Unser Sonnensystem — eine Simulation von Planetenbewegung und Raumfahrt

von Wolfram Schroers
Ruhr-Gymnasium Witten,
5810 Witten/Ruhr

Inhalt

1 Einführung

Diese Arbeit beschreibt die Entwicklung eines Programms zur iterativen Simulation der Planetenbewegung innerhalb unseres Sonnensystems. Dabei bedient es sich eines Verfahrens, mit dem der neue Orts- und Impulsvektor nach einer bestimmten Zeitspanne ermittelt wird. Analog dazu kann das Programm ebenfalls den Flug von einzelnen Objekten, z.B. Raumsonden und -schiffen simulieren. Innerhalb der Simulation von Planeten und Monden ist es ebenfalls möglich, Bedeckungen und Finsternisse zu ermitteln.

In der Vergangenheit war die Behandlung eines solchen Themas nur mit Hilfe einer Großrechenanlage möglich. Erst seit kurzer Zeit sind Personal Computer (PC) zu diskutablen Preisen erhältlich, deren Rechenleistung zur sinnvollen Bearbeitung eines solchen Themas ausreicht.

Das Programm selbst wurde auf einem MSDOS-Rechner (386-Prozessor mit 25MHz Taktfrequenz) in *Turbo Pascal Version 6.0* entwickelt. Im Kontrast zu bisher für die Nutzung auf einem PC verfügbaren Sonnensystemsimulatoren wurde hier in erster Linie Wert auf die Genauigkeit der Rechenergebnisse gelegt. Aus dem gleichen Grund wird die Analyse astronomischer Ereignisse (z.B. Sonnenfinsternisse) algebraisch auf der Basis der Ortsvektoren der beteiligten Himmelskörper durchgeführt.

2 Das Programm

2.1 Die Bewegung der Körper

Zur Identifikation eines Körpers benötigt man mehrere Einzelinformationen; diese sind seine *Masse*, seine *Geschwindigkeit* und sein *Ort* zu einem bestimmten Zeitpunkt. Wohingegen die Masse konstant bleibt, verändern sich Ort und Geschwindigkeit gemäß den Störeinflüssen anderer Körper des Systems. Für die gravitative Wechselwirkung zwischen zwei Körpern gilt das Newtonsche Gravitationsgesetz (hier ist gleich die sich ergebende Beschleunigung angegeben, d.h. die Masse des beeinflußten Körpers fällt heraus (Trägheitsprinzip)), wie es in [1] beschrieben ist:

$$a_{ix} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma \cdot m_k \cdot \Delta x}{r_{ik}^3} \tag{1}$$

Hierbei ist a_{ix} die Beschleunigungskomponente in x-Richtung des i. Körpers, m_k die Masse des k. Körpers, r_{ik} die Distanz der Körper i und k im $\Re^3$ und Δx die Differenz der x-Komponenten der Ortsvektoren der Körper i und k. Die Ermittlung der Beschleunigungen in y- und z-Richtung verläuft analog.

Hat man nun durch Formel 1 die Beschleunigungen bestimmt, kann man den neuen Geschwindigkeitsvektor ermitteln durch

$$v_{ix} = \mathrm{v}_{ix} + a_i \cdot \Delta t \tag{2}$$

sowie damit den neuen Ortsvektor

$$x_i = \mathrm{x}_i + v_{ix} \cdot \Delta t \tag{3}$$

Δt ist dabei die Iterationsschrittweite (in Zeiteinheiten) zwischen zwei Orten, und x ist der alte Wert für x.

Wird dieses nach dem Mathematiker *Euler* benannte Verfahren in einer Schleife für alle Körper durchgeführt, erhält man bereits die Simulation der Bewegung eines Mehrkörpersystems. Die Beschreibungsgenauigkeit wird am besten dadurch bestimmt, daß man die Bewegung der Körper erst n Iterationsschritte vorwärts, und dann die selbe Schrittzahl wieder rückwärts rechnen lässt. Die Abweichung der resultierenden Körperpositionen von den gewählten Anfangswerten kann als Maß für den Fehler gelten. Ein weiterer schnell errechenbarer Fehlerindikator ist über den Energieerhaltungssatz verfügbar. Die Gesamtenergie des Mehrkörpersystems sollte zeitlich konstant bleiben. Abweichungen der nach jedem Iterationsschritt ermittelten Gesamtenergie vom Anfangswert sind daher ein zuverlässiges Maß für den Fehler.

Der konkrete Test des *Euler-Verfahrens* (siehe Tabelle 1) zeigt sofort, daß dieses Verfahren für das hier zu behandelnde Problem viel zu große Fehler liefert. Daher ist die Verwendung eines weniger elementaren Verfahrens notwendig. Ein solches stellt das sog. *klassische Runge-Kutta-Verfahren* dar, welches in dieser Arbeit durchweg eingesetzt wird.

Bei diesem Verfahren wird nicht nur ein Beschleunigungsvektor ermittelt, sondern vier Beschleunigungen hintereinander. Die Ermittlung der Ortsvektoren geschieht ebenfalls nicht mehr über die Ermittlung nur eines, sondern auch von vier Geschwindigkeitsvektoren. Dabei werden jedoch der 2. und der 3. Schritt nur mit halber Iterationslänge gerechnet, aber jeweils doppelt gewichtet. Durch diesen Trick vervierfacht sich zwar die Rechenzeit für einen Iterationsschritt, aber die Genauigkeit steigert sich in weitaus größerem Maße (siehe Tabelle 1). Die Implementation des Verfahrens wird daher folgendermaßen realisiert:

1. Alte Orte und Geschwindigkeiten speichern
2. Differentialgleichungen für ersten Schritt lösen (volle Iterationsschrittweite)
3. Hieraus neue Orts- und Geschwindigkeitsvektoren ermitteln
4. Differentialgleichungen für nächsten Schritt lösen (bei den Schritten 2 und 3 mit halber Iterationsschrittweite)
5. Schritte 3 und 4 solange wiederholen, bis alle vier Teilwerte ermittelt

Die Lösung der Differentialgleichungen geschieht für die Beschleunigung, wie in Gleichung 1 beschrieben, die Geschwindigkeiten werden direkt übernommen. Die neuen Orts- und Geschwindigkeitsvektoren werden ebenfalls, wie oben beschrieben, jeweils aus den letzten Orten und Positionen ermittelt. Die endgültigen Geschwindigkeiten werden nach der folgenden Formel ermittelt:

$$v_{ix} = \mathrm{v}_{ix} + \frac{\Delta t}{6}(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) \tag{4}$$

	Gesamtenergieverlust in %	
Schrittzahl	**Runge-Kutta**	**Euler**
10	-0.00000011	0.08902643
20	-0.00000021	0.06499026
30	-0.00000027	0.03014962
40	-0.00000028	-0.00950030
50	-0.00000024	-0.04766842
60	-0.00000016	-0.07813516
70	-0.00000006	-0.09522054
80	0.00000006	-0.09469431
90	0.00000016	-0.07517345
100	0.00000022	-0.03948149
110	0.00000024	0.00509420
120	0.00000021	0.04848652
130	0.00000013	0.08102309
140	0.00000003	0.09637081
150	-0.00000009	0.09274095
160	-0.00000019	0.07227590
170	-0.00000026	0.03961151
180	-0.00000028	0.00058359
190	-0.00000026	-0.03855147

Tabelle 1: Fehlervergleich für Euler- und Runge-Kutta-Verfahren am Beispiel eines einfachen zweidimensionalen Einkörpersystems. (Ein Satellit umkreist die als fixiert angesehene Erde.) Das zeitliche Verhalten der Gesamtenergie des Systems demonstriert die Überlegenheit des Runge-Kutta-Verfahrens.

2.2 Die Ermittlung der Startwerte

Bevor das Programm jedoch ein spezielles System simulieren kann, müssen erst einmal die Startpunkte und -geschwindigkeiten bekannt sein. Die Startpunkte erhält man aus entsprechender astronomischer Literatur; dafür ist der *Astronomical Almanac 1991* [3] und das *Himmelsjahr 1991* [4] verwendet worden. Im ersteren sind die Positionen der Körper bis auf wenige Kilometer genau angegeben. Leider sind die Geschwindigkeiten dort nicht aufgeführt. Somit bleibt als einzige Lösung, die Geschwindigkeiten aus den Ortsvektoren zu ermitteln. Dazu gibt man zwei Orte an und sucht die passende Startgeschwindigkeit, die ein Körper haben müßte, damit er in der vorgegebenen Zeit (der zeitliche Abstand zwischen beiden eingegebenen Punkten) von dem ersten Punkt aus den zweiten erreichen kann.

Dieses Verfahren funktioniert folgendermaßen: von einer vorgegebenen Startgeschwindigkeit aus wird mit der aus Kapitel 1.2 beschriebenen Prozedur der Zielpunkt ermittelt, der nach der vorgegebenen Zeit tatsächlich erreicht wird. Dann wird die Abweichung zum Sollzielpunkt ermittelt und daraus wird die neue Startgeschwindigkeit bestimmt:

$$v_{ix} = \mathrm{v}_{ix} + \frac{\Delta x}{w \cdot \Delta t} \tag{5}$$

w ist dabei die Anzahl der Iterationsschritte, die von dem Runge-Kutta-Verfahren durchgeführt werden mußten, Δt ist die Schrittweite und v_{ix} ist die alte Startgeschwindigkeit. Δx stellt die Differenz von Soll- und Istzielpunkt dar. Die Ermittlung der y- und z-Komponenten erfolgt analog.

Für die Iteration muß eine geeignete Anfangsgeschwindigkeit gewählt werden — hier die Geschwindigkeit, bei der der Körper den Weg als reine Trägheitsbewegung ohne Fremdeinflüsse zurücklegen würde.

$$v_{ix} = \frac{\mathrm{Ziel}_{ix} - \mathrm{Start}_{ix}}{w \cdot \Delta t} \tag{6}$$

Das Korrekturverfahren wird für jeden einzelnen Körper solange durchgeführt, bis der Fehler, den es liefert, minimal wird (in der Regel gelingt es nicht, die Idealgeschwindigkeiten zu bestimmen, bei der die Körper ihre Zielpunkte wirklich genau erreichen; dies ist auf interne Rundungsfehler des Computers zurückzuführen). Im Grobalgorithmus würde das Verfahren so aussehen:

1. Bestimmung der Startgeschwindigkeiten
2. Körper auf Anfangspunkte setzen
3. Körper mit Runge-Kutta-Verfahren bewegen
4. Geschwindigkeiten aufgrund der Abweichung vom Zielpunkt korrigieren und aktuellen Fehler bestimmen
5. Wenn der aktuelle Fehler nicht minimal ist, dann zurück zu Punkt 2

Die Bestimmung des aktuellen Fehlers erfolgt einfach durch Aufsummieren der Einzelfehler der Körper, wobei der Einzelfehler eines Körpers wie folgt bestimmt ist:

$$E = \frac{|\vec{z} - \vec{s}|}{|\vec{z}|} \tag{7}$$

Hierbei ist $\vec{z}$ der gewünschte Zielpunkt (d.h. die zweite Position, die vorher eingegeben wurde), und $\vec{s}$ ist der tatsächlich erreichte Zielpunkt. Dieser Fehler dient nun als Referenzwert, wie genau die ermittelten Startgeschwindigkeiten bisher sind.

2.3 Die Verwaltung der Daten

Das Programm arbeitet intern mit Vektoren im $\Re^3$; die Ein- und Ausgabe geschieht bei astronomischen Ortsangaben jedoch als Kugelkoordinaten. Für Körper innerhalb des Sonnensystems wird daher meistens die Form der Ekliptikalen Breite und Länge gewählt, die sich auf eine gemittelte Umlaufbahn der Erde beziehen (die Erde selbst weicht aufgrund der Einflüsse der anderen Himmelskörper selbst etwas hiervon ab!)

Die xy-Ebene stellt in dieser Simulation die gemittelte Ekliptik dar; die Kugelkoordinaten werden mit den folgenden Formeln umgerechnet (siehe auch [3]):

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\beta \cdot \cos\lambda \\ y &= r \cdot \cos\beta \cdot \sin\lambda \\ z &= r \cdot \sin\beta \end{aligned} \tag{8}$$

Dabei ist r der Radiusvektor, β die ekliptikale Breite und λ die ekliptikale Länge. Bei einer geozentrischen Positionsangabe muß noch der Ortsvektor der Erde addiert werden, bei einer heliozentrischen Angabe der der Sonne.

Da jedoch die Sonne nicht exakt im Massenmittelpunkt des Sonnensystems steht, sondern sich ebenfalls in einer Bahn um ihn herumbewegt (durch die Störeinflüsse der anderen Planeten, vor allen Dingen von Jupiter), wurde der Schwerpunkt auf den Koordinatenursprung gelegt, um ein ungewolltes Abdriften des Systemmittelpunktes zu vermeiden. Dazu wurde jeweils nach Eingabe der zur Bestimmung einer Geschwindigkeit notwendigen zwei Raumpunkte der Systemschwerpunkt neu ermittelt und die Körper so verschoben, daß der Schwerpunkt wieder im Ursprung lag.

2.4 Die graphische Ausgabe

Durch Umstellung der Gleichungen 8 erhält man λ und β. Die errechneten Zahlenwerte sind zwar gut geeignet zum Vergleich mit astronomischen Tabellen, aber doch sehr wenig anschaulich. Darum wurde zusätzlich eine graphische Ausgabe implementiert, die die Planetenbahnen auf dem Bildschirm darstellt ([4],[7]).

2.5 Die Genauigkeit der Ergebnisse

Als nächstes stellt sich die Frage nach der Verläßlichkeit der nun tatsächlich ermittelten Ergebnisse. Da die Positionen in [3] bis auf 8 Stellen genau angegeben sind (siehe den Radiusvektor), muß Programm-intern mit wesentlich höherer Genauigkeit gerechnet werden, denn die Rundungsfehler der aufeinanderfolgenden Iterationsschritte kumulieren relativ schnell und begrenzen die erzielbare Genauigkeit.

Hier wurde deshalb durchweg der genaueste von *Turbo Pascal 6.0* unterstützte Zahlentyp, der auf 16 Dezimalen genaue Typ *Extended* verwendet, was allerdings eine erhöhte Rechenzeit zur Folge hat.

2.5.1 Die Rechenzeit

Durch die Verwendung des Typs Extended vervielfacht sich leider auch die Rechenzeit. Um einen Iterationsschritt durchzuführen, braucht ein 25MHz-386 Rechner bei einem System mit 7 Körpern schon rund 1 Sekunde! Bei einer Schrittweite von $\Delta t = 60s$ braucht man für einen Tag also etwa 24 Minuten. Mit diesen Rechenzeiten kann man keine großen Zeiträume überwachen, ohne den Rechner mehrere Stunden arbeiten zu lassen. In der Regel ist daher eine Schrittweite von $\Delta t = 3600s = 1h$ gewählt worden. Dann wird ein Tag in etwa 24 Sekunden berechnet, was es ermöglicht, die Planetenbahnen mit einer angemessenen Rechenzeit auch über einen längeren Zeitraum hinweg zu bestimmen.

2.5.2 Andere Einflüsse

Das Programm rechnet mit der Annahme statischer oder quasistatischer Gravitationspotentiale, unter deren Einfluß sich die Körper bewegen. Die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit c (=Lichtgeschwindigkeit) der durch die bewegten Körper im System verursachten Gravitationspotentialänderungen wurden nicht berücksichtigt. Ebenso wurden relativistische Effekte (s. Kap. 2.6.3) vernachlässigt.

Die Größe des ersteren Effekts ist mit Hilfe der sog. *Lichtzeit* abschätzbar. Dies ist die Zeit, die das Licht braucht, um von einem Körper zum anderen zu gelangen. Wie groß ist nun ihr Einfluß? Für den Weg zur zur Erde braucht das Licht von der Sonne $\frac{1.496 \cdot 10^{11} m}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} \approx 500$ Sekunden. Da die Erde sich mit einer Geschwindigkeit von etwa $30 \frac{km}{s}$ bewegt, bewegt sie sich in dieser Zeit also etwa 15000 km weiter. Da die Positionen in [3] auf die hunderstel Bogensekunde (wobei eine Bogensekunde etwa $\frac{2 \cdot \pi \cdot 1.496 \cdot 10^{11} m}{60 \cdot 3600} \approx 4300 km$ entspricht) angegeben sind, hätte man einen Fehler von höchstens 3 Bogensekunden. Wie weiter unten ausgeführt, sind die tatsächlichen Iterationsfehler jedoch größer als dieser Beitrag. Zumindest für die inneren Planeten kann darum die Lichtzeit unberücksichtigt bleiben.

2.5.3 Testläufe

Zur quantitativen Betrachtung der Rechen- und Rundungsfehler zeigt Tabelle 2 einen Probelauf des Programmes; es wurden die geozentrischen Positionen der Sonne vom 1. bis zum 9. Januar bei einer Schrittweite von $\Delta t = 60s$ berechnet und dann die Geschwindigkeitsvektoren umgedreht und dieselbe Anzahl an Schritten zurückgerechnet. Bedauerlicherweise trat schon bei diesen 20 Schritten eine Abweichung von 3 Bogensekunden auf; mithin ist es selbst bei einer geringen Schrittweite nicht möglich, die vorgegebene Genauigkeit von einer hunderstel Bogensekunde zu erreichen.

Datum	Ekliptikale Länge			Ekliptikale Breite			Radiusvektor
	°	′	″	°	′	″	Astr. Einheiten
1. Januar	280	3	23.030	-0	-0	-0.065	0.983295783
6. Januar	285	8	57.386	-0	-0	-0.705	0.983304216
9. Januar	288	12	20.343	-0	-0	-0.826	0.983376321
6. Januar	285	8	54.839	-0	-0	-0.705	0.983330425
1. Januar	280	3	20.484	-0	-0	-0.065	0.983295793

Tabelle 2: Die Genauigkeit des Programmes

2.6 Die Untersuchung des Sonnensystems

Nachdem das Programm die Positionen der Körper zu verschiedenen Zeitpunkten bestimmen kann, kann man nunmehr die Bahnen selbst untersuchen. Dazu bestimmt man die relativen Ortsvektoren der Körper untereinander und kann diese mit algebraischen Mitteln auswerten. Die Grundlagen hierzu sind aus [5] entnommen. Am Ende sind die Bahndaten der ersten Dreiviertel des Jahres 1991 gegeben, die mit dem Programm ermittelt wurden. Daneben habe sind die Buchwerte aus [4] als Vergleich angeführt. Die Iterationszeit betrug dabei 1 Stunde.

2.6.1 Finsternisse und Bedeckungen

Eine Sonnen- oder Mondfinsternis tritt genau dann ein, wenn sich ein Körper vor den anderen schiebt, so daß die Abstände der Mittelpunkte der Körper auf der Bildebene kleiner werden als die Summe der beiden Radien der Körper. Um dies zu realisieren, wird eine Hilfsebene aufgespannt, die die Erde enthält und als Normalenvektor den Erde-Sonnenvektor hat. Dann wird auf diese Ebene der Mittelpunkt des Mondes projiziert. Nun wird der Abstand des Projektionspunktes und des Erdmittelpunktes berechnet. Ist dieser kleiner als die Summe von Erd- und Mondradius, so tritt eine Finsternis ein.

Mit dieser Technik kann man auch die Bedeckungen der Jupitermonde ermitteln; aufgrund der kurzen Umlaufszeiten der vier gallileischen Monde ereignen sich dort sehr oft Finsternisse und Bedeckungen.

2.6.2 Astronomische Beobachtungshinweise

Für die Beobachtung von Planeten mit dem Fernglas ist ihre Stellung in Bezug auf die Sonne wichtig; gewisse Punkte in ihren Bahnen haben daher besondere Bedeutung für den Sternfreund. Für die inneren Planeten Merkur und Venus ist ihre Elongation wichtig; dies ist der scheinbare Winkelabstand, den die Planeten von der Sonne haben. Wird er maximal, so bedeutet dies optimale Sichtbarkeit. Um ihn zu erhalten, muß man den Winkel zwischen den Ortsvektoren (von der Erde aus) des Planeten und der Sonne bestimmen; dieser Wert ist gleich dem Winkelabstand. Um den maximalen Winkelabstand zu bestimmen, vergleicht man die Werte zwischen den einzelnen Iterationsschritten; wenn der Betrag des Winkels sein absolutes Maximum erreicht, ist auch die maximale Elongation erreicht; bei einem absoluten Minimum tritt entweder eine obere Konjunktion (wenn der Abstand Erde-Planet größer ist als eine astronomische Einheit) oder eine untere Konjunktion (wenn der Abstand Erde-Planet kleiner ist als 1 AE) ein. Für die äußeren Planeten erhält man die Informationen über die Bildung des Skalarproduktes der beiden geozentrisch orientierten Ortsvektoren. Wird der Betrag minimal (d.h. geht es gegen 0), so ist die sog. Quadratur erreicht; wird es maximal, so steht der Planet in Opposition; wird es dagegen minimal (dieses Minimum ist kleiner 0), so steht der Planet in Konjunktion zur Sonne. Für die Beobachtung ist die Opposition die günstigste Zeit, da hier der Planet direkt beleuchtet wird. (Natürlich sind diese Informationen auch für astrologische Zwecke verwendbar.) Abbildung 3 zeigt das Prinzip der Bildung des Skalarproduktes anhand der Ortsvektoren der Planeten.

2.6.3 Untersuchung von Bahnen

Bei der Untersuchung einer Bahn sind zwei Punkte von besonderem Interesse: Aphel und Perihel. Wenn ein Körper im Aphel steht, so hat er seinen größten Abstand von seinem Zentralkörper, im Perihel seinen kleinsten. Die Ermittlung dieser Punkte wird über die Suche nach dem größten und kleinsten Betrag des Abstandes nach demselben Verfahren wie oben durchgeführt. Bei der Untersuchung des Perihels ist ein Effekt interessant, der in Verbindung mit der allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins (siehe [6]) angeführt wird: die Periheldrehung der Merkurbahn. Dieser Effekt führt dazu, daß der Perihelwinkel (d.h. die heliozentrische ekliptikale Länge beim Periheldurchgang) sich um einen bestimmten Winkel verschiebt. Die durch relativistische Effekte hervorgerufene Drehung beträgt allerdings nur $\varphi = 43,11''$; dieser Wert liegt also in einer Größenordnung, die weit unter der Genauigkeit des Programmes liegt (s.o.), so daß jegliche Versuche, sie nachzuweisen, sinnlos sind.

2.6.4 Die Minimierung und Maximierung

Alle oben beschriebenen Teilprogramme arbeiten somit nach demselben Prinzip: aus der Iteration her werden die Positionen der Körper bestimmt, und aus ihren Orten werden weitere Informationen bestimmt, die zur Ermittlung der genannten Phänomene wichtig sind. Dabei wird immer aus der Menge der Ergebnisse ein bestimmtes Maximum oder Minimum herausgesucht, und die Stelle an der es liegt, ist der Zeitpunkt, an dem das Ereignis auftritt. Ein Nachteil dieser Verfahrensweisen ist allerdings, daß der genaue Zeitpunkt eines Ereignisses nur so genau bestimmt werden kann, wie die Iterationsschrittweite beträgt, da diese Untersuchungen nur nach jedem kompletten Iterationsschritt durchgeführt werden. Bei der Suche nach einer Finsternis, die nur etwa eine Stunde dauert, sollte man also eine Iterationsschrittweite wählen, die deutlich kleiner ist als eine Stunde (die Ungenauigkeit der Rechenergebnisse, die u.U. bei zu großer Schrittweite auftritt, könnte ebenfalls negative Auswirkungen haben, also beispielsweise aus einer totalen Sonnenfinsternis eine partielle machen). Bei der Suche nach dem Aphel eines Körpers kann man hingegen auch eine größere Schrittweite wählen, denn hier besteht keine Gefahr, das Ereignis wegen zu geringer Dauer zu verpassen. Anschließend kann man den gesuchten Zeitpunkt (in einem kleineneren Intervall) mit geringerer Schrittweite nochmals untersuchen. Mit dieser Technik kann man sich dem tatsächlichen Zeitpunkt des Geschehens immer weiter annähern.

Ereignis	**Zeit laut Programm**	**Zeit laut Himmelsjahr**
Erde: Periheldurchgang	3. Januar 5h	3. Januar 4h
Merkur: Apheldurchgang	3. Februar 22h	2. Februar 23h
Merkur: Periheldurchgang	20. März 19h	19. März 22h
Venus: Periheldurchgang	21. April 5h	21. April 3h
Merkur: Apheldurchgang	2. Mai 17h	2. Mai 22h
Mars: Apheldurchgang	8. Juni 12h	9. Juni 3h
Merkur: Periheldurchgang	15. Juni 14h	15. Juni 22h
Erde: Apheldurchgang	6. Juli 14h	6. Juli 16h
Merkur: Apheldurchgang	29. Juli 14h	29. Juli 21h
Venus: Apheldurchgang	11. August 12h	11. August 13h
Merkur: Periheldurchgang	11. September 12h	11. September 21h

Tabelle 3: Auswahl von Konstellationen und Ereignissen

2.7 Die Raumfahrtsimulation mit dem PC

Als Beispiel, wie man ebenfalls den Flug von Raumschiffen mit dem PC simulieren kann, wird der Swingby-Effekt als Beispiel angeführt (allerdings unter vereinfachten Annahmen). Beim Swingby-manöver, das in [8] und [9] beschrieben ist, fliegt ein Raumschiff eng an einem massereichen Planeten vorbei und wird so abgelenkt, daß es entweder auf eine energiereichere oder energieärmere Bahn gelenkt wird. Der erste Fall tritt ein, wenn das Raumschiff knapp *hinter* dem Planeten herfliegt, der zweite, wenn es sich knapp *vor* dem Planeten herbewegt. Tabelle 4 zeigt die Zunahme der Geschwindigkeit, für den ersten Fall, wobei ein Dreikörperproblem angenommen wird: die Sonne steht unbeweglich im Mittelpunkt, der Jupiter bewegt sich im Abstand von 5 AU mit Kreisbahngeschwindigkeit um sie herum, und das Raumschiff fliegt mit einer Geschwindigkeit, die kleiner als die Fluchtgeschwindigkeit ist, darauf zu. Abbildung 1 zeigt einen Ausdruck der Bahn, wobei alle 20 Tage die jeweilige Tagzahl angegeben ist und zwischen zwei Punkten vier Tage liegen. Die Sonne befindet sich dabei sehr weit links, so daß sie nicht mehr auf dem Bildschirm zu sehen ist. Der Maßstab ist so gewählt, daß die lange Kante etwa 2.6 AE lang ist. v_{akt} ist die aktuelle Geschwindigkeit, bzw. in Abb. 1 die Endgeschwindigkeit. v_{Fl} ist die von diesem Punkt aus benötigte Fluchtgeschwindigkeit. v_{St} ist die Startgeschwindigkeit. Interessant ist der Geschwindigkeitsgewinn: nach der Begegnung mit Jupiter hat das Schiff die ausreichende Geschwindigkeit zum Verlassen des Sonnensystems!

Tage	**Geschwindigkeit des Raumschiffes (in $\frac{m}{s}$)**
4	13802.603
12	13614.291
20	13433.762
28	13262.398
36	13103.444
44	12965.569
48	12911.919
52	12879.934
56	12898.232 ← Zeitpunkt des Vorbeifluges
60	13095.001
64	16747.863
68	22035.557
72	21575.156
76	21377.711
84	21139.516
92	20963.685
100	20811.209

Tabelle 4: Geschwindigkeitsgewinn beim Swing-by-effekt

3 Schluß

Abschließend muß man feststellen, daß es nicht gelungen ist, die Bahnen der Planeten mit der gewünschten Genauigkeit zu bestimmen. Dies ist in erster Linie auf die mangelnde Rechenkapazität des zur Verfügung stehenden Computers zurückzuführen. Bei Verwendung eines mathematischen Koprozessors (z.B. des 80387) oder ein 486-Rechners währen allerdings bessere Ergebnisse zu erzielen. Auf der anderen Seite kann das Programm aber auch sinnvolle Informationen für den Sternfreund zur praktischen Beobachtung liefern und — wenn auch nur mit Einschränkungen — den Flug von Raumschiffen und -sonden simulieren. An diesem Punkt wären ebenfalls Erweiterungen möglich, z.B. könnte man im erdnahen Bereich bei geringen Abständen die inhomogene Massenverteilung der Erde berücksichtigen und die Einflüsse der Atmosphäre, des Erdmagnetfeldes und des Sonnenwindes berücksichtigen. Hierfür wäre aber ebenfalls eine größere Rechenkapazität nötig.

4 Literaturverzeichnis

[1] *K.P. Haupt*: Simulationen von n-Körper-Systemen, aus: Praxis der Naturwissenschaften - Physik 5/39 Jg 1990, Aulis Verlag Deubner& Co

[2] *D. Braess*: Numerische Mathematik für Bauingenieure und Maschinenbauer, Ruhr-Uni Bochum 1990

[3] The Astronomical Almanac 1991, U.S. Government Printing Office

[4] *Keller*: Das Himmelsjahr 1991, Franckh-Kosmos 1990

[5] *Eckart, Jehle, Vogel*: Analytische Geometrie N, Bayrischer Schulbuchverlag München, 3. Auflage 1989

[6] *Höfling*: Physik Bd. 2, Teil 2, 13. Auflage, Dümmler Verlag 1983

[7] *H. Koch*: Mathematik für höhere Schulen, Teil 7, Hirschgraben-Verlag 1949

[8] *H. Blatter*: Warum verläßt Pionier-10 das Sonnensystem, aus: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht September 1989, Dümmler Verlag 1989

[9] *R. Kippenhahn*: Abenteuer Weltall, Deutsche Verlags-Anstalt, 1991

[10] *Keller*: Das Himmelsjahr 1992, Frankh-Kosmos 1991

[11] *A. Weigert, H.J. Wendker*: Astronomie und Astrophysik — ein Grundkurs, Physikverlag Weinheim 1982

[12] *Bronstein, Semendjajew*: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Thun 1989

[13] *Strnad*: Über die Fluchtgeschwindigkeit in der allgemeinen Relativitätstheorie, aus: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht Juni 1991, Dümmler Verlag 1991

[14] *Müller*: Berechnung der Periheldrehung des Merkur mit dem Lenz-Vektor, aus: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht Dezember 1991, Dümmler Verlag 1991

[15] *Pohl*: Mechanik, Akustik und Wärmelehre 16. Auflage, Springer-Verlag 1964

5 Abbildungen

Abbildung 1: Das Swingby-manöver; die Sonne befindet sich links außerhalb des Bildes; zu sehen ist ein Raumschiff, bei seinem Vorbeiflug am Jupiter

Abbildung 2: Die Planeten bis Jupiter am 1.1.1991 samt den Bahnellipsen; siehe auch [4] Seite 33

Abbildung 3: Suchen der Beobachtungshinweise durch die Ortsvektoren der Körper

6 Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich noch herzlich bei Herrn Dorst, meinem Physiklehrer, Frau Braunsfurth, meiner Mathematiklehrerin und Herrn Prof. Dr. Schlosser vom Institut für Astronomie der Ruhruniversität Bochum für ihre freundliche Unterstützung bedanken.