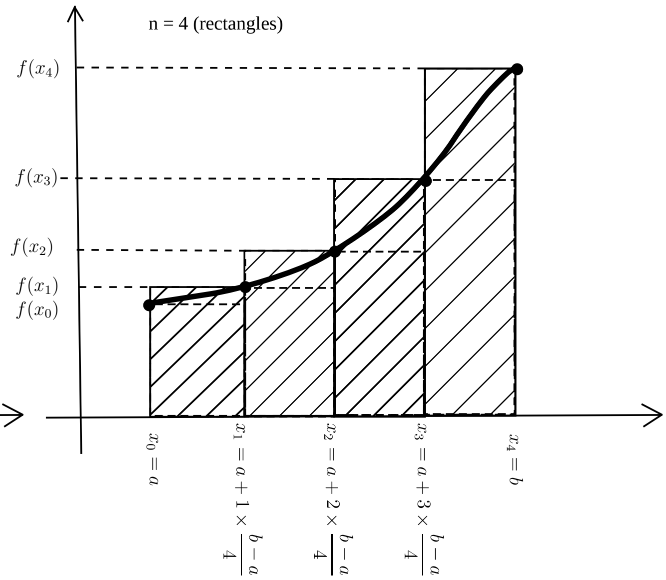
$m =$ somme des aires des rectangles inférieurs

$I \simeq \dfrac{M+m}{2}$ (moyenne)

d'autant plus précis que le nombre de rectangles est grand







$$m = \underbrace{\frac{b-a}{4} \times f(x_0)}_{aire\ 1er\ rect\ inf} + \underbrace{\frac{b-a}{4} \times f(x_1)}_{aire\ 2nd\ rect\ inf} + \frac{b-a}{4} \times f(x_2) + \frac{b-a}{4} \times f(x_3)$$

$$m = \frac{b-a}{4}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]$$

$$M = \underbrace{\frac{b-a}{4} \times f(x_1)}_{aire\ 1er\ rect\ sup} + \underbrace{\frac{b-a}{4} \times f(x_2)}_{aire\ 2nd\ rect\ sup} + \frac{b-a}{4} \times f(x_3) + \frac{b-a}{4} \times f(x_4)$$

$$M = \frac{b-a}{4}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]$$

pour l'algorithme, on utilise ce principe en prenant une valeur de n supérieure à 4 pour améliorer la précision

pour un entier naturel $n > 1$ on a $\boxed{x_i = a + i \times \dfrac{b-a}{n}}$ pour i allant de 0 à n

$$\boxed{m = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)} \quad \boxed{M = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)} \quad \boxed{I \simeq \frac{m+M}{2}}$$

2. algorithme et programmes :

   (a) recopier un des programmes suivants dans votre calculatrice

algorithme
Début
//Variables
a,b,n, larg , inf, sup, L, x , i, fi, fj , I
//Entrées
demander à l'utilisateur la valeur de a
demander à l'utilisateur la valeur de b
demander à l'utilisateur la valeur de n
//Initialisations
affecter à larg la valeur (b-a)/n
affecter à inf la valeur 0
affecter à sup la valeur 0
affecter à i la valeur 0
//Traitements
TANS QUE i < n FAIRE
| affecter à x la valeur a + i*larg
| affecter à fi la valeur f(x)
| affecter à inf la valeur inf + fi
| affecter à x la valeur a + (i+1)*larg
| affecter à fj la valeur f(x)
| affecter à sup la valeur sup + fj
| affecter à i la valeur i+1
fin TANS QUE
affecter à inf la valeur L * inf
affecter à sup la valeur L * sup
affecter à I la valeur (inf+sup)/2
//Sortie
afficher inf
afficher sup
afficher I
Fin

programme pour TI
disp "A"
input A
disp "B"
input B
disp "N"
input N
(B-A)/N ⟶L
0⟶F
0⟶ S
0⟶I
While I < N
A+I*L⟶X
F+Y_1 ⟶ F
A+(I+1)*L⟶X
S+Y_1 ⟶ S
I+1⟶ I
End
F*L ⟶ F
S*L ⟶S
(F+S)/2 ⟶ T
Disp F
Disp S
Disp T
(pour Y1 : Y-VARS, Function)

programme pour Casio
"A" :?⟶ A
"B" :?⟶ B
"N" :?⟶ N
(B-A)/N ⟶L
0⟶F
0⟶ S
0⟶I
While I < N
A+I*L⟶X
F+Y_1 ⟶ F
A+(I+1)*L⟶X
S+Y_1 ⟶ S
I+1⟶ I
WhileEnd
F*L ⟶ F
S*L ⟶S
(F+S)/2 ⟶ T
F ▲
S ▲
T ▲
(pour Y1 : VARS, F4, F1)

3. utiliser le programme de la calculatrice pour trouver une valeur approchée des intégrales suivantes à 0,01 près et vérifier par calcul

   (a) $I = \int_0^1 x dx \simeq$
   calcul :

   (b) $I = \int_0^1 x^2 dx \simeq$
   calcul :

   (c) $I = \int_0^1 x^3 dx \simeq$
   calcul :

   (d) $I = \int_0^{10} 10 - x dx \simeq$
   calcul :

   (e) $I = \int_{-1}^1 x^2 dx \simeq$
   calcul :

3.7 évaluations

évaluation primitives　　　　　　　　　　nom, prénom : ...

<u>exercice 1</u> (cours)

1. F est une primitive de $f \iff$ ...

2. si F est une primitive de f su run intervalle I alors toute autre primitive de f est de la forme : ...
3. a. compléter le tableau ci dessous :

   b. donner une primitive F de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x + 10 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ pour $x > 0$

$F(x)$	$f(x)$
	0
	10
	$a \in \mathbb{R}$
	x
	x^2
	x^3
	$\dfrac{1}{x}$
	$\dfrac{1}{x^2}$
	$\dfrac{1}{x^3}$

4. soient F et f les fonctions respectivement définies sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} F(x) = 5x^3 + 10x^2 - 5x + 10 \\ f(x) = 15x^2 + 20x - 5 \end{cases}$

   a. démontrer que F est une primitive de f

   b. déterminer la primitive de f qui vaut 0 en $x = 1$

5. Démontrer que F est une primitive de f avec : $\begin{cases} F(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+4} \\ \\ f(x) = \dfrac{2(x+1)(4-x)}{(x^2+2)^2} \end{cases}$

6. trouver une primitive de f dans chacun des cas en utilisant la tableau ci contre :

$F(x)$	$f(x)$
$\frac{1}{2}u^2$	$u'u$
$\frac{1}{3}u^3$	$u'u^2$
$\frac{1}{4}u^4$	$u'u^3$
$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$u'u^n$
$\frac{-1}{u}$	$\frac{u'}{u^2}$
$\frac{-1}{2u^2}$	$\frac{u'}{u^3}$
$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	$\frac{u'}{u^n}$
lnu	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$

   1. $f(x) = 3(3x+5)^2$

   2. $f(x) = \frac{1}{x}lnx$

   3. $f(x) = \dfrac{3}{(3x+5)^2}$

   4. $f(x) = \dfrac{10}{3x+5}$

évaluation calcul intégral   nom, prénom : ...

exercice 1 : *(compléter les résultats de cours)*

1. $\int_a^b f(x)dx = ...$ où ...   est une ...   de f

2. pour une fonction f positive sur $[a;b]$:

   $\int_a^b f(x)dx =$ aire de la surface comprise entre : $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$

   (faire un dessin)

3. la valeur moyenne m de f entre a et b est : $m = ...$

exercice 2 :

1. calculer les intégrales suivantes

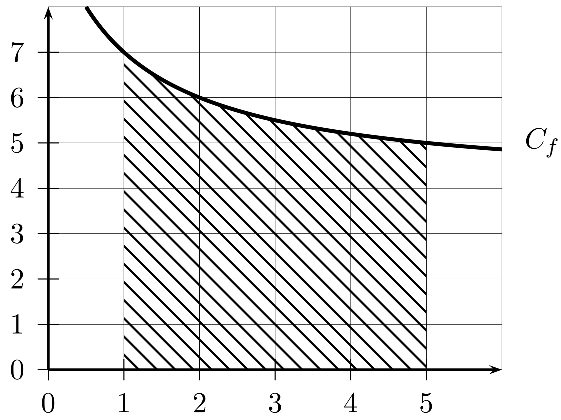
   a. $\int_0^6 (x^2 + x - 4)dx$

   b. $\int_1^2 (\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2})dt$

   c. $\int_{-2}^0 2q^3 dq$

2. calculer la valeur moyenne de f entrer 0 et 6 pour $f(x) = x^2 + x - 4$
   (utiliser le résultat du 1.a.)

exercice 3 :

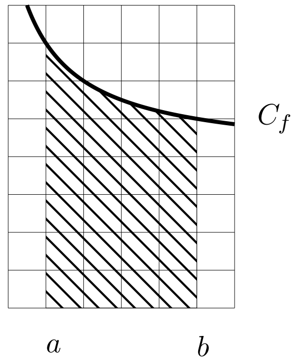


1. estimer graphiquement la valeur de $I = \int_1^5 f(x)dx$

   à une unité d'aire près : $I \simeq ...$

2. on sait que $f(x) = 4 + \dfrac{6}{x+1}$ pour $x > 0$
   a. montrer que F telle que $F(x) = 4x + 6ln(x+1)$ est une primitive de f pour $x > 0$
   b. en déduire la valeur exacte de I écrite sous la forme $n + lnp$ où n et p sont deux entiers puis donner une valeur approchée de I à 0,1 près.
   c. en déduire la valeur moyenne de f sur $[1\ ;\ 5]$ à 0,1 près et représenter cette valeur sur le graphique.

corrigé évaluation calcul intégral nom, prénom : ...



exercice 1 : *(compléter les résultats de cours)*

1. $\int_a^b f(x)dx = \boxed{F(b) - F(a)}$ où $\boxed{F}$ est une primitive de f

2. pour une fonction f positive sur $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{aire de la surface comprise entre : } \boxed{\left\{\begin{array}{l}\text{la courbe de } F\\ \text{l'axe des abscisses}\\ \text{pour x compris entre } a \text{ et } b\end{array}\right.}$$

3. la valeur moyenne m de f entre a et b est : $\boxed{m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$

exercice 2 :

1. calculer les intégrales suivantes

a. $\int_0^6 (x^2 + x - 4)dx$

$$\int_0^6 (x^2 + x - 4)dx = [\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x]_0^6 = (\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} - 4 \times 6) - (0) = \boxed{66}$$

b. $\int_1^2 (\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2})dt$

$$\int_1^2 (\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2})dt = [lnt - \frac{-1}{t}]_1^2 = [lnt + \frac{1}{t}]_1^2 = (ln2 + \frac{1}{2}) - (ln1 + \frac{1}{1}) = \boxed{ln2 - \frac{1}{2}}$$

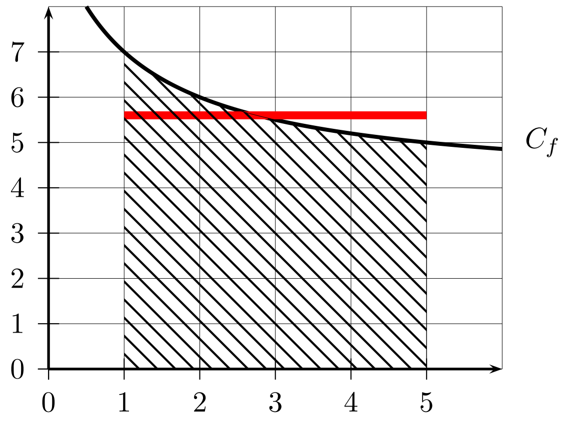
c. $\int_{-2}^0 2q^3 dq$

$$\int_{-2}^0 2q^3 dq = [2 \times \frac{1}{4}q^4]_{-2}^0 == [\frac{1}{2}q^4]_{-2}^0 = (\frac{1}{2} \times 0^4) - (\frac{1}{2} \times (-2)^4) = \boxed{-8}$$

2. calculer la valeur moyenne de f entrer 0 et 6 pour $f(x) = x^2 + x - 4$

$$m = \frac{1}{6-0}\int_0^6 (x^2 + x - 4)dx = \frac{1}{6} \times 66 = \boxed{11}$$

exercice 3 :



1. estimer graphiquement la valeur de $I = \int_1^5 f(x)dx$

   à une unité d'aire près : $\boxed{I \simeq 23}$

2. on sait que $f(x) = 4 + \frac{6}{x+1}$ pour $x > 0$

   a. montrer que F telle que $F(x) = 4x + 6ln(x+1)$ est une primitive de f pour $x > 0$:

   $F(x) = 4x + 6ln(x+1)$

   $\boxed{F'(x) = 4 + 6 \times \frac{1}{x+1} = 4 + \frac{6}{x+1} = f(x)}$ C.Q.F.D.

   b. en déduire la valeur exacte de I écrite sous la forme $n + lnp$ où n et p sont deux entiers puis donner une valeur approchée de I à 0,1 près.

   $I = F(5) - F(1) = (4 \times 5 + 6ln(5+1)) - (4 \times 1 + 6ln(1+1))$

   $I = 20 + 6ln(6) - 4 - 6ln(2))$

   $I = 16 + ln(6^6) - ln(2^6)$

   $I = 16 + ln(\frac{6^6}{2^6})$

   $I = 16 + ln((\frac{6}{2})^6)$

   $I = 16 + ln((3)^6)$

   $\boxed{I = 16 + ln(729)}$

   $\boxed{I \simeq 22,6}$

   c. en déduire la valeur moyenne de f sur $[1\ ;\ 5]$ à 0,1 près et représenter cette valeur sur le graphique.

   $m = \frac{1}{5-1} \int_1^5 f(x)dx = \frac{1}{4} \times (16 + ln(729)) \simeq \boxed{5,7}$

corrigé devoir maison

exercice 1 : (31p187)

a. $\boxed{g_1'(0) = 4} = \dfrac{7-3}{1-0}$ coefficient directeur de la tangente (AD) avec $A(0;3)$ et $D(1;7)$

$\boxed{g_2'(0) = 2} = \dfrac{1-(-1)}{1-0}$ coefficient directeur de la tangente (BE) avec $B(0;-1)$ et $E(1;1)$

$\boxed{g_3'(0) = 2} = \dfrac{-3-(-1)}{1-0}$ coefficient directeur de la tangente (CF) avec $C(0;-1)$ et $D(1;-3)$

b. $\left.\begin{array}{l} F \text{ est une primitive de } f \text{ donc } F' = f \\ f \text{ donc } F' \text{ est négative puis positive donc } F \text{ est décroissante puis croissante} \\ f(-1) = F'(-1) \simeq 2,75 \end{array}\right\}$ seule $\boxed{C_3}$ convient

(le coefficient directeur de la tangente à C_3 en $x = -1$ est $\simeq 2,75$, ce qui n'est pas le cas pour C_2)

On peut tracer $\boxed{\text{une infinité}}$ de courbes représentant une autre primitive de f car f admet une infinité de primitives

exercice 2 : (107p201)

1. $f(x) = \dfrac{3x^2}{4} - 2x + 3 + ln(x+1)$ sur $[\ 0\ ;\ 6\ ]$

$f'(x) = \dfrac{3x}{2} - 2 + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{3x(x+1) - 4(x+1) + 2}{2(x+1)} = \boxed{\dfrac{3x^2 - x - 2}{2(x+1)}}$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - x - 2 = 0$ et $2(x+1) \neq 0 \iff \boxed{x \in \{\ -\dfrac{2}{3}\ ;\ 1\ \}}$ en utilisant le discriminant

d'où le tableau de variations :

x	0		1		6
$3x^2 - x - 2$		-	0	+	
$2(x+1)$		+		+	
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	3	$\searrow$	$\simeq 2,4$	$\nearrow$	$\simeq 20$

2. le coût marginal est minimal quand f est minimale, c'est à dire pour $\boxed{x = 1 \text{ millier d'objets}}$ (d'après les variations de f)

3. $F(x) = (x+1)ln(x+1) - x$

   a. $F'(x) = 1 \times ln(x+1) + (x+1) \times \dfrac{1}{x+1} - 1 = ln(x+1)$

   donc $\boxed{F \text{ est une primitive de } x \longmapsto ln(x+1)}$

   b. le coût total de production C_T est une primitive du coût marginal f

   donc $C_T(x) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3}x^3 - 2 \times \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + (x+1)ln(x+1) - x + k$

   soit : $C_T(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - x^2 + 2x + (x+1)ln(x+1) + k$

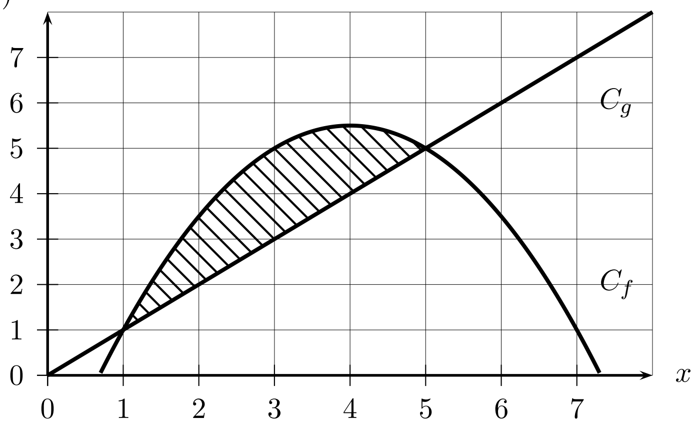
   de plus $C_T(0) = 10$ car les coûts fixes sont de 10 milliers d'euros

   donc : $C_T(0) = \dfrac{1}{4} \times 0^3 - 0^2 + 2 \times 0 + (0+1)ln(0+1) + k = 10$

soit $k = 10$ conclusion : $\boxed{C_T(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 2x + (x+1)ln(x+1) + 10}$

evaluation nom, prénom : ...

<u>exercice 1</u> : (aire de la surface entre deux courbes)



1. estimer graphiquement un encadrement de l'aire de la surface hachurée I par deux entiers

   où I est en unités d'aires : ... $\leq I \leq$ ...

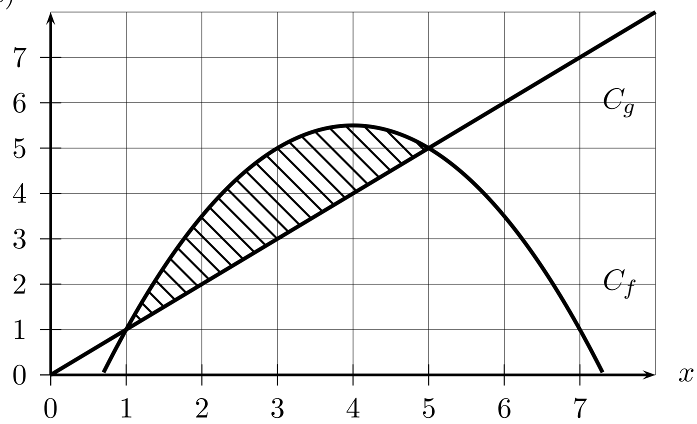
2. sachant que : $\begin{cases} f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - \dfrac{5}{2} \\ \\ g(x) = x \end{cases}$

   a. calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^5 f(x)dx$

   b. calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^5 g(x)dx$

   c. en déduire la valeur exacte de l'aire hachurée I et vérifier la cohérence avec le résultat graphique corrigé evaluation

<u>exercice 1</u> : (aire de la surface entre deux courbes)



1. on estime graphiquement un encadrement de l'aire de la surface hachurée I par deux entiers

   où I est en unités d'aires : $\boxed{4 \leq I \leq 5}$

2. sachant que : $\begin{cases} f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - \dfrac{5}{2} \\ g(x) = x \end{cases}$

   a. $\displaystyle\int_1^5 f(x)dx = [\frac{-1}{2} \times \frac{x^3}{3} + 4 \times \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x]_1^5 = [-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - \frac{5}{2}x]_1^5$

   $\displaystyle\int_1^5 f(x)dx = (-\frac{1}{6} \times 5^3 + 2 \times 5^2 - \frac{5}{2} \times 5) - (-\frac{1}{6} \times 1^3 + 2 \times 1^2 - \frac{5}{2} \times 1)$

   $\int_1^5 f(x)dx = \dfrac{52}{3} \simeq \boxed{17,33}$

   b. $\displaystyle\int_1^5 g(x)dx = [\frac{x^2}{2}]_1^5$

   $\displaystyle\int_1^5 g(x)dx = \frac{5^2}{2} - \frac{1^2}{2}$

   $\int_1^5 f(x)dx = \boxed{12}$

   c. valeur exacte de l'aire hachurée $\displaystyle I = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^5 g(x)dx = \frac{52}{3} - 12 = \frac{16}{3} \simeq \boxed{5,33}$

   ce qui est cohérent avec le résultat graphique de la question 1.

corrigé devoir maison

exercice 1 : (96 page 197)

1. a. $\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx \\ C_f \text{ passe par } A(1;1) \\ C_f \text{ passe par } C(0,5\ ;\ 0,3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(1) = a \times 1^2 + b \times 1 = 1 \\ f(0,5) = a \times 0,5^2 + b \times 0,5 = 0,3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 0,25a + 0,5b = 0,3 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a + 2b = 1,2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ b = 0,2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0,8 \\ b = 0,2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{f(x) = 0,8x^2 + 0,2x}$

b. la courbe C_f est un relativement bon ajustement du nuage car elle passe par l'ensemble des points du nuage sauf le point de coordonnées $(90;83)$

x	0	10	25	50	75	90	100
y	0	2,8	10	30	60	83	100
$f(x)$	0	2,8	10	30	60	82,8	100

2. $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \left[0,8 \times \frac{x^3}{3} + 0,2 \times \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{8}{30}x^3 + \frac{1}{10}x^2\right]_0^1 = (\frac{8}{30} \times 1^3 + \frac{1}{10} \times 1^2) - (0) = \frac{11}{30} \simeq \boxed{0,37}$

$\boxed{\text{L'aire sous la courbe pour } x \text{ compris entre 0 et 1 vaut environs 0,37 unités d'aires}}$

3. indice de Gini $= I = 2\times$Aire entre la courbe et la droite $= 2 \times (0,5 - \displaystyle\int_0^1 f(x)dx)$

$I = 2 \times (0,5 - \dfrac{11}{30}) = 1 - \dfrac{22}{30} = \dfrac{8}{30} \simeq \boxed{0,27}$

exercice 2 : (99 page 197)

1. a. la quantité d'équilibre est de $100(e-1)$ tonnes soit environs $\boxed{\text{172 tonnes}}$ à une tonne près
le prix d'équilibre est de $\boxed{\text{1 euro le kilo}}$

b. chiffre d'affaire $= 100(e-1) \times 1000 \simeq \boxed{\text{172000 euros}}$

2. a. C_{f_1} est une droite d'équation $y = ax + b$ qui passe par $A(0;e)$ et $E(e-1;1)$

donc : $a = \dfrac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \dfrac{1-e}{e-1} = \dfrac{-(e-1)}{e-1} = -1$ soit $y = -x + b$

avec $A(0;e)$ on a de plus : $e = -0 + b$ donc $b = e$ donc $\boxed{f_1(x) = -x + e}$

b. surplus des consommateurs = aire du triangle $= \dfrac{(e-1)(e-1)}{2} = \dfrac{(e-1)^2}{2} \simeq \boxed{\text{1476 euros}}$

3. a. d'après la courbe C_2, la fonction f_2 est positive sur $[0\ ;\ 3]$ donc sa primitive F est croissante sur $[0\ ;\ 3]$

b. $f_2(0) = 0$ donc $F'(0) = f_2(0) = 0$ donc la courbe C de la fonction F admet une tangente horizontale en $x = 0$

c. la courbe Γ_2 est la courbe de F car Γ_1 n'a pas de tangente horizontale en $x = 0$ et Γ_3 ne passe pas par $P(0;1)$

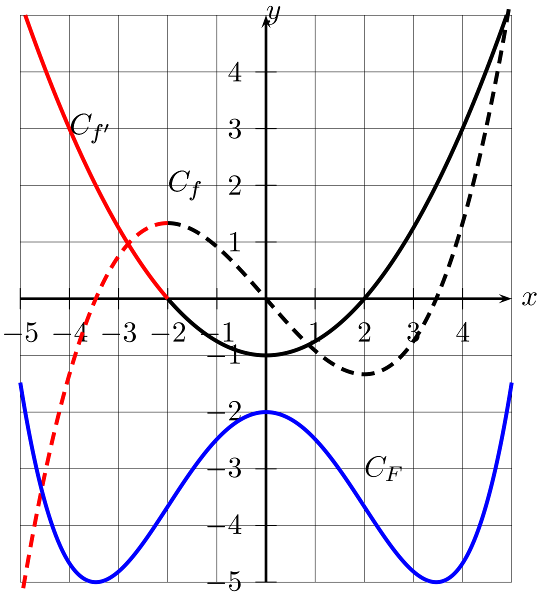
d. $\displaystyle\int_0^{e-1} f_2(x)dx = [F(x)]_0^1 = F(e-1) - F(0) = 2 - 1 = \boxed{1}$

e. le surplus des producteurs vaut donc $(e-1) \times 1 - \displaystyle\int_0^{e-1} f_2(x)dx = e - 2 \simeq \boxed{\text{718 euros}}$

3.8 corrigé devoir maison

3.8.1 corrigé devoir maison 1

corrigé devoir maison



Exercice 1 :

(a) sachant que la courbe de f est C_2
on voit que f croît strictement sur $[-5;-2]$
donc f' est strictement positive sur $[-5;-2]$
donc la courbe de f' est au dessus de l'axe (Ox) sur $[-5;-2]$
$\boxed{\text{le courbe de } f' \text{ est donc la courbe } C_1}$
$\boxed{C_3 \text{ est donc la courbe de } F}$

(b) $\boxed{f(0)=0}$ $\boxed{f'(0)=-1}$
$\boxed{F(0)=-2}$ $\boxed{F'(0)=f(0)=0}$

(c) $\boxed{f(3,5)\simeq 0}$ $\boxed{f'(3,5)\simeq 2}$
$\boxed{F(3,5)\simeq -5}$ $\boxed{F'(3,5)=f(3,5)\simeq 0}$

Exercice 2

Partie A : aucune justification n'est demandée

1. On note $f'(0)$ le nombre dérivé de la fonction f en 0. Quelle est sa valeur ?

   a. $\boxed{f'(0)=1}$ **b.** $f'(0)=2$ **c.** $f'(0)=0$

   $f'(0)$ est le coefficient directeur de la droite T tangente à la courbe de f en $x=0$
   (T) passe par $A(0;2)$ et $D(-2;0)$ donc $f'(0)=\dfrac{0-2}{-2-0}=1$

2. Quel est le signe de $f'(2)$?

   a. positif strict **b.** $\boxed{\text{négatif strict}}$ **c.** nul

   f est strictement décroissante en $x=2$ donc $f'(2)<0$

3. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $f'(x)=0$?

   a. $S=\{-5;2\}$ **b.** $\boxed{S=\{1\}}$ **c.** $S=\{2\}$

   $f'(x)=0 \Longleftrightarrow$**la tangente à la courbe est horizontale** $\Longleftrightarrow x=1$

4. Soit F une primitive de f, quelle est la valeur de $F'(0)$?

   a. $F'(0)=1$ **b.** $\boxed{F'(0)=2}$ **c.** $F'(0)=0$

   F est une primitive de f donc $F'(x)=f(x)$ sur I donc $F'(0)=f(0)=2$

5. quelle est la valeur de $F'(1)$?

   a. $F'(1)=0$ **b.** $F'(1)=1$ **c.** $\boxed{F'(1)=e}$

   $F'(1)=f(1)=e$

6. Quel est le signe de $F'(-5)$?

   a. $\boxed{\text{positif strict}}$ **b.** négatif strict **c.** nul

   $F'(-5)=f(-5)$ **est positif strict**

7. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $F'(x) = 0$?

   a. $S = \{-5; 2\}$ **b.** $S = \{1\}$ **c.** $\boxed{S = \{2\}}$

   $F'(x) = 0 \iff f(x) = 0 \iff x = 2$

Partie B : chaque réponse doit être justifiée

1. Parmi les trois courbes ci dessous, l'une est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de la fonction f. Laquelle ?

   a. La courbe $(\mathcal{C}_1)$ **b.** La courbe $(\mathcal{C}_2)$ **c.** $\boxed{\text{La courbe } (\mathcal{C}_3)}$

   la fonction f est croissante sur [-5 ;1] puis décroissante sur [1 ;2,5]
   donc
   la fonction f' est positive sur [-5 ;1] puis négative sur [1 ;2,5]
   seule la courbe $(\mathcal{C}_3)$ convient

2. Parmi les trois courbes ci dessous, l'une est la représentation graphique d'une primitive F de la fonction f, F étant définie sur l'intervalle $\left[-5\ ;\ \frac{5}{2}\right]$. Laquelle ?

   a. $\boxed{\text{La courbe } (\mathcal{C}_1)}$ **b.** La courbe $(\mathcal{C}_2)$ **c.** La courbe $(\mathcal{C}_3)$

   la fonction f est la dérivée de la fonction F
   or la fonction f est positive sur [-5 ;2] puis négative sur [2 ;2,5]
   donc la fonction F est croissante sur [-5 ;2] puis décroissante sur [2 ;2,5]
   seule la courbe $(\mathcal{C}_1)$ convient

Exercice 3 :

(a) en unités d'aire, l'aire S de la partie hachurée est S $= \displaystyle\int_0^6 f(x)dx$

$$\text{S} = \int_0^6 (\frac{3}{4}x^2 - 3x + 6)dx = [F(x)]_0^6 = [0,25x^3 - 1,5x^2 + 6x]_0^6$$

$$\text{S} = F(6) - F(0) = (0,25 \times 6^3 - 1,5 \times 6^2 + 6 \times 6) - 0 = \boxed{\text{36 unités d'aires}}$$

or une unité d'aire vaut $2 \times 0,75 = 1,5cm^2$ ce qui donne en pour S : $36 \times 1,5 = \boxed{54cm^2}$

(b) la valeur moyenne de f sur $[0\ ;\ 6]$ est : $m = \dfrac{1}{6-0}\displaystyle\int_0^6 f(x)dx = \dfrac{36}{6} = \boxed{6}$

(c) $R(x)$ l'aire, en unités d'aire, du rectangle OHMK = longueur × largeur = $x \times f(x) = \boxed{0,75x^3 - 3x^2 + 6x}$

(d) i. aire $R(x)$ du rectangle OHMK =aire hachurée S

$$\iff 0,75x^3 - 3x^2 + 6x = 36 \iff 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36 = 0 \iff \boxed{g(x) = 0}$$

ii. variations de g sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ et tableau de variation de g.

- Calcul de $g'(x)$: $\boxed{g'(x) = 2,25x^2 - 6x + 6}$

- Annulation et signe de $g'(x)$:

$g'(x)$ est un polynôme de degré 2 de la forme ax^2+bx+c, on utilise la règle du signe de ax^2+bx+c. et pour $g'(x) = 0$ on utilise le discriminant :

$\Delta = -18 < 0$ donc aucune annulation et on a le tableau de signes suivant.

x	0 $\qquad$ 6
$g'(x)$	$+$

- variations de g :

x	0		6
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-36	$\nearrow$	54

$g(0) = -36$

- $\begin{cases} g(0) = -36 \text{ et } -36 < 0 \\ g(6) = 54 \text{ et } 54 > 0 \\ g \text{ est continue sur } [0;6] \text{ en tant que fonction polynômiale de degré 3} \\ g \text{ est strictement croissante sur } [0;6] \end{cases}$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ possède alors une solution unique α dans $[0;6]$

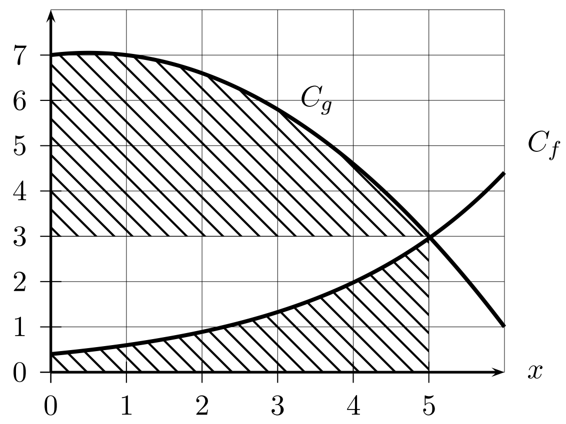
- La calculatrice permet de voir que $4,55 < \alpha < 4,56$ car :

$\begin{cases} f(4,55) \simeq -0,16 < 0 \\ f(4,56) \simeq 0,093 > 0 \end{cases}$ donc $\boxed{\alpha = 4,55 \text{ ou } 4,56}$ à 10^{-2} près.

- conclusion : pour que le rectangle ait la même aire que la surface hachurée, il faut que $\boxed{x = \alpha \simeq 4,55}$

3.8.2 corrigé devoir maison 2

Exercice 1 : *(121 page 160)*



1. (a) on détermine graphiquement que :
   prix d'équilibre $= \boxed{p_0 = 3}$ centaines d'euros
   quantité d'équilibre $= \boxed{q_0 = 5}$ milliers

   (b) chiffre d'affaire $= \boxed{p_0 \times q_0 = 15}$
   centaines de milliers d'euros

2. (a) $\boxed{\int_0^5 f(x)dx \simeq 6}$ U.A. graphiquement

   (b) $\int_0^5 e^{0,4x}dx = [\frac{0,4}{0,4}e^{0,4x}]_0^5 = [e^{0,4x}]_0^5$
   $\int_0^5 f(x)dx = e^{0,4\times 5} - e^{0,4\times 0} = \boxed{e^2 - 1 \simeq 6,39}$

   (c) $S_p = p_0 \times q_0 - \int_0^5 f(x)dx = 15 - 6,39 \simeq \boxed{8,61}$

3. on estime graphiquement que le surplus des consommateurs est d'environs $\boxed{13}$ U.A.
   donc Jeanne à raison

Exercice 2 : *(122 page 161)*

Partie A :

1. $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1$ sur $[0;1]$
   (a) i. $f'(x) = \frac{3}{2} + \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{3(x+1)^2 - 2}{2(x+1)^2} = \frac{3x^2+6x+1}{2(x+1)^2}$
   ii. $f'(x)$ est du signe du trinôme $3x^2+6x+1$ car $2(x+1)^2$ est positif strict sur $[0;1]$
   iii. f est dons strictement croissante sur $[0;1]$
   (b) $x - f(x) = x - (\frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1) = -0,5x + 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{(-0,5x+1)(x+1)-1}{x+1}$
   $x - f(x) = \frac{-0,5x^2 - 0,5x + x + 1 - 1}{x+1} = \frac{-0,5x^2+0,5x}{x+1} = \frac{0,5x(-x+1)}{x+1}$
   sur $[0;1]$, $x - f(x)$ est du signe de $-x+1$ car $0,5x$ est positif ainsi que $x+1$
   or $-x+1$ s'annule en $x=1$ et est positif sur $[0;1]$
   (c) conclusion : $x - f(x) \geq 0$ sur $[0;1]$
   donc $f(x) \leq x$ sur $[0;1]$
   donc C_f est une courbe de Lorentz
2. $g(x) = e^x - (e-2)x - 1$
   (a) i. $g'(x) = e^x - (e-2)$
   ii. $g'(x) > 0 \iff e^x - (e-2) > 0$
   $\iff e^x > e - 2$
   $\iff ln(e^x) > ln(e-2)$
   $\iff x > ln(e-2)$
   (de même pour $>$ ou $=$)
   iii. d'où le tableau

x	0		$ln(e-2)$		1
$g'(x)$		-	0	+	

   (b) $g(0) = e^0 - (e-2) - 1 = -(e-2)$
   $g(1) = e^1 - (e-2) - 1 = 1$
3. $h(x) = -e^x + (e-1)x + 1$
   (a)

x	0		$ln(e-1)$		1
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\simeq 0,2$	$\searrow$	0

   $h(ln(e-1) \simeq 0,2$
   (b) $x - g(x) = x - (e^x - (e-2)x - 1) = -e^x + (e-1)x + 1 = h(x)$
   (c) $h(x) \geq 0$ sur $[0;1]$
   donc $x - g(x) \geq 0$ sur $[0;1]$
   donc $x \geq g(x)$ sur $[0;1]$
   donc C_g est une courbe de Lorentz

Partie B

1. $g(0,5) \simeq 30\%$
   50% des exploitations les plus petites représentent au total $\simeq 30\%$ de la superficie des exploitations du pays G
2. (a) $A = \int_0^1 x - g(x)dx = \int_0^1 h(x)dx$
   $\int_0^1 h(x)dx = [-e^x + (e-1)\frac{x^2}{2} + x]_0^1 = -e + (e-1) \times 0,5 + 1 - (-1) = 1,5 - 0,5e$
   (b) $\gamma_G = 2A = 3 - e \simeq 0,282$
3. $\gamma_F = 2 \times \int_0^1 x - f(x)dx = 2 \times [\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^2 - ln(x+1) + x]_0^1 = 2 \times [-\frac{1}{4}x^2 - ln(x+1) + x]_0^1 = 2(\frac{3}{4} - ln(2)) \simeq 0,14$

- le pays F est plus égalitaire car $\gamma_F < \gamma_G$, $0,14 < 0,282$)
- oui, car l'aire comprise entre la première bissectrice et la courbe est plus petite pour f que pour g pour $x \in [0;1]$