科別：數學

作品名稱：閔可夫斯基、夢想、與他的黏耳垂

作者：王治鈞、李宇軒、林享辰

關鍵詞：雙曲複數、鯊魚、害羞

摘要

u 非實數，取 $u^2=-1$ 得普通虛數 i，取 $u^2=1$ 得雙曲虛數 j。由複數類比到雙曲複數，可以從基本定義推廣到雙曲複平面、雙曲角、歐拉公式、雙曲幾何、雙曲複分析等概念。

符號說明

N 自然數集，包含 0

R 實數集

Z 複數集

τ 圓周長與半徑的比值

$a_1 \equiv a_2$ 除非有特別標示，為模τ下的運算，即$a_1 \equiv a_2 \pmod{\tau}$

w 表示一個雙曲複數

ϕ 表示雙曲角

ρ 表示雙曲複數的模長

目錄

壹、研究動機

複數集在數學和物理等領域扮演著相當重要的角色。在數學上的意義，它是最小的代數封閉域；而對物理而言，因為三角函數的週期性，提供了波動的數學模型，同時微積分(數學分析)對於複數的推廣--複分析也是近代物理中不可或缺的利器。與複數相似的雙曲複數卻比較少被討論，主要原因是它非代數封閉，甚至不成一個域。涉及雙曲複數的運算往往比起一般複數更不自然、不符合直覺。但或許正是這些奇特的性質，能夠幫助建構描述特定系統的模型。

貳、研究目的

利用雙曲複數既有的定義，推廣雙曲角適用的範圍，再進一步證明柯西積分定理的類比與冪級數在雙曲複評面上的斂散性。

參、研究方法

雙曲複數在結構上與一般複數非常相似。對於大部分存在於複數之中的性質，都可以經由類比的方式重新推導。例如複數中的三角函數$\sin x, \cos x$，可以對應到雙曲函數$\sinh x, \cosh x$、定義長度的範數a^2+b^2可以對應到a^2-b^2等。

肆、討論

(一)定義

定義 j 滿足(1-1):

$$\mathrm{j}^2 = 1$$
$$j \notin R$$

稱 j 為雙曲虛數單位，型如 a+jb 的數稱之雙曲複數，其中$a, b \in R$。

(二)基本運算

1. 加減法

$$w_1 \pm w_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

2. 乘法

$$w_1 w_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

3. 共軛

$$w^* = a - jb$$

4. 平方範數

$$\|w\| = ww^* = a^2 - b^2$$

5. 乘法反元素

$$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{w^*}{ww^*} = \frac{w^*}{\|w\|}$$

6. 除法

$$\frac{w_1}{w_2} = w_1 w_2^{-1} = \frac{w_1 w_2^*}{\|w_2\|} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^2 - b_2^2}$$

(三)歐拉公式

(1) e^{ijx}

著名的歐拉公式描述指數函數 e^x 在複數上的解析延拓，

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

現在我們試著利用 e^x 的泰勒展開式推導歐拉公式在雙曲複數上的類比。

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^{jx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jx)^k}{k!}$$

由定義(1-1)，$j^2=1$，我們有

$$\begin{cases} (jx)^k = x^k, k \equiv 0 \ (mod\ 2) \\ (jx)^k = jx^k, k \equiv 1 \ (mod\ 2) \end{cases}$$

故可以將展開式中的奇偶項分離

$$e^{jx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jx)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + j\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

注意到

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

因此

$$e^{jx} = \cosh x + j\sinh x \qquad (3\text{-}1)$$

(2)e^{ijx}

在對虛數 i 的定義僅有 $i^2=-1$ 的情況下，證明關於e^{ijx}的歐拉公式和原始的歐拉公式是等價的。

$$\begin{aligned} & e^{ijx} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ijx)^k}{k!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + ij \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos x + ij \sin x \end{aligned} \tag{3-2-1}$$

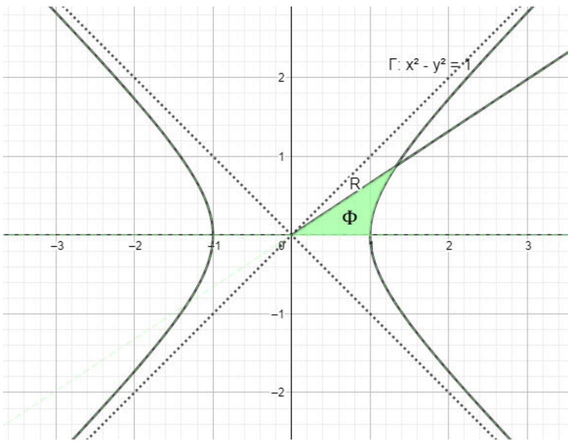
從這裡也可以得到歐拉恆等式

$$\mathrm{e}^{\frac{ij\tau}{2}} = -1 \tag{3-2-2}$$

(四)雙曲角

(1)定義

以原點 O 為端點的射線 R 介於$\left(-\frac{\tau}{8},\frac{\tau}{8}\right)$，與單位雙曲線$\Gamma: \mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2=1$、x 軸圍出區域 Φ，面積 a，定義 R 上所有點其雙曲角為 2a。(4-1)



設 R 與Γ交於 P(x, y)，有

$$\mathrm{x} = \cosh\phi \tag{4-1-1}$$

$$\mathrm{y} = \sinh\phi \tag{4-1-2}$$

(2)推廣

依據以上的敘述，$(-\frac{\tau}{8},\frac{\tau}{8})$以外的點的雙曲角沒有被定義。因為這些點所在的射線不和雙曲線相交，或是交於雙曲線的左半。以下我們試著給出更具一般性的定義:

在高斯平面上，任一複數 z 皆可以極式表示成

$$z = re^{i\theta}$$

其中 r 為 z 的模長(半徑)，θ為幅角。同樣地，可以仿造上式表示一個雙曲複數

$$w = a + jb = \rho e^{j\phi} \tag{4-2}$$

在此並未說明如何求 ρ、φ，**需要進一步推導。**由(3-1)，

$$\rho e^{j\phi} = \rho(\cosh\phi + j\sinh\phi)$$

再由(4-1-1), (4-1-2)可知

$$(\rho\cosh\phi\,, \rho\sinh\phi) = (a, b)$$
$$(\cosh\phi\,, \sinh\phi) \equiv \cosh\phi + j\sinh\phi$$
$$(a, b) \equiv a + jb$$
$$\Rightarrow \rho\cosh\phi + j\,\rho\sinh\phi = a + jb$$

故(4-2)中的φ確實是 w 在雙曲複平面上的雙曲角，故式(4-2)的表示方式是合理的。於是，

$$\begin{cases}\rho\cosh\phi = a \\ \rho\sinh\phi = b\end{cases} \tag{4-3}$$

由雙曲函數的特性

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

得到

$$\rho^2\cosh^2\phi - \rho^2\sinh^2\phi = a^2 - b^2$$

$$\rho^2 = a^2 - b^2 \tag{4-4-1}$$

這是雙曲複數 w=a+jb 和其「模長」ρ 的關係。注意到 a^2-b^2 的值可能為負，為了討論方便，先暫定$\sqrt{-1} = i$，並規定

$$\rho = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\|w\|} \tag{4-4-2}$$

這個定義顯然是不足的。因為在任何情況下，i 與-i 完全對稱，沒有理由取$\sqrt{-1} = i$而不是$\sqrt{-1} = -i$，在之後的討論會做修正。這裡先以此定義導出 w 與φ **的關係。**

由(4-3)、(4-4-2)，

$$\begin{cases}\cosh\phi = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ \sinh\phi = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\end{cases}$$

因為

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

故

$$\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}} = e^{\phi}$$

$$\phi = \ln\tfrac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}} \qquad (4\text{-}5)$$

$\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$的值可能是正實數、負實數或純虛數。對於$\ln z$在複數上的定義，我們規定如下:

$$\frac{\tau}{2} \geq Im(\ln z) > -\frac{\tau}{2}$$

於是有 $\ln -1 = \frac{i\tau}{2}$ 、 $\ln i = \frac{i\tau}{4}$ 、 $\ln(1-i) = \ln\sqrt{2} - \frac{i\tau}{8}$ 等。

以下舉例說明對於一個雙曲複數，用模長與雙曲角的「極式」(式(4-2))表示方式。注意到其中ρ類比一般複數的半徑、模長；ϕ 類比幅角:

1 = 1+j0

$$\rho = \sqrt{1^2-0^2} = 1$$

$$\phi = \ln\frac{1+0}{\sqrt{1^2-0^2}} = 0$$

$$1 = 1 \cdot e^{j0}$$

-1 = -1+j0

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 - 0^2} = 1$$
$$\phi = \ln \frac{-1+0}{\sqrt{(-1)^2 - 0^2}} = \ln -1 = \frac{i\tau}{2}$$

$$-1 = 1 \cdot e^{j(\frac{i\tau}{2})}$$

j = 0+j1

$$\rho = \sqrt{0^2 - 1^2} = i$$
$$\phi = \ln \frac{0+1}{\sqrt{0^2 - 1^2}} = \ln -i = -\frac{i\tau}{4}$$

$$j = i \cdot e^{j(-\frac{i\tau}{4})}$$

4-j5

$$\rho = \sqrt{4^2 - (-5)^2} = 3i$$
$$\phi = \ln \frac{4-5}{\sqrt{4^2 - (-5)^2}} = \ln \frac{i}{3} = -\ln 3 + \frac{i\tau}{4}$$

$$4 - j5 = 3i \cdot e^{j(-\ln 3 + \frac{i\tau}{4})}$$

(3)問題與修正

在複數極式的運算中，兩數相乘的極式滿足其模長為原模長相乘，幅角為原幅角相加。即：

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$
$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$
$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$
$$\begin{cases} r = r_1 r_2 \\ \theta \equiv \theta_1 + \theta_2 \pmod{\tau} \end{cases}$$

觀察下面兩雙曲複數相乘及其極式：

$$w_1 = 4 - j5$$
$$\rho_1 = \sqrt{4^2 - 5^2} = 3i$$
$$\phi_1 = \ln \frac{4-5}{\sqrt{4^2 - 5^2}} = -\ln 3 + \frac{i\tau}{4}$$

$$w_1 = 3i \cdot e^{j(-\ln 3 + \frac{i\tau}{4})}$$

$$w_2 = j = 0 + j1$$
$$\rho_2 = \sqrt{0^2 - 1^2} = i$$
$$\phi_2 = \ln \frac{0+1}{\sqrt{0^2 - 1^2}} = \ln -i = -\frac{i\tau}{4}$$
$$w_2 = i \cdot e^{j(-\frac{i\tau}{4})}$$

$$w = w_1 w_2 = -5 + j4$$
$$\rho = \sqrt{(-5)^2 - 4^2} = 3$$
$$\phi = \ln \frac{-5+4}{\sqrt{(-5)^2 - 4^2}} = \ln -\frac{1}{3} = -\ln 3 + \ln -1 = -\ln 3 + \frac{i\tau}{2}$$
$$w = 3 \cdot e^{j(-\ln 3 + \frac{i\tau}{2})}$$

注意到$\rho = 3$，$\rho_1\rho_2 = -3$；$\phi = -\ln 3 + \frac{i\tau}{2}$，$\phi_1 + \phi_2 = -\ln 3 \not\equiv \phi \pmod{\tau}$，但是我們期望$\rho = \rho_1\rho_2$、$\phi \equiv \phi_1 + \phi_2 \pmod{\tau}$。回到式(4-4-1)、(4-4-2)：

$$\rho^2 = a^2 - b^2$$
$$\rho = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\|w\|}$$

這裡的規定是$\sqrt{-1} = i$，對於正數則是取正平方根。以下嘗試取另一個平方根：

$$w = 4 - \mathrm{j}5$$
$$\rho' = -\sqrt{4^2 - (-5)^2} = -3i$$
$$\phi' = \ln \frac{4-5}{\rho'} = \ln -\frac{i}{3} = -\ln 3 + \ln -i = -\ln 3 - \frac{i\tau}{4}$$

我們得到$w = 4 - \mathrm{j}5$的另一種極式表示式

$$w = 4 - \mathrm{j}5 = \rho' e^{j\phi'} = -3i \cdot e^{j(-\ln 3 - \frac{i\tau}{4})}$$

比較原本的極式

$$4-j5=3i\cdot e^{j(-\ln 3+\frac{i\tau}{4})}$$

可以發現$\rho=-\rho'$，$\phi\equiv\phi'+\frac{\mathrm{i}\tau}{2}\,(\mathrm{mod}\,\tau)$。並且兩極式所表示的數相同，因為

$$\begin{aligned}&\rho e^{j\phi}\\&=-\rho(-e^{j\phi})\\&=-\rho\left(e^{\frac{ij\tau}{2}}e^{j\phi}\right)\qquad\text{(由式(3-2-2))}\\&=-\rho e^{j\phi+\frac{ij\tau}{2}}\\&=-\rho e^{j(\phi+\frac{i\tau}{2})}\end{aligned}$$

因此對於任何一個雙曲複數(形如$\mathrm{a}\pm\mathrm{ja}$者除外)，皆有兩種極式。這在一般複數上是不會發生的，因為所有複數的極式其模長 r 皆為非負實數，而非負實數的乘除法是封閉的，所以能滿足相乘後的模長為原模長相乘。而對於雙曲複數而言，模長的平方(平方範數)ρ^2可以是負的，意味著ρ本身的取值會牽涉到虛數 i。在這種情況下，無法存在一個良好的定義保持極式運算的本性，其中模長ρ只能是正實數(或只能是負實數)或 i 的正實數(或負實數)倍。亦即如果我們規定$\rho=\sqrt{\|w\|}$，$\sqrt{-1}=i$，則雙曲複數 4-j5、j 的極式如下

$$4-j5=3i\cdot e^{j(-ln\,3+\frac{i\tau}{4})}$$

$$j=i\cdot e^{j(-\frac{i\tau}{4})}$$

模長 3i、i 相乘為-3，根據對於 ρ 的限制，-3 不會是任何雙曲複數的模長。

為了解決這個問題，必須兩種極式同時使用，即

$$4-j5=3i\cdot e^{j\left(-\ln 3+\frac{i\tau}{4}\right)}=-3i\cdot e^{j\left(-\ln 3-\frac{i\tau}{4}\right)}$$

可以將極式用中括弧表示，因為推廣後的雙曲角φ是複數，所以進一步將其表示成$\phi_0+i\delta$，其中ϕ_0為實部，δ為虛部。

$$\rho e^{j\phi}\equiv[\rho,\phi]=[\rho,\phi_0+i\delta]$$

注意到，因為式(4-5)

$$\phi=\ln\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

自然對數的參數$\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$只可能為實數或純虛數，因此可以確定雙曲角$\phi$虛部$\delta$的取值可能性

$$\begin{cases}\ln 1\equiv 0\\ \ln i\equiv\dfrac{i\tau}{4}\\ \ln -1\equiv\dfrac{i\tau}{2}\\ \ln -i\equiv-\dfrac{i\tau}{4}\end{cases}$$

$$4\delta\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \tau)\qquad(4\text{-}6)$$

一些性質/運算:

雙曲角的週期性

$$[\rho,\phi_0+i\delta]=[\rho,\phi_0+i(\delta+\tau)]$$

乘法

$$[\rho_1,\ \phi_{0_1}+i\delta_1][\rho_2,\ \phi_{0_2}+i\delta_2]=[\rho_1\rho_2,\ (\phi_{0_1}+\phi_{0_2})+i(\delta_1+\delta_2)]$$

乘法反元素

$$[\rho, \phi_0 + i\delta]^{-1} = [\rho^{-1}, -\phi_0 - i\delta]$$

根據之前的討論，每個雙曲複數皆有兩種極式，即

$$[\rho, \phi_0 + i\delta] = \left[-\rho, \phi_0 + i(\delta + \frac{\tau}{2})\right]$$

(五)複分析對於雙曲複數的類比

(1)柯西-黎曼方程組

複分析中的柯西-黎曼方程可以說是整個理論的基石，它給出了全純函數的定義，也就是複分析主要研究的對象。該方程是描述複變函數 f 與兩個雙變數實函數

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

的偏微分方程組。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

柯西積分定理

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

成立，若路徑 D 是一條封閉曲線，並且 f(z)在其內部滿足柯西-黎曼方程。

我們試著將柯西-黎曼方程類比到雙曲複數，並證明類似的性質。同樣地，考慮一個雙曲複變函數

$$f(w) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$$

以下證明若函數 f(w)在一封閉曲線 γ 內滿足

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

則

$$\oint_{\gamma} f(w)dw = 0$$

引理-格林公式

$$\iint_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dA = \oint_{L} (Pdx + Qdy)$$

其中 Q, P 為兩個關於 x, y 的雙變數函數，D 為一單連通區域，L 為圍繞 D 的正向(逆時針)路徑。

證明：

$$\oint_{\gamma} f(w)dw$$
$$= \oint_{\gamma} f(w)d(x + jy)$$
$$= \oint_{\gamma} (u(x, y) + v(x, y))(dx + jdy)$$
$$= \oint_{\gamma} (udx + vdy) + j\oint_{\gamma} (vdx + udy)$$

分別將兩積分式代入格林公式，

$$\oint_{\gamma}(udx+vdy)+j\oint_{\gamma}(vdx+udy)$$
$$=\pm\iint_{D}(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})dA\pm j\iint_{D}(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y})dA$$

其中正負號取決於路徑 γ 的方向，因為格林定律要求曲線為正向。由於

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$
$$\iint_{D}(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})dA=\iint_{D}0dA=0$$
$$\iint_{D}(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y})dA=\iint_{D}0dA=0$$

因此

$$\oint_{\gamma}f(w)dw=0$$

(2)收斂半徑

複平面上一個複係數的冪級數

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$$

根據達朗貝爾審斂法，收斂半徑 r 的倒數 $\frac{1}{r}$ 可由係數比的極限求出：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

考慮一個雙曲複平面上的冪級數，此處先假設係數為實數。

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\rho e^{j\phi})^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k e^{jk\phi}$$

以下試著求其收斂範圍

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k e^{jk\phi}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k (\cosh k\phi + j \sinh k\phi)$$

$$= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k \cosh k\phi + j \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k \sinh k\phi \qquad (4\text{-}7)$$

兩項都是關於ρ的冪級數，第 k 項係數分別是$a_k \cosh k\phi$ 、$a_k \sinh k\phi$。分開求其收斂範圍。

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} \cosh(n+1)\phi}{a_n \cosh n\phi} \right|$$

$$= \frac{1}{r} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cosh(n+1)\phi}{\cosh n\phi} \right|$$

$$= \frac{1}{r} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{(n+1)\phi} + e^{-(n+1)\phi}}{e^{n\phi} + e^{-n\phi}} \right|$$

$$= \frac{1}{r} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{(n+1)(\phi_0+i\delta)} + e^{-(n+1)(\phi_0+i\delta)}}{e^{n(\phi_0+i\delta)} + e^{-n(\phi_0+i\delta)}} \right|$$

$$= \frac{1}{r} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{(n+1)\phi_0} e^{i(n+1)\delta} + e^{-(n+1)\phi_0} e^{-i(n+1)\delta}}{e^{n\phi_0} e^{in\delta} + e^{-n\phi_0} e^{-in\delta}} \right|$$

其中 r 為原本的冪級數在複數集上的收斂半徑。在這裡分為ϕ_0為正、負、0 討論

i. $\phi_0 > 0$

當$n \to \infty$，$e^{n\phi_0},\ e^{(n+1)\phi_0} \to \infty$；$e^{-n\phi_0}$，$e^{-(n+1)\phi_0} \to 0$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{(n+1)\phi_0}e^{i(n+1)\delta}+e^{-(n+1)\phi_0}e^{-i(n+1)\delta}}{e^{n\phi_0}e^{in\delta}+e^{-n\phi_0}e^{-in\delta}}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{(n+1)\phi_0}e^{i(n+1)\delta}}{e^{n\phi_0}e^{in\delta}}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|e^{\phi_0}e^{i\delta}\right|$$
$$=e^{\phi_0}$$

ii. $\phi_0<0$

當$n\to\infty$，$e^{n\phi_0},\ e^{(n+1)\phi_0}\to 0$；$e^{-n\phi_0},\ e^{-(n+1)\phi_0}\to\infty$，和$\phi_0>0$的情況相似，原式相當於

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{-(n+1)\phi_0}e^{-i(n+1)\delta}}{e^{-n\phi_0}e^{-in\delta}}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|e^{-\phi_0}e^{-i\delta}\right|$$
$$=e^{-\phi_0}$$

iii. $\phi_0=0$

由於$e^0=1$我們可以將原式簡化

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{(n+1)\phi_0}e^{i(n+1)\delta}+e^{-(n+1)\phi_0}e^{-i(n+1)\delta}}{e^{n\phi_0}e^{in\delta}+e^{-n\phi_0}e^{-in\delta}}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{i(n+1)\delta}+e^{-i(n+1)\delta}}{e^{in\delta}+e^{-in\delta}}\right|$$

依據(4-6)，雙曲角虛部δ的取值在模τ下只有四種可能，分為兩組討論

情況一：$\delta\equiv 0\,,\frac{\tau}{2}\ (\mathrm{mod}\ \tau)$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{(n+1)\phi_0}e^{i(n+1)\delta}+e^{-(n+1)\phi_0}e^{-i(n+1)\delta}}{e^{n\phi_0}e^{in\delta}+e^{-n\phi_0}e^{-in\delta}}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{i(n+1)\delta}+e^{-i(n+1)\delta}}{e^{in\delta}+e^{-in\delta}}\right|$$

$$2\delta\equiv 0\,,n\in\mathbf{N}$$

$$\Rightarrow 2n\delta \equiv 0$$
$$\Rightarrow n\delta \equiv -n\delta$$
$$\Rightarrow e^{in\delta} = e^{-in\delta}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{i(n+1)\delta} + e^{-i(n+1)\delta}}{e^{in\delta} + e^{-in\delta}}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2e^{i(n+1)\delta}}{2e^{in\delta}}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|e^{i\delta}\right|$$
$$= 1$$

情況二：$\delta \equiv \frac{\tau}{4}, \frac{3\tau}{4}$

這種情況下不使用達朗貝爾審斂法，而是根植審斂法

$$\frac{1}{\mathrm{r}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

其中limsup表示上極限，即最小上界的極限

回到原本(4-7)的冪級數，以根植審斂法求收斂範圍

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cosh n\phi|}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^{n\phi} + e^{-n\phi}}{2}\right|}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{r}} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^{n(\phi_0+i\delta)} + e^{-n(\phi_0+i\delta)}}{2}\right|}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{r}} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^{in\delta} + e^{-in\delta}}{2}\right|}$$

$$\delta \equiv \frac{\tau}{4}, \frac{3\tau}{4}, \mathrm{n} \in \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow 2n\delta \equiv 0, \frac{\tau}{2}$$

$$\Rightarrow in\delta \equiv -in\delta \vee in\delta \equiv -in\delta + \frac{\tau}{2}$$

$$\Rightarrow e^{in\delta} = e^{-in\delta} \vee e^{in\delta} = -e^{-in\delta}$$

因此

$$\sqrt[n]{\left|\frac{e^{n\phi}+e^{-n\phi}}{2}\right|}$$

的值可能為 1 或 0，即

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^{in\delta}+e^{-in\delta}}{2}\right|} = 1$$

綜上所述，可以整理出一冪級數在雙曲複平面上的散斂情況：一收斂半徑為 r 的冪級數

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$$

在雙曲複平面上收斂，當

$$\begin{cases} |\rho| < re^{-\phi_0}, \phi_0 > 0 \\ |\rho| < re^{\phi_0}, \phi_0 < 0 \\ |\rho| < r, \phi_0 = 0 \end{cases}$$

能發現上式可以再進一步歸納為

$$|\rho| < re^{-|\phi_0|}$$

$$\left|\sqrt{a^2-b^2}\right| < re^{-\left|\ln\left|\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right|\right|}$$

i. $\left|\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right| \geq 1$, $|a+b| \geq \left|\sqrt{a^2-b^2}\right|$, $|a+b| \geq |a-b|$

$$\left|\sqrt{a^2-b^2}\right| < \mathrm{e}^{-\ln\left|\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right|} = \left|\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\right|$$

$$|a+b| < r$$

ii. $\left|\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right| < 1$, $|a+b| < \left|\sqrt{a^2-b^2}\right|$, $|a+b| < |a-b|$

$$\left|\sqrt{a^2-b^2}\right| < re^{\ln\left|\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right|} = \left|\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right|$$

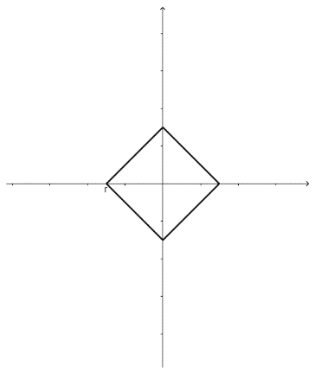
$$|a^2-b^2| < |a+b|$$

$$|a-b| < r$$

因此，收斂範圍是

$$(|a+b| \geq |a-b| \wedge |a+b| < r) \vee (|a+b| < |a-b| \wedge |a-b| < r)$$

在雙曲複平面上，這是一個正方形區域，四個頂點分別是r, −r, jr, −jr。和複分析中的收斂圓類似，邊界上的點的斂散性是不一的，需要其他方法驗證。



伍、結論

(一)歐拉公式

透過泰勒級數可以得到類似於歐拉公式的

$$e^{jx} = \cosh x + j \sinh x$$
$$e^{ijx} = \cos x + ij \sin x$$

(二)雙曲角

雖然傳統的定義限制雙曲角在平面上的範圍只能在

$$-\frac{\tau}{8} < \theta < \frac{\tau}{8}$$

但是我們透過雙曲複數的性質推廣雙曲角ϕ在任一點的取值：

$$\phi = \ln \frac{a+b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

特別地，對於每個雙曲複數，皆有兩種極式：

$$[\rho, \phi_0 + i\delta] = \left[-\rho, \phi_0 + i(\delta + \frac{\tau}{2})\right]$$

(三)柯西積分定理

柯西積分定理的類比

$$\oint_\gamma f(w)dw = 0$$

(四)冪級數的斂散性

利用達朗貝爾比值審斂法與柯西根植審斂法，可以求得密集數在雙取複平面上的斂散性。

$$|a| + |b| < r$$

陸、參考資料

1. An Introduction To Hyperbolic Analysis, Andrei Khrennikov Gavriel Segre 2005

2. https://en.wikipedia.org/wiki/Ratio_test
3. https://es.wikipedia.org/wiki/Criterio_de_la_ra%C3%ADz
4. Complex Analysis, Christian Berg 2012