

Eine universelle Turingmaschine mit zwei Zuständen/Symbolen

Ein Paper von Claude E. Shannon

Sven Fiergolla

7. Juli 2017

Einführung

Formal definieren wir die Turingmaschine als Septupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, \square, F)$ wobei:

Q = die endliche Zustandsmenge

Σ = das endliche Eingabealphabet

Γ = das endliche Bandalphabet und es gilt $\Sigma \subset \Gamma$

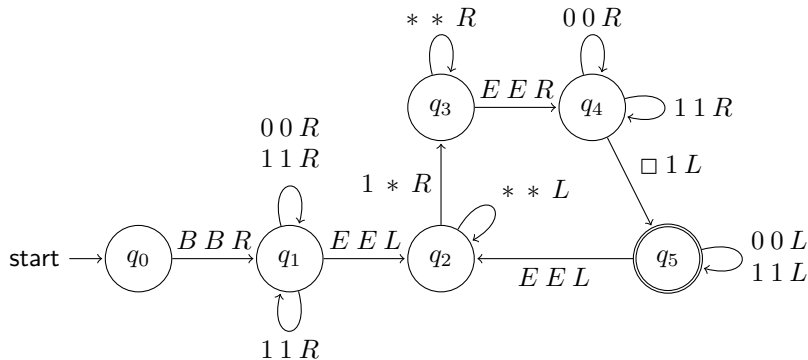
q_0 = der Anfangszustand

δ = die (partielle) Überföhrungsfunktion

\square = steht für das leere Feld (Blank)

F = die Menge der akzeptierenden Endzustände

Beispiel



Universelle Turingmaschinen

Formal ist eine universelle Turingmaschine eine Maschine UTM , die eine Eingabe $w|x$ liest. Das Wort w ist hierbei eine die Beschreibung einer Turingmaschine M_w , die zu einer bestimmten Funktion mit Eingabe x die Ausgabe berechnet. UTM simuliert also das Verhalten von \mathbb{M}_{\approx} mit Hilfe der Funktionsbeschreibung w und der Eingabe x .

Konstruktion

Turingmaschine A : $A_1, A_2, \dots, A_m \in \Sigma_A$ die Symbole und $q_1, q_2, \dots, q_n \in Q_A$ die Zustände der Maschine. Maschine B besitzt:

- ▶ elementare Symbolen von Maschine A , $B_1, B_2, \dots, B_m \in \Sigma_B$
- ▶ $2 \cdot 2 \cdot m \cdot n$ neue Symbole, welche Informationen über den Zustand und den Status der *bouncing operation* speichern: $B_{m,n,x,y} \in \Sigma_B$
 - ▶ $m =$ Symbole von A , $|\Sigma_A|$
 - ▶ $n =$ Zustände von A , $|Q_A|$
 - ▶ $x = +$ oder $-$ ob der Zustand des letzten Feldes in diese Feld übertragen wird oder aus diesem Feld stammt
 - ▶ $y = R$ oder L ob die Information in das rechte oder linke Feld übertragen wird.

Insgesamt besitzt Maschine B also $m + 4mn$ Symbole.

Zustände

Die Zustände von Maschine B werden α und β heißen.

Um die Information des aktuellen Zustands nach bearbeiten eines Symbols in der nächsten Zelle zur Verfügung zu haben, auch wenn die TM B nur zwei Zustände hat, wird diese in den Symbolen gespeichert (Index n) und über die sogenannte *bouncing operation* in die nächste Zelle übertragen.

Übergänge

Nr.	Symbol	Zustand \Rightarrow	Symbol	Zustand	Richtung
(1)	B_i	α	$B_{i,1,-,R}$	α	R
(2)	B_i	β	$B_{i,1,-,L}$	α	L
(3)	$B_{i,j,-,x}$	α or β	$B_{i,(j+1),-,x}$	α	$x \in \{R, L\}$
(4)	$B_{i,j,+,x}$	α or β	$B_{i,(j-1),-,x}$	β	$x \in \{R, L\}$
(5)	$B_{i,1,+,x}$	α or β	B_i	α	$x \in \{R, L\}$

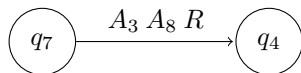
zusätzlich erhält Maschine B für jeden Übergang in A :

$$(6) (A_i, q_j) \rightarrow (A_k, q_l, \overset{R}{L}) \Rightarrow (B_{i,j,-,x}, \alpha) \rightarrow (B_{k,l,+, \overset{R}{L}}), \overset{\beta}{\alpha}, \overset{R}{L}$$

Beispiel

Maschine A :

$\dots | \underbrace{A_3}_{\text{}} | A_{13} | \dots$



$\dots | A_8 | \underbrace{A_{13}}_{\text{}} | \dots$

Beispiel

Maschine B :

Ausgangssituation	Übergangsfunktion	Gleichung
$\dots \underbrace{B_{3,7,-,x}} B_{13} \dots$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$\dots B_{8,4,+,R} \underbrace{B_{13}} \dots$		