Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Fundamentos de Algoritmos para Computação - EAD05004
Professoras: Sulamita Klein e Fernanda Couto
Gabarito da AP2 - Segundo Semestre de 2024

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular. Se necessário deixe o resultado indicado, como um produto ou quociente ou potência de números inteiros ou fatoriais.
2. Resultado sem indicação de como foi obtido, não será considerado.
3. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
4. Você pode usar lápis para responder as questões.
5. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
6. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Questões:

1. Considere os seguintes enunciados e faça o que se pede.

   (a) (1.0) Usando a relação de Stifel, mostre que:

   $$C_n^p + C_n^{p+1} + C_{n+1}^{p+2} = C_{n+2}^{p+2}$$

   Solução: A Relação de Stifel estabelece que $C_n^r + C_n^{r+1} = C_{n+1}^{r+1}$.
   Portanto

   $$\underbrace{C_n^p + C_n^{p+1}}_{Stifel} + C_{n+1}^{p+2} \;=\; \underbrace{C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^{p+2}}_{Stifel} \;=\; C_{n+2}^{p+2}$$

   (b) (1.5) Avalie o valor S da seguinte soma, usando o binômio de Newton:

   $$S = \sum_{k=0}^{85} 5^k C_{85}^k$$

   Justifique.

   Solução: O Teorema Binomial estabelece que

   $$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

   Comparando o lado direito da igualdade do Teorema Binomial com a soma S, temos

   $$S \;=\; \sum_{k=0}^{85} 5^k C_{85}^k \;=\; \sum_{k=0}^{85} C_{85}^k 1^{85-k} 5^k \;=\; (1+5)^{85} \;=\; 6^{85}$$

2. (1.5) Encontre a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência, usando o método das substituições regressivas:
   $a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1} \qquad n$ natural, $n \geq 1$
   $a_0 = 0$
   Descreva o processo utilizado para chegar à fórmula.

   Solução: Utilizando o Método das Substituições Regressivas, temos

$$
\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1} + 3^{n-1} \\
&= 3(3a_{n-2} + 3^{n-2}) + 3^{n-1} \\
&= 3^2 a_{n-2} + 3^{n-2+1} + 3^{n-1} \\
&= 3^2(3a_{n-3} + 3^{n-3}) + 3^{n-1} + 3^{n-1} \\
&= 3^3 a_{n-3} + 3^{n-3+2} + 3^{n-1} + 3^{n-1} \\
&= 3^3 a_{n-3} + 3^{n-1} + 3^{n-1} + 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

Com isso, observamos o seguinte padrão de desenvolvimento:

$$
a_n = 3^i a_{n-i} + \sum_{j=1}^{i} 3^{n-1}
$$

As substituições prosseguem até que $n - i = 0$, o que acontecerá quando $n = i$. Desta maneira, vemos que

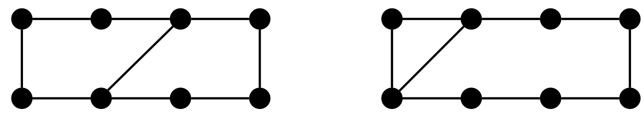
$$
\begin{aligned}
a_n &= 3^i a_{n-i} + \sum_{j=1}^{i} 3^{n-1} \\
&\overset{i=n}{=} 3^n a_0 + \sum_{j=1}^{n} 3^{n-1} \\
&= 3^n(0) + \sum_{j=1}^{n} 3^{n-1} \\
&= n \cdot 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

Portanto, a fórmula fechada da recorrência é $n \cdot 3^{n-1}$ para todo n inteiro não-negativo.

3. (6.0) Verifique se cada uma das afirmações abaixo é **FALSA** ou **VERDADEIRA**. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, dê um contraexemplo (o contraexemplo deve ser justificado).

   (a) Se dois grafos G_1 e G_2 têm a mesma sequência de graus dos vértices então são isomorfos.

   Solução: A afirmação é **falsa**. Considere os grafos a seguir. Ambos possuem sequência de graus dos vértices igual a $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3)$, porém não há um mapeamento de G_1 para G_2 que preserve as adjacências.



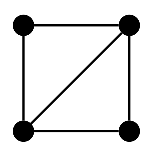
G_1 G_2

(b) Se G é um grafo bipartido então G não possui ciclo ímpar.

Solução: A afirmação é **verdadeira**. Seja G um grafo bipartido com bipartição X e Y. Caso G não possua ciclos, a afirmação é trivialmente satisfeita. Caso contrário, para todo ciclo de G, tome uma ordenação $v_1v_2v_3\cdots v_nv_1$ dos vértices deste ciclo. Como toda aresta em G tem um extremo em X e outro em Y, podemos dispor v_1 em X, sem perda de generalidade, o que implica em $v_2 \in Y$, $v_3 \in X$, $v_4 \in Y$ etc. Com isso, vemos que $n = 2i$, para algum i natural. Portanto, todo ciclo desse grafo possui um número par de vértices.

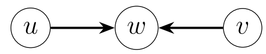
(c) Se G é um grafo hamiltoniano então G é também euleriano.

Solução: A afirmação é **falsa**. Um grafo G é hamiltoniano se ele possui um ciclo que passa por todos os seus vértices como subgrafo. Por teorema, um grafo G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices possuírem grau par. Observe o grafo abaixo. Ele possui o C_4 como subgrafo, o que implica nele ser um grafo hamiltoniano. Em contrapartida, por possuir dois vértices de grau 3, sabemos que ele não é euleriano.



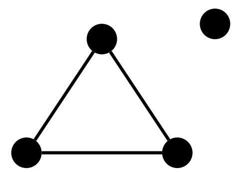
(d) Todo digrafo fracamente conexo é unilateralmente conexo.

Solução: A afirmação é **falsa**. Um digrafo é fracamente conexo se o seu grafo subjacente é conexo, i.e., o grafo originado pela remoção da direção dos arcos e de arestas paralelas. Além disso, o digrafo é unilateralmente conexo se para todo par de vértices u e v existe um caminho orientado de u para v ou um caminho orientado de v para u. Observe o digrafo a seguir. Vemos que nele não há um caminho de u para v ou de v para u. Assim, embora seja fracamente conexo, ele não é unilateralmente conexo.



(e) Todo grafo com $n - 1$ arestas é árvore.

Solução: A afirmação é **falsa**. Para ser uma árvore, o grafo precisa ser acíclico e conexo. Considere o grafo a seguir. Ele possui $n - 1$ arestas, mas não é conexo.



(f) Se G é conexo planar com 25 arestas e 17 faces, então possui 10 vértices.

Solução: A afirmação é **verdadeira**. Como G é planar, nele vale a Fórmula de Euler que relaciona os números de vértices (n), arestas (m) e faces (f) do grafo. Logo

$$n - m + f = 2 \implies n - 25 + 17 = 2 \implies n = 2 + 8 = 10$$