Eine universelle Turingmaschine mit zwei Zuständen/Symbolen

Ein Paper von Claude E. Shannon

Sven Fiergolla

28. Juli 2017

Einführung

Formal definieren wir die Turingmaschine als Septupel $\mathbf{M} = (\mathbf{Q}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{q_0}, \delta, \square, \mathbf{F})$ wobei:

$\mathbf{Q}$ = die endliche Zustandsmenge

$\mathbf{\Sigma}$ = das endliche Eingabealphabet

$\mathbf{\Gamma}$ = das endliche Bandalphabet und es gilt $\mathbf{\Sigma} \subset \mathbf{\Gamma}$

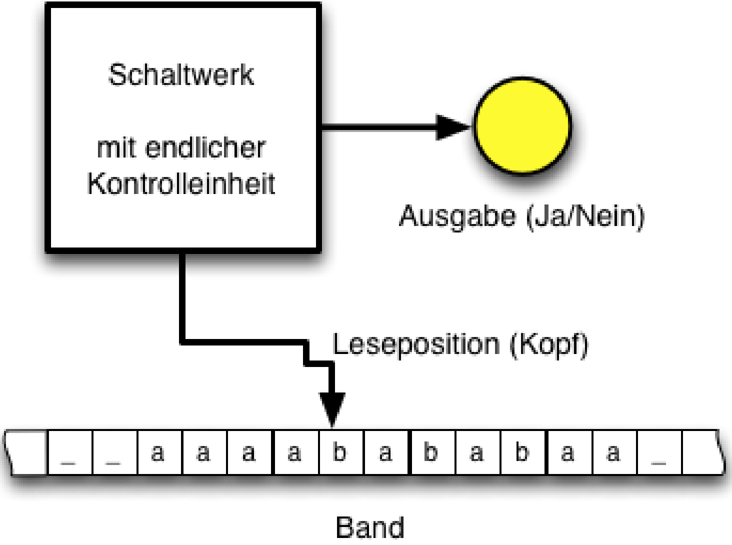
$\mathbf{q_0}$ = der Anfangszustand

δ = die (partielle) Überführungsfunktion

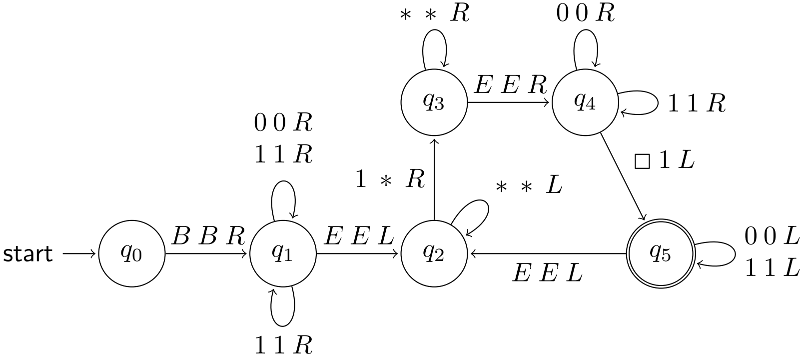
$\square$ = steht für das leere Feld (Blank)

$\mathbf{F}$ = die Menge der akzeptierenden Endzustände

Beislpiel


Schaltwerk
mit endlicher Kontrolleinheit
Ausgabe (Ja/Nein)
Leseposition (Kopf)
_ _ a a a a b a b a b a a _
Band

Beispiel


start
q_0
$B\ B\ R$
q_1
$0\,0\,R$
$1\,1\,R$
$1\,1\,R$
$E\ E\ L$
q_2
$*\ *\ L$
$1\ *\ R$
q_3
$*\ *\ R$
$E\ E\ R$
q_4
$0\,0\,R$
$1\,1\,R$
$\square\,1\,L$
q_5
$0\,0\,L$
$1\,1\,L$
$E\ E\ L$

Universelle Turingmaschinen

Formal ist eine universelle Turingmaschine eine Maschine UTM, die eine Eingabe $w|x$ liest. Das Wort w ist hierbei eine die Beschreibung einer Turingmaschine M_w, die zu einer bestimmten Funktion mit Eingabe x die Ausgabe berechnet. UTM simuliert also das Verhalten von M_w mit Hilfe der Funktionsbeschreibung w und der Eingabe x.

Konstruktion

Turingmaschine A: $A_1, A_2, ..., A_m \in \Sigma_A$ die Symbole und $q_1, q_2, ...q_n \in Q_A$ die Zustände der Maschine. Maschine B besitzt:

- elementare Symbolen von Maschine A: $B_1, B_2, ..., B_m \in \Sigma_B$
- $m \cdot n \cdot 2 \cdot 2$ neue Symbole, welche Informationen über den Zustand und den Status der *bouncing operation* speichern: $B_{m,n,x,y} \in \Sigma_B$
  - $m =$ Symbole von $A, |\Sigma_A|$
  - $n =$ Zustände von $A, |Q_A|$
  - $x = +$ oder $-$ ob der Zustand des letzten Feldes in diese Feld übertragen wird oder aus diesem Feld stammt
  - $y = R$ oder L ob die Information in das rechte oder linke Feld übertragen wird.

Insgesammt besitzt Maschine B also $m + 4mn$ Symbole.

Zustände

Die Zustände von Maschine B werden α und β heißen.

Um die Information des aktuellen Zustands nach bearbeiten eines Symbols in der nächsten Zelle zur Verfügung zu haben, auch wenn die $TM\ B$ nur zwei Zustände hat, wird diese in den Symbolen gespeichert (Index n) und über die sogenannte *bouncing operation* in die nächste Zelle übertragen.

Übergänge

Nr.	Symbol	Zustand $\Rightarrow$	Symbol	Zustand	Richtung
(1)	B_i	α	$B_{i,1,-,R}$	α	R
(2)	B_i	β	$B_{i,1,-,L}$	α	L
(3)	$B_{i,j,-,x}$	α oder β	$B_{i,(j+1),-,x}$	α	$x \in \{R, L\}$
(4)	$B_{i,j,+,x}$	α oder β	$B_{i,(j-1),+,x}$	β	$x \in \{R, L\}$
(5)	$B_{i,1,+,x}$	α oder β	B_i	α	$x \in \{R, L\}$

zusätzlich erhält Maschine B für jeden Übergang in A :

(6) $\delta(A_i, q_j) \to (A_k, q_l, {}^{R}_{L}) \Rightarrow \delta(B_{i,j,-,x}, \alpha) \to (B_{k,l,+,{}^{R}_{L}}, {}^{\beta}_{\alpha}, {}^{R}_{L})$

Beispiel Maschine A

Maschine A:

$$...|\underbrace{A_3}|A_{13}|...$$

$$q_7 \xrightarrow{A_3\ A_8\ R} q_4$$

$$...|A_8|\underbrace{A_{13}}|...$$

Beispiel Maschine B

Bandinhalt	**Übergangsfunktion**	**Gleichung**
$...\|\underbrace{B_{3,7,-,x}}\|B_{13}\|...$	$\delta(B_{3,7,-,x},\alpha) = (B_{8,4,+,R},\beta,R)$	(6)
$...\|B_{8,4,+,R}\|\underbrace{B_{13}}\|...$	$\delta(B_{13},\beta) = (B_{13,1,-,L},\alpha,L)$	(2)
$...\|\underbrace{B_{8,4,+,R}}\|B_{13,1,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,4,+,R},\alpha) = (B_{8,3,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\|B_{8,3,+,R}\|\underbrace{B_{13,1,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,1,-,L},\beta) = (B_{13,2,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,3,+,R}}\|B_{13,2,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,3,+,R},\alpha) = (B_{8,2,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\|B_{8,2,+,R}\|\underbrace{B_{13,2,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,2,-,L},\beta) = (B_{13,3,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,2,+,R}}\|B_{13,3,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,2,+,R},\alpha) = (B_{8,1,+,R},\beta,R)$	(4)
$...\|B_{8,1,+,R}\|\underbrace{B_{13,3,-,L}}\|...$	$\delta(B_{13,3,-,L},\beta) = (B_{13,4,-,L},\alpha,L)$	(3)
$...\|\underbrace{B_{8,1,+,R}}\|B_{13,4,-,L}\|...$	$\delta(B_{8,1,+,R},\alpha) = (B_8,\alpha,R)$	(5)
$...\|B_8\|\underbrace{B_{13,4,-,L}}\|B_x\|...$	$\ldots$	(6)

UTM mit nur einem Zustand unmöglich

Beweis per () von Schannon:
Annahme: es existiert eine universelle Turingmaschine mit nur einem Zustand.

$\sqrt{2}$ ist eine berechenbare irrationale Zahl und kann von einer TM berechnet werden. Dazu muss die TM kontinuierlich die Ziffern von $\sqrt{2}$ schreiben.

$\sqrt{2}$ ist turingberechenbar $\Rightarrow$ eine UTM kann $\sqrt{2}$ berechnen $\Rightarrow$ eine TM mit einem Zustand kann $\sqrt{2}$ berechnen.

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Fall 1 : doppelt unendliches Band

- 1.1 : Lesekopf liest $\square$ $\Rightarrow$ Lesekopf bleibt im $\square$-Bereich
- 1.2 : Lesekopf verlässt $\square$
  - $1.2.1$: Lesekopf verlässt $\square$ nach Links
    - $1.2.1.1$ linke unendliche Seite des Bandes wird nicht betreten
    - $1.2.1.2$ linke unendliche Seite des Bandes wird betreten
  - $1.2.2$: Lesekopf verlässt $\square$ nach Rechts

1.1 Die TM wird nie mehr als ein $\square$ der Eingabe verändern $\Rightarrow$ das Eingabeband ist nur auf einem endlichen Teil beschrieben $\Rightarrow$ das Band kann nach der Bearbeitung nicht $\sqrt{2}$ enthalten.
$1.2.1.1$ Die TM betritt nur eine Seite des Bandes $\rightarrow$ wird in Fall 2 behandelt
$1.2.1.2$ Die TM geht unendlich weit nach Links $\Rightarrow$ linke Seite des Bandes wird mit konstantem Symbol beschrieben und rechte unendliche Seite des Bandes nie betreten $\Rightarrow$ Band kann nach der Bearbeitung nicht $\sqrt{2}$ enthalten.
$1.2.2$ analog zu $1.2.1$.

reflection number

Fall 2 : einseitig unendliches Band
Annahe: Band ist rechts der Eingabe unendlich.
Beweishilfe: „*reflection number*"
platziere den Lesekopf auf dem ersten $\square$ nach der Eingabe:

- Lesekopf wird sich zur Eingabe hin bewegen
- $||...|1|0|\underbrace{\square}|\square \rightarrow ||...|1|\underbrace{0}|x|\square$

wenn der Lesekopf die Eingabe betritt, platziere ihn wieder auf dem ersten $\square$
wie oft man die Lesekopf so platzieren kann, nennt man *reflection number*, $R \in N$

reflection number für $\sqrt{2}$

platziere den Lesekopf am Anfang der Eingabe

- $||\underbrace{A_1}|A_2|...|A_m|\square|\square|...$

der Lesekopf wird die Eingabe verlassen

- $||A_1|A_2|...|A_m|\underbrace{\square}|\square|...$

platziere den Lesekopf wieder am Anfang

- $||\underbrace{A_1}|A_2|...|A_m|A_x|\square|\square|...$

dies nennen wir die *reflection number* für $\sqrt{2} =: S$

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Fall 2 : einseitig unendliches Band
Annahme: Band nach Rechts unendlich, Eingabe steht am Beginn des Bandes.

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$

2.1 nach einer endlichen Anzahl an Schritten ist der Lesekopf im Bereich der Eingabe „gefangen" $\Rightarrow$ Band ist nur auf endlichem Teil beschrieben. $\Rightarrow$ Band kann nicht $\sqrt{2}$ enthalten.

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Fall 2 : einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- 2.2 $S = R = \infty$
  - $2.2.1$ Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
  - $2.2.2$ beschränkter Teil des Bandes ändert sich unendlich oft
    - $2.2.2.1$ Symbol in allen Zellen konstant
    - $2.2.2.2$ Symbole in den Zellen ändern sich endlos
- 2.3 $R <= S$

2.2 Der Lesekopf kommt unendlich oft wieder zur Eingabe zurück. Der urprünglich leere Bereich des Bandes wird entweder beschränkt oder unbeschränkt weit beschrieben.
$2.2.1$ nur endlicher Teil des Bandes beschrieben $\Rightarrow$ Band kann nicht $\sqrt{2}$ enthalten
$2.2.2$ beschränkter Teil des Bandes ändert sich unendlich oft
Da die TM nur über ein endliches Alphabet verfügt und nur einen Zustand hat, muss dass Symbol entweder in allen Zellen Konstant sein oder sich ständig ändern.
$2.2.2.1$ Symbole in allen Zellen konstant $\Rightarrow$ kann nicht $\sqrt{2}$ beschreiben
$2.2.2.2$ Symbole in allen Zellen ändern sich endlos $\Rightarrow$ kann nicht $\sqrt{2}$ beschreiben

$\sqrt{2}$ mit nur einem Zustand berechnen

Fall 2 : einseitig unendliches Band

- 2.1 $S < \infty$ und $S < R$
- 2.2 $S = R = \infty$
  - $2.2.1$ Lesekopf betritt nur endlichen Bereich des Bandes
  - $2.2.2$ beschränkter Teil des Bandes ändert sich unendlich oft
    - $2.2.2.1$ Symbol in allen Zellen konstant
    - $2.2.2.2$ Symbole in den Zellen ändern sich endlos
- 2.3 $R <= S$

2.3 Lesekopf betritt ursprünglich unbeschriebenen Bereich des Bandes und bleibt dort
$2.3.1$ Lesekopf verlässt erstes leere Feld nach Links $\Rightarrow$ Lesekopf auf endlichem Bereich des Bandes gefangen $\Rightarrow$ Band kann nicht $\sqrt{2}$ enthalten
$2.3.2$ Lesekopf verlässt erstes leeres Feld R mal nach rechts $\Rightarrow$ Lesekopf wird nicht zu erstem leeren Feld zurückkommen, da R die *reflection number* für $\square$ ist