COURS

7 Famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, l'idée de rang

[MOTS-CLÉS : COMBINAISON LINÉAIRE, FAMILLE LIBRE, LIÉE, RANG]

K est un corps quelconque, en pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. Un élément de K est souvent appelé « scalaire ».

1 Définition de K^n

- K^n est l'ensemble des n-uplets $(x_1,\cdots,x_n)$ où tous les x_i sont des éléments de K. Pour $n=2$ et $n=3$, on note plus couramment (x,y) et (x,y,z), et on parle de couple ou de triplet de scalaires. Il pourra être plus pratique de noter $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, dans certaines situations.
- La première notation est dite « en ligne », et la seconde « en colonne ». Un élément de K^n porte le nom de vecteur, car K^n est un espace vectoriel, mais cette notion sera définie dans la fiche 9, et n'intervient pas ici.

2 Les opérations dans K^n

- L'addition de deux vecteurs dans K^n est définie par
$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$
et elle confère à K^n une structure de groupe additif commutatif dont le vecteur nul est $(0,0,\cdots,0)$. Ce vecteur nul est plus simplement noté « 0 », la confusion avec le 0 de K étant impossible.
- La multiplication d'un vecteur par un scalaire est définie par $\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$.
- Ces deux opérations élémentaires très naturelles confèrent à K^n la structure d'espace vectoriel, exposée en fiche 9.
- En pratique, on peut identifier K^n et l'ensemble $\mathcal{M}_{1,n}$ des matrices à une ligne et n colonnes.

3 Combinaison linéaire de vecteurs

- Une famille de vecteurs est la donnée de p vecteurs $X_1,X_2,\cdots,X_p$, chacun étant un élément de K^n.

> Une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\{X_1,X_2,\cdots,X_p\}$ est un vecteur de la forme $\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_pX_p$, où $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ sont dans K. Une telle combinaison linéaire est encore un élément de K^n.

Exemple 1 : Dans K^3, avec $X_1=(1,2,3),X_2=(0,-1,1),X_3=(1,1,1),X_4=(1,0,-2)$, on a $2X_1+5X_2-X_3+X_4=(2,-2,8)$.

Exemple 2 : Dans K^3, avec $X_1 = (1,2,3), X_2 = (0,-1,1), X_3 = (1,1,1), X_4 = (2,2,5)$, on a $X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = 0$.

- Une combinaison linéaire de vecteurs non nuls peut être le vecteur nul, et ceci donne naissance à la notion de famille libre ou liée de vecteurs.

4 Famille libre, famille liée de vecteurs

Une famille $\{X_1, X_2, \cdots, X_p\}$ d'éléments de K^n est dite libre lorsque la relation $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_p X_p = 0$ implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$.
On dit aussi que les vecteurs $X_1, X_2, \cdots, X_p$ sont linéairement indépendants.

Lorsque la famille $\{X_1, X_2, \cdots, X_p\}$ n'est pas une famille libre, on dit que c'est une famille liée. Il existe donc des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ **non tous nuls** tels que $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_p X_p = 0$.

Méthodologie

Dans une famille liée, au moins l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Dans une famille libre, un vecteur n'est jamais combinaison linéaire des autres.

- Pour regarder si une famille de vecteurs est libre ou liée, on part de la combinaison linéaire $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_p X_p = 0$, où les $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ sont des scalaires inconnus, et on résout (ou du moins on commence à résoudre, cela suffit souvent) ce système de n équations à p inconnues.

Exemple 3.a : Revenons aux vecteurs de l'exemple 1 ci-dessus. On part de la combinaison linéaire (il vaut mieux écrire les vecteurs en colonne, c'est plus parlant)

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

à savoir le système $S_1 : \begin{cases} \alpha_1 & & +\alpha_3 & +\alpha_4 & = 0 \\ 2\alpha_1 & -\alpha_2 & +\alpha_3 & & = 0 \\ 3\alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & -2\alpha_4 & = 0 \end{cases}$, système de 3 équations à 4 inconnues.

Exemple 3.b : On enlève α_1 de E_2 et E_3 en remplaçant E_2 par $E_2 - 2E_1$ et E_3 par $E_3 - 3E_1$. Il vient $S_2 : \begin{cases} \alpha_1 & & +\alpha_3 & +\alpha_4 & = 0 \\ & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -2\alpha_4 & = 0 \\ & +\alpha_2 & -2\alpha_3 & -5\alpha_4 & = 0 \end{cases}$. On enlève α_2 de E_3 en la remplaçant par $E_3 + E_2$, et on a $S_3 : \begin{cases} \alpha_1 & & +\alpha_3 & +\alpha_4 & = 0 \\ & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -2\alpha_4 & = 0 \\ & & -3\alpha_3 & -7\alpha_4 & = 0 \end{cases}$. Ce système admet une infinité de solutions, et il en existe donc au moins une non identiquement nulle : la famille est liée.

Méthodologie

Pour montrer que la famille est liée, la résolution complète du système est inutile.

Exemple 3.c : Dans S_3 ci-dessus, on peut prendre $\alpha_4 = -3, \alpha_3 = 7$ avec la dernière équation. Le report dans la deuxième donne $\alpha_2 = -1$, et le report dans la première donne $\alpha_1 = -4$. Les vecteurs sont liés par la relation $-4X_1 - X_2 + 7X_3 - 3X_4 = 0$.

Méthodologie

On fait la résolution complète du système quand on veut la ou les relation(s) linéaire(s) liant les vecteurs.

Exemple 4 : Dans K^4, soit $X_1 = (1,0,1,1), X_2 = (2,-1,1,0), X_3 = (3,1,1,-2)$. La combinaison linéaire $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$ s'écrit comme le système de quatre équations à trois inconnues $\begin{cases} \alpha_1 & +2\alpha_2 & +3\alpha_3 & = 0 \\ & -\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & & -2\alpha_3 & = 0 \end{cases}$. On voit tout de suite que l'on a $\alpha_3 = \alpha_2$, et le système devient $\{\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0, \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \alpha_3 = \alpha_2\}$. On en tire immédiatement $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$: la famille donnée est libre.

- On retiendra le résultat suivant, très important :

Théorème 1. Dans K^n, une famille libre contient au maximum n vecteurs. Autrement dit, toute famille contenant **au moins** $n+1$ vecteurs est obligatoirement liée.

Démonstration : soit $X_1, \cdots, X_p$ une famille de p vecteurs de K^n avec $p > n$. La relation $\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_p X_p = 0$ se traduit par un système de n équations à p inconnues. Il admet déjà la solution $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$. Comme il contient plus d'inconnues que d'équations, le théorème 1 de la fiche 5 affirme qu'il admet **une infinité** de solutions. Il y a donc au moins une solution non identiquement nulle, ce qui signifie que la famille est liée.

- Dans l'exemple 3 ci-dessus, il est normal que la famille soit liée, puisqu'on a quatre vecteurs en dimension 3.
- Autre résultat très important :

Théorème 2. Si la famille $\{X_1, X_2, \cdots, X_p\}$ est liée mais que la famille $\{X_1, X_2, \cdots, X_{p-1}\}$ est libre, alors le vecteur X_p est combinaison linéaire de $X_1, X_2, \cdots, X_{p-1}$.

Démonstration : il existe une relation $\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_{p-1} X_{p-1} + \alpha_p X_p = 0$, où les α_i ne sont pas tous nuls. Si l'on avait $\alpha_p = 0$, on aurait $\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_{p-1} X_{p-1} = 0$ où les $\alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}$ ne sont pas tous nuls. Cela signifierait que la famille $X_1, \cdots, X_{p-1}$ est liée, ce qui n'est pas. On a donc $\alpha_p \neq 0$, ce qui permet de diviser et d'exprimer X_p comme combinaison linéaire de $X_1, \cdots, X_{p-1}$.

5 Rang d'une famille de vecteurs de K^n

Le rang d'une famille de vecteurs $X_1,X_2,\cdots,X_p$ de K^n est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut trouver dans cette famille.

Méthodologie

Le rang est donc inférieur ou égal au nombre p de vecteurs de la famille, et (d'après le théorème 1) à la dimension n. Le rang est égal au nombre de vecteurs si et seulement si la famille est libre.

Exemple 5 : La famille de trois vecteurs de l'exemple 4 ci-dessus est libre, et son rang est donc égal à 3. Dans l'exemple 3 ci-dessus où la famille est liée, on sait simplement que le rang est inférieur ou égal à 3 (puisque $n = 3$). Mais la poursuite des calculs faite dans l'exemple 3.b nous donne une unique relation liant les 4 vecteurs, et le rang est exactement égal à 3.

- Le rang est égal à 1 si et seulement si deux vecteurs quelconques de la famille sont liés, i.e. sont proportionnels. Les vecteurs sont donc tous proportionnels. Cela se voit à l'œil nu.
- Le rang est supérieur ou égal à 2 si et seulement si on a deux vecteurs non proportionnels dans la famille, et cela se voit aussi de façon évidente. C'est le cas de la famille de l'exemple 3 ci-dessus.
- Par contre, affirmer sans calculs et donc à l'œil nu que le rang est supérieur ou égal à 3 est en général un peu acrobatique, méfiance !

6 Première technique de calcul du rang

- Voici un résultat simple et pratique à utiliser :

On écrit le système de n équation à p inconnues $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_p X_p = 0$. Par échelonnement, on se ramène à un système équivalent ayant r équations indépendantes. Le rang de la famille de vecteurs est ce nombre r.

- Ce résultat est une conséquence du théorème 3 de la fiche 8 sur le rang des matrices.

Exemple 6.a : Dans K^4 soient $X_1 = (1,2,0,-1), X_2 = (2,1,1,1), X_3 = (3,3,1,0)$, $X_4 = (-4,1,-3,-5), X_5 = (9,6,4,3)$. La relation $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 + \alpha_5 X_5 = 0$ nous donne

$$\left\{\begin{array}{llllll} \alpha_1 & +2\alpha_2 & +3\alpha_3 & -4\alpha_4 & +9\alpha_5 & = 0 \\ 2\alpha_1 & +\alpha_2 & +3\alpha_3 & +\alpha_4 & +6\alpha_5 & = 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & -3\alpha_4 & +4\alpha_5 & = 0 \\ -\alpha_1 & +\alpha_2 & & -5\alpha_4 & +3\alpha_5 & = 0 \end{array}\right.$$

Exemple 6.b : On élimine α_1 de E_2 et E_4 en remplaçant E_2 par $E_2 - 2E_1$ et E_4 par $E_4 + E_1$: $\begin{cases} \alpha_1 & +2\alpha_2 & +3\alpha_3 & -4\alpha_4 & +9\alpha_5 & = 0 \\ & -3\alpha_2 & -3\alpha_3 & +9\alpha_4 & -12\alpha_5 & = 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & -3\alpha_4 & +4\alpha_5 & = 0 \\ & 3\alpha_2 & +3\alpha_3 & -9\alpha_4 & +12\alpha_5 & = 0 \end{cases}$. Les trois dernières équations sont la même (à un coefficient multiplicateur près) et le système est équivalent à

$$\begin{cases} \alpha_1 & +2\alpha_2 & +3\alpha_3 & -4\alpha_4 & +9\alpha_5 & = 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & -3\alpha_4 & +4\alpha_5 & = 0 \end{cases}$$

Méthodologie

On ne résout pas le système, on s'arrête quand il est échelonné et on compte le nombre d'équations.

Exemple 6.c : Le rang de la famille est égal à 2. Inutile de chercher les solutions du système, on s'arrête là.

Exemple 6.d : Ce rang égal à 2 signifie que si l'on prend (au moins) trois quelconques des vecteurs, ils forment une famille liée. Les vecteurs X_1 et X_2 ne sont pas proportionnels et forment donc une famille libre. Si on prend $\{X_1, X_2, X_3\}$, on a une famille liée : cela veut dire que X_3 est une combinaison linéaire de X_1 et X_2. Il en va de même avec X_4 et X_5. Effectivement, on a $X_3 = X_1 + X_2, X_4 = 2X_1 - 3X_2, X_5 = X_1 + 4X_2$. Plus généralement, deux quelconques de ces cinq vecteurs sont non proportionnels et forment une famille libre ; chacun des trois autres est combinaison linéaire de ces deux vecteurs choisis.

EXERCICES

Je m'entraîne en ligne

Exercice supplémentaire 4
www.lienmini.fr/exalgebre7

Exercice 1

On se donne une famille de 5 vecteurs de K^7, de rang 3. On sait que X_1, X_3, X_4 forment une famille libre. Que peut-on dire de X_2 et de X_5 ?

Exercice 2

Pour chacune des familles $\mathcal{F}$ de vecteurs suivantes, étudier si elle est libre ou non. Donner le rang de chacune, c'est à dire le nombre maximal de vecteurs de $\mathcal{F}$ formant une famille libre.

$\mathcal{F}_1 = \{(1,2), (3,7), (2,5)\}$ dans K^2.

$\mathcal{F}_2 = \{(1,1,2), (1,2,3), (1,4,5), (2,3,5)\}$ dans K^3.

Exercice 3

Dans K^3, discuter suivant le paramètre m le rang de

$$\mathcal{F}_3 = \{(1,1,2), (1,2,3), (1,4,m)\}$$

CORRIGÉS

Exercice 1

Comme le rang vaut 3, la famille $\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ est liée. Sachant que $\{X_1,X_3,X_4\}$ est libre, le vecteur X_2 est une combinaison linéaire de X_1,X_3,X_4, à savoir $X_2 = \alpha X_1 + \beta X_3 + \gamma X_4$. Il en va de même pour X_5.

Exercice 2

– La famille $\mathcal{F}_1$, formée de trois vecteurs de K^2 est nécessairement liée (3 vecteurs en dimension 2). Comme les deux premiers vecteurs sont indépendants, la famille est de rang 2. En fait, deux quelconques des vecteurs sont indépendants, et le troisième est donc combinaison linéaire des deux autres.

– La famille $\mathcal{F}_2$ est liée aussi, avec 4 vecteurs de K^3. On voit d'ailleurs que $X_4 = X_1 + X_2$, et on peut l'enlever, au niveau du calcul du rang. On cherche simplement le rang de $\{X_1,X_2,X_3\}$. La combinaison linéaire $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$ donne le système $\begin{cases} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & +2\alpha_2 & +4\alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_1 & +3\alpha_2 & +5\alpha_3 & = 0 \end{cases}$. On enlève α_1 des équations E_2 et E_3 en remplaçant E_2 par $E_2 - E_1$ et E_3 par $E_3 - 2E_1$, ce qui donne

$$\begin{cases} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ & \alpha_2 & +3\alpha_3 & = 0 \\ & \alpha_2 & +3\alpha_3 & = 0 \end{cases}$$

à savoir finalement 2 équations indépendantes

$$\begin{cases} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ & \alpha_2 & +3\alpha_3 & = 0 \end{cases}$$

La famille est donc de rang 2. Le système admet par exemple $\alpha_3 = 1, \alpha_2 = -3$ et donc $\alpha_1 = 2$ comme solution. On a donc $2X_1 - 3X_2 + X_3 = 0$, avec aussi $X_1 + X_2 - X_4 = 0$. *On dirait en physique que l'on a 2 degrés de liberté (le rang) et 2 contraintes (les deux relations linéaires).*

Exercice 3

La relation $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$ s'écrit

$$\begin{cases} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & +2\alpha_2 & +4\alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_1 & +3\alpha_2 & +m\alpha_3 & = 0 \end{cases}$$

On enlève α_1 des équations E_2 et E_3 en remplaçant E_2 par $E_2 - E_1$ et E_3 par $E_3 - 2E_1$, ce qui donne

$$\begin{cases} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ & \alpha_2 & +3\alpha_3 & = 0 \\ & \alpha_2 & +(m-2)\alpha_3 & = 0 \end{cases}$$

On enlève α_2 de E_3 en remplaçant E_3 par $E_3 - E_2$ et on a

$$\begin{cases} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ & \alpha_2 & +3\alpha_3 & = 0 \\ & & (m-5)\alpha_3 & = 0 \end{cases}$$

Il y a deux cas possibles :

– Pour $m \neq 5$, on a 3 équations indépendantes, et la famille est de rang 3, elle est libre.
– Pour $m = 5$, on a 2 équations seulement, et la famille est de rang 2.