离散时间泊松信道互信息范围

摘要

离散时间泊松信道（Discrete-Time Poisson，DTP）是通用地描述泊松散弹噪声影响下光子计数过程的数学模型。因数学计算上的困难，DPT 目前尚无准确的信道容量表达式，这限制了泊松信道在更多场景下的应用。本文针对这一难题，研究在 Q-PAM 调制下 SISO-DPT、OOK 调制下 SIMO-DTP、OOK 调制下 MIMO-DPT 的互信息范围，为泊松信道的信道容量估计做出了贡献。

目录

一、 引言

1.1 问题重述

问题一中，我们需要求解在 Q-PAM 调制下 SISO-DPT 的互信息。

1.2 问题分析

针对 Q-PAM 调制下 SISO-DPT 的互信息，我们将互信息的求和公式分为两个部分：输出 $y=0$ 时的部分与输出 $y=1,2,\cdots$ 时的部分。分别对两部分进行放缩，可以得到互信息的一个下界。我们针对不同的 y 值进行讨论，得出 Q、n_s、n_b 对下界的适用范围的影响，并指出如何调整 Q、n_s、n_b 以使下界适用于大多数 y。最后我们探讨了高阶泰勒展开对得到互信息上下界的可行性，并论证其优缺点。

二、 符号定义

这里给出一些**重要的**符号的定义和描述。一些为了方便叙述而临时性构建的符号不在此列。

表 **1**　符号和描述

符号	描述
$P_\lambda(\cdot)$	泊松分布概率密度函数
Q	PAM 调制进制
n	PAM 调制输入
n_s	激光器最大发射光子数
n_b	背景光噪声光子数
y	实际接收光子数

三、 Q-PAM 调制下 SISO-DPT 的互信息范围

由互信息的定义，可以直接写出 $I(X;Y)$ 的表达式，并根据对 y 求和的范围将其分解为两部分：

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \qquad (1a)\\
&= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{Q} \sum_{n=1}^{Q} P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y) \log P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y) \\
&\quad - \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{Q} [\sum_{n=1}^{Q} P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)] \log [\frac{1}{Q} \sum_{k=1}^{Q} P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)] \\
&= -\frac{1}{Q} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{Q} P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y) \log \frac{Q P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)}{\sum_{k=1}^{Q} P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)} \qquad (1b)\\
&= I_0 + I_1 \qquad (1c)
\end{aligned}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \frac{1}{Q} [\sum_{n=1}^{Q} e^{-(\frac{n}{Q}n_s+n_b)}] \log [\sum_{k=1}^{Q} e^{-(\frac{k}{Q}n_s+n_b)}] \\
&\quad - \frac{1}{Q} \sum_{n=1}^{Q} [e^{-(\frac{n}{Q}n_s+n_b)} + \log Q](\frac{n}{Q}n_s + n_b) \qquad (2a)\\
I_1 &= -\frac{1}{Q} \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{Q} P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y) \log \frac{P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)}{\sum_{k=1}^{Q} P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)} \qquad (2b)
\end{aligned}
$$

式(2a)中所求的对数是有限项幂项的求和，可以不再化简。

也可以使用式(3)作为 I_0 的一个下界：

$$
\begin{aligned}
I_0 \geq & \frac{2}{Q(Qn_s + 2n_b)} \sum_{n=1}^{Q} e^{-(\frac{n}{Q}n_s+n_b)} \\
& - \frac{1}{Q} \sum_{n=1}^{Q} e^{-(\frac{n}{Q}n_s+n_b)} (\frac{n}{Q}n_s + n_b) \qquad (3)\\
& - \frac{\log Q}{Q} \sum_{n=1}^{Q} e^{-(\frac{n}{Q}n_s+n_b)}
\end{aligned}
$$

为缩小 I_1，我们将 I_1 中所求的对数分子分布同除以相当于 $n=Q$ 时的一项概率的 $P_{n_b+n_s}(y)$。并依此将 I_1 分解为 I_{10} 和 I_{11}：

$$I_{10} = -\frac{1}{Q}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{Q} P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)\log\frac{P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)} \tag{4a}$$

$$I_{11} = \frac{1}{Q}\sum_{y=1}^{\infty}[\sum_{n=1}^{Q} P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)]\log(1+\frac{\sum_{k=1}^{Q-1}P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}) \tag{4b}$$

通过交换求和次序，式(4a)可以化简如下：

$$\begin{aligned} I_{10} &= -\frac{1}{Q}\sum_{n=1}^{Q}\sum_{y=1}^{\infty} P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)\log\frac{P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)} \\ &= -\frac{1}{Q}\sum_{n=1}^{Q}[(\frac{n}{Q}n_s+n_b)\log\frac{nn_s+Qn_b}{Q(n_b+n_s)}+\frac{Q-n}{Q}n_s(1-e^{-\frac{n}{Q}n_s-n_b})] \end{aligned} \tag{5a}$$

式(5a)已经是闭式求和的形式，可以不再化简。

使用 $\log(1+x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开得到不等式 $\log(1+x)\geq x-\frac{1}{2}x^2$，式(4b)可以缩小如式(6)：

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{Q}\sum_{y=1}^{\infty}[\sum_{n=1}^{Q} P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)]\log(1+\frac{\sum_{k=1}^{Q-1}P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}) \\ &\geq \frac{1}{Q}\sum_{y=1}^{\infty}[\sum_{n=1}^{Q} P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)][\frac{\sum_{k=1}^{Q-1}P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}-\frac{1}{2}(\frac{\sum_{k=1}^{Q-1}P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)})^2] \\ &= \frac{1}{2Q}\sum_{y=1}^{\infty}[\sum_{1\leq n,k;n<k}^{Q-1} 2\frac{P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)} \\ &\quad +\sum_{n=1}^{Q-1}\frac{[P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)]^2}{P_{n_b+n_s}(y)}+2\sum_{n=1}^{Q-1}P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)] \end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned} &\quad -\frac{1}{2Q}\sum_{y=1}^{\infty}[\sum_{n=1}^{Q-1}\frac{[P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)]^3}{[P_{n_b+n_s}(y)]^2} \\ &\quad +3\sum_{1\leq n,k;n<k}^{Q-1}\frac{[P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)]^2P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)+[P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)]^2P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)}{[P_{n_b+n_s}(y)]^2} \\ &\quad +6\sum_{1\leq n,j,k;n<j<k}^{Q-1}\frac{P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)P_{\frac{j}{Q}n_s+n_b}(y)P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{[P_{n_b+n_s}(y)]^2}] \end{aligned} \tag{6b}$$

式(6a)中出现了分子为泊松分布二次项而分母为泊松分布一次项的分式，将其化简如下：

$$
\begin{aligned}
\frac{P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)} &= P_{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)(\frac{k}{Q}n_s+n_b)}{n_b+n_s}}(y)\cdot e^{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)(\frac{k}{Q}n_s+n_b)}{n_b+n_s}-\frac{n+k-Q}{Q}n_s-n_b} \\
\frac{[P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)]^2}{P_{n_b+n_s}(y)} &= P_{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)^2}{n_b+n_s}}(y)\cdot e^{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)^2}{n_b+n_s}-\frac{2n-Q}{Q}n_s-n_b}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

依据式(7)可化简式(6a)如下：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{Q}\sum_{1\le n,k;n<k}^{Q-1}[e^{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)(\frac{k}{Q}n_s+n_b)}{n_b+n_s}-\frac{n+k-Q}{Q}n_s-n_b}-e^{-\frac{n+k-Q}{Q}n_s-n_b}] \\
&+\frac{1}{2Q}\sum_{n=1}^{Q-1}[e^{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)^2}{n_b+n_s}-\frac{2n-Q}{Q}n_s-n_b}-e^{-\frac{2n-Q}{Q}n_s-n_b}] \\
&+\frac{1}{Q}\sum_{n=1}^{Q-1}(1-e^{\frac{n}{Q}n_s+n_b})
\end{aligned}
\tag{8}
$$

式(6b)中出现了分子为泊松分布三次项而分母为泊松分布二次项的分式，将其化简如下：

$$
\begin{aligned}
\frac{P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)P_{\frac{j}{Q}n_s+n_b}(y)P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{[P_{n_b+n_s}(y)]^2} &= P_{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)(\frac{j}{Q}n_s+n_b)(\frac{k}{Q}n_s+n_b)}{(n_b+n_s)^2}}(y) \\
&\quad\cdot e^{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)(\frac{j}{Q}n_s+n_b)(\frac{k}{Q}n_s+n_b)}{(n_b+n_s)^2}-\frac{n+j+k-2Q}{Q}n_s-n_b} \\
\frac{[P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)]^2P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{[P_{n_b+n_s}(y)]^2} &= P_{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)^2(\frac{k}{Q}n_s+n_b)}{(n_b+n_s)^2}}(y) \\
&\quad\cdot e^{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)^2(\frac{k}{Q}n_s+n_b)}{(n_b+n_s)^2}-\frac{2n+k-2Q}{Q}n_s-n_b} \\
\frac{[P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)]^2P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)}{[P_{n_b+n_s}(y)]^2} &= P_{\frac{(\frac{k}{Q}n_s+n_b)^2(\frac{n}{Q}n_s+n_b)}{(n_b+n_s)^2}}(y) \\
&\quad\cdot e^{\frac{(\frac{k}{Q}n_s+n_b)^2(\frac{n}{Q}n_s+n_b)}{(n_b+n_s)^2}-\frac{2k+n-Q}{Q}n_s-n_b} \\
\frac{[P_{\frac{n}{Q}n_s+n_b}(y)]^3}{[P_{n_b+n_s}(y)]^2} &= P_{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)^3}{(n_b+n_s)^2}}(y)\cdot e^{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)^3}{(n_b+n_s)^2}-\frac{3n-2Q}{Q}n_s-n_b}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

依据式(9)可化简式(6b)如下：

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2Q}\sum_{n=1}^{Q-1}[e^{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)(\frac{j}{Q}n_s+n_b)(\frac{k}{Q}n_s+n_b)}{(n_b+n_s)^2}-\frac{n+j+k-2Q}{Q}n_s-n_b}-e^{-\frac{n+j+k-2Q}{Q}n_s-n_b}] \\
&-\frac{3}{2Q}\sum_{1\leq n,k;n<k}^{Q-1}[e^{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)^2(\frac{k}{Q}n_s+n_b)}{(n_b+n_s)^2}-\frac{2n+k-2Q}{Q}n_s-n_b}-e^{-\frac{2n+k-2Q}{Q}n_s-n_b} \\
&+e^{\frac{(\frac{k}{Q}n_s+n_b)^2(\frac{n}{Q}n_s+n_b)}{(n_b+n_s)^2}-\frac{2k+n-2Q}{Q}n_s-n_b}-e^{-\frac{2k+n-2Q}{Q}n_s-n_b}] \\
&-\frac{3}{Q}\sum_{1\leq n,j,k;n<j<k}^{Q-1}[e^{\frac{(\frac{n}{Q}n_s+n_b)^3}{(n_b+n_s)^2}-\frac{3n-2Q}{Q}n_s-n_b}-e^{-\frac{3n-2Q}{Q}n_s-n_b}]
\end{aligned}
\tag{10}
$$

由此得到 $I(X;Y)$ 的一个下界(3)+(5a)+(8)+(10)，这是有限项的闭式求和，可以不再化简。其误差与 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$ 的三次方同阶。对 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$ 进行分析：

$$
\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty}\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)} &= \lim_{y\to\infty}\sum_{k=1}^{Q-1}[\frac{kn_s+Qn_b}{Q(n_b+n_s)}]^y e^{-\frac{n-Q}{Q}n_s} \\
&= \sum_{k=1}^{Q-1}\lim_{y\to\infty}[\frac{kn_s+Qn_b}{Q(n_b+n_s)}]^y e^{-\frac{n-Q}{Q}n_s} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

因此当 $y\to\infty$ 时，$\log(1+\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)})\to 0$，泰勒展开式成立，(3)+(5a)+(8)+(10)是 $I(X;Y)$ 的一个下界。

我们分析 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$ 趋向于零的速度。使用 MATLAB 编程，设置 Q、n_s、n_b 分别为 5、20、5，计算 $1\leq y\leq 200$ 时的 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$，结果如图1。

可以看出，在趋向于 0 时，$\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$ 的值非常大，并且以近似 -8dB 的斜率下降，在 5dB 附近存在转折点，在转折点后以近似 -1.5dB 的斜率下降。实际影响 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$ 趋向于零的速度的因素主要是 $\frac{\partial\lg\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}}{\partial y}$ 曲线。称：

1. $\frac{\partial\lg\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}}{\partial y}$ 在 $y=1$ 处的取值为曲线的初值。
2. $\frac{\partial\lg\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}}{\partial y}$ 达到一个基本不变的值时的 y 为曲线的饱和点。
3. $\frac{\partial\lg\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}}{\partial y}$ 最终达到的基本不变的值为曲线的终值。

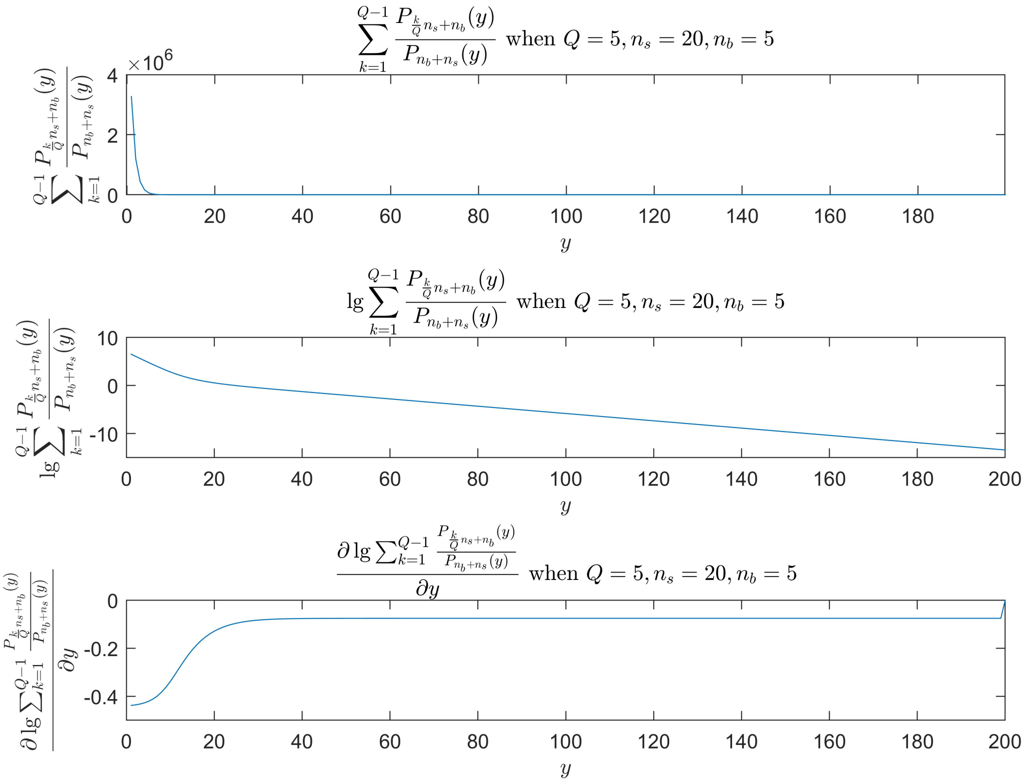

图 1　$\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$ 趋向于零的速度

我们分析了 $\frac{\partial \lg\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}}{\partial y}$ 的曲线随 Q、n_s、n_b 的改变而变化的特点，并总结如下：

1. 初值随 Q 增大而减小，但减小幅度相对 n_s 的影响可忽略不计。饱和点基本不受 Q 影响。终值随 Q 增大而增大，并最终趋向于 0。
2. 初值随 n_s 增大而减小。饱和点基本不受 n_s 影响。终值随 n_b 增大而减小。
3. 初值随 n_b 增大而增大。饱和点随 n_b 增大而增大。终值随 n_b 增大而增大，并最终趋向于 0。

而初值 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}|_{y=1}$ 随 Q、n_s、n_b 的增大而增大。其增大有以下特点：

1. 与 Q 的负倒数的指数函数基本成线性关系，即 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}|_{y=1}\sim k_1e^{-\frac{1}{Q}}+b_1$。
2. 与 n_s 的指数函数基本成线性关系，即 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}|_{y=1}\sim k_2e^{n_s}+b_2$。
3. 与 n_b 的负倒数成线性关系，即 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}|_{y=1}\sim -\frac{k_3}{n_b}+b_3$。

因此为使 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$ 随 y 下降得尽量快，以使展开式(3)+(5a)+(8)+(10)能够适用于 I_{11} 的下界估计，并考虑到调制的进制 Q、激光器最大发射的光子数 n_s 不能随意改变，我们认为应该在保持 n_s 的同时尽量减小背景光噪声光子数 n_b。

下面我们直接计算 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$ 小于某个阈值时的 y 的取值。设置 Q、n_s、n_b 都为 5，分别设置变化范围，计算满足 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)} < 0.05$ 时最小的 y 值，结果如图2。

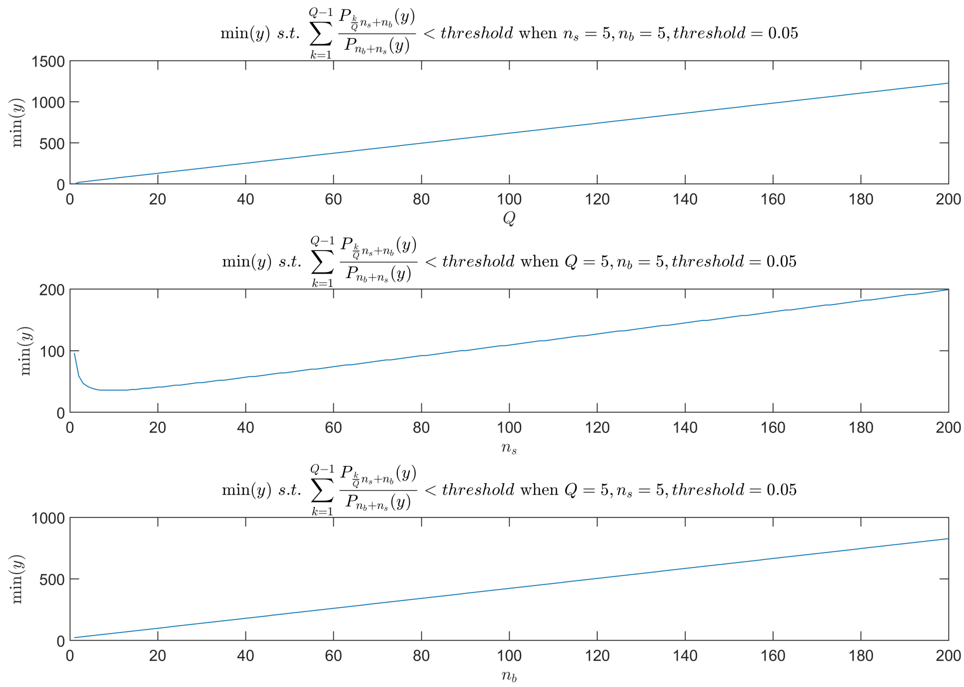

图 **2** $\min(y)\ s.t.\ \sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)} < threshold$

这也印证了我们前面的结论：减小 n_b 可以加快 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$ 下降的速度。还可以从图2知道，在 Q、n_b 固定时，存在一个 n_s 使得 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$ 下降得最快，这一取值随 Q、n_b 的增长而增长。

下面我们计算累积误差。由对 $\frac{\partial \lg \sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}}{\partial y}$ 曲线的讨论知，在 $y > y_0$ 时有：

$$
\begin{aligned}
&\exists C_0>0, \forall y \geq y_0, \frac{\partial \lg \sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}}{\partial y} = -C_0 \\
&\exists A, C_1>0, \forall y \geq y_0, \sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)} = Ae^{-C_1 y}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

可以由式(12)求得 $y \geq y_0$ 时的累积误差：

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{y=y_0}^{\infty} \log(1+\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}) - [\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)} - \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)})^2] \\
&= \sum_{y=y_0}^{\infty} \frac{1}{3}(\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)})^3 - \frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)})^4 + \cdots \\
&< \sum_{y=y_0}^{\infty} \frac{1}{3}(\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)})^3 = \sum_{y=y_0}^{\infty}\frac{1}{3}Ae^{-3C_1 y} = \frac{Ae^{-3C_1 y_0}}{3(1+e^{-3C_1})}
\end{aligned} \tag{13}$$

因此 $y \geq y_0$ 时的累积误差 E 是有限值，并随着饱和点 y_0 的增大而呈指数下降趋势。选取 $y_m \geq y_0$ 作为泰勒展开的求和起始点，也可以得到随 y_m 增大而趋向于 0 的累积误差。最终我们的求解 $I(X;Y)$ 的一个下界的方法是：

1. 选定一个应用二阶泰勒展开式的阈值。
2. 计算转折点 y_0。
3. 计算 $\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$ 小于这个阈值时的 y 的取值 y_1。
4. 取 $y_m = \max\{y_0, y_1\}$，计算(4b)在 $0 \leq y \leq y_m$ 时的值 I。
5. 计算(8)+(10)在 $0 \leq y \leq y_m$ 时的值 T。
6. 计算(3)+(5a)+(8)+(10)的值 S。
7. 计算 $S - T + I$ 的值作为 $I(X;Y)$ 的一个下界。

前述推导中实际使 y_m 为 1。

考虑分子为泊松分布 m 次项而分母为泊松分布 n 次项的分式，在 $m-n=1$ 时其仍然是一个泊松分布：

$$\frac{\Pi_{i=0}^{m-1}P_{\lambda_{0_i}}(y)}{\Pi_{j=0}^{n-1}P_{\lambda_{1_j}}(y)} = P_{\frac{\Pi_{i=0}^{m-1}\lambda_{0_i}}{\Pi_{j=0}^{n-1}\lambda_{1_j}}}(y)e^{\frac{\Pi_{i=0}^{m-1}\lambda_{0_i}}{\Pi_{j=0}^{n-1}\lambda_{1_j}} - \sum_{i=0}^{m-1}\lambda_{0_i} + \sum_{j=0}^{n-1}\lambda_{1_j}} \tag{14}$$

对其求和或求均值都是非常容易得到结果的。因此理论上可以将式(4b)使用高阶泰勒展开，得到多个非常精确的互信息的上下界。但这样带来的问题是表达式十分复杂，在此不再赘述。

四、 代码

Listing 1: 绘制图1与图2

```
%%  Clear workspace
clc;close all;
%%  Plot the minumun y curve
Qs = 1:200;Q = 5;
nss = 1:200;ns = 5;
nbs = 1:200;nb = 5;
threshold = 0.05;

ymins1 = zeros(size(Qs));
for i = 1:length(Qs)
  ymins1(i) = Ymin(Qs(i), ns, nb, threshold);
end

ymins2 = zeros(size(nss));
for i = 1:length(nss)
  ymins2(i) = Ymin(Q, nss(i), nb, threshold);
end

ymins3 = zeros(size(nbs));
for i = 1:length(nbs)
  ymins3(i) = Ymin(Q, ns, nbs(i), threshold);
end

figure;
paramstr1 = " when $$n_s = " + num2str(ns) + ...
  ", n_b = " + num2str(nb) + ", threshold = " + num2str(threshold) + "$$";
subplot(311);plot(Qs,ymins1);xlabel("$$Q$$", "interpreter", "latex");
ylabel("$$\min(y)$$", "interpreter", "latex")
title("$$\min(y)\ s.t.\ \sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)} <
    threshold$$" + paramstr1, "interpreter", "latex")

paramstr2 = " when $$Q = " + num2str(Q) + ...
```

```
  ", n_b = " + num2str(nb) + ", threshold = " + num2str(threshold) + "$$";
subplot(312);plot(nss,ymins2);xlabel("$$n_s$$", "interpreter", "latex");
ylabel("$$\min(y)$$", "interpreter", "latex")
title("$$\min(y)\ s.t.\ \sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)} < threshold$$" + paramstr2, "interpreter", "latex")

paramstr3 = " when $$Q = " + num2str(Q) + ...
  ", n_s = " + num2str(ns) + ", threshold = " + num2str(threshold) + "$$";
subplot(313);plot(nbs,ymins3);xlabel("$$n_b$$", "interpreter", "latex");
ylabel("$$\min(y)$$", "interpreter", "latex")
title("$$\min(y)\ s.t.\ \sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)} < threshold$$" + paramstr3, "interpreter", "latex")
%% Plot the sum of Possion probability curve
Q = 5;
ns = 20;
nb = 5;
ys = 1:200;
sumps = zeros(size(ys));
for i = 1:length(ys)
  sumps(i) = SumPossion(Q, ns, nb, ys(i));
end

logresult = log1p(sumps);
taylor2ord = sumps - sumps .^ 2;
log10ys = log10(ys);
log10sumps = log10(sumps);
grads = zeros(size(ys));
for i = 1:length(ys) - 1
  grads(i) = (log10sumps(i + 1) - log10sumps(i)) / (ys(i + 1) - ys(i));
  disp("grad in " + num2str(ys(i)) + ": " + num2str(grads(i)))
end

figure;
paramstr = " when $$Q = " + num2str(Q) + ", n_s = " + num2str(ns) + ...
  ", n_b = " + num2str(nb) + "$$";

```

```
subplot(311);plot(ys, sumps);xlabel("$$y$$", "interpreter", "latex")
ylabel("$$\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$$", "interpreter",
    "latex")
title("$$\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$$"...
  + paramstr, "interpreter", "latex")

subplot(312);plot(ys,log10sumps);xlabel("$$y$$", "interpreter", "latex")
ylabel("$$\lg\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$$", "interpreter",
    "latex")
title("$$\lg\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}$$"...
  + paramstr, "interpreter", "latex")

subplot(313);plot(ys,grads);xlabel("$$y$$", "interpreter", "latex")
ylabel("$$\frac{\partial\lg\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}}{\partial
    y}$$", "interpreter", "latex")
title("$$\frac{\partial\lg\sum_{k=1}^{Q-1}\frac{P_{\frac{k}{Q}n_s+n_b}(y)}{P_{n_b+n_s}(y)}}{\partial
    y}$$"...
  + paramstr, "interpreter", "latex")

figure;plot(ys, logresult, ys, taylor2ord, "--");title("Compare")
%% Functions
function p = Possion(lambda, y)
  % Possion distribution pdf
  if isequal(y, 0)
    p = exp(-lambda);
  else
    logp = y * log(lambda) - lambda - sum(log(1:y));
    p = exp(logp);
  end
end

function sump = SumPossion(Q, ns, nb, y)
  % sum of Possion probability
  ks = 1:(Q - 1);
  sump = sum((((ks * ns + Q * nb) / (Q * (ns + nb))) .^ y)...
        .* exp((Q - ks) / Q * ns));
```

```
end

function ymin = Ymin(Q, ns, nb, threshold)
  % find minimun y s.t. sum of Possion probability less than threshold
  y = 0;
  while SumPossion(Q, ns, nb, y) >= threshold
    y = y + 1;
  end
  ymin = y;
end
```