Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Informatik
FH Zentralschweiz

Computer Graphics: Curves - Übung

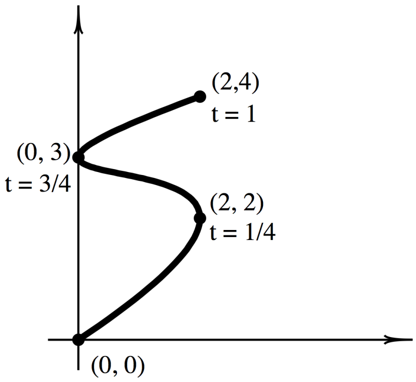
Josef F. Bürgler und Thomas Koller

I.BA_CG, SW 09

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Aufgabe 1: Interpolierende Kurve durch vier Punkte



Bestimmen Sie eine interpolierende Kurve 3. Grades der Form

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 t^2 + \mathbf{c}_3 t^3$$

durch die Punkte $\mathbf{P}_0 = [0,0]^T$, $\mathbf{P}_1 = [2,2]^T$, $\mathbf{P}_2 = [0,3]^T$ und $\mathbf{P}_4 = [2,4]^T$ mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Aufgabe 2: Bézier-Kurve durch vier Punkte

Bestimmen Sie die (kubische) Bézier-Kurve durch die Punkte $\mathbf{P}_0(0,0)$, $\mathbf{P}_1(2,-4)$, $\mathbf{P}_2(5,6)$ und $\mathbf{P}_3(9,0)$ und skizzieren Sie diese.

Aufgabe 3: Nochmals: Bézier-Kurve durch vier Punkte

Betrachten Sie die vier Punkte aus Aufgabe 2. Welche kubische Bézier-Kurve geht exakt durch diese vier Punkte? Hinweis: Bekanntlich geht eine Bézier-Kurve der Form

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{C}_0(1-t)^3 + 3\mathbf{C}_1 t(1-t)^2 + 3\mathbf{C}_2 t^2(1-t) + \mathbf{C}_3 t^3$$

nicht durch alle Kontrollpunkte $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ und $\mathbf{C}_3$: lediglich durch den ersten und den letzten, d.h. $\mathbf{C}_0 = \mathbf{P}_0$ und $\mathbf{C}_3 = \mathbf{P}_3$. Wir wollen nun $\mathbf{C}_1 = (C_{1,x}, C_{1,y})^T$ und $\mathbf{C}_2 = (C_{2,x}, C_{2,y})^T$ so bestimmen, dass gilt:

$$\mathbf{P}(t = 1/4) = \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(t = 3/4) = \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Die einzigen vier Variablen sind also die Komponenten von $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$. Wenn Sie den Ansatz

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^3 + 3\mathbf{C}_1 t(1-t)^2 + 3\mathbf{C}_2 t^2(1-t) + \mathbf{P}_3 t^3 \tag{1}$$

für $t = 1/4$ und $t = 3/4$ auswerten und verlangen, dass

$$\mathbf{P}(t = 1/4) = \mathbf{P}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(t = 3/4) = \mathbf{P}_2$$

gilt, erhalten Sie vier Gleichungen in den gesuchten Unbekannten $C_{1,x}$, $C_{1,y}$, $C_{2,x}$ und $C_{2,y}$. Beachte: es gibt viele Bézier-Kurven durch $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ welche in $\mathbf{P}_0$ starten und in $\mathbf{P}_3$ enden. Alleine der Fahrplan (wo man zu welcher Zeit t ist) macht die Darstellung eindeutig!

Lösung: Man findet $\mathbf{C}_1 = 1/9(35, -144)^T$ und $\mathbf{C}_2 = 1/9(14, 176)^T$.

Aufgabe 4*: Die B-Spline-Funktionen $N_{j,m}(t)$

Zeigen Sie mit Hilfe eines Beweises durch Induktion nach m, dass gilt:

$$\sum_{j=i-m+1}^{i} N_{j,m}(t) = 1$$

Beachte: diese Aufgabe ist mit einem Stern bezeichnet und daher nicht einfach!

Aufgabe 5: B-Spline Basisfunktionen

Berechnen Sie $N_{0,1}(t), N_{1,1}(t), N_{2,1}(t), N_{0,2}(t), N_{1,2}(t)$ und $N_{0,3}(t)$ für den Knotenvektor $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 3, 6)$.

Aufgabe 6: Quadratische B-Spline Basisfunktionen $N_{j,3}(t)$

Verwendet Sie die Rekursionsformel um $N_{j,3}(t)$ vollständig auszudrücken in t, t_j, t_{j+2} und t_{j+3}. Beachten Sie, dass $N_{j,3}(t)$ nur verschieden von Null ist für $t_i < t < t_{i+3}$. Plotten Sie $N_{j,3}(t)$ im Intervall $[t_j, t_{j+3}]$.

Aufgabe 7: Literaturstudium

Lesen Sie den Abschnitt 7.14 aus dem Buch von David Salomon, "*Curves and Surfaces for Computer Graphics* und betrachten Sie insbesondere das Beispiel auf der Seite 303 unten. Zeichnen Sie die Basisfunktionen $N_{03}(t)$, $N_{13}(t)$, $N_{23}(t)$, $N_{33}(t)$ und $N_{43}(t)$ auf (z.B. Maple verwenden). Beantworten Sie dann folgende Fragen mit entsprechenden Begründungen:

1. Wie sieht die NURBS-Kurve für $w_2 = 0$ aus?
2. Was bewirkt die Veränderung des Gewichtes w_2?

Viel Spass!