COURS

9 Espaces vectoriels : définitions et généralités

[MOTS-CLÉS : ESPACE VECTORIEL, COMBINAISON LINÉAIRE, SOUS-ESPACE VECTORIEL, FAMILLE LIBRE, LIÉE, GÉNÉRATRICE, RANG, DIMENSION, PRODUIT]

On travaille avec un corps K qui sera normalement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de K sont appelés scalaires, et notés avec des lettres grecques ou romaines minuscules. Les vecteurs sont notés avec des caractères romains, en majuscules ou en minuscules.

1 Définition générale

- Un espace vectoriel E sur K est un ensemble non vide muni de deux opérations :
  - Une addition $(x,y) \in E^2 \mapsto x + y \in E$ lui conférant une structure de groupe commutatif. L'élément neutre, appelé vecteur nul, est noté 0 (il n'y a jamais d'ambiguïté avec le 0 de K); l'opposé du vecteur x est noté $-x$.
  - Une multiplication externe : pour tout scalaire $\lambda \in K$ et tout vecteur $x \in E$, on définit le produit « externe » λx qui est un élément de E. Cette opération externe vérifie, pour tous scalaires $\lambda,\mu \in K$ et tous vecteurs $x,y \in E$, les quatre propriétés :
  $$1x = x, \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$
  - On en déduit immédiatement que $\lambda 0 = 0$ et $0x = 0$. Le produit externe du scalaire -1 par le vecteur x est simplement l'opposé $-x$ du vecteur x.

Méthodologie

Il y a donc 4+4=8 propriétés à vérifier pour un espace vectoriel. Cela fait beaucoup, et on le fait rarement.

2 Exemples fondamentaux

Exemple 1 : Pour $n \geq 1$, l'ensemble K^n des n-uplets $(x_1, \cdots ,x_n)$ de scalaires est un espace vectoriel sur K avec $\lambda(x_1,x_2, \cdots ,x_n) = (\lambda x_1,\lambda x_2, \cdots ,\lambda x_n)$ et
$$(x_1,x_2, \cdots ,x_n) + (y_1,y_2, \cdots ,y_n) = (x_1 + y_1,x_2 + y_2, \cdots ,x_n + y_n)$$
Le vecteur nul est $(0,0, \cdots ,0)$. C'est à partir de $n = 2$ que K^n est intéressant.

Exemple 2 : Les polynômes à coefficients dans K, à savoir toute expression $a_pX^p + \cdots + a_1X + a_0$ où $a_0,a_1, \cdots ,a_p$ sont des scalaires (avec $p \in \mathbb{N}$ et $a_p \neq 0$) forment l'espace vectoriel $K[X]$ des polynômes sur K. La fiche 2 lui a été consacrée.

Exemple 3 : Soient $n \geq 1$ et $p \geq 1$. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel sur K. La somme $A + B$ est la matrice de terme général $a_{i,j} + b_{i,j}$ et le produit externe λA a pour terme général $\lambda a_{i,j}$, comme énoncé dans la fiche 6.

Exemple 4 : L'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes est un espace vectoriel sur lui-même. Mais c'est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, avec $(a + ib) + (a' + ib') = a + a' + i(b + b')$ et $\lambda(a + ib) = \lambda a + i\lambda b$, où a,b,λ sont des réels.

J'apprends en ligne
www.lienmini.fr/dmalgebre9

Exemple 5 : soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $K_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients dans K, est un espace vectoriel sur K.

Exemple 6 en ligne

3 Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E donné

- Une partie F d'un espace vectoriel E est appelée *sous-espace vectoriel de* E (SEV en abrégé) lorsque F est encore un espace vectoriel sur K pour l'addition et la multiplication externe définies dans E. Cela a lieu si et seulement si ces deux opérations « laissent F stable », i.e. lorsque la somme de deux éléments de F donne un élément de F, et lorsque le produit externe d'un élément de F par un scalaire donne un élément de F.

Une partie F d'un espace vectoriel E sur K est un sous-espace vectoriel de E lorsque

$$\forall x,y \in F, \forall \lambda \in K, \quad \text{alors } x+y \in F \quad \text{et} \quad \lambda x \in F$$

- L'ensemble F possède alors automatiquement les huit propriétés définissant un espace vectoriel, et F est lui-même un espace vectoriel sur K. Comme c'est une partie de E, il est logique de l'appeler sous-espace vectoriel de E.

Méthodologie

En pratique on montre que $\alpha X + \beta Y \in F$ pour tous $X,Y \in F$ et tous scalaires α,β.

Exemple 7.a : $K_n[X]$ est un SEV de $K[X]$. En effet, le degré de la somme de deux polynômes ne peut que diminuer, et l'addition des polynômes est bien une opération interne dans $K_n[X]$, lui conférant une structure de groupe additif. Le produit d'un scalaire par un polynôme de degré inférieur ou égal à n donne un polynôme de même degré ou le polynôme nul.

Exemple 7.b : De même, pour tout $n \leq m$, $K_n[X]$ est un SEV de $K_m[X]$.

Exemple 8 en ligne

Exemple 9 : L'ensemble P des vecteurs $(x,y,z) \in K^3$ vérifiant $x + 5y - 4z = 0$ est un SEV de K^3, appelé plan. En effet si $X = (x,y,z)$ et $X' = (x',y',z')$ sont dans P, on a $(x+x') + 5(y+y') - 4(z+z') = (x+5y-4z) + (x'+5y'-4z') = 0 + 0 = 0$, et la somme $X + Y$ est encore dans P. Pour tout réel λ et tout $X = (x,y,z) \in P$, on a $\lambda x + 5\lambda y - 4\lambda z = \lambda(x+5y-4z) = \lambda 0 = 0$, et λX est dans P.

Exemple 10 : L'ensemble H des vecteurs $(x,y,z) \in K^3$ vérifiant $x + y + z = 2$ n'est pas un SEV de K^3. En effet $X = (1,1,0)$ et $Y = (1,0,1)$ sont dans H, mais la somme $X + Y = (2,1,1)$ n'est pas dans H.

Exemple fondamental 11 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. L'ensemble F des $(x_1, \cdots, x_p) \in K^p$ tels que $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = 0$ est un SEV de K^p. En effet, si $AX = AY = 0$, alors

$A(\alpha X+\beta Y)=\alpha Ax+\beta AY=0$, et $\alpha(x_1,\cdots,x_p)+\beta(y_1,\cdots,y_p)$ est encore dans F, pour tous scalaires α,β.

4 Comment montrer qu'un ensemble E est un espace vectoriel ?

Méthodologie

A priori, montrer qu'un ensemble E est un espace vectoriel sur K semble demander de vérifier huit propriétés, les quatre de l'addition et quatre pour la multiplication externe. En pratique, on ne le fait jamais, car on montre que E est un sous-espace vectoriel d'un ensemble contenant E et connu pour être lui-même un espace vectoriel.

Exemple 12 : Montrer que $K[X]$ est un espace vectoriel demande effectivement de vérifier les huit propriétés de la définition. Mais montrer que $K_n[X]$ est un espace vectoriel se fait en montrant que c'est un SEV de $K[X]$, comme cela a été fait dans l'exemple 7.

Exemple 13 : Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ de toutes les applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ demande de vérifier les huit propriétés de la définition. Mais montrer que l'ensemble E des fonctions continues sur $[0,1]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, se fait par SEV de $\mathcal{F}$: la somme de deux fonctions continues sur $[0,1]$ et le produit d'une fonction continue par une constante sont encore des fonctions continues sur $[0,1]$. E est un SEV de $\mathcal{F}$ et donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

5 Combinaison linéaire de vecteurs

- Soient $U_1,U_2,\cdots,U_p$ des vecteurs d'un espace vectoriel E.

Un vecteur de la forme $X=\alpha_1U_1+\alpha_2U_2+\cdots+\alpha_pU_p$, où les α_i sont des scalaires, s'appelle combinaison linéaire de $U_1,U_2,\cdots,U_p$.

Théorème 1. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $U_1,U_2,\cdots,U_p$ est un sous-espace vectoriel de E, et se note souvent $\mathcal{V}(U_1,U_2\cdots,U_p)$.

Démonstration : en effet, pour tous $X=\sum_{i=1}^{p}a_iU_i$, $Y=\sum_{i=1}^{p}b_iU_i$ et tous scalaires α,β, alors $\alpha X+\beta Y=\sum_{i=1}^{p}(\alpha a_i+\beta b_i)U_i$ est encore une combinaison linéaire des U_i.

Exemple 14 : Soient $U=(1,1,1)$, $V=(2,-3,-1)$ dans K^3. Les combinaisons linéaires de U et V sont les vecteurs $X=\alpha U+\beta V$ où α et β décrivent K. Ce sont donc les vecteurs de la forme $(\alpha+2\beta,\alpha-3\beta,\alpha-\beta)$. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{V}(U,V)$ est un plan.

Exemple 15 : Soient $P = (X-1)^4, Q = X(X+1)^2, R = 3X-2$ dans $K_4[X]$. Les combinaisons linéaires de P,Q,R sont les polynômes de la forme $\alpha(X-1)^4 + \beta X(X+1)^2 + \gamma(3X-2)$ où α,β,γ sont des scalaires quelconques. On voit (question de degrés) que le polynôme constant égal à 1 n'est pas une combinaison linéaire de P,Q,R.

Exemple 16 en ligne

Exemple 17 : soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, soit $n \geq 1$ un entier et soient les fonctions $x \mapsto 1, x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x, \cdots, x \mapsto \cos nx, x \mapsto \sin nx$. Une combinaison linéaire de ces fonctions est de la forme $x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, et s'appelle polynôme trigonométrique de degré $\leq n$ en x.

6 Indépendance linéaire : famille libre, famille liée

Les vecteurs $U_1, U_2, \cdots, U_p$ sont dits linéairement indépendants lorsque la relation $\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \cdots + \alpha_p U_p = 0$ implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$.
On dit aussi que la famille $\{U_1, U_2, \cdots, U_p\}$ est libre.

Méthodologie

Pour une famille libre de vecteurs, la seule combinaison linéaire donnant le vecteur nul est celle où tous les scalaires sont nuls.

- Si la famille n'est pas libre, on dit qu'elle est liée ou bien que les vecteurs sont linéairement dépendants : il existe donc des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ **non tous nuls** tels que $\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \cdots + \alpha_p U_p = 0$.

Méthodologie

Dans une famille liée, l'un au moins des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

- En effet si, par exemple α_2 est non nul, on peut diviser et exprimer U_2 en fonction des autres vecteurs.

Exemple 18 : Voir les exemples 3 et 4 et l'exercice 2 de la fiche 7 sur les familles de vecteurs dans K^n.

Exemple 19 : Dans $K[X]$, les polynômes $P_0 = (X-1)(X-2)(X-3)$, $P_1 = X(X-2)X-3)$, $P_2 = X(X-1)(X-3)$, $P_3 = X(X-1)(X-2)$ forment une famille libre. Partons en effet de la relation $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0$. Pour $X = 0$, cette relation devient $-6\alpha_0 = 0$; pour $X = 1$ elle devient $2\alpha_1 = 0$; pour $X = 2$, elle devient $-2\alpha_2 = 0$ et pour $X = 3$, elle devient $6\alpha_3 = 0$. Les quatre scalaires sont nuls, ce qui traduit l'indépendance linéaire.

- Avec les polynômes, on a un cas très fréquent et très important :

> Des polynômes dont les degrés sont tous distincts forment toujours une famille libre.

La démonstration est faite dans l'exercice 7.

Exemple 20 : La famille $\{x,x(x-1),(x-1)^2(x-2),x^7\}$ est libre dans tout $K_n[x]$ pour $n \geq 7$, puisque les degrés $1,2,3,7$ sont distincts.

Méthodologie

Si la famille $\{U_1,\cdots,U_p\}$ est libre, l'égalité $\alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_p U_p = \beta_1 U_1 + \cdots + \beta_p U_p$ implique $\alpha_1 = \beta_1,\cdots,\alpha_p = \beta_p$.

- En effet, on est ramené à $\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i - \beta_i)U_i = 0$, qui demande que chaque $\alpha_i - \beta_i$ soit nul, par définition d'une famille libre.
- Ce résultat intervient dans la notion de base d'un espace vectoriel, exposée dans la fiche suivante.
- Voici finalement le résultat fondamental sur les combinaisons linéaires et les familles liées :

> **Théorème 2.** Soient $p+1$ vecteurs $X_1,\cdots,X_{p+1}$ qui sont chacun combinaison linéaire des p mêmes vecteurs $U_1,\cdots,U_p$. Alors cette famille $X_1,\cdots,X_{p+1}$ est obligatoirement liée.

Démonstration en ligne

- Autrement dit, dans $\mathcal{V}(U_1,\cdots,U_p)$, toute famille de au moins $p+1$ vecteurs est liée. Ce résultat fondamental donnera naissance à la notion de base et à celle de dimension d'un espace vectoriel, en fiche 10.

Exemple 21 : Dans K[x], la famille $\{2x+3,x^2-1,2x^2+x,3x^2-x+5\}$ est liée. En effet, on a quatre vecteurs qui sont tous combinaison linéaires des trois vecteurs $\{1,x,x^2\}$.

7 Rang d'une famille de vecteurs

> Soit $\{U_1,U_2,\cdots,U_p\}$ une famille quelconque de vecteurs. Son rang est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants dans cette famille.

- Le rang est inférieur ou égal au nombre p de vecteurs, et il est égal à p si et seulement si la famille est libre.
- Il est égal à 1 si et seulement si tous les vecteurs sont proportionnels, ce qui se voit à l'œil nu ; il est supérieur ou égal à 2 lorsqu'il existe au moins deux vecteurs non proportionnels.

Exemple 22 : Dire que la famille $\{U_1,U_2,\cdots,U_8\}$ est de rang 5 signifie (a) on peut trouver 5 vecteurs linéairement indépendants dans cette famille (b) si l'on prend 6 vecteurs *quelconques* dans cette famille, ils forment une famille liée. A fortiori, si on en prend 7 ou 8, ils forment encore une famille liée.

Exemple 23 : Cette notion a été étudiée dans le cas particulier de l'espace vectoriel K^n, dans la fiche 7. Elle contient des exemples et des exercices dans ce cas.

- Le rang est facile à calculer quand on a une base de l'espace vectoriel (voir la notion de base dans la fiche suivante) et les composantes des vecteurs sur cette base, en utilisant soit le rang d'une famille de vecteurs de K^n, soit le rang d'une matrice, techniques déjà étudiées dans deux fiches précédentes.

8 Espace vectoriel de dimension finie, famille génératrice

Une famille $\{U_1,U_2,\cdots,U_p\}$ est un générateur de E lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire des $U_1,U_2,\cdots,U_p$, i.e. lorsque $E=\mathcal{V}(U_1,U_2,\cdots,U_p)$.

Exemple 24 : Les familles $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ et $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,-4,7)\}$ sont des générateurs de K^3.

Exemple 25 : La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$ n'est pas un générateur de K^3 : le vecteur $(0,0,1)$ n'est pas une combinaison linéaire de ces trois vecteurs.

- Cette notion de générateur, comportant un nombre fini de vecteurs, donne naissance à la définition suivante :

L'espace vectoriel E est de **dimension finie** quand il existe des vecteurs $U_1,U_2,\cdots,U_p$ tels que $E=\mathcal{V}(U_1,U_2,\cdots,U_p)$, i.e. tels que tout vecteur de E soit combinaison linéaire des vecteurs $U_1,U_2,\cdots,U_p$.

Point **Terminologie**

On dit que la famille $\{U_1,U_2,\cdots,U_p\}$ est un générateur de E ou encore que E est engendré par $U_1,U_2,\cdots,U_p$.

Exemple 26 : K^n est de dimension finie, puisqu'il est engendré par la famille $\{U_1,\cdots,U_n\}$, où U_k contient « 1 » en $k$ème position et des 0 ailleurs. En effet $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1U_1+x_2U_2+\cdots+x_nU_n$.

Exemple 27 : $K_n[X]$ est de dimension finie, car il est engendré par la famille $\{1,X,X^2,\cdots,X^n\}$. Tout polynôme de degré $k\leq n$ s'écrit $a_0+a_1X+\cdots+a_kX^k$, et est donc combinaison linéaire de $1,X,\cdots,X^n$.

Méthodologie

Attention, actuellement nous savons ce qu'est un « espace vectoriel de dimension finie », mais nous ne savons pas encore ce qu'est la « dimension » d'un tel espace.

- Le théorème 2 ci-dessus a une conséquence fondamentale en dimension finie :

Théorème 3. Si E est engendré par une famille $\{U_1, \cdots ,U_p\}$, alors le rang d'une famille quelconque de vecteurs de E est inférieur ou égal à p.

Cet énoncé sera précisé en fiche 10, avec la notion de dimension d'un espace vectoriel.

- Cette notion de dimension finie implique que, dans tout espace vectoriel E, le SEV $\mathcal{V}(X_1, \cdots ,X_m)$ des combinaisons linéaires des vecteurs $X_1, \cdots ,X_m$ est un espace vectoriel de dimension finie, quel que soit m et quels que soient les vecteurs $X_1, \cdots ,X_m$. Ceci est vrai même si E lui-même n'est pas de dimension finie.

9 Produit d'espaces vectoriels

- Le produit $E \times F$ de deux espaces vectoriels sur K est l'ensemble des couples (x,y) où x décrit E et y décrit F. C'est un espace vectoriel sur K, muni de l'addition $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$ et de l'opération externe $\lambda(x,y) = (\lambda x,\lambda y)$.
- Cette notion se généralise à un produit $E_1 \times \cdots \times E_m$ de m espaces vectoriels sur K.
- L'exemple élémentaire est $K^n \times K^m$, qui n'est autre que K^{n+m}.
- Un produit d'espaces vectoriels tous de dimension finie est encore de dimension finie.

10 Espace vectoriel de dimension infinie

C'est un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie. Quel que soit l'entier n et quels que soient les vecteurs $U_1, \cdots ,U_n$, le sous-espace vectoriel $\mathcal{V}(U_1, \cdots ,U_n)$ est strictement plus petit que E.

Exemple 28 : $K[X]$, l'espace vectoriel de tous les polynômes à coefficients dans K, n'est pas de dimension finie. La démonstration est faite dans l'exercice 9.

Exemple 29 en ligne

EXERCICES

Je m'entraîne en ligne

Exercices supplémentaires 2,5,8,9,10,11
www.lienmini.fr/exalgebre9

Exercice 1

Montrer que l'ensemble E des polynômes sur K s'annulant en $X = 3$ est un espace vectoriel sur K. Qu'en est-il de l'ensemble F des polynômes s'annulant en $X = 2$ **et** en $X = 3$? De l'ensemble H des polynômes s'annulant en $X = 2$ **ou** en $X = 3$?

Exercice 3

On se place dans K^4. Étudier si l'ensemble E (respectivement F) des vecteurs (x,y,z,t) vérifiant la condition S_E (respectivement S_F) est ou non un sous-espace vectoriel de K^4 :

$$S_E : \begin{cases} 2x & -3y & +z & -5t & = & 0 \\ 4x & & -z & +t & = & 0 \end{cases} \qquad S_F : \begin{cases} 2x & -3y & +z & -5t & = & 5 \\ 4x & & -z & +t & = & 0 \end{cases}$$

Exercice 4

On se place dans $K[X]$.

1. Montrer que le polynôme constant 1 n'est pas combinaison linéaire des trois polynômes $P = X^3 + X - 1, Q = X^3 + X^2 + X - 1, R = X^2 + X - 1$.

2. Montrer que le polynôme constant 1 est combinaison linéaire des quatre polynômes $P = X^3 + X - 1, Q = X^3 + X^2 + X - 1, R = X^2 + X - 1, S = 2X + 3$.

Exercice 6

1. Montrer que les vecteurs $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (2,3,1)$, $u_3 = (1,1,-1)$ et $u_4 = (0,1,2)$ engendrent K^3, i.e. que $K^3 = \mathcal{V}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

2. Montrer que les vecteurs u_1,u_2,u_3 précédents engendrent K^3. Quelle différence constate-t-on ?

Exercice 7

Soit $P_1, \cdots ,P_n$ des polynômes dont les degrés sont distincts. Montrer qu'ils forment une famille libre dans $K[X]$. On notera $d_1 < d_2 < \cdots < d_n$ ces différents degrés.

9 CORRIGÉS

Exercice 1

On regarde si les ensembles donnés sont des SEV de $K[X]$, dont on sait que c'est un espace vectoriel.

- Si l'on a $P(3) = 0$ et $Q(3) = 0$, on a évidemment $(\alpha P + \beta Q)(3) = \alpha P(3) + \beta Q(3) = 0$ pour tous scalaires α,β, et $\alpha P + \beta Q$ est encore dans E : c'est la CNS montrant que E est un SEV de $K[X]$ et donc un espace vectoriel.
- La démarche est la même pour F, qui est un SEV de $K[X]$ (et de E aussi.)
- C'est faux pour H. Les polynômes $P = X - 3$ et $Q = X - 2$ sont dans H, mais la somme $P + Q = 2X - 5$ ne s'annule ni en 2 ni en 3, et n'appartient pas à H. L'addition des polynômes n'est pas une opération interne dans H, et H n'est pas un SEV de $K[X]$, et a fortiori n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 3

Rappelons que pour $X = (x,y,z,t)$ et $X' = (x',y',z',t')$ dans K^4 et $\lambda \in K$, on a $X + X' = (x + x',y + y',z + z',t + t')$ et $\lambda X = (\lambda x,\lambda y,\lambda z,\lambda t)$. On voit aisément que si X et X' sont dans E, alors $X + X'$ et λX vérifient les conditions S_E, et E est bien un SEV de K^4 et donc un espace vectoriel. Par contre, si X,X' sont dans S_F, la somme $X + X'$ ne vérifie pas les conditions S_F, puisque $2(x + x') - 3(y + y') + (z + z') - 5(t + t')$ est alors égal à 10, et pas à 5. La partie F n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 4

1. On regarde si l'égalité entre polynômes

$$1 = a(X^3 + X - 1) + b(X^3 + X^2 + X + 1) + c(X^2 + X - 1)$$

admet ou non une solution a,b,c. En prenant l'égalité à droite et à gauche des coefficients de X^3,X^2,X et 1, il vient le système de quatre équations à trois inconnues $\{a + b = 0,\ b + c = 0,\ a + b + c = 0,\ -a + b - c = 1\}$. Il n'est pas utile de trianguler bien en détail avec la méthode du pivot. Les trois premières équations impliquent $a = 0$, puis $b = 0$ et $c = 0$. Le report dans la dernière équation donne une impossibilité.

2. On regarde si l'égalité entre polynômes

$$1 = a(X^3 + X - 1) + b(X^3 + X^2 + X + 1) + c(X^2 + X - 1) + d(2X + 3)$$

admet ou non au moins une solution a,b,c,d. En prenant l'égalité à droite et à gauche des coefficients de X^3,X^2,X et 1, il vient

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} a & +b & & & = & 0 \\ & b & +c & & = & 0 \\ a & +b & +c & +2d & = & 0 \\ -a & +b & -c & +3d & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} a & +b & & & = & 0 \\ & b & +c & & = & 0 \\ & & c & +2d & = & 0 \\ & & & 9d & = & 1 \end{array}\right.$$

En partant de $d = 1/9$, on calcule c puis b puis a. Le système admet une solution (unique), qu'il n'est pas utile d'expliciter. L'existence de a,b,c,d implique que le polynôme constant 1 est combinaison linéaire des quatre polynômes initiaux.

Exercice 6

1. Il s'agit de vérifier que tout $X = (x,y,z) \in K^3$ est une combinaison linéaire des quatre vecteurs, i.e. que le système $X = au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4$ aux inconnues a,b,c,d admet au moins une solution. Il s'agit du système

$$\begin{cases} a & +2b & +c & & = & x \\ 2a & +3b & +c & +d & = & y \\ 3a & +b & -c & +2d & = & z \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a & +2b & +c & & = & x \\ & -b & -c & +d & = & -2x+y \\ & & c & -3d & = & 7x-5y+z \end{cases}$$

Il suffit de choisir d pour en déduire c puis b puis a. Le système admet une infinité de solutions, quels que soient les scalaires x,y,z. Comme on a au moins une solution a,b,c,d pour tout $X \in K^3$, la famille donnée est bien un générateur de K^3.

2. Cela revient à montrer que le système précédent admet toujours une solution avec $d = 0$. C'est bien le cas, puisque l'on a alors $c = 7x - 5y + z$, et que l'on peut remonter et calculer b puis a. Cette fois-ci, les valeurs de a,b,c sont uniques.

Exercice 7

Prenons tous les polynômes unitaires, pour simplifier les notations. Partons de $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_n P_n = 0$, le polynôme nul. Compte tenu des degrés qui vont en croissant, la plus forte puissance de X dans cette somme de polynômes se trouve uniquement dans P_n, avec le coefficient α_n. Pour avoir le polynôme nul, ce terme $\alpha_n X^{d_n}$ doit être nul, ce qui implique $\alpha_n = 0$. Il nous reste donc $\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n-1} = 0$. La plus forte puissance de X se trouve uniquement dans P_{n-1}, avec le coefficient α_{n-1}. Pour avoir le polynôme nul, ce terme $\alpha_{n-1} X^{d_{n-1}}$ doit être nul, ce qui implique $\alpha_{n-1} = 0$. On recommence, jusqu'à tomber sur $\alpha_1 = 0$. Tous les scalaires sont nuls, et la famille est libre.