# Universelle Turingmaschine mit zwei Zuständen/Symbolen

Sven Fiergolla

September 25, 2017

## 1 Einführung

### 1.1 Informelle Definition der Turingmaschine

Turingmaschinen, benannt nach *Alan M. Turing*, sind das allgemeine Modell der theoretischen Informatik. Sie bestehen aus einem *unendlichen Band*, welches die Eingabe beinhaltet, einem *Lese/Schreibkopf* welcher eine eindeutige Position auf dem Band hat und einem *Steuerungselement*, häufig beschrieben durch eine (partielle) Übergangsfunktion. Die Turingmaschine arbeitet auf dem Band die Eingabe ab und befolgt dabei die Übergangsfunktion, sie terminiert sobald sie einen der Finalzustände erreicht und diesen nicht verlässt.

### 1.2 Formale Definition der Turingmaschine

Formal definieren wir die Turingmaschine als Sextupel
$\mathbf{M} = (\mathbf{Q}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{q_0}, \delta, \square)$ wobei:

$\mathbf{Q}$ = die endliche Zustandsmenge

$\mathbf{\Sigma}$ = das endliche Eingabealphabet

$\mathbf{\Gamma}$ = das endliche Bandalphabet und es gilt $\mathbf{\Sigma} \subset \mathbf{\Gamma}$

$\mathbf{q_0}$ = der Anfangszustand

$\delta$ = die (partielle) Überführungsfunktion

$\square$ = steht für das leere Feld (Blank)

### 1.3 Universelle Turingmaschinen

In der obigen Definition ist das Programm fest in die Maschine eingebaut und kann nicht verändert werden. Kodiert man die Beschreibung einer Turingmaschine **A** als Zeichenkette, so kann man selbige einer anderen Turingmaschine als Eingabe übergeben. Eine universelle Turingmaschine bekommt nun eine Eingabe w und die kodierte Beschriebung der Turingmaschine **A**. Im wesentlichen handelt die UTuringmaschine nun wie Turingmaschine **A**, simuliert also das Verhalten von **A** auf w angewand. Eine Vergleichbare Idee liegt in fast allen heutigen Rechnerarchitekturen vor. Formal ist eine universelle Turingmaschine eine Maschine $UTM$, die eine Eingabe $w\|x$ liest. Das Wort w ist hierbei eine die Beschreibung einer Turingmaschine $M_w$, die zu einer bestimmten Funktion mit Eingabe x die Ausgabe berechnet. $UTM$ simuliert also das Verhalten von $M_w$ mit Hilfe der Funktionsbeschreibung w und der Eingabe x.

## 2 Universelle TM mit nur zwei Zuständen

### 2.1 Idee

Im folgenden wird die Umwandlung einer beliebigen Turingmaschine A in eine Turingmaschine B mit nur zwei inneren Zuständen beschrieben. Ist Turingmaschine A eine universelle Turingmaschine ist auch B universell, also folgt damit, dass auch die Konstruktion einer universellen Turingmaschine mit nur zwei Zuständen möglich ist. Aus einer beliebigen Turingmaschine A mit $|Q_A| = n$ Zuständen und $|\Gamma_A| = m$ Bandsymbolen, konstruieren wir eine Maschine B mit zwei Zuständen und höchstens $4mn + m$ Symbolen. Maschine B handelt im wesentlichen exakt wie Maschine A, überträgt die Informtion des aktuellen Zustandes jedoch über die Symbole des aktuellen und folgenden Bandsymbols, da diese Information auch in die nächste Zelle des Bands übertragen werden muss, die Maschine aber nur zwei Zustände hat. Wechselt die Turingmaschine A nach dem besuchen eines Feldes in den Zustand 4, wird diese Information über sogenannte *"bouncing operations"*, also hin- und herspringen zwischen den beiden Feldern übertragen. Der gewünschte Zustand wird durch incrementieren und decrementieren der speziellen Symbole erreicht. Nach dem 4. Springen ist der neue Zustand in das Symbol des folgenden Feldes übertragen.

### 2.2 Konstruktion

Sei A Turingmaschine, $A_1, A_2, ..., A_m \in \mathbf{\Sigma_A}$ die Symbole und $q_1, q_2, ...q_n \in \mathbf{Q_A}$ die Zustände der Maschine. Zusätzlich zu den elementaren Symbolen von Maschine A, welche in Maschine B $B_1, B_2, ..., B_m \in \mathbf{\Sigma_B}$ heißen, besitzt Maschine B $4mn$ neue Symbole, welche Informationen über den Zustand und den Status der *bouncing operation* speichern. Diese bezweichnen wir als $B_{m,n,x,y}$, wobei m für die Symbole, n für die Zustände steht, x = + oder - ob der Zustand des letzten Feldes in diese Feld übertragen wird oder aus diesem Feld stammt und y = R oder L ob die Information in das rechte oder linke Feld übertragen wird.

Folgende Übergänge werden benötigt:

| **Nr.** | **Symbol** | **Zustand** ⇒ | **Symbol** | **Zustand** | **Richtung** |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $B_i$ | $\alpha$ | $B_{i,1,-,R}$ | $\alpha$ | $R$ |
| (2) | $B_i$ | $\beta$ | $B_{i,1,-,L}$ | $\alpha$ | $L$ |
| (3) | $B_{i,j,-,x}$ | $\beta$ | $B_{i,(j+1),-,x}$ | $\alpha$ | $x \in \{R, L\}$ |
| (4) | $B_{i,j,+,x}$ | $\alpha$ oder $\beta$ | $B_{i,(j-1),+,x}$ | $\beta$ | $x \in \{R, L\}$ |
| (5) | $B_{i,1,+,x}$ | $\alpha$ oder $\beta$ | $B_i$ | $\alpha$ | $x \in \{R, L\}$ |

Dazu wird eine Tabelle mit allen "komplexen" Symbolen mit folgendem Schema aufgestellt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $B_{0,q0,-,R}$ | $B_{1,q0,-,R}$ | $B_{2,q0,-,R}$ | ... |
| $B_{0,q0,-,L}$ | $B_{1,q0,-,L}$ | $B_{2,q0,-,L}$ | ... |
| $B_{0,q0,+,R}$ | $B_{1,q0,+,R}$ | $B_{2,q0,+,R}$ | ... |
| $B_{0,q0,+,L}$ | $B_{1,q0,+,L}$ | $B_{2,q0,+,L}$ | ... |
| $B_{0,q1,-,R}$ | $B_{1,q1,-,R}$ | $B_{2,q1,-,R}$ | ... |
| $B_{0,q1,-,L}$ | $B_{1,q1,-,L}$ | $B_{2,q1,-,L}$ | ... |
| ... | ... | ... | ... |

Nach Gleichung (1) exisitiert ein Übergang zwischen jedem elementaren Symbol $B_i$ in Zustand alpha, zu dem komplexem Symbol mit gleichem Index welches sich in der ersten Zeile der Tabelle befindet, mit Folgezustand alpha und Richtung $R$.

Nach Gleichung (2) exisitiert ein Übergang zwischen jedem elementaren Symbol $B_i$ in Zustand beta, zu dem komplexem Symbol mit gleichem Index welches sich in der zweiten Zeile der Tabelle befindet, mit Folgezustand alpha und Richtung $L$.

Nach Gleichung (3) exisitiert ein Übergang zwischen einem komplexen Symbol mit $-$ im Index aus Zustand beta, zu dem komplexen Symbol in der gleichen Spalte und 4 Zeilen weiter mit Folgezustand alpha. Dies gilt für beide Richtungsinzes $R$ und $L$.

Nach Gleichung (4) exisitiert ein Übergang zwischen einem komplexen Symbol mit + im Index aus Zustand alpha oder beta, zu dem komplexen Symbol in der gleichen Spalte und 4 Zeilen zurück mit Folgezustand beta. Dies gilt für beide Richtungsinzes $R$ und $L$ und natürlich nur für Symbole ab Zeile 4.

Nach Gleichung (5) exisitiert ein Übergang zwischen einem komplexem Symbol aus der 1. und 2. Spalte, aus Zustand alpha oder beta, zu dem elemntaren Symbol mit gleichem Index. Abhängig vom Zustand ist die Richtungsänderung $R$ oder $L$.

Nach Gleichung (6) exisitiert ein Übergang zwischen einem komplexem Symbol mit gleichem Index wie der ursprüngliche Index des Symbols aus der Zeile des aktuellen Zustands * 4 aus Zustand alpha. Das zu schreibende Symbol ist in der Spalte des ursprünglich zu schreibenden Symbols und der Zeile des Folgezustands * 4. Dies gilt für beide Richtungen. Ist der ursprüngliche Übergang mit Beweung nach rechts, ist der Folgezustand beta, das Symbol hat $R$ im Index und es folgt eine Bewegung nach rechts.

## 2.3 Anwendung

In der Anwendung wird zunächst die ursprüngliche Turingmachine als .tur Datei eingelesen. Das benötigte Format ist in der *FORMAT_EXAMPLE.tur* beschrieben. Anschließend werden die benötigten komplexen Symbole in der Tabelle erstellt und die Übergange nach den Gleichungen erstellt. Nun wird die neue Turingmaschine mit 2 Zuständen in eine neue .tur Datei geshrieben.