《概率论与数理统计》

**第一章 概率论的基本概念**

**§2．样本空间、随机事件**

1．事件间的关系 则称事件B包含事件A，指事件A发生必然导致事件B发生

称为事件A与事件B的和事件，指当且仅当A，B中至少有一个发生时，事件发生

称为事件A与事件B的积事件，指当A，B同时发生时，事件发生

称为事件A与事件B的差事件，指当且仅当A发生、B不发生时，事件发生

，则称事件A与B是互不相容的，或互斥的，指事件A与事件B不能同时发生，基本事件是两两互不相容的

，则称事件A与事件B互为逆事件，又称事件A与事件B互为对立事件

2．运算规则 交换律

结合律

分配律



徳摩根律

**§3．频率与概率**

定义 在相同的条件下，进行了n次试验，在这n次试验中，事件A发生的次数称为事件A发生的**频数**，比值称为事件A发生的**频率**

**概率：**设E是随机试验，S是它的样本空间，对于E的每一事件A赋予一个实数，记为P（A），称为事件的概率

1．概率满足下列条件：

（1）**非负性**：对于每一个事件A 

（2）**规范性**：对于必然事件S 

（3）**可列可加性**：设是两两互不相容的事件，有（可以取）

2．概率的一些重要性质：

（i）

（ii）若是两两互不相容的事件，则有（可以取）

（iii）设A，B是两个事件若，则，

（iv）对于任意事件A，

（v） （逆事件的概率）

（vi）对于任意事件A，B有

**§4等可能概型（古典概型）**

等可能概型：试验的样本空间只包含有限个元素，试验中每个事件发生的可能性相同

若事件A包含k个基本事件，即，里

**§5．条件概率**

1. 定义：设A,B是两个事件，且，称为事件A发生的条件下事件B发生的**条件概率**
2. 条件概率符合概率定义中的三个条件

1。非负性：对于某一事件B，有

2。规范性：对于必然事件S，

3可列可加性：设是两两互不相容的事件，则有

1. 乘法定理 设，则有称为乘法公式
2. 全概率公式： 

贝叶斯公式： 

**§6．独立性**

**定义** 设A，B是两事件，如果满足等式，则称事件A,B相互独立

定理一 设A，B是两事件，且，若A，B相互独立，则

定理二 若事件A和B相互独立，则下列各对事件也相互独立：A与

**第二章 随机变量及其分布**

**§1随机变量**

定义 设随机试验的样本空间为是定义在样本空间S上的实值单值函数，称为随机变量

**§2离散性随机变量及其分布律**

1. 离散随机变量：有些随机变量，它全部可能取到的值是有限个或可列无限多个，这种随机变量称为离散型随机变量

满足如下两个条件（1），（2）=1

1. 三种重要的离散型随机变量

（1）分布

设随机变量X只能取0与1两个值，它的分布律是，则称X服从以p为参数的分布或两点分布。

（2）伯努利实验、二项分布

设实验E只有两个可能结果：A与，则称E为伯努利实验.设，此时.将E独立重复的进行n次，则称这一串重复的独立实验为n重伯努利实验。

满足条件（1），（2）=1注意到是二项式的展开式中出现的那一项，我们称随机变量X服从参数为n，p的二项分布。

（3）泊松分布

设随机变量X所有可能取的值为0,1,2…，而取各个值的概率为 其中是常数，则称X服从参数为的泊松分布记为

**§3随机变量的分布函数**

定义 设X是一个随机变量，x是任意实数，函数

称为X的分布函数

分布函数，具有以下性质(1) 是一个不减函数 （2） （3）

**§4连续性随机变量及其概率密度**

连续随机变量：如果对于随机变量X的分布函数F（x），存在非负可积函数，使对于任意函数x有则称x 为连续性随机变量，其中函数f(x)称为X的概率密度函数，简称概率密度

1 概率密度具有以下性质，满足（1）；

（3）；（4）若在点x处连续，则有

2,三种重要的连续型随机变量

(1)均匀分布

若连续性随机变量X具有概率密度，则成X在区间(a,b)上服从均匀分布.记为

(2)指数分布

若连续性随机变量X的概率密度为 其中为常数，则称X服从参数为的指数分布。

（3）正态分布

若连续型随机变量X的概率密度为的正态分布或高斯分布，记为

特别，当时称随机变量X服从标准正态分布

**§5随机变量的函数的分布**

定理 设随机变量X具有概率密度又设函数处处可导且恒有，则Y=是连续型随机变量，其概率密度为

**第三章 多维随机变量**

**§1二维随机变量**

定义 设E是一个随机试验，它的样本空间是和是定义在S上的随机变量，称为随机变量，由它们构成的一个向量（X，Y）叫做二维随机变量

设（X，Y）是二维随机变量，对于任意实数x，y，二元函数称为二维随机变量（X，Y）的分布函数

如果二维随机变量（X，Y）全部可能取到的值是有限对或可列无限多对，则称（X，Y）是离散型的随机变量。

我们称为二维离散型随机变量（X，Y）的分布律。

对于二维随机变量（X，Y）的分布函数，如果存在非负可积函数f（x，y），使对于任意x，y有则称（X，Y）是连续性的随机变量，函数f（x，y）称为随机变量（X，Y）的概率密度，或称为随机变量X和Y的**联合概率密度。**

**§2边缘分布**

二维随机变量（X，Y）作为一个整体，具有分布函数.而X和Y都是随机变量，各自也有分布函数，将他们分别记为，依次称为二维随机变量（X，Y）关于X和关于Y的**边缘分布函数。**

  分别称为（X，Y）关于X和关于Y的**边缘分布律。**

 分别称，为X，Y关于X和关于Y的**边缘概率密度**。

**§3条件分布**

定义 设（X，Y）是二维离散型随机变量，对于固定的j，若

则称为在条件下随机变量X的条件分布律，同样为在条件下随机变量X的条件分布律。

设二维离散型随机变量（X，Y）的概率密度为，（X，Y）关于Y的边缘概率密度为，若对于固定的y，〉0，则称为在Y=y的条件下X的条件概率密度，记为=

§4相互独立的随机变量

定义 设及，分别是二维离散型随机变量（X，Y）的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x,y有，即，则称随机变量X和Y是相互独立的。

对于二维正态随机变量（X，Y），X和Y相互独立的充要条件是参数

**§5两个随机变量的函数的分布**

1，Z=X+Y的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量，它具有概率密度.则Z=X+Y仍为连续性随机变量，其概率密度为或

又若X和Y相互独立，设（X，Y）关于X，Y的边缘密度分别为则 和这两个公式称为的**卷积公式**

**有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布**

2，

设(X,Y)是二维连续型随机变量，它具有概率密度，则

仍为连续性随机变量其概率密度分别为又若X和Y相互独立，设（X，Y）关于X，Y的边缘密度分别为则可化为 

3

设X，Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为由于不大于z等价于X和Y都不大于z故有又由于X和Y相互独立，得到的分布函数为

的分布函数为

**第四章 随机变量的数字特征**

**§1．数学期望**

定义 设**离散型随机变量**X的分布律为，k=1,2，…若级数绝对收敛，则称级数的和为随机变量X的数学期望，记为，即

设**连续型随机变量**X的概率密度为，若积分绝对收敛，则称积分的值为随机变量X的数学期望，记为，即

定理 设Y是随机变量X的函数Y=(g是连续函数)

（i）如果X是**离散型随机变量**，它的分布律为，k=1,2，…若绝对收敛则有

（ii）如果X是**连续型随机变量**，它的分概率密度为，若绝对收敛则有

数学期望的几个重要性质

1设C是常数，则有

2设X是随机变量，C是常数，则有

3设X,Y是两个随机变量，则有；

4设X，Y是相互独立的随机变量，则有

**§2方差**

定义 设X是一个随机变量，若存在，则称为X的方差，记为D（x）即D（x）=，在应用上还引入量，记为，称为标准差或均方差。



方差的几个重要性质

1设C是常数，则有

2设X是随机变量，C是常数，则有，

3设X,Y是两个随机变量，则有特别，若X,Y相互独立，则有

4的充要条件是X以概率1取常数，即

**切比雪夫不等式**：设随机变量X具有数学期望，则对于任意正数，不等式成立

**§3协方差及相关系数**

定义 量称为随机变量X与Y的协方差为，即

而称为随机变量X和Y的相关系数

对于任意两个随机变量X 和Y，

协方差具有下述性质

1

2

定理 1 

2 的充要条件是，存在常数a,b使

当0时，称X和Y不相关

附：几种常用的概率分布表

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 分布 | 参数 | 分布律或概率密度 | 数学期望 | 方差 |
| 两点分布 |  | ， |  |  |
| 二项式分布 |  | ， |  |  |
| 泊松分布 |  |  |  |  |
| 几何分布 |  |  |  |  |
| 均匀分布 |  | ， |  |  |
| 指数分布 |  |  |  |  |
| 正态分布 |  |  |  |  |

**第五章 大数定律与中心极限定理**

**§1． 大数定律**

**弱大数定理（辛欣大数定理）** 设X1，X2…是相互独立，服从统一分布的随机变量序列，并具有数学期望.作前n个变量的算术平均，则对于任意，有

定义 设是一个随机变量序列，a是一个常数，若对于任意正数，有，则称序列**依概率收敛于a**，记为

**伯努利大数定理** 设是n次独立重复试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生的概率，则对于任意正数〉0，有或

**§2中心极限定理**

定理一（**独立同分布的中心极限定理**） 设随机变量相互独立，服从同一分布，且具有数学期望和方差（k=1,2，…），则随机变量之和， ，

定理二（**李雅普诺夫定理**） 设随机变量…相互独立，它们具有数学期望和方差记

定理三（**棣莫弗-拉普拉斯定理**）设随机变量）的二项分布，则对任意，有