

Eine universelle Turingmaschine mit zwei Zuständen/Symbolen

Ein Paper von Claude E. Shannon

Sven Fiergolla

22. August 2017

Übersicht

Einführung

Universelle Turingmaschinen

Turingmaschine mit zwei Zuständen

Beispiel

Unmöglichkeit einer universellen Turingmaschine mit einem Zustand

Äquivalente Turingmaschine mit nur zwei Symbolen

Fazit

Quellen

Einführung

Formal definieren wir die Turingmaschine als Sextupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, \square)$ wobei:

Q = die endliche Zustandsmenge

Σ = das endliche Eingabealphabet

Γ = das endliche Bandalphabet und es gilt $\Sigma \subset \Gamma$

q_0 = der Anfangszustand

δ = die (partielle) Überföhrungsfunktion

\square = steht für das leere Feld (Blank)

Universelle Turingmaschinen

Formal ist eine universelle Turingmaschine eine Maschine UTM , die eine Eingabe $w|x$ liest. Das Wort w ist hierbei eine die Beschreibung einer Turingmaschine M_w , die zu einer bestimmten Funktion mit Eingabe x die Ausgabe berechnet. UTM simuliert also das Verhalten von M_w mit Hilfe der Funktionsbeschreibung w und der Eingabe x .

Zustände

Die Zustände von Maschine B werden α und β heißen.

Um die Information des aktuellen Zustands nach bearbeiten eines Symbols in der nächsten Zelle zur Verfügung zu haben, auch wenn die TM B nur zwei Zustände hat, wird diese in den Symbolen gespeichert (Index n) und über die sogenannte *bouncing operation* in die nächste Zelle übertragen.

Konstruktion

Turingmaschine A : $A_1, A_2, \dots, A_m \in \Sigma_A$ die Symbole und $q_1, q_2, \dots, q_n \in Q_A$ die Zustände der Maschine. Maschine B besitzt:

- ▶ elementare Symbolen von Maschine A : $B_1, B_2, \dots, B_m \in \Sigma_B$
- ▶ $m \cdot n \cdot 2 \cdot 2$ neue Symbole, welche Informationen über den Zustand und den Status der *bouncing operation* speichern: $B_{m,n,x,y} \in \Sigma_B$
 - ▶ m = Symbole von A , $|\Sigma_A|$
 - ▶ n = Zustände von A , $|Q_A|$
 - ▶ $x = +$ oder $-$ ob der Zustand des letzten Feldes in diese Feld übertragen wird oder aus diesem Feld stammt
 - ▶ $y = R$ oder L ob die Information in das rechte oder linke Feld übertragen wird.

Insgesamt besitzt Maschine B also $m + 4mn$ Symbole.

Übergänge

Nr.	Symbol	Zustand \Rightarrow	Symbol	Zustand	Richtung
(1)	B_i	α	$B_{i,1,-,R}$	α	R
(2)	B_i	β	$B_{i,1,-,L}$	α	L
(3)	$B_{i,j,-,x}$	α oder β	$B_{i,(j+1),-,x}$	α	$x \in \{R, L\}$
(4)	$B_{i,j,+,x}$	α oder β	$B_{i,(j-1),+,x}$	β	$x \in \{R, L\}$
(5)	$B_{i,1,+,x}$	α oder β	B_i	α	$x \in \{R, L\}$

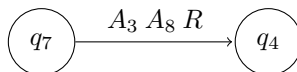
zusätzlich erhält Maschine B für jeden Übergang in A :

$$(6) \delta(A_i, q_j) \rightarrow (A_k, q_l, \overset{R}{L}) \Rightarrow \delta(B_{i,j,-,x}, \alpha) \rightarrow (B_{k,l,+, \overset{R}{L}}, \overset{\beta}{\alpha}, \overset{R}{L})$$

Beispiel Maschine A

Maschine A :

$\dots | \underbrace{A_3}_{\text{}} | A_{13} | \dots$



$\dots | A_8 | \underbrace{A_{13}}_{\text{}} | \dots$

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	Übergangsfunktion	Gleichung
$\dots \underbrace{B_{3,7,-,x}} B_{13} \dots$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$\dots B_{8,4,+,R} \underbrace{B_{13}} \dots$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$\dots \underbrace{B_{8,4,+,R}} B_{13,1,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,3,+,R} \underbrace{B_{13,1,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,3,+,R}} B_{13,2,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,2,+,R} \underbrace{B_{13,2,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,2,+,R}} B_{13,3,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,1,+,R} \underbrace{B_{13,3,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,1,+,R}} B_{13,4,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$\dots B_8 \underbrace{B_{13,4,-,L}} B_x \dots$	\dots	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	Übergangsfunktion	Gleichung
$\dots \underbrace{B_{3,7,-,x}} B_{13} \dots$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$\dots B_{8,4,+,R} \underbrace{B_{13}} \dots$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$\dots \underbrace{B_{8,4,+,R}} B_{13,1,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,3,+,R} \underbrace{B_{13,1,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,3,+,R}} B_{13,2,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,2,+,R} \underbrace{B_{13,2,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,2,+,R}} B_{13,3,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,1,+,R} \underbrace{B_{13,3,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,1,+,R}} B_{13,4,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$\dots B_8 \underbrace{B_{13,4,-,L}} B_x \dots$	\dots	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	Übergangsfunktion	Gleichung
$\dots \underbrace{B_{3,7,-,x}} B_{13} \dots$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$\dots B_{8,4,+,R} \underbrace{B_{13}} \dots$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$\dots \underbrace{B_{8,4,+,R}} B_{13,1,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,3,+,R} \underbrace{B_{13,1,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,3,+,R}} B_{13,2,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,2,+,R} \underbrace{B_{13,2,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,2,+,R}} B_{13,3,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,1,+,R} \underbrace{B_{13,3,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,1,+,R}} B_{13,4,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$\dots B_8 \underbrace{B_{13,4,-,L}} B_x \dots$	\dots	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	Übergangsfunktion	Gleichung
$\dots \underbrace{B_{3,7,-,x}} B_{13} \dots$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$\dots B_{8,4,+,R} \underbrace{B_{13}} \dots$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$\dots \underbrace{B_{8,4,+,R}} B_{13,1,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,3,+,R} \underbrace{B_{13,1,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,3,+,R}} B_{13,2,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,2,+,R} \underbrace{B_{13,2,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,2,+,R}} B_{13,3,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,1,+,R} \underbrace{B_{13,3,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,1,+,R}} B_{13,4,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$\dots B_8 \underbrace{B_{13,4,-,L}} B_x \dots$	\dots	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	Übergangsfunktion	Gleichung
$\dots \underbrace{B_{3,7,-,x}} B_{13} \dots$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$\dots B_{8,4,+,R} \underbrace{B_{13}} \dots$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$\dots \underbrace{B_{8,4,+,R}} B_{13,1,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,3,+,R} \underbrace{B_{13,1,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,3,+,R}} B_{13,2,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,2,+,R} \underbrace{B_{13,2,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,2,+,R}} B_{13,3,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,1,+,R} \underbrace{B_{13,3,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,1,+,R}} B_{13,4,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$\dots B_8 \underbrace{B_{13,4,-,L}} B_x \dots$	\dots	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	Übergangsfunktion	Gleichung
$\dots \underbrace{B_{3,7,-,x}} B_{13} \dots$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$\dots B_{8,4,+,R} \underbrace{B_{13}} \dots$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$\dots \underbrace{B_{8,4,+,R}} B_{13,1,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,3,+,R} \underbrace{B_{13,1,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,3,+,R}} B_{13,2,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,2,+,R} \underbrace{B_{13,2,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,2,+,R}} B_{13,3,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,1,+,R} \underbrace{B_{13,3,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,1,+,R}} B_{13,4,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$\dots B_8 \underbrace{B_{13,4,-,L}} B_x \dots$	\dots	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	Übergangsfunktion	Gleichung
$\dots \underbrace{B_{3,7,-,x}} B_{13} \dots$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$\dots B_{8,4,+,R} \underbrace{B_{13}} \dots$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$\dots \underbrace{B_{8,4,+,R}} B_{13,1,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,3,+,R} \underbrace{B_{13,1,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,3,+,R}} B_{13,2,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,2,+,R} \underbrace{B_{13,2,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,2,+,R}} B_{13,3,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,1,+,R} \underbrace{B_{13,3,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,1,+,R}} B_{13,4,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$\dots B_8 \underbrace{B_{13,4,-,L}} B_x \dots$	\dots	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	Übergangsfunktion	Gleichung
$\dots \underbrace{B_{3,7,-,x}} B_{13} \dots$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$\dots B_{8,4,+,R} \underbrace{B_{13}} \dots$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$\dots \underbrace{B_{8,4,+,R}} B_{13,1,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,3,+,R} \underbrace{B_{13,1,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,3,+,R}} B_{13,2,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,2,+,R} \underbrace{B_{13,2,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,2,+,R}} B_{13,3,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,1,+,R} \underbrace{B_{13,3,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,1,+,R}} B_{13,4,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$\dots B_8 \underbrace{B_{13,4,-,L}} B_x \dots$	\dots	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	Übergangsfunktion	Gleichung
$\dots \underbrace{B_{3,7,-,x}} B_{13} \dots$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$\dots B_{8,4,+,R} \underbrace{B_{13}} \dots$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$\dots \underbrace{B_{8,4,+,R}} B_{13,1,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,3,+,R} \underbrace{B_{13,1,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,3,+,R}} B_{13,2,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,2,+,R} \underbrace{B_{13,2,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,2,+,R}} B_{13,3,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,1,+,R} \underbrace{B_{13,3,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,1,+,R}} B_{13,4,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_{8}, \alpha, R)$	(5)
$\dots B_8 \underbrace{B_{13,4,-,L}} B_x \dots$	\dots	(6)

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	Übergangsfunktion	Gleichung
$\dots \underbrace{B_{3,7,-,x}} B_{13} \dots$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$\dots B_{8,4,+,R} \underbrace{B_{13}} \dots$	$\delta(B_{13}, \beta) = (B_{13,1,-,L}, \alpha, L)$	(2)
$\dots \underbrace{B_{8,4,+,R}} B_{13,1,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,4,+,R}, \alpha) = (B_{8,3,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,3,+,R} \underbrace{B_{13,1,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,1,-,L}, \beta) = (B_{13,2,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,3,+,R}} B_{13,2,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,3,+,R}, \alpha) = (B_{8,2,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,2,+,R} \underbrace{B_{13,2,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,2,-,L}, \beta) = (B_{13,3,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,2,+,R}} B_{13,3,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,2,+,R}, \alpha) = (B_{8,1,+,R}, \beta, R)$	(4)
$\dots B_{8,1,+,R} \underbrace{B_{13,3,-,L}} \dots$	$\delta(B_{13,3,-,L}, \beta) = (B_{13,4,-,L}, \alpha, L)$	(3)
$\dots \underbrace{B_{8,1,+,R}} B_{13,4,-,L} \dots$	$\delta(B_{8,1,+,R}, \alpha) = (B_8, \alpha, R)$	(5)
$\dots B_8 \underbrace{B_{13,4,-,L}} B_x \dots$	\dots	(6)

UTM mit nur einem Zustand unmöglich

Beweis per Kontraposition von Shannon:

Annahme: es existiert eine universelle Turingmaschine mit nur einem Zustand.

$\sqrt{2}$ ist eine berechenbare irrationale Zahl und kann von einer *UTM* berechnet werden. Dazu muss die *UTM* kontinuierlich die Ziffern von $\sqrt{2}$ schreiben.

$\sqrt{2}$ ist turingberechenbar \Rightarrow eine *UTM* kann $\sqrt{2}$ berechnen

UTM mit nur einem Zustand unmöglich

Beweis per Kontraposition von Shannon:

Annahme: es existiert eine universelle Turingmaschine mit nur einem Zustand.

$\sqrt{2}$ ist eine berechenbare irrationale Zahl und kann von einer *UTM* berechnet werden. Dazu muss die *UTM* kontinuierlich die Ziffern von $\sqrt{2}$ schreiben.

$\sqrt{2}$ ist turingberechenbar \Rightarrow eine *UTM* kann $\sqrt{2}$ berechnen

UTM mit nur einem Zustand unmöglich

Beweis per Kontraposition von Shannon:

Annahme: es existiert eine universelle Turingmaschine mit nur einem Zustand.

$\sqrt{2}$ ist eine berechenbare irrationale Zahl und kann von einer *UTM* berechnet werden. Dazu muss die *UTM* kontinuierlich die Ziffern von $\sqrt{2}$ schreiben.

$\sqrt{2}$ ist turingberechenbar \Rightarrow eine *UTM* kann $\sqrt{2}$ berechnen

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

- ▶ 1.1 : Lesekopf liest \square und bleibt im \square -Bereich

1.1 Die TM wird nie mehr als ein \square der Eingabe verändern \Rightarrow das Eingabeband ist nur auf einem endlichen Teil beschrieben \Rightarrow das Band kann nach der Bearbeitung nicht $\sqrt{2}$ enthalten.

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

- ▶ 1.1 : Lesekopf liest \square und bleibt im \square -Bereich
- ▶ 1.2 : Lesekopf verlässt \square

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

- ▶ 1.1 : Lesekopf liest \square und bleibt im \square -Bereich
- ▶ 1.2 : Lesekopf verlässt \square
 - ▶ 1.2.1 : Lesekopf verlässt \square nach Links

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

- ▶ 1.1 : Lesekopf liest \square und bleibt im \square -Bereich
- ▶ 1.2 : Lesekopf verlässt \square
 - ▶ 1.2.1 : Lesekopf verlässt \square nach Links
 - ▶ 1.2.1.1 linke unendliche Seite des Bandes wird nicht betreten

1.2.1.1 Die TM betritt nur eine Seite des Bandes \rightarrow wird in Fall 2 behandelt

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

- ▶ 1.1 : Lesekopf liest \square und bleibt im \square -Bereich
- ▶ 1.2 : Lesekopf verlässt \square
 - ▶ 1.2.1 : Lesekopf verlässt \square nach Links
 - ▶ 1.2.1.1 linke unendliche Seite des Bandes wird nicht betreten
 - ▶ 1.2.1.2 linke unendliche Seite des Bandes wird betreten

1.2.1.2 Die TM geht unendlich weit nach Links \Rightarrow linke Seite des Bandes wird mit konstantem Symbol beschrieben und rechte unendliche Seite des Bandes nie betreten \Rightarrow Band kann nach der Bearbeitung nicht $\sqrt{2}$ enthalten.

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: doppelt unendliches Band

- ▶ 1.1 : Lesekopf liest \square und bleibt im \square -Bereich
- ▶ 1.2 : Lesekopf verlässt \square
 - ▶ 1.2.1 : Lesekopf verlässt \square nach Links
 - ▶ 1.2.1.1 linke unendliche Seite des Bandes wird nicht betreten
 - ▶ 1.2.1.2 linke unendliche Seite des Bandes wird betreten
 - ▶ 1.2.2 : Lesekopf verlässt \square nach Rechts

1.2.2 analog zu 1.2.1.

Damit können wir annehmen, dass das Band nur einseitig unendlich ist (Band ist rechts der Eingabe unendlich)

reflection number R der Maschine

Beweishilfe: „*reflection number*“

platziere den Lesekopf auf dem ersten \square nach der Eingabe:

- ▶ Lesekopf wird sich evtl. zur Eingabe hin bewegen

$$\text{▶ } || \dots | 1 | 0 | \underbrace{\square}_{\text{Lesekopf}} | \square \rightarrow || \dots | 1 | \underbrace{0}_{\text{Lesekopf}} | x | \square$$

wenn der Lesekopf die Eingabe betritt, platziere ihn wieder auf dem selben Feld.

$$\text{▶ } || \dots | 1 | 0 | \underbrace{x}_{\text{Lesekopf}} | \square$$

wie oft man die Lesekopf so platzieren kann, nennt man *reflection number*, $R \in \mathbb{N}$

reflection number R der Maschine

Beweishilfe: „*reflection number*“

platziere den Lesekopf auf dem ersten \square nach der Eingabe:

► Lesekopf wird sich evtl. zur Eingabe hin bewegen

► $||...|1|0| \underbrace{\square}_{\text{Lesekopf}} |\square \rightarrow ||...|1| \underbrace{0}_{\text{Eingabe}} |x|\square$

wenn der Lesekopf die Eingabe betritt, platziere ihn wieder auf dem selben Feld.

► $||...|1|0| \underbrace{x}_{\text{Lesekopf}} |\square$

wie oft man die Lesekopf so platzieren kann, nennt man *reflection number*, $R \in \mathbb{N}$

reflection number R der Maschine

Beweishilfe: „*reflection number*“

platziere den Lesekopf auf dem ersten \square nach der Eingabe:

► Lesekopf wird sich evtl. zur Eingabe hin bewegen

► $||\dots|1|0|\underbrace{\square}_{\text{Lesekopf}}|\square \rightarrow ||\dots|1|\underbrace{0}_{\text{Eingabe}}|x|\square$

wenn der Lesekopf die Eingabe betritt, platziere ihn wieder auf dem selben Feld.

► $||\dots|1|0|\underbrace{x}_{\text{Lesekopf}}|\square$

wie oft man die Lesekopf so platzieren kann, nennt man *reflection number*, $R \in \mathbb{N}$

reflection number S für die Eingabe $\sqrt{2}$

platziere den Lesekopf am Anfang der Eingabe

▶ $|| \underbrace{A_1} | A_2 | \dots | A_m | \square | \square | \dots$

der Lesekopf wird die Eingabe verlassen

▶ $|| A_1 | A_2 | \dots | A_m | \underbrace{\square} | \square | \dots$

platziere den Lesekopf am Ende der eingabe

▶ $|| A_1 | A_2 | \dots | \underbrace{A_m} | A_x | \square | \square | \dots$

der Lesekopf wird sich evtl. wieder von der Eingabe weg bewegen.

wie oft man die Lesekopf so platzieren kann, nennen wir die *reflection number* für $\sqrt{2} =: S$

reflection number S für die Eingabe $\sqrt{2}$

platziere den Lesekopf am Anfang der Eingabe

▶ $|| \underbrace{A_1} | A_2 | \dots | A_m | \square | \square | \dots$

der Lesekopf wird die Eingabe verlassen

▶ $|| A_1 | A_2 | \dots | A_m | \underbrace{\square} | \square | \dots$

platziere den Lesekopf am Ende der eingabe

▶ $|| A_1 | A_2 | \dots | \underbrace{A_m} | A_x | \square | \square | \dots$

der Lesekopf wird sich evtl. wieder von der Eingabe weg bewegen.

wie oft man die Lesekopf so platzieren kann, nennen wir die *reflection number* für $\sqrt{2} =: S$

reflection number S für die Eingabe $\sqrt{2}$

platziere den Lesekopf am Anfang der Eingabe

▶ $|| \underbrace{A_1} | A_2 | \dots | A_m | \square | \square | \dots$

der Lesekopf wird die Eingabe verlassen

▶ $|| A_1 | A_2 | \dots | A_m | \underbrace{\square} | \square | \dots$

platziere den Lesekopf am Ende der eingabe

▶ $|| A_1 | A_2 | \dots | \underbrace{A_m} | A_x | \square | \square | \dots$

der Lesekopf wird sich evtl. wieder von der Eingabe weg bewegen.

wie oft man die Lesekopf so platzieren kann, nennen wir die *reflection number* für $\sqrt{2} =: S$

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$

2.1 nach einer endlichen Anzahl an Schritten ist der Lesekopf im Bereich der Eingabe „gefangen“ \Rightarrow Band ist nur auf endlichem Teil beschrieben. \Rightarrow Band kann nicht $\sqrt{2}$ enthalten.

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- ▶ 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- ▶ 2.2 $S = R = \infty$

2.2 Der Lesekopf kommt unendlich oft wieder zur Eingabe zurück. Der ursprünglich leere Bereich des Bandes wird entweder beschränkt oder unbeschränkt weit beschrieben.

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- ▶ 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- ▶ 2.2 $S = R = \infty$
 - ▶ 2.2.1 Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes

2.2.1 nur endlicher Teil des Bandes beschrieben \Rightarrow Band kann nicht $\sqrt{2}$ enthalten

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- ▶ 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- ▶ 2.2 $S = R = \infty$
 - ▶ 2.2.1 Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
 - ▶ 2.2.2 beschränkter Teil des Bandes ändert sich unendlich oft

2.2.2 beschränkter Teil des Bandes ändert sich unendlich oft

Da die TM nur über ein endliches Alphabet verfügt und nur einen Zustand hat, muss das Symbol entweder in allen Zellen konstant sein oder sich ständig ändern.

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- ▶ 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- ▶ 2.2 $S = R = \infty$
 - ▶ 2.2.1 Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
 - ▶ 2.2.2 beschränkter Teil des Bandes ändert sich unendlich oft
 - ▶ 2.2.2.1 Symbol in allen Zellen konstant

2.2.2.1 Symbole in allen Zellen konstant \Rightarrow kann nicht $\sqrt{2}$ beschreiben

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- ▶ 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- ▶ 2.2 $S = R = \infty$
 - ▶ 2.2.1 Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
 - ▶ 2.2.2 beschränkter Teil des Bandes ändert sich unendlich oft
 - ▶ 2.2.2.1 Symbol in allen Zellen konstant
 - ▶ 2.2.2.2 Symbole in den Zellen ändern sich endlos

2.2.2.2 Symbole in allen Zellen ändern sich endlos \Rightarrow kann nicht $\sqrt{2}$ beschreiben

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- ▶ 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- ▶ 2.2 $S = R = \infty$
 - ▶ 2.2.1 Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
 - ▶ 2.2.2 beschränkter Teil des Bandes ändert sich unendlich oft
 - ▶ 2.2.2.1 Symbol in allen Zellen konstant
 - ▶ 2.2.2.2 Symbole in den Zellen ändern sich endlos
- ▶ 2.3 $R \leq S$

2.3 Lesekopf betritt ursprünglich unbeschriebenen Bereich des Bandes und bleibt dort

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- ▶ 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- ▶ 2.2 $S = R = \infty$
 - ▶ 2.2.1 Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
 - ▶ 2.2.2 beschränkter Teil des Bandes ändert sich unendlich oft
 - ▶ 2.2.2.1 Symbol in allen Zellen konstant
 - ▶ 2.2.2.2 Symbole in den Zellen ändern sich endlos
- ▶ 2.3 $R \leq S$
 - ▶ 2.3.1 Lesekopf verlässt erstes leere Feld nach Links

2.3 Lesekopf betritt ursprünglich unbeschriebenen Bereich des Bandes und bleibt dort

2.3.1 Lesekopf verlässt erstes leere Feld nach Links \Rightarrow Lesekopf auf endlichem Bereich des Bandes gefangen \Rightarrow Band kann nicht $\sqrt{2}$ enthalten

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- ▶ 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- ▶ 2.2 $S = R = \infty$
 - ▶ 2.2.1 Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
 - ▶ 2.2.2 beschränkter Teil des Bandes ändert sich unendlich oft
 - ▶ 2.2.2.1 Symbol in allen Zellen konstant
 - ▶ 2.2.2.2 Symbole in den Zellen ändern sich endlos
- ▶ 2.3 $R \leq S$
 - ▶ 2.3.1 Lesekopf verlässt erstes leere Feld nach Links
 - ▶ 2.3.2 Lesekopf verlässt erstes leeres Feld R mal nach rechts

2.3 Lesekopf betritt ursprünglich unbeschriebenen Bereich des Bandes und bleibt dort

2.3.2 Lesekopf verlässt erstes leeres Feld R mal nach rechts \Rightarrow Lesekopf wird nicht zu erstem leeren Feld zurückkommen, da R die *reflection number* für \square ist

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- ▶ 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- ▶ 2.2 $S = R = \infty$
 - ▶ 2.2.1 Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
 - ▶ 2.2.2 beschränkter Teil des Bandes ändert sich unendlich oft
 - ▶ 2.2.2.1 Symbol in allen Zellen konstant
 - ▶ 2.2.2.2 Symbole in den Zellen ändern sich endlos
- ▶ 2.3 $R \leq S$
 - ▶ 2.3.1 Lesekopf verlässt erstes leere Feld nach Links
 - ▶ 2.3.2 Lesekopf verlässt erstes leeres Feld R mal nach rechts
 - ▶ 2.3.2.1 $R < S$ Lesekopf auf erstem \square gefangen

2.3 Lesekopf betritt ursprünglich unbeschriebenen Bereich des Bandes und bleibt dort

2.3.2.1 Lesekopf auf erstem \square gefangen \Rightarrow Band enthält nicht $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Annahme: einseitig unendliches Band

- ▶ 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- ▶ 2.2 $S = R = \infty$
 - ▶ 2.2.1 Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
 - ▶ 2.2.2 beschränkter Teil des Bandes ändert sich unendlich oft
 - ▶ 2.2.2.1 Symbol in allen Zellen konstant
 - ▶ 2.2.2.2 Symbole in den Zellen ändern sich endlos
- ▶ 2.3 $R \leq S$
 - ▶ 2.3.1 Lesekopf verlässt erstes leere Feld nach Links
 - ▶ 2.3.2 Lesekopf verlässt erstes leeres Feld R mal nach rechts
 - ▶ 2.3.2.1 $R < S$ Lesekopf auf erstem \square gefangen
 - ▶ 2.3.2.2 $R = S$

2.3.2.2 Lesekopf verlässt erstes \square R -mal, ($R = \text{reflection number für } \square$) \Rightarrow Lesekopf wird nicht zum ersten leeren Feld zurückkehren \Rightarrow diese Feld enthält das Ergebniss eines \square -Feldes das $2 \cdot R$ mal besucht wurde. Das nächste Feld jedoch auch, da die Maschine auf einer endlosen Folge von \square arbeitet \Rightarrow alle Felder enthalten konstantes Symbol.

äquivalente TM mit nur zwei Symbolen

Turingmaschine A : $A_1, A_2, \dots, A_m \in \Sigma_A$ die Symbole und $q_1, q_2, \dots, q_n \in Q_A$ die Zustände der Maschine. Maschine C besitzt:

- die Symbole $\{\square, 1\} \in \Sigma_B$

Zudem sei l Infimum für $m \leq 2^l$

Nun können Symbole der Maschine A als Binärsequenzen der Länge l interpretiert werden. zB.: $\square_A \equiv \square_C^l$

- für Maschine C gilt $|Q_C| \leq 3n2^l + n(2^l - 7)$

äquivalente TM mit nur zwei Symbolen

Turingmaschine A : $A_1, A_2, \dots, A_m \in \Sigma_A$ die Symbole und $q_1, q_2, \dots, q_n \in Q_A$ die Zustände der Maschine. Maschine C besitzt:

- ▶ die Symbole $\{\square, 1\} \in \Sigma_B$

Zudem sei l Infimum für $m \leq 2^l$

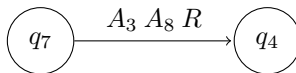
Nun können Symbole der Maschine A als Binärsequenzen der Länge l interpretiert werden. zB.: $\square_A \equiv \square_C^l$

- ▶ für Maschine C gilt $|Q_C| \leq 3n2^l + n(2^l - 7)$

Beispiel Maschine A

Maschine A :

$\dots | \underbrace{A_3}_{\text{}} | A_{13} | \dots$

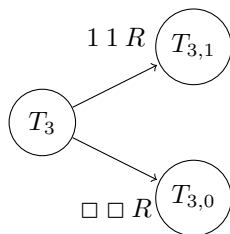


$\dots | A_8 | \underbrace{A_{13}}_{\text{}} | \dots$

Beispiel Maschine C

Maschine C ist in Zustand T_3

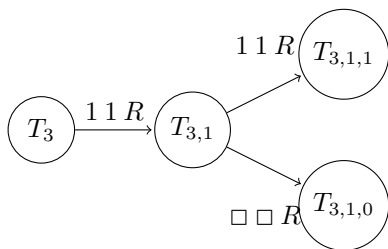
... | $\overbrace{1 \mid 1 \mid \square \mid 1 \mid \square \mid \dots}^{\text{l Felder lang}} \mid 1 \mid \square \mid \dots$



Beispiel Maschine C

Maschine C ist in Zustand T_3

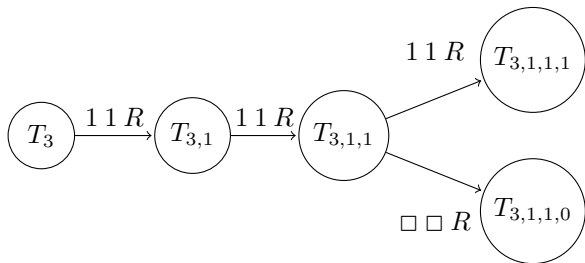
I Felder lang
... | 1 | 1 | □ | 1 | □ | ... | 1 | □ | ...



Beispiel Maschine C

Maschine C ist in Zustand T_3

$$\dots | 1 | 1 | \underbrace{\square}_{\text{I Felder lang}} | 1 | \square | \dots | 1 | \square | \dots$$



äquivalente TM mit nur zwei Symbolen

Turingmaschine C nutzt also $(2^l - 1) \cdot n$ Zustände $T_i, T_{i,1}, T_{i,0}, T_{i,1,1} \dots$ um die aktuellen Informationen über die Zustand und das gelesene Zeichen zu halten.

Nach l eingelesenen Symbolen hat $TM C$ ein Symbol der Maschine A gelesen und befindet sich in Zustand $T_{i,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{l-1}}$

Die jetzt angewendete Übergangsfunktion hängt direkt von Maschine A ab.

$$\begin{aligned} \delta(A_i, q_j) &\rightarrow (A_k, q_l, \begin{matrix} R \\ L \end{matrix}) \\ &\Rightarrow \\ \delta(\{1 \text{ oder } \square\}, T_{i,x_1,x_2,\dots,x_{l-1}}) &\rightarrow (\{1 \text{ oder } \square\}, \begin{matrix} R_{i,y_1,y_2,\dots,y_{l-1}} \\ L_{i,y_1,y_2,\dots,y_{l-1}} \end{matrix}, \begin{matrix} R \\ L \end{matrix}) \end{aligned}$$

äquivalente TM mit nur zwei Symbolen

Turingmaschine C nutzt also $(2^l - 1) \cdot n$ Zustände $T_i, T_{i,1}, T_{i,0}, T_{i,1,1} \dots$ um die aktuellen Informationen über die Zustand und das gelesene Zeichen zu halten. Nach l eingelesenen Symbolen hat $TM C$ ein Symbol der Maschine A gelesen und befindet sich in Zustand $T_{i,x_1,x_2,x_3,\dots x_{l-1}}$

Die jetzt angewendete Übergangsfunktion hängt direkt von Maschine A ab.

$$\begin{aligned} \delta(A_i, q_j) &\rightarrow (A_k, q_l, \overset{R}{L}) \\ &\Rightarrow \\ \delta(\{1 \text{ oder } \square\}, T_{i,x_1,x_2,\dots x_{l-1}}) &\rightarrow (\{1 \text{ oder } \square\}, \overset{R_{i,y_1,y_2,\dots y_{l-1}}}{L_{i,y_1,y_2,\dots y_{l-1}}}, \overset{L}{R}) \end{aligned}$$

äquivalente TM mit nur zwei Symbolen

Für die Ausgabe gibt es $\begin{matrix} R_{i,y_1,y_2,\dots,y_{l-1}} \\ L_{i,y_1,y_2,\dots,y_{l-1}} \end{matrix}$ Zustände welche Binärkodierung des zu schreibenden Symbols in die einzelnen Felder ausgibt.

Anschließend muss der Lesekopf auf die richtige Position bewegt werden.

$$\dots | \overbrace{1 | 1 | \square | 1 | \square | \dots}^{\text{l Felder lang}} | 1 | \square | \dots \rightarrow \dots | \overbrace{1 | 1 | \square | 1 | \square | \dots}^{\text{l Felder lang}} | \underbrace{1}_{\text{Lesekopf}} | \square | \dots$$

Dafür existieren $2n(2^l - 2)$ R bzw. L -Zustände sowie $2n(2^l - 1)$ U bzw. V -Zustände, die den Lesekopf nach dem Schreiben einer Zeichenkette, l Positionen nach Links oder Rechts bewegen.

Fazit

Informationen lassen sich innerhalb bestimmter Grenzen, in Zustände bzw. Symbole einer TM auslagern.

Bei der Konstruktion der TM mit nur 2 Zuständen stieg das Produkt des Modells um den Faktor 8, bei der Konstruktion mit 2 Symbolen um einen Faktor von ca. 6.

Diesen Verlust erklärt Shannon durch die Art der Konstruktion und dass sich die Faktoren bei performanterer Modellierung nahezu angleichen.

Fazit

Informationen lassen sich innerhalb bestimmter Grenzen, in Zustände bzw. Symbole einer TM auslagern.

Bei der Konstruktion der TM mit nur 2 Zuständen stieg das Produkt des Modells um den Faktor 8, bei der Konstruktion mit 2 Symbolen um einen Faktor von ca. 6.

Diesen Verlust erklärt Shannon durch die Art der Konstruktion und dass sich die Faktoren bei performanterer Modellierung nahezu angleichen.

Fazit

Shannon endet das Paper mit der Fragestellung:

„An interesting unsolved problem is to find the minimum possible state-symbol product for a universal Turing machine“

- ▶ Wolfram Alpha versprach ein Preisgeld von 25,000 für den Beweis der Universalität einer (2,3) Turingmaschine. (2 Zustände, 3 Symbole)
- ▶ Am 24 October 2007 wurde bekanntgegeben, dass Alex Smith, Student bei der University of Birmingham, die Universalität bewiesen hat.

Fazit

Shannon endet das Paper mit der Fragestellung:

„An interesting unsolved problem is to find the minimum possible state-symbol product for a universal Turing machine“

- ▶ Wolfram Alpha versprach ein Preisgeld von 25,000 für den Beweis der Universalität einer (2,3) Turingmaschine. (2 Zustände, 3 Symbole)
- ▶ Am 24 October 2007 wurde bekanntgegeben, dass Alex Smith, Student bei der University of Birmingham, die Universalität bewiesen hat.

Fazit

Shannon endet das Paper mit der Fragestellung:

„An interesting unsolved problem is to find the minimum possible state-symbol product for a universal Turing machine“

- ▶ Wolfram Alpha versprach ein Preisgeld von 25,000 für den Beweis der Universalität einer (2,3) Turingmaschine. (2 Zustände, 3 Symbole)
- ▶ Am 24 October 2007 wurde bekanntgegeben, dass Alex Smith, Student bei der University of Birmingham, die Universalität bewiesen hat.

Quellen

- ▶ Shannon, C. E. „A Universal Turing Machine with Two Internal States.“ Automata Studies. Princeton, NJ: Princeton University Press, pp. 157-165, 1956. ¹
- ▶ Wolfram Research and Wolfram, S. „The Wolfram 2,3 Turing Machine Research Prize.“ ²
- ▶ Wolfram, S. A New Kind of Science. Champaign, IL: Wolfram Media, pp. 706-711 and 1119, 2002.

¹<http://www.sns.ias.edu/~tlusty/courses/InfoInBio/Papers/Shannon1956.pdf>

²<http://www.wolframscience.com/prizes/tm23/>