

Algorytmy i Struktury Danych

Lista zadań 9 - DFT, B-drzewa, sieci sortujące

1. Wyznacz DFT dla ciągów (5, 3) oraz (1, 5, 3, 1):
 - (a) z definicji,
 - (b) symulując działanie algorytmu FFT podanego na wykładzie.
2. Dyskretną transformatą Fouriera ciągu (a_1, \dots, a_n) nazywamy ciąg (A_1, \dots, A_n) taki, że:

$$A_k = \sum_{p=0}^{n-1} a_p e^{2\pi i k p / n} \quad \text{dla } k = 0 \dots n-1. \quad (1)$$

Odwrotną dyskretną transformatą Fouriera ciągu (A_1, \dots, A_n) nazywamy ciąg (b_1, \dots, b_n) taki, że:

$$b_q = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A_k e^{-2\pi i q k / n} \quad \text{dla } q = 0 \dots n-1 \quad (2)$$

Wstawiając wzór (1) do prawej strony wzoru (2) udowodnij że $b_q = a_q$ dla $q = 0 \dots n-1$, czyli, że wynikiem odwrotnej dyskretniej transformaty Fouriera, wykonanej na transformacie ciągu (a_1, \dots, a_n) jest faktycznie wyjściowy ciąg liczb (a_1, \dots, a_n) .

3. Do pustego B-drzewa o parametrze $t = 2$ wstaw 20 kolejnych liczb, a następnie usuń je w kolejności wstawiania (na kartkach).
4. Jaka jest największa, a jaka najmniejsza, łączna liczba kluczy w B-drzewie, o ustalonym t i głębokości k . Przyjmujemy, że głębokość k , to ilość poziomów, na których występują węzły.
5. Udowodnij zasadę zero-jedynkową dla sieci sortujących: *Jeśli sieć poprawnie sortuje wszystkie możliwe n -elementowe ciągi zer i jedynek, to dobrze sortuje dowolne ciągi liczb rzeczywistych.*
6. * Udowodnij, że `bitonic_half_cleaner(2n)` (patrz Cormen) działa poprawnie dla dowolnego ciągu bitonicznego złożonego z zer i jedynek. To znaczy, że dla dowolnego bitonicznego ciągu zer i jedynek o długości $2n$ danego na wejściu, wynikiem jest: albo ciąg którego lewa połowa to zera a prawa jest bitoniczna, albo ciąg którego lewa połowa jest bitoniczna a prawa to jedynek.
7. Narysuj sieć sortującą n liczb dla $n = 2, 4, 8, 16$. Powinna to być opisana na wykładzie sieć implementująca równoległą wersję algorytmu `mergesort`, działająca w czasie $O((\log n)^2)$. Prześledź działanie sieci o $n = 8$ dla ciągu wejściowego: 8 4 2 3 7 5 6 1, rysując jakie liczby wchodzi i wychodzą z każdego komparatora (na kartkach).