Eine universelle Turingmaschine mit zwei Zuständen/Symbolen

Ein Paper von Claude E. Shannon

Sven Fiergolla

6. Juli 2017

Einführung

Formal definieren wir die Turingmaschine als Septupel $\mathbf{M} = (\mathbf{Q}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{q_0}, \delta, \square, \mathbf{F})$ wobei:

$\mathbf{Q} =$ die endliche Zustandsmenge

$\mathbf{\Sigma} =$ das endliche Eingabealphabet

$\mathbf{\Gamma} =$ das endliche Bandalphabet und es gilt $\mathbf{\Sigma} \subset \mathbf{\Gamma}$

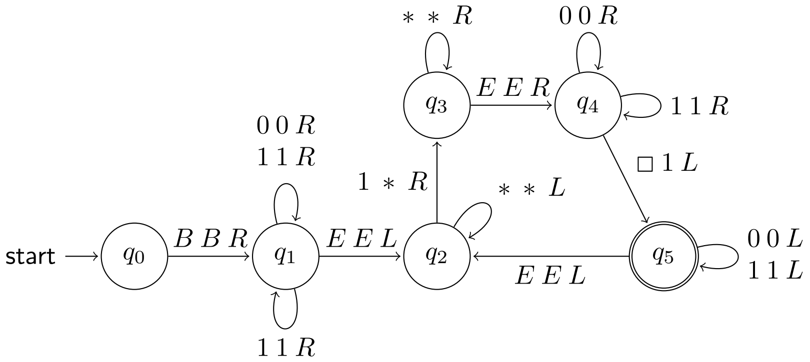
$\mathbf{q_0} =$ der Anfangszustand

$\delta =$ die (partielle) Überführungsfunktion

$\square =$ steht für das leere Feld (Blank)

$\mathbf{F} =$ die Menge der akzeptierenden Endzustände

Beispiel


start
q_0
q_1
q_2
q_3
q_4
q_5
$B\,B\,R$
$E\,E\,L$
$E\,E\,L$
$E\,E\,R$
$1 * R$
$* * L$
$* * R$
$0\,0\,R$
$1\,1\,R$
$0\,0\,R$
$1\,1\,R$
$1\,1\,R$
$\square\,1\,L$
$0\,0\,L$
$1\,1\,L$

Universelle Turingmaschinen

Formal ist eine universelle Turingmaschine eine Maschine UTM, die eine Eingabe $w|x$ liest. Das Wort w ist hierbei eine die Beschreibung einer Turingmaschine M_w, die zu einer bestimmten Funktion mit Eingabe x die Ausgabe berechnet. UTM simuliert also das Verhalten von $\mathbb{M}_{\precapprox}$ mit Hilfe der Funktionsbeschreibung w und der Eingabe x.

Konstruktion

Turingmaschine A: $A_1, A_2, ..., A_m \in \Sigma_A$ die Symbole und $q_1, q_2, ...q_n \in Q_A$ die Zustände der Maschine. Maschine B besitzt:

- elementare Symbolen von Maschine A, $B_1, B_2, ..., B_m \in \Sigma_B$
- $4mn$ neue Symbole, welche Informationen über den Zustand und den Status der *bouncing operation* speichern: $B_{m,n,x,y} \in \Sigma_B$
  - $m =$ Symbole von $A, |\Sigma_A|$
  - $n =$ Zustände von $A, |Q_A|$
  - $x = +$ oder $-$ ob der Zustand des letzten Feldes in diese Feld übertragen wird oder aus diesem Feld stammt
  - $y = R$ oder L ob die Information in das rechte oder linke Feld übertragen wird.

Insgesammt besitzt Maschine B also $m + 4mn$ Symbole.

Zustände

Die Zustände von Maschine B werden α und β heißen.

Um die Information des aktuellen Zustands nach bearbeiten eines Symbols in der nächsten Zelle zur Verfügung zu haben, auch wenn die $TM\ B$ nur zwei Zustände hat, wird diese in den Symbolen gespeichert (Index n) und über die sogenannte *bouncing operation* in die nächste Zelle übertragen.

Übergange

Nr.	**Symbol**	**Zustand** $\Rightarrow$	**Symbol**	**Zustand**	**Richtung**
(1)	B_i	α	$B_{i,1,-,R}$	α	R
(2)	B_i	β	$B_{i,1,-,L}$	α	L
(3)	$B_{i,j,-,x}$	α or β	$B_{i,(j+1),-,x}$	α	$x \in \{R, L\}$
(4)	$B_{i,j,+,x}$	α or β	$B_{i,(j-1),-,x}$	β	$x \in \{R, L\}$
(5)	$B_{i,1,+,x}$	α or β	B_i	α	$x \in \{R, L\}$

zusätzlich erhält Maschine B für jeden Übergang in A :

(6) $(A_i, q_j) \to (A_k, q_l, {}^{R}_{L}) \Rightarrow (B_{i,j,-,x}, \alpha) \to (B_{k,l,+,{}^{R}_{L}}), {}^{\beta}_{\alpha}, {}^{R}_{L}$

Beispiel

Maschine A:

$$...|\underbrace{A_3}_{}|A_{13}|...$$

$$q_7 \xrightarrow{A_3\ A_8\ R} q_4$$

$$...|A_8|\underbrace{A_{13}}_{}|...$$

Beispiel

Maschine B:

Ausgangssituation	**Übergangsfunktion**	**Gleichung**
$\ldots\vert\underbrace{B_{3,7,-,x}}\vert B_{13}\vert\ldots$	$\delta(B_{3,7,-,x}, \alpha) = (B_{8,4,+,R}, \beta, R)$	(6)
$\ldots\vert B_{8,4,+,R}\vert\underbrace{B_{13}}\vert\ldots$		