Eine universelle Turingmaschine mit zwei Zuständen/Symbolen

Ein Paper von Claude E. Shannon

Sven Fiergolla

8. Juli 2017

Einführung

Formal definieren wir die Turingmaschine als Septupel $\mathbf{M} = (\mathbf{Q}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{q_0}, \delta, \square, \mathbf{F})$ wobei:

$\mathbf{Q}$ = die endliche Zustandsmenge

$\mathbf{\Sigma}$ = das endliche Eingabealphabet

$\mathbf{\Gamma}$ = das endliche Bandalphabet und es gilt $\mathbf{\Sigma} \subset \mathbf{\Gamma}$

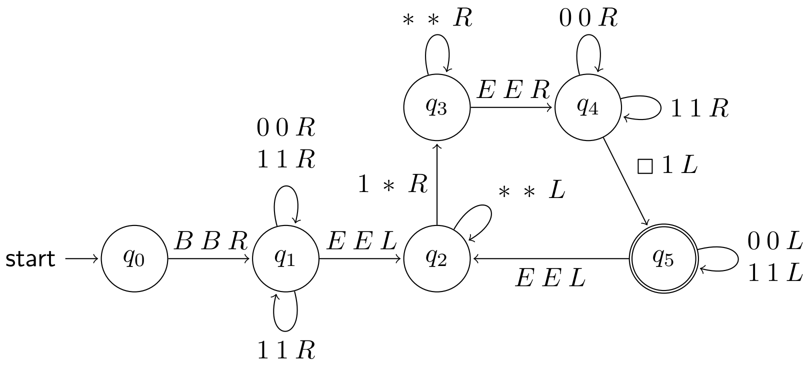
$\mathbf{q_0}$ = der Anfangszustand

δ = die (partielle) Überführungsfunktion

$\square$ = steht für das leere Feld (Blank)

$\mathbf{F}$ = die Menge der akzeptierenden Endzustände

Beispiel



start
q_0
$B\ B\ R$
q_1
$0\ 0\ R$
$1\ 1\ R$
$1\ 1\ R$
$E\ E\ L$
q_2
$* \ * \ L$
$1\ *\ R$
q_3
$* \ * \ R$
$E\ E\ R$
q_4
$0\ 0\ R$
$1\ 1\ R$
$\square\ 1\ L$
q_5
$0\ 0\ L$
$1\ 1\ L$
$E\ E\ L$

Universelle Turingmaschinen

Formal ist eine universelle Turingmaschine eine Maschine UTM, die eine Eingabe $w|x$ liest. Das Wort w ist hierbei eine die Beschreibung einer Turingmaschine M_w, die zu einer bestimmten Funktion mit Eingabe x die Ausgabe berechnet. UTM simuliert also das Verhalten von M_w mit Hilfe der Funktionsbeschreibung w und der Eingabe x.

Konstruktion

Turingmaschine A: $A_1, A_2, ..., A_m \in \Sigma_A$ die Symbole und $q_1, q_2, ...q_n \in Q_A$ die Zustände der Maschine. Maschine B besitzt:

- elementare Symbolen von Maschine A, $B_1, B_2, ..., B_m \in \Sigma_B$
- $2 \cdot 2 \cdot m \cdot n$ neue Symbole, welche Informationen über den Zustand und den Status der *bouncing operation* speichern: $B_{m,n,x,y} \in \Sigma_B$
  - $m =$ Symbole von $A, |\Sigma_A|$
  - $n =$ Zustände von $A, |Q_A|$
  - $x = +$ oder $-$ ob der Zustand des letzten Feldes in diese Feld übertragen wird oder aus diesem Feld stammt
  - $y = R$ oder L ob die Information in das rechte oder linke Feld übertragen wird.

Insgesammt besitzt Maschine B also $m + 4mn$ Symbole.

Zustände

Die Zustände von Maschine B werden α und β heißen.

Um die Information des aktuellen Zustands nach bearbeiten eines Symbols in der nächsten Zelle zur Verfügung zu haben, auch wenn die $TM\ B$ nur zwei Zustände hat, wird diese in den Symbolen gespeichert (Index n) und über die sogenannte *bouncing operation* in die nächste Zelle übertragen.

Übergänge

Nr.	Symbol	Zustand $\Rightarrow$	Symbol	Zustand	Richtung
(1)	B_i	α	$B_{i,1,-,R}$	α	R
(2)	B_i	β	$B_{i,1,-,L}$	α	L
(3)	$B_{i,j,-,x}$	α oder β	$B_{i,(j+1),-,x}$	α	$x \in \{R, L\}$
(4)	$B_{i,j,+,x}$	α oder β	$B_{i,(j-1),-,x}$	β	$x \in \{R, L\}$
(5)	$B_{i,1,+,x}$	α oder β	B_i	α	$x \in \{R, L\}$

zusätzlich erhält Maschine B für jeden Übergang in A :

(6) $\delta(A_i, q_j) \rightarrow (A_k, q_l, \genfrac{}{}{0pt}{}{R}{L}) \Rightarrow \delta(B_{i,j,-,x}, \alpha) \rightarrow (B_{k,l,+,\genfrac{}{}{0pt}{}{R}{L}}, \genfrac{}{}{0pt}{}{\beta}{\alpha}, \genfrac{}{}{0pt}{}{R}{L})$

Beispiel Maschine A

Maschine A:

$$...|\underbrace{A_3}|A_{13}|...$$

$$q_7 \xrightarrow{A_3\ A_8\ R} q_4$$

$$...|A_8|\underbrace{A_{13}}|...$$

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	**Übergangsfunktion**	**Gleichung**
$...\vert \underbrace{B_{3,7,-,x}} \vert B_{13}\vert ...$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$...\vert B_{8,4,+,R}\vert \underbrace{B_{13}} \vert ...$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$...\vert \underbrace{B_{8,4,+,R}} \vert B_{13,1,-,L}\vert ...$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\vert B_{8,3,+,R}\vert \underbrace{B_{13,1,-,L}} \vert ...$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\vert \underbrace{B_{8,3,+,R}} \vert B_{13,2,-,L}\vert ...$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\vert B_{8,2,+,R}\vert \underbrace{B_{13,2,-,L}} \vert ...$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\vert \underbrace{B_{8,2,+,R}} \vert B_{13,3,-,L}\vert ...$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$...\vert B_{8,1,+,R}\vert \underbrace{B_{13,3,-,L}} \vert ...$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$...\vert \underbrace{B_{8,1,+,R}} \vert B_{13,4,-,L}\vert ...$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \beta, R)$	(5)
$...\vert B_8\vert \underbrace{B_{13,4,-,L}} \vert ...$	$\ldots$	(6)