Computer Graphics: Curves

Josef F. Bürgler und Thomas Koller

Studiengang Informatik
Hochschule Luzern, Informatik

Computer Graphics (I.BA_CG)

Zum Einstieg

Thema: Kurven in $\mathbb{R}^2$ (Ebene) und im $\mathbb{R}^3$ (Raum).

Ziele: Sie können Kurven in der Ebene und im Raum mathematisch beschreiben und diese mit entsprechender Software graphisch darstellen.

Resultate: Sie lernen verschiedene Methoden um Kurven in der Ebene und im Raum mathematisch zu beschreiben (Bézier-, B-Spline- und NURBS-Kurven). Sie sind in der Lage deren Vor- und Nachteile zu erkennen.

Vorgehen: Ausgehend von der Idee, eine Kurve in der Ebene oder im Raum durch einige wenige Kontrollpunkte zu beschreiben wird die math. Beschreibung der Kurve schrittweise hergeleitet. Die dazu verwendeten Methoden werden durch einfach Beispiele illustriert.

Übersicht

Kurven in der Ebene

- Kurven der Form

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$$

Der Graph $\mathcal{G}(f)$ stellt die Kurve γ dar. Dies ist eine **explizite Darstellung** der Kurve. Die **implizite Darstellung** der Kurve lautet

$$F(x, y) = 0$$

In gewissen Fällen kann man sie auflösen nach y (oder x) und hat dann die explizite Darstellung der Kurve.

- **Parameterdarstellung**

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Man kann sich t als Zeit vorstellen, d.h. die obige Vorschrift gibt an, dass man sich zum Zeitpunkt t an der Stelle $\mathbf{X}(t)$ befindet. Zu Beginn befindet man sich in $\mathbf{X}(a)$ und am Ende in $\mathbf{X}(b)$.

Kurven in der Ebene (Fort.)

Example

Kreis mit Radius r und Mittelpunkt im Ursprung $(0, 0)$.

- **Explizite Darstellung:**

$$\gamma : [-r, r] \to \mathbb{R}, x \mapsto y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{oberer Halbkreis}$$
$$\gamma : [-r, r] \to \mathbb{R}, x \mapsto y = -\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{unterer Halbkreis}$$

- **Implizite Darstellung:**

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

- **Parameterdarstellung:**

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2, t \mapsto \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{bmatrix}$$

Kurven in der Ebene (Fort.)

Example

Beachte: die Parameterdarstellung ist nicht eindeutig, d.h. auch

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbf{R}^2, t \mapsto \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} r \cos 2t \\ r \sin 2t \end{bmatrix}$$

beschreibt den selben Kreis; er wird einfach doppelt so schnell durchfahren!

Eine andere mögliche Darstellung ist

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^2, t \mapsto \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} r \cos 2\pi t \\ r \sin 2\pi t \end{bmatrix}$$

Hier wird der Kreis in einer Zeiteinheit durchlaufen.

Kurven im Raum

Auf die Verallgemeinerung von expliziter, bzw. impliziter Darstellung im Raum wollen wir hier nicht eingehen. Wir beschränken uns hier auf die **Parameterdarstellung** von Kurven.

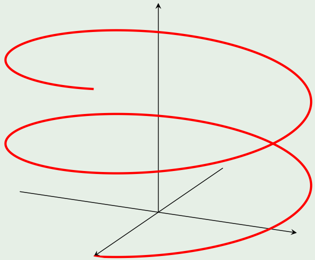
Jedem Paramater $t \in [a, b]$ wird ein Punkt $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^3$ im Raum zugeordnet. Reiht man die Punkte aneinander, entsteht die Kurve γ:

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Auch hier kann man sich t als Zeit vorstellen, d.h. die obige Vorschrift gibt an, dass man sich zum Zeitpunkt t an der Stelle $\mathbf{X}(t)$ befindet. Zu Beginn befindet man sich in $\mathbf{X}(a)$ und am Ende in $\mathbf{X}(b)$.

Anstelle der Koordinaten x_1, x_2 und x_3 werden auch x, y und z verwendet.

Example



Spirale entlang des Zylinders

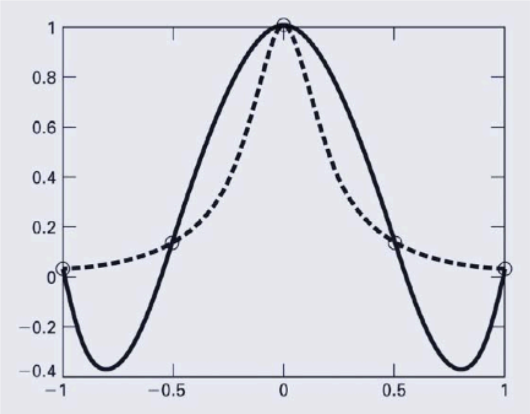
$$x^2 + y^2 = r^2$$

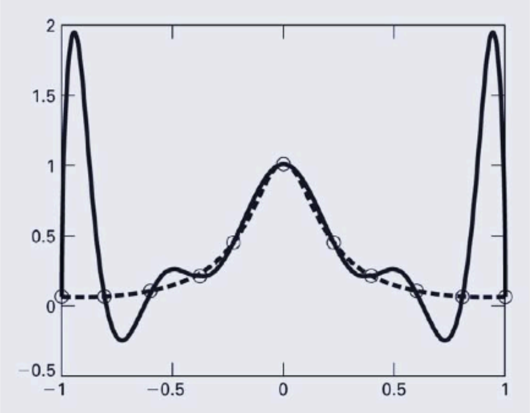
mit der Ganghöhe h:

$$\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3, \ t \mapsto \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht/(2\pi) \end{bmatrix}$$

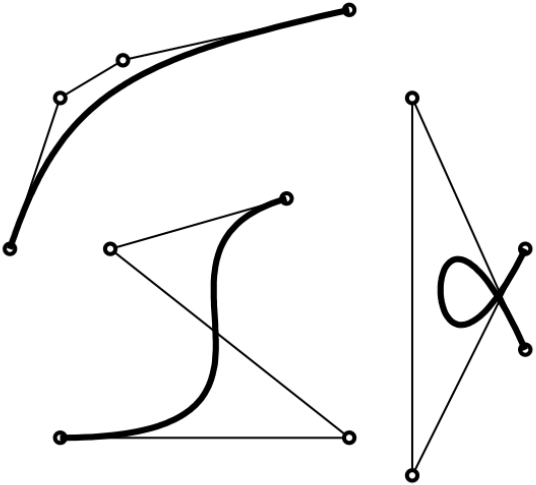
Interpolierende Splines

- Scheint die intuitivste Möglichkeit zu sein
- Spezifiziert werden Punkte, durch welche die Kurve gehen soll
- Überraschenderweise nicht die beste Wahl
  - Verhalten ist nur schwer vorauszusagen (Überschiessen, Oszillationen)
  - Schwierig, schöne glatte Kurven zu erhalten



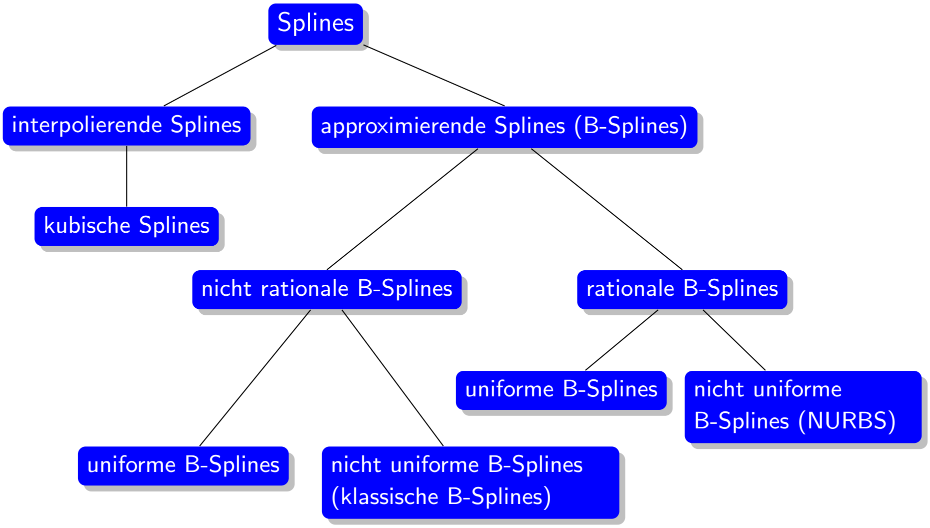


Approximierende Splines

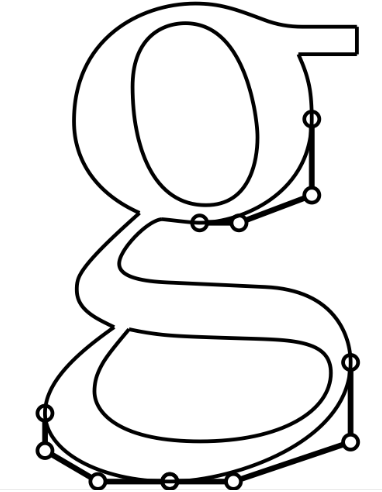


- Spezifiziert werden Punkte, genannt **Kontrollpunkte**, welche die Form der Kurve beeinflussen.
- Die Kurve geht nicht notwendiger Weise durch die Kontrollpunkte
- Diese Methode wird in der Praxis häufig verwendet (Bézier-, B-Spline-, NURBS-Kurven)

Interpolation versus Approximation (Übersicht)



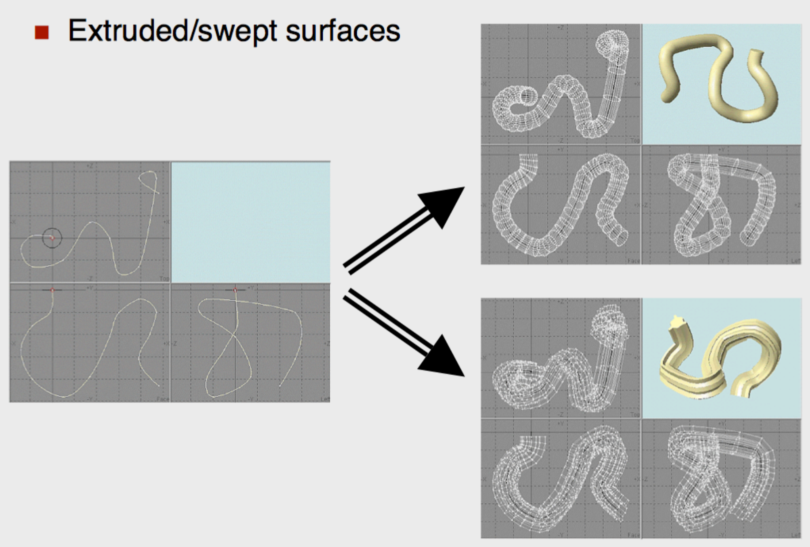
Nützlichkeit von Kurven



- Begrenzung eines Fonts mit Hilfe von Bézier-Kurven.
- Schwerpunkte von Objekten bewegen sich entlang von Kurven. Dabei können sie sich noch drehen (was wir mit den bereits gelernten Methoden berücksichtigen können).
- Viele Objekte (wie Strassen, Räder, etc.) werden durch Kurven begrenzt.
- Flugbahnen sind Kurven.
- Rotationsflächen werden durch eine Kurve erzeugt
- Allgemeine Flächen werden durch zwei Kurvenscharen erzeugt.

Nützlichkeit von Kurven (Fort.)

- 3D-Objekte können durch Extrusion (Strangpressen) oder Sweeping erzeugt werden



Übersicht

Methode der unbestimmten Koeffizienten

Example

Gesucht ist ein Polynom 3. Grades

$$P_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

welches durch die Punkte $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ und $(3, 1)$ verläuft. Die (unbestimmten) Koeffizienten c_0, c_1, c_2 und c_3 sind durch folgendes Gleichungssystem bestimmt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Man findet z.B. mit Maple $(c_0, c_1, c_2, c_3) = (1, 3/2, -2, 1/2)$.

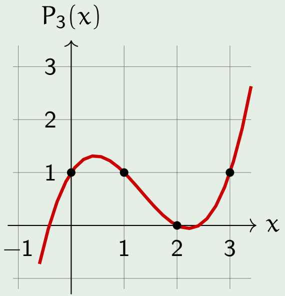
Problem: diese Methode ist numerisch nicht stabil, d.h. die Lösung dieses Gleichungssystems ändert sich enorm, wenn sich die rechte Seite nur minim verändert.

Methode der unbestimmten Koeffizienten (Fort.)

Example

Somit lautet das gesuchte Polynom

$$P_3(x) = 1 + \frac{3}{2}x - 2x^2 + \frac{1}{2}x^3$$



Nachteile:

- Für grosses n ist die numerische Lösung ungenau.
- Ändert sich ein Punkt muss das Gleichungssystem wieder gelöst werden.
- Ebenso, wenn man einen weiteren Punkt dazu nimmt.

Example

Gesucht ist ein Polynom 3. Grades durch die Punkte $(x_0, f(x_0)) = (0, 1)$, $(x_1, f(x_1)) = (1, 1)$, $(x_2, f(x_2)) = (2, 0)$ und $(x_3, f(x_3)) = (3, 1)$.

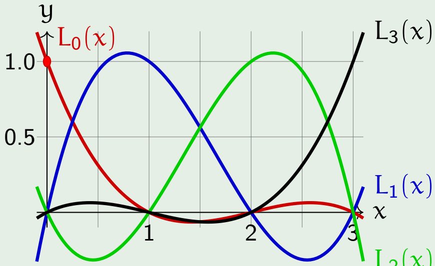
Lösung: Wir konstruieren zuerst Polynome 3. Grades, welche an allen Stützstellen Null sind ausser an einer, wo der Wert Eins (1) sein soll:

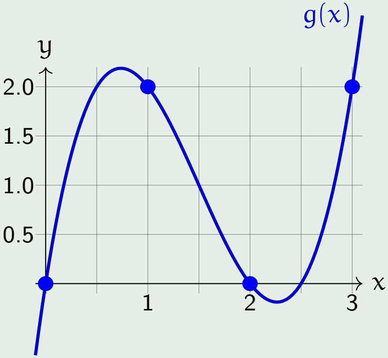
$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}, \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)},$$
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Da L_0, L_1, L_2 und L_3 Polynome 3. Grades sind, gilt:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3) \\ &= L_0(x) \cdot 1 + L_1(x) \cdot 1 + L_2(x) \cdot 0 + L_3(x) \cdot 1 \\ &= L_0(x) + L_1(x) + L_3(x) \end{aligned}$$

Example



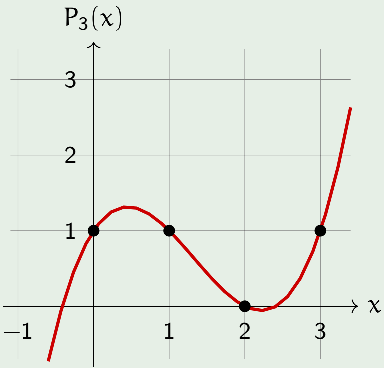


Die Funktionen $L_k(x)$ sind an den Stützstellen entweder Null oder Eins.

Beispielsweise ist die Funktion $g(x) = 2L_1(x) + 2L_3(x)$ an der ersten Stützstelle 0, an der 2. Stützstelle 2, an der 3. Stützstelle 0 und in der 4. Stützstelle schliesslich 2.

Methode nach Newton

Example



0., 1. und 2. dividierte Differenzen sind wie folgt definiert:

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$$

$$f[x_{i+1}, x_i] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, \ldots, n-1$$

$$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i] = \frac{f[x_{i+2}, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_i]}{x_{i+2} - x_i}, \ i = 0, \ldots, n-2$$

und k. dividierte Differenzen durch:

$$f[x_{i+k}, \ldots, x_i] = \frac{f[x_{i+k}, \ldots, x_{i+1}] - f[x_{i+k-1}, \ldots, x_i]}{x_{i+k} - x_i},$$

$$i = 0, \ldots, n-k$$

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) + f[x_3, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Die Berechnung erfolgt in einem Tableau wie auf der folgenden Seite gezeigt.

Example

Gesucht ist ein Polynom 3. Grades durch die Punkte $(x_0, f(x_0)) = (0,1)$, $(x_1, f(x_1)) = (1,1)$, $(x_2, f(x_2)) = (2,0)$ und $(x_3, f(x_3)) = (3,1)$.

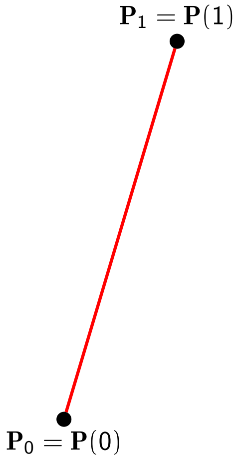
i	x_i	$f[x_i] = f(x_i)$	$f[x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+3}, x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$
0	0	1			
			$\frac{1-1}{1-0} = 0$		
1	1	1		$\frac{-1-0}{2-0} = -\frac{1}{2}$	
			$\frac{0-1}{2-1} = -1$		$\frac{1-(-\frac{1}{2})}{3-0} = \frac{1}{2}$
2	2	0		$\frac{1-(-1)}{3-1} = 1$	
			$\frac{1-0}{3-2} = 1$		
3	3	1			

Die Koeffizienten stehen auf der ersten (schräg nach unten laufenden) Zeile:

$$f(x) = 1 + 0(x-0) - \frac{1}{2}(x-0)(x-1) + \frac{1}{2}(x-0)(x-1)(x-2).$$

Übersicht

Lineare Interpolation (linear Bézier spline)



Gegeben die beiden Punkte $\mathbf{P}_0$ (Anfangspunkt) und $\mathbf{P}_1$ (Endpunkt). Gesucht die mathematische Beschreibung der Strecke zwischen den Punkten.

Drei mögliche Darstellungen:

- gewichteter Durchschnitt der Kontrollpunkte:

$$\mathbf{P}(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

- Polynom in t:

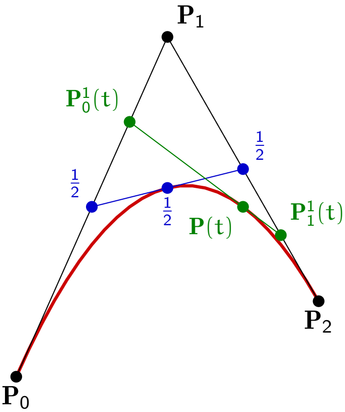
$$\mathbf{P}(t) = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)\, t + \mathbf{P}_0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

- Matrixform::

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= [\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}_0(1-t) + \mathbf{P}_1 t \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \end{aligned}$$

Quadratic Bézier spline

Ein quadratischer Bézier Spline entsteht mit Hilfe des **Algorithmus von de Casteljau** als lineare Interpolation zwischen linearen Interpolationen zwischen den Kontrollpunkten $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$.



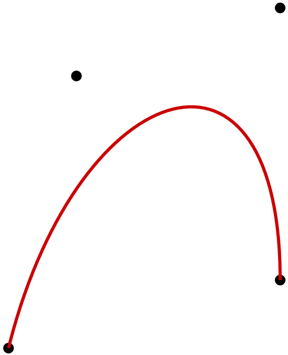
Für jedes t zwischen 0 und 1 berechnen wir

$$\mathbf{P}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1, \text{ und}$$
$$\mathbf{P}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2.$$

Mit Hilfe dieser beiden Punkte erhalten wir schliesslich den quadratischen Bézier Spline

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= (1-t)\mathbf{P}_0^1(t) + t\mathbf{P}_1^1(t) \\ &= (1-t)\left[(1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1\right] \\ &\quad + \ t\left[(1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2\right] \\ &= (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2(1-t)t\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2\end{aligned}$$

Gegeben sind die vier Kontrollpunkte $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$.



Mit $\mathbf{P}_0^1(t)$ und $\mathbf{P}_1^1(t)$ von vorher und

$$\mathbf{P}_2^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_2 + t\mathbf{P}_3$$

definiert man

$$\mathbf{P}_1^2(t) = (1-t)\mathbf{P}_0^1(t) + t\mathbf{P}_1^1(t)$$
$$\mathbf{P}_2^2(t) = (1-t)\mathbf{P}_1^1(t) + t\mathbf{P}_2^1(t)$$

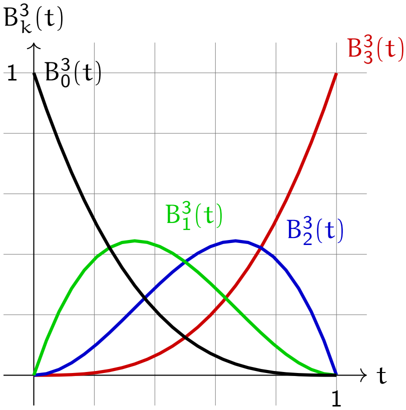
(folgt aus der Recursionsbeziehung der Bézier-Kurven — siehe hinten)

und erhält schliesslich die kubische Bézier-Kurve

$$\mathbf{P}(t) = (1-t)\mathbf{P}_1^2(t) + t\mathbf{P}_2^2(t) \;=\; (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$$

Wir werden diesen Ausdruck nun mit Hilfe der Binomialkoeffizienten eleganter schreiben.

Bernsteinpolynome



Dazu führen wir die Bernsteinpolynome ein

$$B_0^3(t) = \binom{3}{0}(1-t)^3 \;=\; (1-t)^3$$

$$B_1^3(t) = \binom{3}{1}(1-t)^2 t \;=\; 3(1-t)^2 t$$

$$B_2^3(t) = \binom{3}{2}(1-t)^1 t^2 \;=\; 3(1-t)^1 t^2$$

$$B_3^3(t) = \binom{3}{3}(1-t)^0 t^3 \;=\; t^3$$

allgemein

$$B_i^3(t) = \binom{3}{i}(1-t)^{3-i} t^i \quad (0 \leqslant i \leqslant 3)$$

Bézier-Kurve für $n = 3$ (kubische Bézier-Kurve):

$$\mathbf{P}(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3 \;=\; \sum_{i=0}^{3} B_i^3(t)\mathbf{P}_i.$$

Bernsteinpolynome (Fort.)

Eigenschaften der Bernsteinpolynome:

- Partition der Eins, d.h. die Gewichte addieren sich zu Eins (zeigen!):

$$\sum_{i=0}^{3} B_i^3(t) = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i \;=\; ((1-t)+t)^3 \;=\; 1^3 \;=\; 1 \quad \text{(binomischer Lehrsatz)}$$

- Die Funktionswerte sind immer grösser gleich Null, d.h. $B_i^n(t) \geqslant 0$ für $i = 0, 1, \ldots, n$, $t \in [0, 1]$.
- $B_i^n(t)$ ist maximal für $t = i/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
- Symmetrie: $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
- Rekursion: $B_{i+1}^{n+1}(t) = tB_i^n(t) + (1-t)B_{i+1}^n(t)$.
- Differentiation:

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n\left[B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\right], \quad i = 1, \ldots, (n-1).$$

mit der Definition $B_{-1}^{n-1} = 0$.

Bézier Kurve n. Ordnung

Die Bézier Kurve n. Ordnung definiert durch die Punkte $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, …, $\mathbf{P}_n$ ist definiert durch

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\mathbf{P}_i,$$

wobei die Bernsteinpolynomen gegeben sind durch

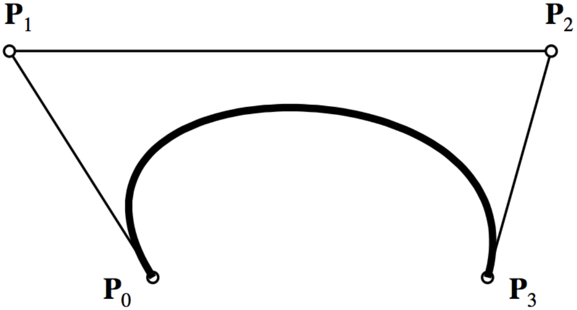
$$B_i^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i, \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Rekursionseigenschaft der Bézier Kurve. Man kann zeigen, dass folgende Beziehung gilt:

$$\mathbf{P}(t) = (1-t)\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)\mathbf{P}_i + t\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)\mathbf{P}_{i+1}$$

Diese Beziehung ist Grundlage für den **Algorithmus von de Casteljau**.

Eigenschaften von Bézier-Kurven

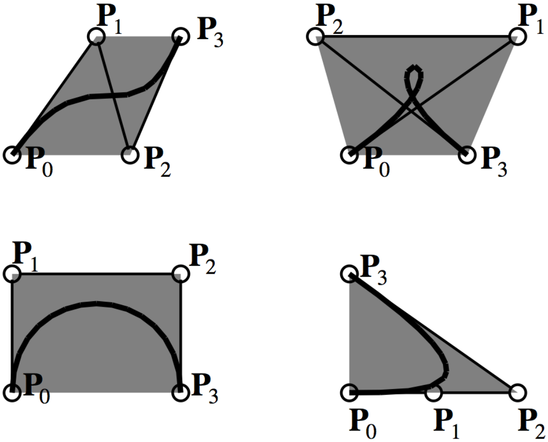


Die kubische Bézier-Kurve beginnt bei $\mathbf{P}_0$ und verläuft dort in Richung $\mathbf{P}_1$ und sie endet in $\mathbf{P}_3$ und ist dort tangential an $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$.

Example

Zeige dies durch Berechnen der Ableitung!

Eigenschaften von Bézier-Kurven (Fort.)



- Die Bézier-Kurve liegt immer innerhalb der konvexen Hülle[1] des Linienzuges (convex hull property).
- Die Anzahl der Kontrollpunkte $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$ bestimmt den Grad n der Bézier-Kurve. Je mehr Kontrollpunkte, umso grösser der Grad der Bézier-Kurve.
- Änderung eines Kontrollpunktes bewirkt eine Änderung der gesamten Kurve.
- Setzt man stetige Funktionswerte und Ableitungen voraus, lassen sich Bézier-Kurven höheren Grades durch Bézier-Kurven niedrigeren Grades zusammensetzen.

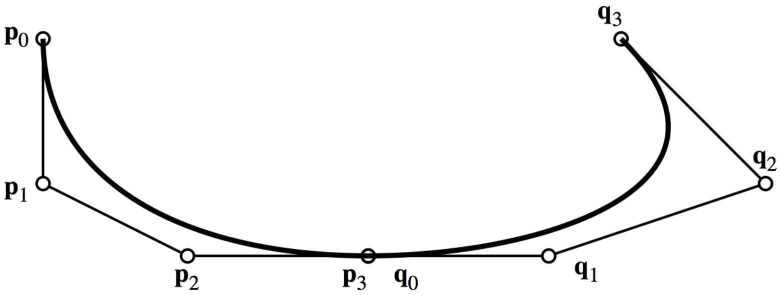
[1] Ein Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^n$ heisst **konvex**, falls mit zwei Punkten $\mathbf{x} \in \Omega$ und $\mathbf{y} \in \Omega$ auch alle Punkte auf der Verbindungsgeraden zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in Ω liegen, d.h. $\forall t \in [0,1]\ (t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in \Omega)$.

Problem bei Bézier-Kurven und Zusammensetzung von Bézier-Kurven

Wird bei einer Bézier-Kurve ein Kontrollpunkt verändert, ändert sich die gesamte Kurve. Man kann das verhindern, indem man Bézier-Kurven aneinander hängt. Dabei hat man aber Anforderungen an die Glattheit der Kurve. Man möchte

- C^0-Stetigkeit, d.h. die Segmente sollen an den Endpunkten keine Sprünge (Lücken) haben,
- C^1-Stetigkeit, d.h. die Segmente sollen an den Endpunkten eine gemeinsame Tangente (erste Ableitung ist gleich) haben,
- C^2-Stetigkeit, d.h. die Segmente sollen an den Endpunkten die selbe Krümmung (zweite Ableitung ist gleich) haben.

Hier werden zwei qubische Bézier-Kurven C^2-stetig aneinandergehängt. Ziel: den Grad der Kurve(n) von der Anzahl Kontrollpunkte zu entkoppeln.



B-Spline-Kurven

- Eine B-Spline Kurve vom Grad k besteht aus mehreren Bézier-Kurven vom Grad k, die so aneinander gehängt werden, dass die resultierende Kurve C^2-stetig ist (die Kurve sowie die 1. und 2. Ableitung sind stetig).
- Eine B-Spline Kurve vom Grad k, welche durch $n+1$ Kontrollpunkte definiert ist, besteht aus $n-k+1$ Bézier Kurven. Beispielsweise besteht eine kubische ($k=3$) B-Spline mit $6=n+1$ Kontrollpunkten $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, …, $\mathbf{P}_5$ aus $n-k+1=5-3+1=3$ Bézier Kurven.
- Eine B-Spline Kurve vom Grad k mit $n+1$ Kontrollpunkten $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, …, $\mathbf{P}_n$ wird definiert durch

$$\mathbf{B}_{n,k}(t) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t)\mathbf{P}_i, \quad (0 \leqslant t \leqslant t_{n-k+2}), \quad \text{wobei} \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

- Die Basis Funktionen $N_{i,k}(t)$ ergeben sich mit Hilfe der **Cox-de Boor Rekursionsbeziehungen**:

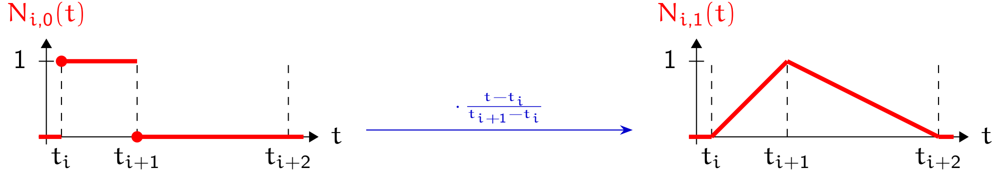
$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t_i \leqslant t < t_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

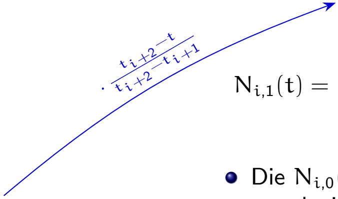
$$N_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \qquad k = 1,\, 2,\, 3, \cdots$$

wobei die t_i-Werte durch den **Knotenvektor** bestimmt sind. Verschwindet ein Nenner, dann wird definitionsgemäss der ganze entsprechende Term Null gesetzt.

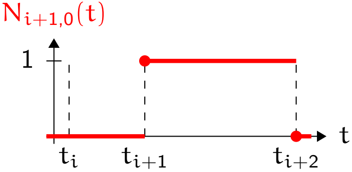
B-Spline-Kurven - Wie sehen die Basisfunktionen aus?

Wie sehen die Basisfunktionen $N_{i,0}(t)$ und $N_{i,1}(t)$ aus?



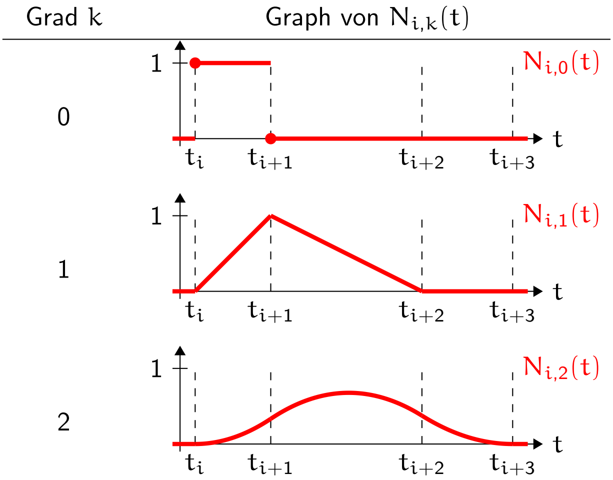


$$N_{i,1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} N_{i,0}(t) + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} N_{i+1,0}(t)$$



- Die $N_{i,0}(t)$ sind stückweise konstant und verschwinden ausser für $t_i \leqslant t < t_{i+1}$.
- Die $N_{i,1}(t)$ sind stückweise linear und C^0-stetig.
- Die $N_{i,k}(t)$ sind stückweise Polynome vom Grad k und C^{k-1}-stetig. $N_{i,k}(t)$ verschwindet ausser für $t_i \leqslant t < t_{i+k+1}$.

B-Spline-Kurven - Wie sehen die Basisfunktionen aus?



- Der Grad der Basis Funktionen $N_{i,k}(t)$ wird bestimmt durch den Parameter k welcher gleich dem Grad des B-Splines ist. $N_{i,k}(t)$ ist also ein Polynom k. Grades.
- Die Basis Funktionen $N_{i,k}(t)$ sind nur im Intervall $[t_i, t_{i+k+1}]$ verschieden von Null.
- Die Basis Funktionen $N_{i,k}(t)$ sind für $k > 0$ C^{k-1}-stetig.
- $N_{i,0}(t)$ ist nicht stetig,
- $N_{i,1}(t)$ ist stetig, also C^0-stetig,
- $N_{i,2}(t)$ ist stetig, und hat eine stetige erste Ableitung, also C^1-stetig,
- $N_{i,3}(t)$ ist stetig, und hat eine stetige erste und zweite Ableitung, also C^2-stetig,

Merke: Die $N_{i,k}(t)$ sind nur im Intervall $[t_i, t_{i+k+1}]$ verschieden von Null und sie hängen nur von den Knotenwerten t_i bis t_{i+k+1} ab. Somit beeinflusst der Kontrolpunkt $\mathbf{P}_i$ die Kurve nur für $t \in [t_i, t_{i+k+1}]$.

B-Spline-Kurven - Cox-de Boor Rekursionsbeziehung

Beachte, der Grad der der B-Spline Kurve (linear $k = 1$, quadratisch $k = 2$, kubisch $k = 3$, etc.) ist unabhängig von der Anzahl Kontrollpunkte n (bei der Bézier-Kurve hat man immer $n = k + 1$).

Die **Cox-de Boor Rekursionsbeziehungen** erlaubt die Berechnung der Basisfunktionen mit Hilfe des folgenden triangularen Schemas:

$$
\begin{tikzcd}
N_{0,0}(t) \arrow[r] & N_{0,1}(t) & \cdots & N_{0,k-1}(t) \arrow[r] & N_{0,k}(t) \\
N_{1,0}(t) \arrow[r] \arrow[ur] & N_{1,1}(t) & \cdots & N_{1,k-1}(t) \arrow[ur] & \\
\vdots & \vdots & & & \\
N_{n-1,0}(t) \arrow[r] & N_{n-1,1}(t) & & & \\
N_{n,0}(t) \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}
$$

B-Spline-Kurven - Der Knotenvektor

Die t_i-Werte ergeben sich aus dem **Knotenvektor**

$$\mathbf{T} = [t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m]$$

wobei $m = n + k + 1$ bestimmt wird durch den Grad k der B-Spline Kurve und die Anzahl Kontrollpunkte $(n + 1)$. Dabei muss gelten $t_i \leqslant t_{i+1},\ \forall i$, d.h. die t_i-Werte nehmen monoton zu!

Example

Wird beispielsweise ein kubischer B-Spline (mit $k = 3$) kontrolliert durch 6 Kontrollpunkte $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_5$, dann gilt $m = n + k + 1 = 5 + 3 + 1 = 9$, d.h. der Knotenvektor hat die Länge $m + 1 = 9 + 1 = 10$:

$$\mathbf{T} = [t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_8,\ t_9]$$

Also beispielsweise

$$\mathbf{T} = [0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9]$$

Falls die Knoten, wie hier gezeigt, äquidistant sind, spricht man von einem **uniformen** B-Spline, andernfalls von einem **nicht-uniformen** B-Spline (*engl. non-uniform B-spline*).

Example

Verwendet man einen beliebigen uniformen Knotenvektor, dann gehen Anfangs- und Endpunkt der B-Spline Kurve i. A. nicht durch $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_n$. Man kann dies erzwingen, indem man die ersten und letzten $k+1$ Werte im Knotenvektor identisch wählt.
Für eine B-Spline-Kurve mit kubischen Basisfunktionen ($k=3$) und fünf Kontrollpunkten $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ ($n=4$) lautet der Knotenvektor bei einem uniformen B-Spline

$$\mathbf{T} = (t_0, t_1, \ldots, t_8) = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2)$$

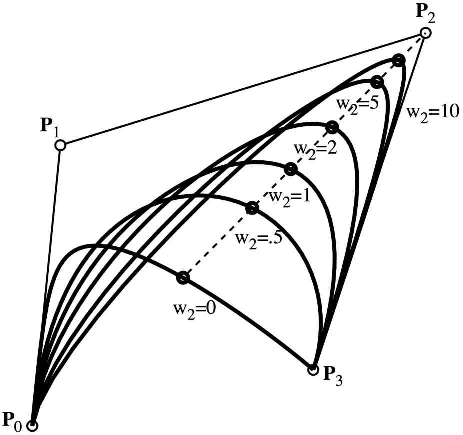
In diesem Fall spricht man von einem **eingespannten B-Spline** ansonsten von einem **offenen B-Spline**. Nicht eingehen wollen wir hier auf **geschlossene B-Splines**.

B-Spline-Kurven (Fort.)

Eigenschaften der B-Spline-Kurven $\mathbf{B}_{n,k}(t)$:

- $\mathbf{B}_{n,0}(t)$ ist keine eigentliche Kurve sondern besteht nur aus den Kontrollpunkten.
- $\mathbf{B}_{n,1}(t)$ ist ein Polygonzug durch die Kontrollpunkte
- $\mathbf{B}_{n,2}(t)$ besteht aus Stücken von Parabeln und ist in den Übergängen stetig und hat keine Knicke, d.h. eine stetige 1. Ableitung. Dies ist ein quadratischer B-Spline.
- $\mathbf{B}_{n,3}(t)$ besteht aus Stücken von kubischen Polynomen und ist bis und mit 2. Ableitung stetig, d.h. auch die Krümmung ist stetig! Dies ist ein kubischer B-Spline.
- Ab $k = 2$ geht die Kurve i. A. nicht mehr durch die Kontrollpunkte!

Rationale B-Splines-Kurven



Bei einer rationalen B-Spline-Kurve wird jedem Kontrollpunkt $\mathbf{P}_j$ ein Gewicht w_j zugeordnet. Dadurch kann einerseits der Einfluss dieses Punktes auf die Kurve vollständig eliminiert werden wenn $w_j = 0$ gesetzt wird. Andererseits kann der Einfluss des Punktes verstärkt werden, wenn man w_j besonders gross wählt (siehe Abb. links).

Man hat dann folgende Gleichung für die Kurve

$$\mathbf{P}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n} N_{j,k}(t) w_j \mathbf{P}_j}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,k}(t) w_j}$$

Analog definiert man übrigens auch die rationale Bézier-Kurve, wobei dort die Gewichtsfunktionen nicht $N_{i,k}(t)$, sondern $B_i^n(t)$ (die Bernstein Polynome) sind.

Rationale B-Splines-Kurven (Warum?)

Wir haben gesehen, dass folgende Abbildung den $\mathbb{R}^3$ (3D-Raum) auf den $\mathbb{P}^3$ (projektiver, 3D-Raum) abbildet:

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}^3, [x, y, z] \mapsto [xw, yw, zw, w] \qquad \text{homogene Koord.}$$

Statt des Kontrollpunkts $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i)$ verwenden wir den homogenen Kontrollpunkt $\mathbf{C}_i = (x_i w_i, y_i w_i, z_i w_i, w_i)$ und definieren die (homogenisierte) B-Spline-Kurve

$$\mathbf{P}_H(t) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t)\mathbf{C}_i$$

Gehen wir über zu den realen Koordinaten, folgt daraus

$$\mathbf{P}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,k}(t) w_j}$$

also die NURBS-Kurve (Non Uniform Rational B-Spline). Die NURBS-Kurve ist also nichts anderes als die homogenisierte, oder eben rationale B-Spline-Kurve.

NURBS-Kurven

NURBS (Non Uniform Rational Basic Splines)

- allgemeinste Form von Freiformkurven
- erweitern die Funktionalität der Bézier- und B-Spline-Kurven durch zusätzliche Gewichte w_i, die homogene Koordinate, für die Koordinaten der Kontrollpunkte.
- Bézier- und B-Spline-Kurven sind Spezialfälle von NURBS-Kurven.
- NURBS sind invariant bei den Transformationen (Skalierung, Translation, Rotation, Scherung) und den Parallel- und Perspektivprojektionen.
- Man hat (siehe vorige Seite):

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} R_{i,k}(t)\mathbf{P}_i \quad \text{mit}$$

$$R_{i,k}(t) = \frac{w_i N_{i,k}(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j N_{j,k}(t)}$$

Zusammenfassung Kurven

- Sie können jetzt einfache Kurven in der Ebene und im Raum analytisch auf verschiedene Arten beschreiben: beispielsweise durch eine Parameterdarstellung!
- Sie kennen jetzt den Unterschied zwischen Interpolation und Approximation von Kurven.
- Sie kennen die Eigenschaften von Bézier-, B-Spline- und NURBS-Kurven
- Sie können einfache Fälle von Hand berechnen: beispielsweise können Sie eine kubische Bézierkurve durch vier Punkte graphisch konstruieren und analytisch berechnen und Sie können ein Segment eines kubischen B-Splines analytisch berechnen.

Weiter führende Literatur/Links:

- Bézierkurven, ein Video von Prof. Edmund Weitz, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg.
- Interpolation mit "*natürlichen*" Splines, ein Video von Prof. Edmund Weitz, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg.
- Der Hobby-Algorithmus für "*schöne*" Kurven, ein Video von Prof. Edmund Weitz, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg.
- Bézier-Kurven mit zugehörigem JavaScript code zum Spielen.
- B-Splines mit zugehörigem JavaScript code zum Spielen.

Ich freue mich auf Ihre

Fragen