Eine universelle Turingmaschine mit zwei Zuständen/Symbolen

Ein Paper von Claude E. Shannon

Sven Fiergolla

23. August 2017

Übersicht

Einführung

Universelle Turingmaschinen

Turingaschine mit zwei Zuständen

Beispiel

Unmöglichkeit einer universellen Turingmaschine mit einem Zustand

Aquivalente Turingmaschine mit nur zwei Symbolen

Fazit

Quellen

Einführung

Formal definieren wir die Turingmaschine als Sextupel $\mathbf{M} = (\mathbf{Q}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{q_0}, \delta, \square)$ wobei:

$\mathbf{Q} =$ die endliche Zustandsmenge

$\mathbf{\Sigma} =$ das endliche Eingabealphabet

$\mathbf{\Gamma} =$ das endliche Bandalphabet und es gilt $\mathbf{\Sigma} \subset \mathbf{\Gamma}$

$\mathbf{q_0} =$ der Anfangszustand

$\delta =$ die (partielle) Überführungsfunktion

$\square =$ steht für das leere Feld (Blank)

Universelle Turingmaschinen

Formal ist eine universelle Turingmaschine eine Maschine UTM, die eine Eingabe $w|x$ liest. Das Wort w ist hierbei eine die Beschreibung einer Turingmaschine M_w, die zu einer bestimmten Funktion mit Eingabe x die Ausgabe berechnet. UTM simuliert also das Verhalten von M_w mit Hilfe der Funktionsbeschreibung w und der Eingabe x.

Zustände

Die Zustände von Maschine B werden α und β heißen.

Um die Information des aktuellen Zustands nach bearbeiten eines Symbols in der nächsten Zelle zur Verfügung zu haben, auch wenn die $TM\ B$ nur zwei Zustände hat, wird diese in den Symbolen gespeichert (Index n) und über die sogenannte *bouncing operation* in die nächste Zelle übertragen.

Konstruktion

Turingmaschine A: $A_1, A_2, ..., A_m \in \Sigma_A$ die Symbole und $q_1, q_2, ...q_n \in Q_A$ die Zustände der Maschine. Maschine B besitzt:

- elementare Symbolen von Maschine A: $B_1, B_2, ..., B_m \in \Sigma_B$
- $m \cdot n \cdot 2 \cdot 2$ neue Symbole, welche Informationen über den Zustand und den Status der *bouncing operation* speichern: $B_{m,n,x,y} \in \Sigma_B$
  - $m =$ Symbole von $A, |\Sigma_A|$
  - $n =$ Zustände von $A, |Q_A|$
  - $x = +$ oder $-$ ob der Zustand des letzten Feldes in diese Feld übertragen wird oder aus diesem Feld stammt
  - $y = R$ oder L ob die Information in das rechte oder linke Feld übertragen wird.

Insgesammt besitzt Maschine B also $m + 4mn$ Symbole.

Übergänge

Nr.	Symbol	Zustand $\Rightarrow$	Symbol	Zustand	Richtung
(1)	B_i	α	$B_{i,1,-,R}$	α	R
(2)	B_i	β	$B_{i,1,-,L}$	α	L
(3)	$B_{i,j,-,x}$	α oder β	$B_{i,(j+1),-,x}$	α	$x \in \{R, L\}$
(4)	$B_{i,j,+,x}$	α oder β	$B_{i,(j-1),+,x}$	β	$x \in \{R, L\}$
(5)	$B_{i,1,+,x}$	α oder β	B_i	α	$x \in \{R, L\}$

zusätzlich erhält Maschine B für jeden Übergang in A :

(6) $\delta(A_i, q_j) \rightarrow (A_k, q_l, {}^{R}_{L}) \Rightarrow \delta(B_{i,j,-,x}, \alpha) \rightarrow (B_{k,l,+,{}^{R}_{L}}, {}^{\beta}_{\alpha}, {}^{R}_{L})$

Beispiel Maschine A

Maschine A:

$$...|\underbrace{A_3}|A_{13}|...$$

$$q_7 \xrightarrow{A_3\ A_8\ R} q_4$$

$$...|A_8|\underbrace{A_{13}}|...$$

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	Übergangsfunktion	Gleichung
$...\vert\underbrace{B_{3,7,-,x}}\vert B_{13}\vert...$	$\delta(B_{3,7,-,x},\alpha) = (B_{8,4,+,R},\beta,R)$	(6)
$...\vert B_{8,4,+,R}\vert\underbrace{B_{13}}\vert...$	$\delta(B_{13},\beta) = (B_{13,1,-,L},\alpha,L)$	(2)
$...\vert\underbrace{B_{8,4,+,R}}\vert B_{13,1,-,L}\vert...$	$\delta(B_{8,4,+,R},\alpha) = (B_{8,3,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\vert B_{8,3,+,R}\vert\underbrace{B_{13,1,-,L}}\vert...$	$\delta(B_{13,1,-,L},\beta) = (B_{13,2,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\vert\underbrace{B_{8,3,+,R}}\vert B_{13,2,-,L}\vert...$	$\delta(B_{8,3,+,R},\alpha) = (B_{8,2,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\vert B_{8,2,+,R}\vert\underbrace{B_{13,2,-,L}}\vert...$	$\delta(B_{13,2,-,L},\beta) = (B_{13,3,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\vert\underbrace{B_{8,2,+,R}}\vert B_{13,3,-,L}\vert...$	$\delta(B_{8,2,+,R},\alpha) = (B_{8,1,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\vert B_{8,1,+,R}\vert\underbrace{B_{13,3,-,L}}\vert...$	$\delta(B_{13,3,-,L},\beta) = (B_{13,4,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\vert\underbrace{B_{8,1,+,R}}\vert B_{13,4,-,L}\vert...$	$\delta(B_{8,1,+,R},\alpha) = (B_8,\alpha,R)$	(5)
$...\vert B_8\vert\underbrace{B_{13,4,-,L}}\vert B_x\vert...$	$\dots$	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	**Übergangsfunktion**	**Gleichung**
$...\|\underbrace{B_{3,7,-,x}}\|B_{13}\|...$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$...\|B_{8,4,+,R}\|\underbrace{B_{13}}\|...$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$...\|\underbrace{B_{8,4,+,R}}\|B_{13,1,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\|B_{8,3,+,R}\|\underbrace{B_{13,1,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,3,+,R}}\|B_{13,2,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\|B_{8,2,+,R}\|\underbrace{B_{13,2,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,2,+,R}}\|B_{13,3,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\|B_{8,1,+,R}\|\underbrace{B_{13,3,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,1,+,R}}\|B_{13,4,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$...\|B_8\|\underbrace{B_{13,4,-,L}}\|B_x\|...$	$\ldots$	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	**Übergangsfunktion**	**Gleichung**
$...\vert\underbrace{B_{3,7,-,x}}\vert B_{13}\vert...$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$...\vert B_{8,4,+,R}\vert\underbrace{B_{13}}\vert...$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$...\vert\underbrace{B_{8,4,+,R}}\vert B_{13,1,-,L}\vert...$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\vert B_{8,3,+,R}\vert\underbrace{B_{13,1,-,L}}\vert...$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\vert\underbrace{B_{8,3,+,R}}\vert B_{13,2,-,L}\vert...$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\vert B_{8,2,+,R}\vert\underbrace{B_{13,2,-,L}}\vert...$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\vert\underbrace{B_{8,2,+,R}}\vert B_{13,3,-,L}\vert...$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\vert B_{8,1,+,R}\vert\underbrace{B_{13,3,-,L}}\vert...$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\vert\underbrace{B_{8,1,+,R}}\vert B_{13,4,-,L}\vert...$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$...\vert B_8\vert\underbrace{B_{13,4,-,L}}\vert B_x\vert...$	$\ldots$	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	**Übergangsfunktion**	**Gleichung**
$...\|\underbrace{B_{3,7,-,x}}\|B_{13}\|...$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$...\|B_{8,4,+,R}\|\underbrace{B_{13}}\|...$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$...\|\underbrace{B_{8,4,+,R}}\|B_{13,1,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\|B_{8,3,+,R}\|\underbrace{B_{13,1,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,3,+,R}}\|B_{13,2,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\|B_{8,2,+,R}\|\underbrace{B_{13,2,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,2,+,R}}\|B_{13,3,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\|B_{8,1,+,R}\|\underbrace{B_{13,3,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,1,+,R}}\|B_{13,4,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$...\|B_8\|\underbrace{B_{13,4,-,L}}\|B_x\|...$	$\dots$	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	**Übergangsfunktion**	**Gleichung**
$\dots\vert\underbrace{B_{3,7,-,x}}\vert B_{13}\vert\dots$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$\dots\vert B_{8,4,+,R}\vert\underbrace{B_{13}}\vert\dots$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$\dots\vert\underbrace{B_{8,4,+,R}}\vert B_{13,1,-,L}\vert\dots$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots\vert B_{8,3,+,R}\vert\underbrace{B_{13,1,-,L}}\vert\dots$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots\vert\underbrace{B_{8,3,+,R}}\vert B_{13,2,-,L}\vert\dots$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots\vert B_{8,2,+,R}\vert\underbrace{B_{13,2,-,L}}\vert\dots$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots\vert\underbrace{B_{8,2,+,R}}\vert B_{13,3,-,L}\vert\dots$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots\vert B_{8,1,+,R}\vert\underbrace{B_{13,3,-,L}}\vert\dots$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots\vert\underbrace{B_{8,1,+,R}}\vert B_{13,4,-,L}\vert\dots$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$\dots\vert B_8\vert\underbrace{B_{13,4,-,L}}\vert B_x\vert\dots$	$\dots$	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	**Übergangsfunktion**	**Gleichung**
$...\vert\underbrace{B_{3,7,-,x}}\vert B_{13}\vert...$	$\delta(B_{3,7,-,x},\alpha) = (B_{8,4,+,R},\beta,R)$	(6)
$...\vert B_{8,4,+,R}\vert\underbrace{B_{13}}\vert...$	$\delta(B_{13},\beta) = (B_{13,1,-,L},\alpha,L)$	(2)
$...\vert\underbrace{B_{8,4,+,R}}\vert B_{13,1,-,L}\vert...$	$\delta(B_{8,4,+,R},\alpha) = (B_{8,3,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\vert B_{8,3,+,R}\vert\underbrace{B_{13,1,-,L}}\vert...$	$\delta(B_{13,1,-,L},\beta) = (B_{13,2,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\vert\underbrace{B_{8,3,+,R}}\vert B_{13,2,-,L}\vert...$	$\delta(B_{8,3,+,R},\alpha) = (B_{8,2,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\vert B_{8,2,+,R}\vert\underbrace{B_{13,2,-,L}}\vert...$	$\delta(B_{13,2,-,L},\beta) = (B_{13,3,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\vert\underbrace{B_{8,2,+,R}}\vert B_{13,3,-,L}\vert...$	$\delta(B_{8,2,+,R},\alpha) = (B_{8,1,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\vert B_{8,1,+,R}\vert\underbrace{B_{13,3,-,L}}\vert...$	$\delta(B_{13,3,-,L},\beta) = (B_{13,4,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\vert\underbrace{B_{8,1,+,R}}\vert B_{13,4,-,L}\vert...$	$\delta(B_{8,1,+,R},\alpha) = (B_8,\alpha,R)$	(5)
$...\vert B_8\vert\underbrace{B_{13,4,-,L}}\vert B_x\vert...$	$\dots$	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	Übergangsfunktion	Gleichung
$...\|\underbrace{B_{3,7,-,x}}\|B_{13}\|...$	$\delta(B_{3,7,-,x},\alpha) = (B_{8,4,+,R},\beta,R)$	(6)
$...\|B_{8,4,+,R}\|\underbrace{B_{13}}\|...$	$\delta(B_{13},\beta) = (B_{13,1,-,L},\alpha,L)$	(2)
$...\|\underbrace{B_{8,4,+,R}}\|B_{13,1,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,4,+,R},\alpha) = (B_{8,3,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\|B_{8,3,+,R}\|\underbrace{B_{13,1,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,1,-,L},\beta) = (B_{13,2,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,3,+,R}}\|B_{13,2,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,3,+,R},\alpha) = (B_{8,2,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\|B_{8,2,+,R}\|\underbrace{B_{13,2,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,2,-,L},\beta) = (B_{13,3,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,2,+,R}}\|B_{13,3,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,2,+,R},\alpha) = (B_{8,1,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\|B_{8,1,+,R}\|\underbrace{B_{13,3,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,3,-,L},\beta) = (B_{13,4,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,1,+,R}}\|B_{13,4,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,1,+,R},\alpha) = (B_8,\alpha,R)$	(5)
$...\|B_8\|\underbrace{B_{13,4,-,L}}\|B_x\|...$	$\dots$	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	Übergangsfunktion	Gleichung
$...\|\underbrace{B_{3,7,-,x}}\|B_{13}\|...$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$...\|B_{8,4,+,R}\|\underbrace{B_{13}}\|...$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$...\|\underbrace{B_{8,4,+,R}}\|B_{13,1,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\|B_{8,3,+,R}\|\underbrace{B_{13,1,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,3,+,R}}\|B_{13,2,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\|B_{8,2,+,R}\|\underbrace{B_{13,2,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,2,+,R}}\|B_{13,3,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\|B_{8,1,+,R}\|\underbrace{B_{13,3,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,1,+,R}}\|B_{13,4,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$...\|B_8\|\underbrace{B_{13,4,-,L}}\|B_x\|...$	$\dots$	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	**Übergangsfunktion**	**Gleichung**
$...\|\underbrace{B_{3,7,-,x}}\|B_{13}\|...$	$\delta(B_{3,7,-,x},\alpha)=(B_{8,4,+,R},\beta,R)$	(6)
$...\|B_{8,4,+,R}\|\underbrace{B_{13}}\|...$	$\delta(B_{13},\beta)=(B_{13,1,-,L},\alpha,L)$	(2)
$...\|\underbrace{B_{8,4,+,R}}\|B_{13,1,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,4,+,R},\alpha)=(B_{8,3,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\|B_{8,3,+,R}\|\underbrace{B_{13,1,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,1,-,L},\beta)=(B_{13,2,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,3,+,R}}\|B_{13,2,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,3,+,R},\alpha)=(B_{8,2,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\|B_{8,2,+,R}\|\underbrace{B_{13,2,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,2,-,L},\beta)=(B_{13,3,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,2,+,R}}\|B_{13,3,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,2,+,R},\alpha)=(B_{8,1,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\|B_{8,1,+,R}\|\underbrace{B_{13,3,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,3,-,L},\beta)=(B_{13,4,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,1,+,R}}\|B_{13,4,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,1,+,R},\alpha)=(B_8,\alpha,R)$	(5)
$...\|B_8\|\underbrace{B_{13,4,-,L}}\|B_x\|...$	$\dots$	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	**Übergangsfunktion**	**Gleichung**
$...\|\underbrace{B_{3,7,-,x}}\|B_{13}\|...$	$\delta(B_{3,7,-,x},\alpha) = (B_{8,4,+,R},\beta,R)$	(6)
$...\|B_{8,4,+,R}\|\underbrace{B_{13}}\|...$	$\delta(B_{13},\beta) = (B_{13,1,-,L},\alpha,L)$	(2)
$...\|\underbrace{B_{8,4,+,R}}\|B_{13,1,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,4,+,R},\alpha) = (B_{8,3,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\|B_{8,3,+,R}\|\underbrace{B_{13,1,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,1,-,L},\beta) = (B_{13,2,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,3,+,R}}\|B_{13,2,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,3,+,R},\alpha) = (B_{8,2,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\|B_{8,2,+,R}\|\underbrace{B_{13,2,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,2,-,L},\beta) = (B_{13,3,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,2,+,R}}\|B_{13,3,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,2,+,R},\alpha) = (B_{8,1,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\|B_{8,1,+,R}\|\underbrace{B_{13,3,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,3,-,L},\beta) = (B_{13,4,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,1,+,R}}\|B_{13,4,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,1,+,R},\alpha) = (B_8,\alpha,R)$	(5)
$...\|B_8\|\underbrace{B_{13,4,-,L}}\|B_x\|...$	$\ldots$	(6)

UTM mit nur einem Zustand unmöglich

Beweis per Kontraposition von Shannon:
Annahme: es existiert eine universelle Turingmaschine mit nur einem Zustand.

$\sqrt{2}$ ist eine berechenbare irrationale Zahl und kann von einer UTM berechnet werden. Dazu muss die UTM kontinuierlich die Ziffern von $\sqrt{2}$ schreiben.

$\sqrt{2}$ ist turingberechenbar $\Rightarrow$ eine UTM kann $\sqrt{2}$ berechnen

UTM mit nur einem Zustand unmöglich

Beweis per Kontraposition von Shannon:
Annahme: es existiert eine universelle Turingmaschine mit nur einem Zustand.

$\sqrt{2}$ ist eine berechenbare irrationale Zahl und kann von einer UTM berechnet werden. Dazu muss die UTM kontinuierlich die Ziffern von $\sqrt{2}$ schreiben.

$\sqrt{2}$ ist turingberechenbar $\Rightarrow$ eine UTM kann $\sqrt{2}$ berechnen

UTM mit nur einem Zustand unmöglich

Beweis per Kontraposition von Shannon:
Annahme: es existiert eine universelle Turingmaschine mit nur einem Zustand.

$\sqrt{2}$ ist eine berechenbare irrationale Zahl und kann von einer UTM berechnet werden. Dazu muss die UTM kontinuierlich die Ziffern von $\sqrt{2}$ schreiben.

$\sqrt{2}$ ist turingberechenbar $\Rightarrow$ eine UTM kann $\sqrt{2}$ berechnen

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

- 1.1 : Lesekopf liest $\square$ und bleibt im $\square$-Bereich

1.1 Die TM wird nie mehr als ein $\square$ der Eingabe verändern $\Rightarrow$ das Eingabeband ist nur auf einem endlichen Teil beschrieben $\Rightarrow$ das Band kann nach der Bearbeitung nicht $\sqrt{2}$ enthalten.

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

- 1.1 : Lesekopf liest $\square$ und bleibt im $\square$-Bereich
- 1.2 : Lesekopf verlässt $\square$

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

- 1.1 : Lesekopf liest $\square$ und bleibt im $\square$-Bereich
- 1.2 : Lesekopf verlässt $\square$
  - $1.2.1$: Lesekopf verlässt $\square$ nach links

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

- 1.1 : Lesekopf liest $\square$ und bleibt im $\square$-Bereich
- 1.2 : Lesekopf verlässt $\square$
  - $1.2.1$: Lesekopf verlässt $\square$ nach links
    - $1.2.1.1$ linke unendliche Seite des Bandes wird nicht betreten

$1.2.1.1$ Die TM betritt nur eine Seite des Bandes $\rightarrow$ wird in Fall 2 behandelt

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

- 1.1 : Lesekopf liest $\square$ und bleibt im $\square$-Bereich
- 1.2 : Lesekopf verlässt $\square$
  - $1.2.1$: Lesekopf verlässt $\square$ nach links
    - $1.2.1.1$ linke unendliche Seite des Bandes wird nicht betreten
    - $1.2.1.2$ linke unendliche Seite des Bandes wird betreten

$1.2.1.2$ Die TM geht unendlich weit nach Links $\Rightarrow$ linke Seite des Bandes wird mit konstantem Symbol beschrieben und rechte unendliche Seite des Bandes nie betreten $\Rightarrow$ Band kann nach der Bearbeitung nicht $\sqrt{2}$ enthalten.

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

- 1.1 : Lesekopf liest $\square$ und bleibt im $\square$-Bereich
- 1.2 : Lesekopf verlässt $\square$
  - $1.2.1$: Lesekopf verlässt $\square$ nach links
    - $1.2.1.1$ linke unendliche Seite des Bandes wird nicht betreten
    - $1.2.1.2$ linke unendliche Seite des Bandes wird betreten
  - $1.2.2$: Lesekopf verlässt $\square$ nach Rechts

$1.2.2$ analog zu $1.2.1$.
Damit können wir annehmen, dass das Band nur einseitung unendlich ist (Band ist rechts der Eingabe unendlich)

reflection number R der Maschine

Beweishilfe: „*reflection number*“
platziere den Lesekopf auf dem ersten $\square$ nach der Eingabe:

- Lesekopf wird sich evtl. zur Eingabe hin bewegen
- $||...|1|0|\underbrace{\square}|\square \rightarrow ||...|1|\underbrace{0}|x|\square$

wenn der Lesekopf die Eingabe betritt, platziere ihn wieder auf dem selben Feld.

- $||...|1|0|\underbrace{x}|\square$

wie oft man die Lesekopf so platzieren kann, nennt man *reflection number*, $R \in N$

reflection number R der Maschine

Beweishilfe: „*reflection number*“
platziere den Lesekopf auf dem ersten $\square$ nach der Eingabe:

- Lesekopf wird sich evtl. zur Eingabe hin bewegen
- $||...|1|0|\underbrace{\square}|\square \rightarrow ||...|1|\underbrace{0}|x|\square$

wenn der Lesekopf die Eingabe betritt, platziere ihn wieder auf dem selben Feld.

- $||...|1|0|\underbrace{x}|\square$

wie oft man die Lesekopf so platzieren kann, nennt man *reflection number*, $R \in N$

reflection number R der Maschine

Beweishilfe: „*reflection number*“
platziere den Lesekopf auf dem ersten $\square$ nach der Eingabe:

- Lesekopf wird sich evtl. zur Eingabe hin bewegen
- $||...|1|0|\underbrace{\ \square\ }|\square \rightarrow ||...|1|\underbrace{\ 0\ }|x|\square$

wenn der Lesekopf die Eingabe betritt, platziere ihn wieder auf dem selben Feld.

- $||...|1|0|\underbrace{\ x\ }|\square$

wie oft man die Lesekopf so platzieren kann, nennt man *reflection number*, $R \in N$

reflection number S für die Eingabe $\sqrt{2}$

platziere den Lesekopf am Anfang der Eingabe

- $||\underbrace{A_1}|A_2|...|A_m|\square|\square|...$

der Lesekopf wird die Eingabe verlassen

- $||A_1|A_2|...|A_m|\underbrace{\square}|\square|...$

platziere den Lesekopf am Ende der eingabe

- $||A_1|A_2|...|\underbrace{A_m}|A_x|\square|\square|...$

der Lesekopf wird sich evtl. wieder von der Eingabe weg bewegen.

wie oft man die Lesekopf so platzieren kann, nennen wir die *reflection number* für $\sqrt{2} =: S$

reflection number S für die Eingabe $\sqrt{2}$

platziere den Lesekopf am Anfang der Eingabe

- $||\underbrace{A_1}|A_2|...|A_m|\square|\square|...$

der Lesekopf wird die Eingabe verlassen

- $||A_1|A_2|...|A_m|\underbrace{\square}|\square|...$

platziere den Lesekopf am Ende der eingabe

- $||A_1|A_2|...|\underbrace{A_m}|A_x|\square|\square|...$

der Lesekopf wird sich evtl. wieder von der Eingabe weg bewegen.

wie oft man die Lesekopf so platzieren kann, nennen wir die *reflection number* für $\sqrt{2} =: S$

reflection number S für die Eingabe $\sqrt{2}$

platziere den Lesekopf am Anfang der Eingabe

- $||\underbrace{A_1}|A_2|...|A_m|\Box|\Box|...$

der Lesekopf wird die Eingabe verlassen

- $||A_1|A_2|...|A_m|\underbrace{\Box}|\Box|...$

platziere den Lesekopf am Ende der eingabe

- $||A_1|A_2|...|\underbrace{A_m}|A_x|\Box|\Box|...$

der Lesekopf wird sich evtl. wieder von der Eingabe weg bewegen.

wie oft man die Lesekopf so platzieren kann, nennen wir die *reflection number* für $\sqrt{2} =: S$

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$

2.1 nach einer endlichen Anzahl an Schritten ist der Lesekopf im Bereich der Eingabe „gefangen“ $\Rightarrow$ Band ist nur auf endlichem Teil beschrieben. $\Rightarrow$ Band kann nicht $\sqrt{2}$ enthalten.

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- 2.2 $S = R = \infty$

2.2 Der Lesekopf kommt unendlich oft wieder zur Eingabe zurück. Der urprünglich leere Bereich des Bandes wird entweder beschränkt oder unbeschränkt weit beschrieben.

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- 2.2 $S = R = \infty$
  - $2.2.1$ Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes

$2.2.1$ nur endlicher Teil des Bandes beschrieben $\Rightarrow$ Band kann nicht $\sqrt{2}$ enthalten

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- 2.2 $S = R = \infty$
  - $2.2.1$ Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
  - $2.2.2$ Lesekopf betritt unbeschränkten Bereich des Bandes

$2.2.2$ unbeschränkter Teil des Bandes wird betreten
Da die TM nur über ein endliches Alphabet verfügt und nur einen Zustand hat, muss dass Symbol entweder in allen Zellen Konstant sein oder sich ständig ändern.

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- 2.2 $S = R = \infty$
  - $2.2.1$ Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
  - $2.2.2$ Lesekopf betritt unbeschränkten Bereich des Bandes
    - $2.2.2.1$ Symbol in allen Zellen konstant

$2.2.2.1$ Symbole in allen Zellen konstant $\Rightarrow$ kann nicht $\sqrt{2}$ beschreiben

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- 2.2 $S = R = \infty$
  - $2.2.1$ Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
  - $2.2.2$ Lesekopf betritt unbeschränkten Bereich des Bandes
    - $2.2.2.1$ Symbol in allen Zellen konstant
    - $2.2.2.2$ Symbole in den Zellen ändern sich endlos

$2.2.2.2$ Symbole in allen Zellen ändern sich endlos $\Rightarrow$ kann nicht $\sqrt{2}$ beschreiben

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- 2.2 $S = R = \infty$
  - $2.2.1$ Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
  - $2.2.2$ Lesekopf betritt unbeschränkten Bereich des Bandes
    - $2.2.2.1$ Symbol in allen Zellen konstant
    - $2.2.2.2$ Symbole in den Zellen ändern sich endlos
- 2.3 $R \leq S$ (R endlich)

2.3 Lesekopf betritt ursprünglich unbeschriebenen Bereich des Bandes und bleibt dort

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- 2.2 $S = R = \infty$
  - $2.2.1$ Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
  - $2.2.2$ Lesekopf betritt unbeschränkten Bereich des Bandes
    - $2.2.2.1$ Symbol in allen Zellen konstant
    - $2.2.2.2$ Symbole in den Zellen ändern sich endlos
- 2.3 $R \leq S$ (R endlich)
  - $2.3.1$ Lesekopf verlässt erstes leere Feld nach links

2.3 Lesekopf betritt ursprünglich unbeschriebenen Bereich des Bandes und bleibt dort
$2.3.1$ Lesekopf verlässt erstes leere Feld nach Links $\Rightarrow$ Lesekopf auf endlichem Bereich des Bandes gefangen $\Rightarrow$ Band kann nicht $\sqrt{2}$ enthalten

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- 2.2 $S = R = \infty$
  - $2.2.1$ Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
  - $2.2.2$ Lesekopf betritt unbeschränkten Bereich des Bandes
    - $2.2.2.1$ Symbol in allen Zellen konstant
    - $2.2.2.2$ Symbole in den Zellen ändern sich endlos
- 2.3 $R \leq S$ (R endlich)
  - $2.3.1$ Lesekopf verlässt erstes leere Feld nach links
  - $2.3.2$ Lesekopf verlässt erstes leere Feld R mal nach rechts

2.3 Lesekopf betritt ursprünglich unbeschriebenen Bereich des Bandes und bleibt dort
$2.3.2$ Lesekopf verlässt erstes leeres Feld R mal nach rechts $\Rightarrow$ Lesekopf wird nicht zu erstem leeren Feld zurückkommen, da R die *reflection number* für $\square$ ist

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- 2.2 $S = R = \infty$
  - $2.2.1$ Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
  - $2.2.2$ Lesekopf betritt unbeschränkten Bereich des Bandes
    - $2.2.2.1$ Symbol in allen Zellen konstant
    - $2.2.2.2$ Symbole in den Zellen ändern sich endlos
- 2.3 $R \leq S$ (R endlich)
  - $2.3.1$ Lesekopf verlässt erstes leere Feld nach links
  - $2.3.2$ Lesekopf verlässt erstes leere Feld R mal nach rechts
    - $2.3.2.1$ $R < S$ Lesekopf auf erstem $\square$ gefangen

2.3 Lesekopf betritt ursprünglich unbeschriebenen Bereich des Bandes und bleibt dort
$2.3.2.1$ Lesekopf auf erstem $\square$ gefangen $\Rightarrow$ Band enthält nicht $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- 2.2 $S = R = \infty$
  - $2.2.1$ Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
  - $2.2.2$ Lesekopf betritt unbeschränkten Bereich des Bandes
    - $2.2.2.1$ Symbol in allen Zellen konstant
    - $2.2.2.2$ Symbole in den Zellen ändern sich endlos
- 2.3 $R \leq S$ (R endlich)
  - $2.3.1$ Lesekopf verlässt erstes leere Feld nach links
  - $2.3.2$ Lesekopf verlässt erstes leere Feld R mal nach rechts
    - $2.3.2.1$ $R < S$ Lesekopf auf erstem $\square$ gefangen
    - $2.3.2.2$ $R = S$

$2.3.2.2$ Lesekopf verlässt erstes $\square$ R-mal, ($R =$ *reflection number für* $\square$) $\Rightarrow$ Lesekopf wird nicht zum ersten leeren Feld zurückkehren $\Rightarrow$ diese Feld enthält das Ergebniss eines $\square$-Feldes das $2 \cdot R$ mal besucht wurde. Das nächste Feld jedoch auch, da die Maschine auf einer endlosen Folge von $\square$ arbeitet $\Rightarrow$ alle Felder enthalten konstantes Symbol.

äquivalente TM mit nur zwei Symbolen

Turingmaschine A: $A_1, A_2, ..., A_m \in \Sigma_A$ die Symbole und $q_1, q_2, ...q_n \in Q_A$ die Zustände der Maschine. Maschine C besitzt:

- die Symbole $\{\Box, 1\} \in \Sigma_B$

Zudem sei l Imfimum für $m \leq 2^l$
Nun können Symbole der Maschine A als Binärsequenzen der Länge l interpretiert werden. zB.: $\Box_A \equiv \Box_C^l$

- für Maschine C gilt $|Q_C| \leq 3n2^l + n(2^l - 7)$

äquivalente TM mit nur zwei Symbolen

Turingmaschine A: $A_1, A_2, ..., A_m \in \Sigma_A$ die Symbole und $q_1, q_2, ...q_n \in Q_A$ die Zustände der Maschine. Maschine C besitzt:

- die Symbole $\{\square, 1\} \in \Sigma_B$

Zudem sei l Imfimum für $m \leq 2^l$
Nun können Symbole der Maschine A als Binärsequenzen der Länge l interpretiert werden. zB.: $\square_A \equiv \square_C^l$

- für Maschine C gilt $|Q_C| \leq 3n2^l + n(2^l - 7)$

Beispiel Maschine A

Maschine A:

$$...|\underbrace{A_3}|A_{13}|...$$

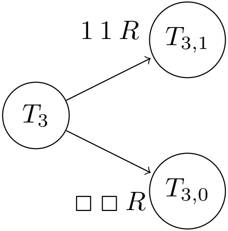
$$q_7 \xrightarrow{A_3\ A_8\ R} q_4$$

$$...|A_8|\underbrace{A_{13}}|...$$

Beispiel Maschine C

Maschine C ist in Zustand T_3

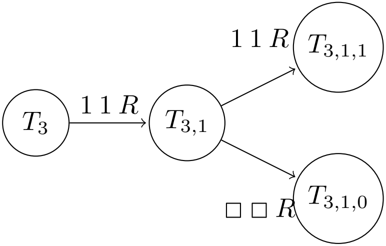
$$\dots|\overbrace{\underbrace{1}|1|\square|1|\square|\dots}^{\text{l Felder lang}}|1|\square|\dots$$



Beispiel Maschine C

Maschine C ist in Zustand T_3

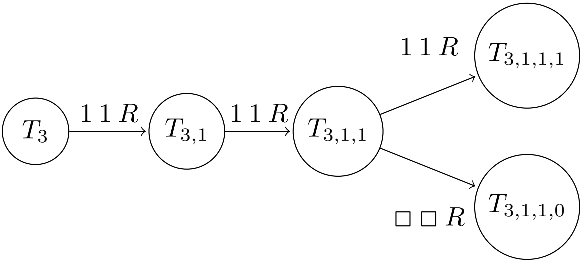
$$\ldots|\overbrace{1|\underbrace{\;1\;}|\square|1|\square|\ldots}^{\text{l Felder lang}}|1|\square|\ldots$$



Beispiel Maschine C

Maschine C ist in Zustand T_3

$$...|\overbrace{1|1|\underbrace{\square}|1|\square|...}^{\text{l Felder lang}}|1|\square|...$$



äquivalente TM mit nur zwei Symbolen

Turingmaschine C nutzt also $(2^l - 1) \cdot n$ Zustände $T_i, T_{i,1}, T_{i,0}, T_{i,1,1}$... um die aktuellen Informationen über die Zustand und das gelesene Zeichen zu halten.
Nach l eingelesenen Symbolen hat $TM\ C$ ein Symbol der Maschine A gelesen und befindet sich in Zustand $T_{i,x_1,x_2,x_3,\ldots x_{l-1}}$

Die jetzt angewendete Übergangsfunktion hängt direkt von Maschine A ab.

$$\delta(A_i, q_j) \rightarrow (A_k, q_l, {}^{R}_{L})$$
$$\Rightarrow$$
$$\delta(\{1 \text{ oder } \square\}, T_{i,x_1,x_2,\ldots x_{l-1}}) \rightarrow (\{1 \text{ oder } \square\}, {}^{R_{i,y_1,y_2,\cdots y_{l-1}}}_{L_{i,y_1,y_2,\cdots y_{l-1}}}, {}^{L}_{R})$$

äquivalente TM mit nur zwei Symbolen

Turingmaschine C nutzt also $(2^l - 1) \cdot n$ Zustände $T_i, T_{i,1}, T_{i,0}, T_{i,1,1}...$ um die aktuellen Informationen über die Zustand und das gelesene Zeichen zu halten. Nach l eingelesenen Symbolen hat $TM\ C$ ein Symbol der Maschine A gelesen und befindet sich in Zustand $T_{i,x_1,x_2,x_3,\ldots x_{l-1}}$

Die jetzt angewendete Übergangsfunktion hängt direkt von Maschine A ab.

$$\delta(A_i, q_j) \rightarrow (A_k, q_l, {}^{R}_{L})$$
$$\Rightarrow$$
$$\delta(\{1 \text{ oder } \square\}, T_{i,x_1,x_2,\ldots x_{l-1}}) \rightarrow (\{1 \text{ oder } \square\}, {}^{R_{i,y_1,y_2,\ldots y_{l-1}}}_{L_{i,y_1,y_2,\ldots y_{l-1}}}, {}^{L}_{R})$$

äquivalente TM mit nur zwei Symbolen

Für die Ausgabe gibt es $\substack{R_{i,y_1,y_2,\dots y_{l-1}} \\ L_{i,y_1,y_2,\dots y_{l-1}}}$ Zustände welche Binärkodierung des zu schreibenden Symbols in die einzelnen Felder ausgibt.

Anschließend muss der Lesekopf auf die richtige Position bewegt werden.

$$\dots|\overbrace{\underbrace{\ 1\ }|1|\square|1|\square|\dots}^{\text{l Felder lang}}|1|\square|\dots \quad \rightarrow \quad \dots|\overbrace{1|1|\square|1|\square|\dots}^{\text{l Felder lang}}|\underbrace{\ 1\ }|\square|\dots$$

Dafür existieren $2n(2^l-2)$ R bzw. L-Zustände sowie $2n(2^l-1)$ U bzw. V-Zustände, die den Lesekopf nach dem Schreiben einer Zeichenkette, l Positionen nach Links oder Rechts bewegegen.

Fazit

Informationen lassen sich innerhalb bestimmter Grenzen, in Zustände bzw. Symbole einer TM auslagern.
Bei der Konstruktion der TM mit nur 2 Zuständen stieg das Produkt des Modells um den Faktor 8, bei der Konstruktion mit 2 Symbolen um einen Faktor von ca. 6.

Diesen Verlust erklärt Shannon durch die Art der Konstruktion und dass sich die Faktoren bei performanterer Modellierung nahezu angleichen.

Fazit

Informationen lassen sich innerhalb bestimmter Grenzen, in Zustände bzw. Symbole einer TM auslagern.
Bei der Konstruktion der TM mit nur 2 Zuständen stieg das Produkt des Modells um den Faktor 8, bei der Konstruktion mit 2 Symbolen um einen Faktor von ca. 6.

Diesen Verlust erklärt Shannon durch die Art der Konstruktion und dass sich die Faktoren bei performanterer Modellierung nahezu angleichen.

Fazit

Shannon endet das Paper mit der Fragestellung:
„An interesting unsolved problem is to find the minimum possible state-symbol product for a universal Turing machine“

- Wolfram Alpha versprach ein Preisgeld von 25,000 für den Beweis der Universalität einer (2,3) Turingmachine. (2 Zustände, 3 Symbole)
- Am 24 October 2007 wurde bekanntgegeben, dass Alex Smith, Student bei der University of Birmingham, die Universalität der (2,3) TM bewiesen hat.

Fazit

Shannon endet das Paper mit der Fragestellung:
„An interesting unsolved problem is to find the minimum possible state-symbol product for a universal Turing machine“

- Wolfram Alpha versprach ein Preisgeld von 25,000 für den Beweis der Universalität einer (2,3) Turingmachine. (2 Zustände, 3 Symbole)
- Am 24 October 2007 wurde bekanntgegeben, dass Alex Smith, Student bei der University of Birmingham, die Universalität der (2,3) TM bewiesen hat.

Quellen

- Shannon, C. E. „A Universal Turing Machine with Two Internal States.“ Automata Studies. Princeton, NJ: Princeton University Press, pp. 157-165, 1956. [1]
- Wolfram Research and Wolfram, S. „The Wolfram 2,3 Turing Machine Research Prize.“ [2]
- Wolfram, S. A New Kind of Science. Champaign, IL: Wolfram Media, pp. 706-711 and 1119, 2002.

[1] http://www.sns.ias.edu/~tlusty/courses/InfoInBio/Papers/Shannon1956.pdf
[2] http://www.wolframscience.com/prizes/tm23/