Найти производную выражения

1. $(\sin x \cdot \cos x)' = \left(\frac{1}{2} 2 \sin x \cdot \cos x\right)' = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \frac{2}{2}\cos 2x = \cos 2x$

2. $(\ln(2x+1)^3)' = \frac{1}{(2x+1)^3} \cdot 3(2x+1)^2 \cdot 2$

3. $\left(\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}\right)' = (\sin(\ln(x^3)))' = \cos(\ln(x^3)) \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2$

4. $\left(\frac{x^4}{\ln(x)}\right)' = \frac{4x^3 \cdot \ln(x) - x^4 \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$

5. найти выражение производной функции и ее значение в точке, $x_0 = \sqrt{\pi}$

$f(x) = \cos(x^2+3x)$, $x_0 = \sqrt{\pi}$

$f'(x) = (\cos(x^2+3x))' = -\sin(x^2+3x)(2x+3)$

$-\sin((\sqrt{\pi})^2 + 3\sqrt{\pi})(2\sqrt{\pi}+3) = -\sin(\pi + 3\sqrt{\pi})(2\sqrt{\pi}+3) =$

$= -0.4977(2 \cdot 1{,}772 + 3) = -0.4483$

6. $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{1 + 2x + 3x^2 - 4x^3}$, $x_0 = 0$

$\left(\frac{x^3 - x^2 - x - 1}{1 + 2x + 3x - 4x^3}\right)' = \frac{(3x^2 - 2x - 1)(1 + 2x + 3x^2 - 4x^3) - (2 + 6x - 12x^2)(x^3 - x^2 - x - 1)}{(1 + 2x + 3x^2 - 4x^3)^2} =$

$= \frac{-1 + 2}{1} = 1$

7. Найти угол наклона касательной к графику функции в точке.

$f(x) = \sqrt{3x} \cdot \ln(x)$, $x_0 = 1$

$f'(x) = \frac{1\sqrt{3}}{2\,\cancel{\sqrt{3x}}} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x}}{x}$. подставим $x_0 = 1$

$\frac{1\sqrt{3}}{2} \frac{\cdot \ln(1)}{\sqrt{1}} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{1}}{1} = \sqrt{3}$

$f'(x) = tg\,\alpha = \sqrt{3}$

$\alpha = arctg\,\alpha = 60°$

1) Исследовать на сходимость ряд, используя признак д'Аламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$ необходимое условие выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^n\cdot(n+1)}{(n+1)^2\cdot(n!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{n}+1\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} e \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

ряд сходится

2) Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ необходимое условие сходимости выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

ряд сходится

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln(n)}$$

1. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+\ln(n)}\right| = 0$ необходимое условие выполняется

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+\ln(n)}\right| = 0$ ряд сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\ln(n)} = \frac{1}{n+\ln n} = \frac{1}{1+\ln(1)} + \frac{1}{2+\ln(2)} + \frac{1}{3+\ln(3)} \ldots$$ ряд расходится.

сходимость условная

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \infty$ необходимое условие сходимости ряда не выполнено.

разложить функцию по Тейлору в единице

$$f(x) = \ln(16x^2)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\ln(16x^2) = \frac{\ln(16)}{0!}(x-1)^0 + \frac{1 \cdot 2x}{16x^2 \; 1!}(x-1) - \frac{2 \cdot 2}{16x^2 \; 2!}(x-1)^2 +$$

$$+ \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{16x^3 \; 3!}(x-1)^3 + \dots$$