Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Informatik
FH Zentralschweiz

Computer Graphics: Curves - Übung

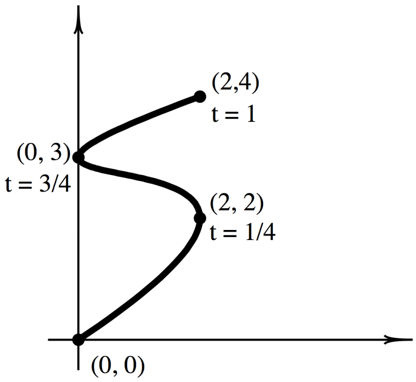
Josef F. Bürgler und Thomas Koller

I.BA_CG, SW 09

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Aufgabe 1: Interpolierende Kurve durch vier Punkte



Bestimmen Sie eine interpolierende Kurve 3. Grades der Form

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 t^2 + \mathbf{c}_3 t^3$$

durch die Punkte $\mathbf{P}_0 = [0,0]^T$, $\mathbf{P}_1 = [2,2]^T$, $\mathbf{P}_2 = [0,3]^T$ und $\mathbf{P}_4 = [2,4]^T$ mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Lösung: Setzt man beispielsweise den Punkt $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(t = 0)$ (dann ist ja $t = 0$) ein, erhält man

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(t = 0) = \mathbf{c}_0$$

also findet man sofort $\mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dieses Zwischenresultat wollen wir jetzt verwenden. Man hat dann beispielsweise für $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}(t = 3/4)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}(t = 3/4) = \mathbf{c}_0 + \frac{3}{4}\mathbf{c}_1 + \frac{9}{16}\mathbf{c}_2 + \frac{27}{64}\mathbf{c}_3 = \frac{3}{4}\mathbf{c}_1 + \frac{9}{16}\mathbf{c}_2 + \frac{27}{64}\mathbf{c}_3$$

Daraus entstehen die beiden (linearen) Gleichungen

$$\frac{3}{4}c_{1,x} + \frac{9}{16}c_{2,x} + \frac{27}{64}c_{3,x} = 0$$
$$\frac{3}{4}c_{1,y} + \frac{9}{16}c_{2,y} + \frac{27}{64}c_{3,y} = 3$$

Verwendet man auch die anderen Punkte $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}(t = 1/4)$ und $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}(t = 1)$ kann man das Gleichungssystem in Matrixdarstellung aufschreiben

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{64} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{9}{16} & 0 & \frac{27}{64} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{9}{16} & 0 & \frac{27}{64} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,x} \\ c_{1,y} \\ c_{2,x} \\ c_{2,y} \\ c_{3,x} \\ c_{3,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems erfolgt mit Matlab/Octave und ergibt:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} c_{1,x} \\ c_{1,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{2,x} \\ c_{2,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 \\ -56/3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} c_{3,x} \\ c_{3,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 32/3 \end{bmatrix}$$

Und somit schliesslich die gesuchte Darstellung der Kurve:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -48 \\ -56/3 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 32 \\ 32/3 \end{bmatrix} t^3$$

Aufgabe 2: Bézier-Kurve durch vier Punkte

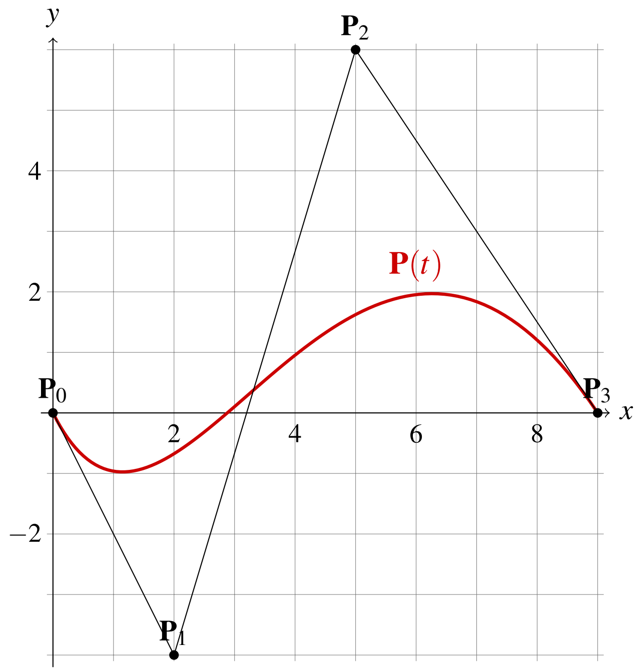
Bestimmen Sie die (kubische) Bézier-Kurve durch die Punkte $\mathbf{P}_0(0,0)$, $\mathbf{P}_1(2,-4)$, $\mathbf{P}_2(5,6)$ und $\mathbf{P}_3(9,0)$ und skizzieren Sie diese.

Lösung: Für die Skizze verwenden Sie den Algorithmus von De-Casteljau, welchen wir im Unterricht besprochen haben.

Die kubische Bézier-Kurve kann direkt mit Hilfe der Formel aus den Slides aufgeschrieben werden: dabei sind $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ die gegebenen Kontrollpunkte:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_4 \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \end{bmatrix} t(1-t)^2 + \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \end{bmatrix} t^2(1-t) + \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} t^3 \qquad (0 \le t \le 1). \end{aligned}$$

Die zeichnerische Situation zeigt die folgende Abbildung:



Aufgabe 3: Nochmals: Bézier-Kurve durch vier Punkte

Betrachten Sie die vier Punkte aus Aufgabe 2. Welche kubische Bézier-Kurve geht exakt durch diese vier Punkte? Hinweis: Bekanntlich geht eine Bézier-Kurve der Form

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{C}_0(1-t)^3 + 3\mathbf{C}_1 t(1-t)^2 + 3\mathbf{C}_2 t^2(1-t) + \mathbf{C}_3 t^3$$

nicht durch alle Kontrollpunkte $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ und $\mathbf{C}_3$: lediglich durch den ersten und den letzten, d.h. $\mathbf{C}_0 = \mathbf{P}_0$ und $\mathbf{C}_3 = \mathbf{P}_3$. Wir wollen nun $\mathbf{C}_1 = (C_{1,x}, C_{1,y})^T$ und $\mathbf{C}_2 = (C_{2,x}, C_{2,y})^T$ so bestimmen, dass gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t=1/4) = \mathbf{P}_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}(t=3/4) = \mathbf{P}_2 &= \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die einzigen vier Variablen sind also die Komponenten von $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$. Wenn Sie den Ansatz

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^3 + 3\mathbf{C}_1 t(1-t)^2 + 3\mathbf{C}_2 t^2(1-t) + \mathbf{P}_3 t^3 \tag{1}$$

für $t = 1/4$ und $t = 3/4$ auswerten und verlangen, dass

$$\mathbf{P}(t=1/4) = \mathbf{P}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(t=3/4) = \mathbf{P}_2$$

gilt, erhalten Sie vier Gleichungen in den gesuchten Unbekannten $C_{1,x}$, $C_{1,y}$, $C_{2,x}$ und $C_{2,y}$. Beachte: es gibt viele Bézier-Kurven durch $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ welche in $\mathbf{P}_0$ starten und in $\mathbf{P}_3$ enden. Alleine der Fahrplan (wo man zu welcher Zeit t ist) macht die Darstellung eindeutig!

Lösung: Setzt man $t = 1/4$ in Gleichung (1) ein, erhält man wegen

$$\mathbf{P}(1/4) = \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3 \begin{bmatrix} C_{1,x} \\ C_{1,y} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \begin{bmatrix} C_{2,x} \\ C_{2,y} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) + \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{27}{64}C_{1,x}+\frac{9}{64}C_{2,x}&=2-\frac{9}{64}\\ \frac{27}{64}C_{1,y}+\frac{9}{64}C_{2,y}&=-4\end{aligned}$$

Analog erhält man mit $t=3/4$ in Gleichung (1)

$$\mathbf{P}(3/4)=\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(\frac{1}{4}\right)^3+3\begin{bmatrix}C_{1,x}\\C_{1,y}\end{bmatrix}\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\begin{bmatrix}C_{2,x}\\C_{2,y}\end{bmatrix}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)+\begin{bmatrix}9\\0\end{bmatrix}\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

und damit die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{9}{64}C_{1,x}+\frac{27}{64}C_{2,x}&=5-\frac{27}{64}\cdot 9\\ \frac{9}{64}C_{1,y}+\frac{27}{64}C_{2,y}&=6\end{aligned}$$

Zusammenfassend also (nach Multiplikation mit 64) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix}27&0&9&0\\0&27&0&9\\9&0&27&0\\0&9&0&27\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{1,x}\\C_{1,y}\\C_{2,x}\\C_{2,y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}119\\-256\\77\\384\end{bmatrix}$$

welches die Lösung

$$\mathbf{C}_1=\begin{bmatrix}C_{1,x}\\C_{1,y}\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}35\\-144\end{bmatrix}\qquad\text{und}\qquad\mathbf{C}_2=\begin{bmatrix}C_{2,x}\\C_{2,y}\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}14\\176\end{bmatrix}$$

hat. Eine Kontrolle für $t=1/4$ und $t=3/4$ ergibt tatsächlich

$$\mathbf{P}(1/4)=\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}\qquad\text{und}\qquad\mathbf{P}(3/4)=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4*: Die B-Spline-Funktionen $N_{j,m}(t)$

Zeigen Sie mit Hilfe eines Beweises durch Induktion nach m, dass gilt:

$$\sum_{j=i-m+1}^{i}N_{j,m}(t)=1$$

Beachte: diese Aufgabe ist mit einem Stern bezeichnet und daher nicht einfach!

Lösung: Induktionsbeweise:

- **Induktionsverankerung:** Wir zeigen, dass die Formel stimmt für $m=1$: Für ein bestimmtes $t_0\le t\le t_n$ ist lediglich ein Summand in der folgenden Summe 1, alle anderen aber 0:

$$\sum_{j=i-m+1}^{i}N_{j,m}(t)=\sum_{j=i}^{i}N_{j,1}(t)\;=\;N_{j,1}(t)\;=\;1.$$

- **Induktionsschritt:** Ausgehend von der Annahme, dass die Behauptung für ein $m-1>1$ gilt zeichen wir, dass die Behauptung auch für m gilt: Man hat nämlich nacheinander

$$\sum_{j=i-m+1}^{i} N_{j,m}(t) = \sum_{j=i-m+1}^{i} N_{j,m}(t) TODOTODOTODO$$

$$m=1: \quad \sum_{j=0}^{n} N_{j,1}(t) = 1 \text{ (ein Summand ist 1, alle anderen 0)}$$

$$m>1: \quad \sum_{j=i-m+1}^{i} N_{j,m}(t) = \sum_{j=i-m+2}^{i} \frac{t-t_j}{t_{j+m-1}-t_j} N_{j,m-1}(t) + \sum_{j=i-m+1}^{i-1} \frac{t_{j+m}-t}{t_{j+m}-t_{j+1}} N_{j+1,m-1}(t)$$

$$= \sum_{j=i-m+2}^{i} \underbrace{\left(\frac{t-t_j}{t_{j+m-1}-t_j} + \frac{t_{j+m-1}-t}{t_{j+m-1}-t_j} \right)}_{1} N_{j,m-1}(t)$$

$$= \sum_{j=i-m+2}^{i} N_{j,m-1}(t) = 1 \text{ (Induktionsannahme)}$$

Aufgabe 5: B-Spline Basisfunktionen

Berechnen Sie $N_{0,1}(t), N_{1,1}(t), N_{2,1}(t), N_{0,2}(t), N_{1,2}(t)$ und $N_{0,3}(t)$ für den Knotenvektor $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 3, 6)$.

Lösung: Man hat nacheinander zuerst die stückweise konstanten Basisfunktion

$$N_{0,1}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{1,1}(t) = \begin{cases} 1, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{2,1}(t) = \begin{cases} 1, & 3 \leq t < 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und weiter die stückweise linearen Basisfunktionen

$$N_{0,2}(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0} N_{0,1}(t) + \frac{t_2-t}{t_2-t_1} N_{1,1} = \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0 \leq t < 2 \\ 3-t, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{1,2}(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} N_{1,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2} N_{2,1} = \begin{cases} t-2, & 2 \leq t < 3 \\ \frac{6-t}{3}, & 3 \leq t < 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und schliesslich die stückweise quadratischen Basisfunktion

$$N_{0,3}(t)=\frac{t-t_0}{t_2-t_0}N_{0,2}(t)+\frac{t_3-t}{t_3-t_1}N_{1,2}(t)=\begin{cases}\frac{t^2}{6}, & 0\le t<2\\ -\frac{7}{12}t^2+3t-3, & 2\le t<3\\ \frac{(6-t)^2}{12}, & 3\le t<6\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Aufgabe 6: Quadratische B-Spline Basisfunktionen $N_{j,3}(t)$

Verwendet Sie die Rekursionsformel um $N_{j,3}(t)$ vollständig auszudrücken in t, t_j, t_{j+2} und t_{j+3}. Beachten Sie, dass $N_{j,3}(t)$ nur verschieden von Null ist für $t_i < t < t_{i+3}$. Plotten Sie $N_{j,3}(t)$ im Intervall $[t_j, t_{j+3}]$.

Lösung: Man hat

$$N_{j,3}(t)=\begin{cases}\dfrac{(t-t_j)^2}{(t_{j+2}-t_j)(t_{j+1}-t_j)} & \text{für } t_j\le t\le t_{j+1},\\ \dfrac{(t-t_j)(t_{j+2}-t)}{(t_{j+2}-t_j)(t_{j+2}-t_{j+1})}+\dfrac{(t-t_{j+1})(t_{j+3}-t)}{(t_{j+3}-t_{j+1})(t_{j+2}-t_{j+1})} & \text{für } t_{j+1}\le t\le t_{j+2},\\ \dfrac{(t_{j+3}-t)^2}{(t_{j+3}-t_{j+1})(t_{j+3}-t_{j+2})} & \text{für } t_{j+2}\le t\le t_{j+3},\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Aufgabe 7: Literaturstudium

Lesen Sie den Abschnitt 7.14 aus dem Buch von David Salomon, "*Curves and Surfaces for Computer Graphics* und betrachten Sie insbesondere das Beispiel auf der Seite 303 unten. Zeichnen Sie die Basisfunktionen $N_{03}(t)$, $N_{13}(t)$, $N_{23}(t)$, $N_{33}(t)$ und $N_{43}(t)$ auf (z.B. Maple verwenden). Beantworten Sie dann folgende Fragen mit entsprechenden Begründungen:

1. Wie sieht die NURBS-Kurve für $w_2 = 0$ aus?
2. Was bewirkt die Veränderung des Gewichtes w_2?

Lösung: Die Antworten stehen im Text oder sind in der Abbildung 7.21 eingezeichnet!