KUMPULAN MATERI
Euler Math Toolbox (EMT)

Kumpulan Materi ini Disusun Untuk Memenuhi Tugas Mata Kuliah Aplikasi Komputer
Dosen Pengampu: Bapak Drs. Sahid, M.Sc dan
Bapak Thesa Adi Saputra Yusri, M.Sc

Disusun Oleh:
Alfi Nur Azumah
23030630002
Matematika B 2023

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2024

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkah dan rahmat-Nya, sehingga buku Kumpulan Materi Euler Math Toolbox: Konsep Dasar ini dapat terselesaikan dengan baik. Buku ini disusun dengan tujuan untuk memperkenalkan dan memberikan pemahaman yang mendalam mengenai konsep dasar dari Euler Math Toolbox (EMT), sebuah perangkat lunak komputasi yang powerful dan fleksibel untuk melakukan berbagai perhitungan matematis.

Euler Math Toolbox merupakan alat yang sangat berguna dalam analisis matematika, pemrograman numerik, dan visualisasi data. Dengan kemampuannya yang luas, EMT dapat digunakan dalam berbagai bidang ilmu, mulai dari matematika murni, fisika, hingga teknik. Buku ini berfokus pada penyajian konsep dasar yang diperlukan untuk memahami cara kerja dan penggunaan EMT, sehingga pembaca dapat dengan mudah memulai eksplorasi dan penerapan perangkat lunak ini.

Materi dalam buku ini mencakup berbagai topik fundamental, seperti pengenalan antarmuka EMT, pemrograman dasar, serta penggunaan fungsi-fungsi matematis yang ada di dalamnya. Buku ini disusun secara sistematis, dimulai dari penjelasan konsep-konsep dasar yang mudah dipahami, dilengkapi dengan contoh penerapan yang relevan. Kami berharap, dengan pemahaman dasar yang kuat, pembaca dapat mengembangkan kemampuan mereka dalam memanfaatkan EMT untuk menyelesaikan masalah-masalah komputasi yang lebih kompleks.

Kami menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna dan tidak menutup kemungkinan adanya kekurangan. Oleh karena itu, kami sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari para pembaca demi perbaikan di masa mendatang. Semoga buku ini dapat memberikan manfaat besar bagi para mahasiswa, peneliti, dan praktisi di berbagai bidang yang ingin memperdalam pengetahuan mereka dalam komputasi matematika menggunakan Euler Math Toolbox.

Akhir kata, kami berharap buku ini dapat menjadi sumber referensi yang berguna dan memotivasi pembaca untuk menggali lebih dalam lagi potensi Euler Math Toolbox dalam dunia matematika dan ilmu pengetahuan.

Yogyakarta, 29 November 2024

Alfi Nur Azumah

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN DAN PENGENALAN CARA KERJA EMT

Selamat datang! Ini adalah pengantar pertama ke Euler Math Toolbox (disingkat EMT atau Euler). EMT adalah sistem terintegrasi yang merupakan perpaduan kernel numerik Euler dan program komputer aljabar Maxima.

- Bagian numerik, GUI, dan komunikasi dengan Maxima telah dikembangkan oleh R. Grothmann, seorang profesor matematika di Universitas Eichstätt, Jerman. Banyak algoritma numerik dan pustaka software open source yang digunakan di dalamnya.
- Maxima adalah program open source yang matang dan sangat kaya untuk perhitungan simbolik dan aritmatika tak terbatas. Software ini dikelola oleh sekelompok pengembang di internet.
- Beberapa program lain (LaTeX, Povray, Tiny C Compiler, Python) dapat digunakan di Euler untuk memungkinkan perhitungan yang lebih cepat maupun tampilan atau grafik yang lebih baik.

Yang sedang Anda baca (jika dibaca di EMT) ini adalah berkas notebook di EMT. Notebook aslinya bawaan EMT (dalam bahasa Inggris) dapat dibuka melalui menu File, kemudian pilih "Open Tutorias and Example", lalu pilih file "00 First Steps.en". Perhatikan, file notebook EMT memiliki ekstensi ".en". Melalui notebook ini Anda akan belajar menggunakan software Euler untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika.

Panduan ini ditulis dengan Euler dalam bentuk notebook Euler, yang berisi teks (deskriptif), baris-baris perintah, tampilan hasil perintah (numerik, ekspresi matematika, atau gambar/plot), dan gambar yang disisipkan dari file gambar.

Untuk menambah jendela EMT, Anda dapat menekan [F11]. EMT akan menampilkan jendela grafik di layar desktop Anda. Tekan [F11] lagi untuk kembali ke tata letak favorit Anda. Tata letak disimpan untuk sesi berikutnya.

Anda juga dapat menggunakan [Ctrl]+[G] untuk menyembunyikan jendela grafik. Selanjutnya Anda dapat beralih antara grafik dan teks dengan tombol [TAB].

Seperti yang Anda baca, notebook ini berisi tulisan (teks) berwarna hijau, yang dapat Anda edit dengan mengklik kanan teks atau tekan menu Edit -> Edit Comment atau tekan [F5], dan juga baris perintah EMT yang ditandai dengan ">" dan berwarna merah. Anda dapat menyisipkan baris perintah baru dengan cara menekan tiga tombol bersamaan: [Shift]+[Ctrl]+[Enter].

1.1 Komentar (Teks Uraian)

Komentar atau teks penjelasan dapat berisi beberapa "markup" dengan sintaks sebagai berikut.

- *Judul

- ** Sub-Judul

- http://www.euler-math-toolbox.de

- See: http://www.google.de | Google

- image: hati.png

Hasil sintaks-sintaks di atas (tanpa diawali tanda strip) adalah sebagai berikut.

Gambar diambil dari folder images di tempat file notebook berada dan tidak dapat dibaca dari Web. Untuk “See:”, tautan (URL)web lokal dapat digunakan.

Paragraf terdiri atas satu baris panjang di editor. Pergantian baris akan memulai baris baru. Paragraf harus dipisahkan dengan baris kosong.

>// baris perintah diawali dengan >, komentar (keterangan) diawali dengan //

1.2 Baris Perintah

Mari kita tunjukkan cara menggunakan EMT sebagai kalkulator yang sangat canggih.

EMT berorientasi pada baris perintah. Anda dapat menuliskan satu atau lebih perintah dalam satu baris perintah. Setiap perintah harus diakhiri dengan koma atau titik koma.

- Titik koma menyembunyikan output (hasil) dari perintah.
- Sebuah koma mencetak hasilnya.
- Setelah perintah terakhir, koma diasumsikan secara otomatis (boleh tidak ditulis).

Dalam contoh berikut, kita mendefinisikan variabel r yang diberi nilai 1,25. Output dari definisi ini adalah nilai variabel. Tetapi karena tanda titik koma, nilai ini tidak ditampilkan. Pada kedua perintah di belakangnya, hasil kedua perhitungan tersebut ditampilkan.

>r=1.25; pi*r^2, 2*pi*r

```
4.90873852123
7.85398163397
```

Latihan untuk Anda

- Sisipkan beberapa baris perintah baru
- Tulis perintah-perintah baru untuk melakukan suatu perhitungan yang Anda inginkan, boleh menggunakan variabel, boleh tanpa variabel.

1. >8753^2

   ```
   76615009
   ```

2. >(25-9853)*52

   ```
   -511056
   ```

3. >145*5-(82/3)

   ```
   697.666666667
   ```

4. >E=195*73; 25^4-E

   ```
   376390
   ```

5. >p=14; q=3; p^2-q, q+p/2

   ```
   193
   10
   ```

Beberapa catatan yang harus Anda perhatikan tentang penulisan sintaks perintah EMT.

- Pastikan untuk menggunakan titik desimal, bukan koma desimal untuk bilangan!
- Gunakan * untuk perkalian dan ^ untuk eksponen (pangkat).
- Seperti biasa, * dan / bersifat lebih kuat daripada + atau -.
- ^ mengikat lebih kuat dari *, sehingga pi* r ^ 2 merupakan rumus luas lingkaran.
- Jika perlu, Anda harus menambahkan tanda kurung, seperti pada 2 ^ (2 ^ 3).

Perintah r = 1.25 adalah menyimpan nilai ke variabel di EMT. Anda juga dapat menulis r: = 1.25 jika mau. Anda dapat menggunakan spasi sesuka Anda.

Anda juga dapat mengakhiri baris perintah dengan komentar yang diawali dengan dua garis miring (//).

>r := 1.25 // Komentar: Menggunakan := sebagai ganti =

```
1.25
```

Argumen atau input untuk fungsi ditulis di dalam tanda kurung.

>sin(45°), cos(pi), log(sqrt(E))

```
0.707106781187
-1
4.78172949986
```

Seperti yang Anda lihat, fungsi trigonometri bekerja dengan radian, dan derajat dapat diubah dengan °. Jika keyboard Anda tidak memiliki karakter derajat tekan [F7], atau gunakan fungsi deg() untuk mengonversi.

EMT menyediakan banyak sekali fungsi dan operator matematika.Hampir semua fungsi matematika sudah tersedia di EMT. Anda dapat melihat daftar lengkap fungsi-fungsi matematika di EMT pada berkas Referensi (klik menu Help -> Reference)

Untuk membuat rangkaian komputasi lebih mudah, Anda dapat merujuk ke hasil sebelumnya dengan "%". Cara ini sebaiknya hanya digunakan untuk merujuk hasil perhitungan dalam baris perintah yang sama.

>(sqrt(5)+1)/2, %^2-%+1 // Memeriksa solusi x^2-x+1=0

```
1.61803398875
2
```

Latihan untuk Anda

- Buka berkas Reference dan baca fungsi-fungsi matematika yang tersedia di EMT.
- Sisipkan beberapa baris perintah baru.
- Lakukan contoh-contoh perhitungan menggunakan fungsi-fungsimatematika di EMT.

1. >cos(85°)

   ```
   0.0871557427477
   ```

2. >log10(20)

   ```
   1.30102999566
   ```

3. >cosec(35)

```
-2.33545183222
```

4. >mod(25,9)

   ```
   7
   ```

5. >ceil(23.3214363527250273)

   ```
   24
   ```

1.3 Satuan

EMT dapat mengubah unit satuan menjadi sistem standar internasional (SI). Tambahkan satuan di belakang angka untuk konversi sederhana.

>1miles // 1 mil = 1609,344 m

```
1609.344
```

Beberapa satuan yang sudah dikenal di dalam EMT adalah sebagai berikut. Semua unit diakhiri dengan tanda dolar ($), namun boleh tidak perlu ditulis dengan mengaktifkan easyunits.
kilometer:=1000;
km:=kilometer;
cm:=0.01;
mm:=0.001;
minute:=60;
min:=minute;
minutes:=minute;
hour:=60*minute;
h:=hour;
hours:=hour;
day:=24*hour;
days:=day;
d:=day;
year:=365.2425*day;
years:=year;
y:=year;
inch:=0.0254;
in:=inch;
feet:=12*inch;
foot:=feet;
ft:=feet;
yard:=3*feet;
yards:=yard;
yd:=yard;

mile:=1760*yard;
miles:=mile;
kg:=1;
sec:=1;
ha:=10000;
Ar:=100;
Tagwerk:=3408;
Acre:=4046.8564224;
pt:=0.376mm;

Untuk konversi ke dan antar unit, EMT menggunakan operator khusus, yakni ->.

>4km -> miles, 4inch -> " mm"

```
2.48548476895
101.6 mm
```

1.4 Format Tampilan Nilai

Akurasi internal untuk nilai bilangan di EMT adalah standar IEEE, sekitar 16 digit desimal. Aslinya, EMT tidak mencetak semua digit suatu bilangan. Ini untuk menghemat tempat dan agar terlihat lebih baik. Untuk mengatrtamilan satu bilangan, operator berikut dapat digunakan.

>pi

```
3.14159265359
```

>longest pi

```
3.141592653589793
```

>long pi

```
3.14159265359
```

>short pi

```
3.1416
```

>shortest pi

```
3.1
```

>fraction pi

```
312689/99532
```

>short 1200*1.03^10, long E, longest pi

```
1612.7
14235
3.141592653589793
```

Format aslinya untuk menampilkan nilai menggunakan sekitar 10 digit. Format tampilan nilai dapat diatur secara global atau hanya untuk satu nilai.

Anda dapat mengganti format tampilan bilangan untuk semua perintah selanjutnya. Untuk mengembalikan ke format aslinya dapat digunakan perintah “defformat” atau “reset”.

>longestformat; pi, defformat; pi

```
3.141592653589793
3.14159265359
```

Kernel numerik EMT bekerja dengan bilangan titik mengambang (floating point) dalam presisi ganda IEEE (berbeda dengan bagian simbolik EMT). Hasil numerik dapat ditampilkan dalam bentuk pecahan.

>1/7+1/4, fraction %

```
0.392857142857
11/28
```

1.5 Perintah Multibaris

Perintah multi-baris membentang di beberapa baris yang terhubung dengan “. . . ” di setiap akhir baris, kecuali baris terakhir. Untuk menghasilkan tanda pindah baris tersebut, gunakan tombol [Ctrl]+[Enter]. Ini akan menyambung perintah ke baris berikutnya dan menambahkan “. . . ” di akhir baris sebelumnya. Untuk menggabungkan suatu baris ke baris sebelumnya, gunakan [Ctrl]+[Backspace].

Contoh perintah multi-baris berikut dapat dijalankan setiap kali kursor berada di salah satu barisnya. Ini juga menunjukkan bahwa . . . harus berada di akhir suatu baris meskipun baris tersebut memuat komentar.

>a=4; b=15; c=2; // menyelesaikan a*x^2+b*x+c=0 secara manual . . .
> D=sqrt(b$^{2/(a}$2*4)-c/a); . . .
> -b/(2*a) + D, . . .
> -b/(2*a) - D

```
-0.138444501319
-3.61155549868
```

1.6 Menampilkan Daftar Variabel

Untuk menampilkan semua variabel yang sudah pernah Anda definisikan sebelumnya (dan dapat dilihat kembali nilainya), gunakan perintah “listvar”.

>listvar

```
r                     1.25
E                     14235
p                     14
q                     3
a                     4
b                     15
c                     2
D                     1.73655549868123
```

Perintah listvar hanya menampilkan variabel buatan pengguna. Dimungkinkan untuk menampilkan variabel lain, dengan menambahkan string termuat di dalam nama variabel yang diinginkan.

Perlu Anda perhatikan, bahwa EMT membedakan huruf besar dan huruf kecil. Jadi variabel “d” berbeda dengan variabel “D”.

Contoh berikut ini menampilkan semua unit yang diakhiri dengan “m” dengan mencari semua variabel yang berisi “m$”.

>listvar m$

```
km$                   1000
cm$                   0.01
mm$                   0.001
nm$                   1853.24496
gram$                 0.001
m$                    1
hquantum$             6.62606957e-34
atm$                  101325
```

Untuk menghapus variabel tanpa harus memulai ulang EMT gunakan perintah “remvalue”.

>remvalue a,b,c,D

>D

```
Variable D not found!
Error in:
D ...
 ^
```

1.7 Menampilkan Panduan

Untuk mendapatkan panduan tentang penggunaan perintah atau fungsi di EMT, buka jendela panduan dengan menekan [F1] dan cari fungsinya. Anda juga dapat mengklik dua kali pada fungsi yang tertulis di baris perintah atau di teks untuk membuka jendela panduan.

Coba klik dua kali pada perintah "intrandom" berikut ini!

>intrandom(10,6)

```
[4,  2,  6,  2,  4,  2,  3,  2,  2,  6]
```

Di jendela panduan, Anda dapat mengklik kata apa saja untuk menemukan referensi atau fungsi.

Misalnya, coba klik kata "random" di jendela panduan. Kata tersebut boleh ada dalam teks atau di bagian "See:" pada panduan. Anda akan menemukan penjelasan fungsi "random", untuk menghasilkan bilangan acak berdistribusi uniform antara 0,0 dan 1,0. Dari panduan untuk "random" Anda dapat menampilkan panduan untuk fungsi "normal", dll.

>random(10)

```
[0.270906,  0.704419,  0.217693,  0.445363,
0.308411,  0.914541,  0.193585,  0.463387,
0.095153,  0.595017]
```

>normal(10)

```
[-0.495418,  1.6463,  -0.390056,  -1.98151,  3.44132,  0.308178,
-0.733427,  -0.526167,  1.10018,  0.108453]
```

1.8 Matriks dan Vektor

EMT merupakan suatu aplikasi matematika yang mengerti "bahasa matriks". Artinya, EMT menggunakan vektor dan matriks untuk perhitungan-perhitungan tingkat lanjut. Suatu vektor atau matriks dapat didefinisikan dengan tanda kurung siku. Elemen-elemennya dituliskan di dalam tanda kurung siku, antar elemen dalam satu baris dipisahkan oleh koma(,), antar baris dipisahkan oleh titik koma (;).

Vektor dan matriks dapat diberi nama seperti variabel biasa.

>v=[4,5,6,3,2,1]

```
[4,  5,  6,  3,  2,  1]
```

>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]

```
            1             2             3
            4             5             6
            7             8             9
```

Karena EMT mengerti bahasa matriks, EMT memiliki kemampuan yang sangat canggih untuk melakukan perhitungan matematis untuk masalah-masalah aljabar linier, statistika, dan optimisasi.

Vektor juga dapat didefinisikan dengan menggunakan rentang nilai dengan interval tertentu menggunakan tanda titik dua (:),seperti contoh berikut ini.

>c=1:5

```
[1,  2,  3,  4,  5]
```

>w=0:0.1:1

```
[0,  0.1,  0.2,  0.3,  0.4,  0.5,  0.6,  0.7,  0.8,  0.9,  1]
```

>mean(w^2)

```
0.35
```

1.9 Bilangan Kompleks

EMT juga dapat menggunakan bilangan kompleks. Tersedia banyak fungsi untuk bilangan kompleks di EMT. Bilangan imaginer

dituliskan dengan huruf I (huruf besar I), namun akan ditampilkan dengan huruf i (i kecil).

re(x) : bagian riil pada bilangan kompleks x.
im(x) : bagian imaginer pada bilangan kompleks x.

complex(x) : mengubah bilangan riil x menjadi bilangan kompleks.
conj(x) : Konjugat untuk bilangan bilangan komplkes x.
arg(x) : argumen (sudut dalam radian) bilangan kompleks x.
real(x) : mengubah x menjadi bilangan riil.

Apabila bagian imaginer x terlalu besar, hasilnya akan menampilkan pesan kesalahan.

>sqrt(-1) // Error!
>sqrt(complex(-1))

>z=2+3*I, re(z), im(z), conj(z), arg(z), deg(arg(z)), deg(arctan(3/2))

```
2+3i
2
3
2-3i
0.982793723247
56.309932474
56.309932474
```

>deg(arg(I)) // 90°

```
90
```

>sqrt(-1)

```
Floating point error!
Error in sqrt
Error in:
sqrt(-1) ...
        ^
```

>sqrt(complex(-1))

```
0+1i
```

EMT selalu menganggap semua hasil perhitungan berupa bilangan riil dan tidak akan secara otomatis mengubah ke bilangan kompleks.

Jadi akar kuadrat -1 akan menghasilkan kesalahan, tetapi akar kuadrat kompleks didefinisikan untuk bidang koordinat dengan cara seperti biasa. Untuk mengubah bilangan riil menjadi kompleks, Anda dapat menambahkan 0i atau menggunakan fungsi “complex”.

>complex(-1), sqrt(%)

```
-1+0i
0+1i
```

1.10 Matematika Simbolik

EMT dapat melakukan perhitungan matematika simbolis (eksak) dengan bantuan software Maxima. Software Maxima otomatis sudah terpasang di komputer Anda ketika Anda memasang EMT. Meskipun demikian, Anda dapat juga memasang software Maxima tersendiri (yang terpisah dengan instalasi Maxima di EMT).

Pengguna Maxima yang sudah mahir harus memperhatikan bahwa terdapat sedikit perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks ekspresi simbolik di EMT.

Untuk melakukan perhitungan matematika simbolis di EMT, awali perintah Maxima dengan tanda "&". Setiap ekspresi yang dimulai dengan "&" adalah ekspresi simbolis dan dikerjakan oleh Maxima.

>&(a+b)^2

```
                                    2
                             (b + a)
```

>&expand((a+b)^2), &factor(x^2+5*x+6)

```
                              2             2
                             b  + 2 a b + a

                             (x + 2) (x + 3)
```

>&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc

```
                  2                          2
          - sqrt(b  - 4 a c) - b       sqrt(b  - 4 a c) - b
     [x = ----------------------, x = --------------------]
                 2 a                         2 a
```

>&(a^{2-b}2)/(a+b), &ratsimp(%) // ratsimp menyederhanakan bentuk pecahan

```
                                 2    2
                                a  - b
                                -------
                                b + a


                               a - b
```

>10! // nilai faktorial (modus EMT)

```
3628800
```

>&10! //nilai faktorial (simbolik dengan Maxima)

```
                                3628800
```

Untuk menggunakan perintah Maxima secara langsung (seperti perintah pada layar Maxima) awali perintahnya dengan tanda "::" pada baris perintah EMT. Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "modus kompatibilitas").

>factor(1000) // mencari semua faktor 1000 (EMT)

```
    [2,  2,  2,  5,  5,  5]
```

>:: factor(1000) // faktorisasi prima 1000 (dengan Maxima)

```
                                3   3
                               2   5
```

>:: factor(20!)

```
                         18  8  4  2
                        2   3  5  7  11 13 17 19
```

Jika Anda sudah mahir menggunakan Maxima, Anda dapat menggunakan sintaks asli perintah Maxima dengan menggunakan tanda ":::" untuk mengawali setiap perintah Maxima di EMT. Perhatikan, harus ada spasi antara ":::" dan perintahnya.

>::: binomial(5,2); // nilai C(5,2)

```
                              10
```

>::: binomial(m,4); // C(m,4)=m!/(4!(m-4)!)

```
                    (m - 3) (m - 2) (m - 1) m
                    -------------------------
                               24
```

>::: trigexpand(cos(x+y)); // rumus cos(x+y)=cos(x) cos(y)-sin(x)sin(y)

```
          cos(x) cos(y) - sin(x) sin(y)
```

>::: trigexpand(sin(x+y));

```
                cos(x) sin(y) + sin(x) cos(y)
```

>::: trigsimp(((1-sin(x)^2)*cos(x))/cos(x)^2+tan(x)*sec(x)^2) //menyederhanakan fungsi trigonometri

```
                            4
                 sin(x) + cos (x)
                ----------------
                        3
                     cos (x)
```

Untuk menyimpan ekspresi simbolik ke dalam suatu variabel digunakan tanda “&=”.

>p1 &= (x^3+1)/(x+1)

```
                      3
                     x  + 1
                     ------
                     x + 1
```

>&ratsimp(p1)

```
                    2
                   x  - x + 1
```

Untuk mensubstitusikan suatu nilai ke dalam variabel dapat digunakan perintah “with”.

>&p1 with x=3 // (3^3+1)/(3+1)

```
                     7
```

>&p1 with x=a+b, &ratsimp(%) //substitusi dengan variabel baru

```
                        3
                  (b + a)  + 1
                  ------------
                   b + a + 1


             2                   2
            b  + (2 a - 1) b + a  - a + 1
```

>&diff(p1,x) //turunan p1 terhadap x

```
  2       3
3 x      x  + 1
----- - --------
x + 1         2
       (x + 1)
```

>&integrate(p1,x) // integral p1 terhadap x

```
   3      2
2 x  - 3 x  + 6 x
-----------------
        6
```

1.11 Tampilan Matematika Simbolik dengan LaTeX

Anda dapat menampilkan hasil perhitunagn simbolik secara lebih bagus menggunakan LaTeX. Untuk melakukan hal ini, tambahkan tanda dolar ($) di depan tanda & pada setiap perintah Maxima.

Perhatikan, hal ini hanya dapat menghasilkan tampilan yang diinginkan apabila komputer Anda sudah terpasang software LaTeX.

>$&(a+b)^2

$$(b+a)^2$$

>$&expand((a+b)^2), $&factor(x^2+5*x+6)

$$b^2+2\,a\,b+a^2$$

$$(x+2)\,(x+3)$$

>$&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc

$\left[x=\frac{-\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a},x=\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a}\right]$

>$&(a^{2-b}2)/(a+b), $&ratsimp(%)

$$\frac{a^2-b^2}{b+a}$$

$a-b$

Selamat Belajar dan Berlatih!

Baik, itulah sekilas pengantar penggunaan software EMT. Masih banyak kemampuan EMT yang akan Anda pelajari dan praktikkan.

Sebagai latihan untuk memperlancar penggunaan perintah-perintah EMT yang sudah dijelaskan di atas, silakan Anda lakukan hal-hal sebagai berikut. 1. Carilah soal-soal matematika dari buku-buku Matematika. 2. Tambahkan beberapa baris perintah EMT pada notebook ini. 3. Selesaikan soal-soal matematika tersebut dengan menggunakan EMT. 4. Pilih soal-soal yang sesuai dengan perintah-perintah yang sudah dijelaskan dan dicontohkan di atas.

Jawaban:

1. Tentukan turunan dari fungsi(4*x$^{3-3)(2x}$2+1)

>G &= (4*x$^{3-3)*(2*x}$2+1)

```
       2           3
(2 x  + 1) (4 x  - 3)
```

>&diff(G,x) //turunan G terhadap x

```
       3             2      2
4 x (4 x  - 3) + 12 x  (2 x  + 1)
```

2. Carilah integral dari 2*x^2-8 terhadap x dengan batas bawah x=-1 sampai x=3

>K &= 2*x^2-8

```
   2
2 x  - 8
```

>&integrate(K,x,-1,3)

```
  40
- --
  3
```

3. Carilah integral dari 3*sin(x) terhadap x dengan batas bawah x=0 sampai x=pi

>&integrate(3*sin(x),x,0,pi)

```
6
```

4. Tentukan turunan kedua dari fungsi x^4-3*x^{3+x}2+5

>N &= x^{4-3*x}3+x^2+5

```
 4      3    2
x  - 3 x  + x  + 5
```

>M &= diff(N,x) //turunan pertama dari N

```
   3      2
4 x  - 9 x  + 2 x
```

>&diff(M,x) //turunan kedua dari N

```
     2
12 x  - 18 x + 2
```

5. Berapa besarnya volume setengah bola dengan jari-jari 7 cm?

>r=7; (2/3)*pi*r^3

```
718.377520121
```

BAB II

EMT UNTUK PERHITUNGAN ALJABAR

Pada notebook ini Anda belajar menggunakan EMT untuk melakukan berbagai perhitungan terkait dengan materi atau topik dalam Aljabar. Kegiatan yang harus Anda lakukan adalah sebagai berikut:

1. Membaca secara cermat dan teliti notebook ini;
2. Menerjemahkan teks bahasa Inggris ke bahasa Indonesia;
3. Mencoba contoh-contoh perhitungan (perintah EMT) dengan cara meng-ENTER setiap perintah EMT yang ada (pindahkan kursor ke baris perintah)
4. Jika perlu Anda dapat memodifikasi perintah yang ada dan memberikan keterangan/penjelasan tambahan terkait hasilnya.
5. Menyisipkan baris-baris perintah baru untuk mengerjakan soal-soal Aljabar dari file PDF yang saya berikan;
6. Memberi catatan hasilnya.
7. Jika perlu tuliskan soalnya pada teks notebook (menggunakan format LaTeX).
8. Gunakan tampilan hasil semua perhitungan yang eksak atau simbolik dengan format LaTeX. (Seperti contoh-contoh pada notebook ini.)

Contoh pertama

Menyederhanakan bentuk aljabar:

$$6x^{-3}y^5 \times -7x^2y^{-9}$$

>$&6*x$^{(-3)*y}$5*-7*x^{2*y}(-9)

$$-\frac{42}{x\,y^4}$$

Menjabarkan:

>$&showev('expand((6*x$^{(-3)+y}$5)*(-7*x^{2-y}(-9))))

$$expand\left(\left(-\frac{1}{y^9}-7\,x^2\right)\,\left(y^5+\frac{6}{x^3}\right)\right)=-7\,x^2\,y^5-\frac{1}{y^4}-\frac{6}{x^3\,y^9}-\frac{42}{x}$$

Contoh soal

1. Sederhanakan

$$\left(\frac{24a^{10}b^{-8}c^{7}}{12a^{6}b^{-3}c^{5}}\right)^{-5}$$

```
>$&((24*a^{10*b}-8*c^{7)/(12*a}6*b^{-3*c}5))^-5
```

$$\frac{b^{25}}{32\,a^{20}\,c^{10}}$$

2. Sederhanakan

$$\left(\frac{125p^{12}q^{-14}r^{22}}{25p^{8}q^{6}r^{-15}}\right)^{-4}$$

```
>$&((125*p^{(12)*q}(-14)*r^{(22))/25*p}8*q^{6*r}(-15))^(-4)
```

$$\frac{q^{32}}{625\,p^{80}\,r^{28}}$$

3. Sederhanakan

$$\frac{3a^2b-2ab^2}{4ab}$$

```
>$&(3*a^{2*b-2*a*b}2)/(4*a*b)
```

$$\frac{3\,a^2\,b-2\,a\,b^2}{4\,a\,b}$$

4. Jabarkan

$$(2x+1)(3x-2)$$

```
>$&showev('expand((2*x+1)*(3*x-2)))
```

$$\mathit{expand}\left((2\,x+1)\,\left(3\,x-2\right)\right)=6\,x^2-x-2$$

5. Jabarkan

$$(5x^2y^5)(7x^3y^2)$$

>$&showev('expand((5*x^{2*y}5)*(7*x^{3*y}2)))

$$expand\left(35\,x^5\,y^7\right) = 35\,x^5\,y^7$$

2.1 Baris Perintah

Baris perintah Euler terdiri dari satu atau lebih perintah Euler diikuti dengan titik koma ";" atau koma ",". Titik koma mencegah pencetakan hasil. Koma setelah perintah terakhir dapat dihilangkan.

Baris perintah berikut hanya akan mencetak hasil ekspresi, bukan perintah tugas atau format.

>r:=2; h:=4; pi*r^2*h/3

```
16.7551608191
```

Perintah harus dipisahkan dengan spasi. Baris perintah berikut mencetak dua hasilnya.

>pi*2*r*h, %+2*pi*r*h // Ingat tanda % menyatakan hasil perhitungan terakhir sebelumnya

```
50.2654824574
100.530964915
```

Baris perintah dieksekusi sesuai urutan pengguna menekan tombol enter. Jadi Anda akan mendapatkan nilai baru setiap kali Anda mengeksekusi baris kedua.

>x := 1;

>x := cos(x) // nilai cosinus (x dalam radian)

```
0.540302305868
```

>x := cos(x)

```
0.857553215846
```

Jika dua baris dihubungkan dengan "..." kedua baris akan selalu dieksekusi secara bersamaan.

>x := 1.5; ...
> x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2,

```
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
```

Ini juga merupakan cara yang baik untuk menyebarkan perintah yang panjang ke dua atau lebih baris. Anda dapat menekan Ctrl+Return untuk membagi baris menjadi dua pada posisi kursor saat ini, atau Ctlr+Back untuk menggabungkan baris-baris tersebut.

Untuk melipat semua baris yang terdiri dari beberapa baris, tekan Ctrl+L. Kemudian baris-baris berikutnya hanya akan terlihat, jika salah satunya menjadi fokus. Untuk melipat satu baris yang terdiri dari beberapa baris, mulailah baris pertama dengan "%+".

>%+ x=4+5; . . .
> // Baris ini tidak akan terlihat setelah kursor berada di luar baris

Baris yang dimulai dengan %% tidak akan terlihat sama sekali.

```
81
```

Euler mendukung perulangan dalam baris perintah, asalkan dapat dimasukkan ke dalam satu baris atau beberapa baris. Dalam program, pembatasan ini tentu saja tidak berlaku. Untuk informasi lebih lanjut, lihat pengantar berikut.

>x=1; for i=1 to 5; x := (x+2/x)/2, end; // menghitung akar 2

```
1.5
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
1.41421356237
```

Tidak papa menggunakan beberapa baris. Pastikan baris diakhiri dengan ". . . ".

>x := 1.5; // comments go here before the . . .
> repeat xnew:=(x+2/x)/2; until xnew˜=x; . . .
> x := xnew; . . .
> end; . . .
> x,

```
1.41421356237
```

Bisa juga digunakan untuk struktur condisional

>if E$^{pi>pi}$E; then "Thought so!", endif;

```
Thought so!
```

Saat Anda menjalankan perintah, kursor dapat berada di posisi mana pun. Anda dapat kembali ke perintah sebelumnya atau melompat ke perintah berikutnya dengan tombol panah. Atau Anda dapat mengeklik bagian komentar di atas perintah untuk membuka perintah tersebut.

Saat Anda menggerakkan kursor di sepanjang baris, pasangan tanda kurung buka dan tutup akan disorot. Perhatikan juga baris status. Setelah tanda kurung buka fungsi sqrt(), baris status akan menampilkan teks bantuan untuk fungsi tersebut. Jalankan perintah dengan tombol return.

>sqrt(sin(10°)/cos(20°))

```
0.429875017772
```

Untuk melihat bantuan untuk perintah terbaru, buka jendela bantuan dengan F1. Di sana, Anda dapat memasukkan teks yang ingin dicari. Pada baris kosong, bantuan untuk jendela bantuan akan ditampilkan. Anda dapat menekan escape untuk menghapus baris, atau untuk menutup jendela bantuan.

Anda dapat mengklik dua kali perintah apa pun untuk membuka bantuan untuk perintah ini. Coba klik dua kali perintah exp di bawah ini pada baris perintah.

>exp(log(2.5))

```
2.5
```

Anda juga dapat menyalin dan menempel di Euler. Gunakan Ctrl-C dan Ctrl-V untuk ini. Untuk menandai teks, seret mouse atau gunakan shift

bersamaan dengan tombol kursor apa pun. Selain itu, Anda dapat menyalin tanda kurung yang disorot.

2.2 Basic Syntax

Euler mengetahui fungsi matematika yang umum. Seperti yang telah Anda lihat di atas, fungsi trigonometri bekerja dalam radian atau derajat. Untuk mengonversi ke derajat, tambahkan simbol derajat (dengan tombol F7) ke nilai, atau gunakan fungsi rad(x). Fungsi akar kuadrat disebut sqrt di Euler. Tentu saja, x^(1/2) juga memungkinkan.

Untuk mengatur variabel, gunakan "=" atau ":=". Demi kejelasan, pengantar ini menggunakan bentuk yang terakhir. Spasi tidak menjadi masalah. Namun, diharapkan ada spasi di antara perintah.

Beberapa perintah dalam satu baris dipisahkan dengan "," atau ";". Titik koma menghilangkan output perintah. Di akhir baris perintah, "," diasumsikan, jika ";" tidak ada.

>g:=9.81; t:=2.5; 1/2*g*t^2

```
30.65625
```

EMT menggunakan sintaks pemrograman untuk ekspresi. Untuk memasukkan

$$e^2 \cdot \left(\frac{1}{3+4\log(0.6)} + \frac{1}{7} \right)$$

Anda harus menetapkan tanda kurung yang benar dan menggunakan / untuk pecahan. Perhatikan tanda kurung yang disorot untuk mendapatkan bantuan. Perhatikan bahwa konstanta Euler e diberi nama E dalam EMT.

>E^2*(1/(3+4*log(0.6))+1/7)

```
8.77908249441
```

Untuk menghitung ekspresi rumit seperti

$$\left(\frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + 2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} \right)^2 \pi$$

anda perlu memasukkan dalam baris formula

>((1/7 + 1/8 + 2) / (1/3 + 1/2))^2 * pi

```
23.2671801626
```

Letakkan tanda kurung di sekitar sub-ekspresi yang perlu dihitung terlebih dahulu dengan hati-hati. EMT membantu Anda dengan menyorot ekspresi yang diakhiri tanda kurung tutup. Anda juga harus memasukkan "pi" untuk mewakili pi.

Hasil perhitungan ini adalah angka floating point. Angka ini dicetak dengan akurasi sekitar 12 digit secara default. Pada baris perintah berikut, kita juga mempelajari cara merujuk ke hasil sebelumnya dalam baris yang sama.

>1/3+1/7, fraction %

```
0.47619047619
10/21
```

Perintah Euler dapat berupa ekspresi atau perintah primitif. Ekspresi terdiri dari operator dan fungsi. Jika perlu, ekspresi harus berisi tanda kurung untuk memastikan urutan eksekusi yang benar. Jika ragu, sebaiknya gunakan tanda kurung. Perhatikan bahwa EMT menampilkan tanda kurung buka dan tutup saat mengedit baris perintah.

>(cos(pi/4)+1)$^{3*(\sin(pi/4)+1)}$2

```
14.4978445072
```

Operator numerik Euler meliputi + + operator plus + - operator minus + *, / + . perkalian matriks + a^b pangkat untuk a positif atau integer b (a**b juga berfungsi) + n! operator faktorial + dan masih banyak lagi.

Berikut ini beberapa fungsi yang mungkin Anda perlukan. Masih banyak lagi.

sin,cos,tan,atan,asin,acos,rad,deg log,exp,log10,sqrt,logbase bin,logbin,logfac,mod,floor,ceil,round,abs,sign conj,re,im,arg,conj,real,complex beta,betai,gamma,complexgamma,ellrf,ellf,ellrd,elle bitand,bitor,bitxor,bitnot

Beberapa perintah memiliki alias, misalnya ln untuk log.

>ln(E^2), arctan(tan(0.5))

```
2
0.5
```

>sin(30°)

```
0.5
```

Pastikan untuk menggunakan tanda kurung (kurung bundar), jika ada keraguan tentang urutan eksekusi! Berikut ini tidak sama dengan(2$^{3)}$4, yang merupakan default untuk 2^{3}4 dalam EMT (beberapa sistem numerik melakukannya dengan cara lain).

>2^{3}4, (2$^{3)}$4, 2$^{(3}$4)

```
2.41785163923e+24
4096
2.41785163923e+24
```

2.3 Real Numbers

Tipe data utama dalam Euler adalah bilangan riil. Bilangan riil direpresentasikan dalam format IEEE dengan akurasi sekitar 16 digit desimal.

>longest 1/3

```
0.3333333333333333
```

Representasi ganda internal membutuhkan 8 byte.

>printdual(1/3)

```
1.0101010101010101010101010101010101010101010101010101*2^-2
```

>printhex(1/3)

```
5.5555555555554*16^-1
```

2.4 Strings

Suatu string dalam Euler didefinisikan dengan "...".

>"A string can contain anything."

```
A string can contain anything.
```

String dapat dirangkai dengan | atau dengan +. Ini juga berlaku untuk angka, yang dalam kasus tersebut diubah menjadi string.

>"The area of the circle with radius" + 2 + " cm is " + pi*4 + " cm^2."

```
The area of the circle with radius 2 cm is 12.5663706144 cm^2.
```

Fungsi cetak juga mengonversi angka menjadi string. Fungsi ini dapat memuat sejumlah digit dan sejumlah tempat (0 untuk keluaran padat), dan optimalnya satu unit.

>"Golden Ratio :" + print((1+sqrt(5))/2,5,0)

```
Golden Ratio : 1.61803
```

Ada string khusus none, yang tidak dicetak. String ini dikembalikan oleh beberapa fungsi, ketika hasilnya tidak penting. (Dikembalikan secara otomatis, jika fungsi tersebut tidak memiliki pernyataan return.)

>none

Untuk mengubah string menjadi angka, cukup evaluasi string tersebut. Ini juga berlaku untuk ekspresi (lihat di bawah).

>"1234.5"()

```
1234.5
```

Untuk mendefinisikan vektor string, gunakan notasi vektor [...]

>v:=["affe","charlie","bravo"]

```
affe
charlie
bravo
```

String dari vektor kosong dilambangkan dengan [none]. Vektor string dapat dirangkai.

>w:=[none]; w|v|v

```
affe
charlie
bravo
affe
charlie
bravo
```

String dapat berisi karakter Unicode. Secara internal, string ini berisi kode UTF-8. Untuk membuat string seperti itu, gunakan u"... " dan salah satu entitas HTML.

String Unicode dapat dirangkai seperti string lainnya.

>u" = " + 45 + u"°" // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar

```
 = 45°
```

I

Dalam komentar, entitas yang sama seperti , dll. dapat digunakan. Ini mungkin merupakan alternatif cepat untuk Latex.(Rincian lebih lanjut tentang komentar ada di bawah).

Ada beberapa fungsi untuk membuat atau menganalisis string unicode. Fungsi strtochar() akan mengenali string Unicode dan menerjemahkannya dengan benar.

>v=strtochar(u"Ä is a German letter")

```
[196,  32,  105,  115,  32,  97,  32,  71,  101,  114,  109,  97,  110,
32,  108,  101,  116,  116,  101,  114]
```

Hasilnya adalah vektor angka Unicode. Fungsi kebalikannya adalah chartoutf().

>v[1]=strtochar(u"Ü")[1]; chartoutf(v)

```
Ü is a German letter
```

Fungsi utf() dapat menerjemahkan string dengan entitas dalam variabel menjadi string Unicode.

>s="We have =."; utf(s) // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar

```
We have =.
```

Memungkinkan juga untuk menggunakan entitas numerik.

>u”Ähnliches”

```
Ähnliches
```

2.5 Nilai Boolean

Nilai Boolean direpresentasikan dengan 1=benar atau 0=salah dalam Euler. String dapat dibandingkan, seperti halnya angka.

>2<1, “apel”<“banana”

```
0
1
```

“and” adalah operator “&&” dan “or” adalah operator “||”, seperti dalam bahasa C. (Kata “and” dan “or” hanya dapat digunakan dalam kondisi”if”.)

>2<E && E<3

```
1
```

Operator Boolean mematuhi aturan bahasa matriks.

>(1:10)>5, nonzeros(%)

```
[0,  0,  0,  0,  0,  1,  1,  1,  1,  1]
[6,  7,  8,  9,  10]
```

Anda dapat menggunakan fungsi nonzeros() untuk mengekstrak elemen tertentu dari sebuah vektor. Dalam contoh ini, kami menggunakan kondisional isprime(n).

>N=2|3:2:99 // N berisi elemen 2 dan bilangan2 ganjil dari 3 s.d. 99

```
[2,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29,
31,  33,  35,  37,  39,  41,  43,  45,  47,  49,  51,  53,  55,  57,
59,  61,  63,  65,  67,  69,  71,  73,  75,  77,  79,  81,  83,  85,
87,  89,  91,  93,  95,  97,  99]
```

>N[nonzeros(isprime(N))] //pilih anggota2 N yang prima

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47,
53,  59,  61,  67,  71,  73,  79,  83,  89,  97]
```

2.6 Format Output

Format output default EMT mencetak 12 digit. Untuk memastikan bahwa kita melihat default, kita mengatur ulang formatnya.

>defformat; pi

```
3.14159265359
```

Secara internal, EMT menggunakan standar IEEE untuk angka ganda dengan sekitar 16 digit desimal. Untuk melihat jumlah digit lengkap, gunakan perintah "longestformat", atau kami menggunakan operator "longest" untuk menampilkan hasil dalam format terpanjang.

>longest pi

```
      3.141592653589793
```

Berikut adalah representasi heksadesimal internal dari angka ganda.

>printhex(pi)

```
3.243F6A8885A30*16^0
```

Format output dapat diubah secara permanen dengan perintah format.

>format(12,5); 1/3, pi, sin(1)

```
    0.33333
    3.14159
    0.84147
```

Format defaultnya adalah(12).

>format(12); 1/3

```
0.333333333333
```

Fungsi seperti "shortestformat", "shortformat", "longformat" bekerja untuk vektor dengan cara berikut.

>shortestformat; random(3,8)

```
0.66     0.2    0.89    0.28    0.53    0.31    0.44     0.3
0.28    0.88    0.27     0.7    0.22    0.45    0.31    0.91
0.19    0.46   0.095     0.6    0.43    0.73    0.47    0.32
```

Format default untuk skalar adalah format(12). Namun, ini dapat diubah.

>setscalarformat(5); pi

```
3.1416
```

Fungsi “longestformat” juga mengatur format skalar.

>longestformat; pi

```
3.141592653589793
```

Sebagai referensi, berikut adalah daftar format keluaran yang paling penting.

shortestformat shortformat longformat, longestformat format(length,digits) goodformat(length) fracformat(length) defformat

Akurasi internal EMT adalah sekitar 16 tempat desimal, yang merupakan standar IEEE. Angka disimpan dalam format internal ini.

Namun format keluaran EMT dapat diatur secara fleksibel.

>longestformat; pi,

```
3.141592653589793
```

>format(10,5); pi

```
   3.14159
```

Standarnya adalah defformat().

>defformat; // default

Ada operator pendek yang hanya mencetak satu nilai. Operator “longest” akan mencetak semua digit angka yang valid.

>longest pi^2/2

```
      4.934802200544679
```

Ada juga operator pendek untuk mencetak hasil dalam format pecahan. Kami telah menggunakannya di atas.

>fraction 1+1/2+1/3+1/4

```
25/12
```

Karena format internal menggunakan cara biner untuk menyimpan angka, nilai 0,1 tidak akan terwakili secara tepat. Kesalahannya bertambah sedikit, seperti yang Anda lihat dalam perhitungan berikut.

>longest 0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1

```
 -1.110223024625157e-16
```

Namun dengan "longformat" default, Anda tidak akan melihat hal ini. Demi kenyamanan, output angka yang sangat kecil adalah 0.

>0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1

```
0
```

2.7 Ekspresi

String atau nama dapat digunakan untuk menyimpan ekspresi matematika, yang dapat dievaluasi oleh EMT. Untuk ini, gunakan tanda kurung setelah ekspresi. Jika Anda ingin menggunakan string sebagai ekspresi, gunakan konvensi untuk menamainya "fx" atau "fxy", dst. Ekspresi lebih diutamakan daripada fungsi.

Variabel global dapat digunakan dalam evaluasi.

>r:=2; fx:="pi*r^2"; longest fx()

```
      12.56637061435917
```

Parameter ditetapkan ke x, y, dan z dalam urutan tersebut. Parameter tambahan dapat ditambahkan menggunakan parameter yang ditetapkan.

>fx:="a*sin(x)^2"; fx(5,a=-1)

```
-0.919535764538
```

Perhatikan bahwa ekspresi akan selalu menggunakan variabel global, bahkan jika ada variabel dalam suatu fungsi dengan nama yang sama.(Jika tidak, evaluasi ekspresi dalam fungsi dapat memberikan hasil yang sangat membingungkan bagi pengguna yang memanggil fungsi tersebut.)

>at:=4; function f(expr,x,at) := expr(x); ...
> f("at*x^2",3,5) // computes 4*3^2 not 5*3^2

```
36
```

Jika Anda ingin menggunakan nilai lain untuk "at" selain nilai global, Anda perlu menambahkan "at=value".

>at:=4; function f(expr,x,a) := expr(x,at=a); ...
> f("at*x^2",3,5)

```
45
```

Sebagai referensi, kami mencatat bahwa koleksi panggilan (dibahas di tempat lain) dapat berisi ekspresi. Jadi, kita dapat membuat contoh di atas sebagai berikut.

>at:=4; function f(expr,x) := expr(x); ...
> f({{"at*x^2",at=5}},3)

```
45
```

Ekspresi dalam x sering digunakan, seperti fungsi.

Perlu dicatat bahwa mendefinisikan fungsi dengan nama yang sama seperti ekspresi simbolik global akan menghapus variabel ini untuk menghindari kebingungan antara ekspresi simbolik dan fungsi.

>f &= 5*x;

>function f(x) := 6*x;

>f(2)

```
12
```

Berdasarkan konvensi, ekspresi simbolik atau numerik harus diberi nama fx, fxy, dst. Skema penamaan ini tidak boleh digunakan untuk fungsi.

>fx &= diff(x^x,x); $&fx

$$x^x\,\left(\log x+1\right)$$

Bentuk khusus dari suatu ekspresi memperbolehkan variabel apa pun sebagai parameter tanpa nama untuk evaluasi ekspresi, bukan hanya "x", "y", dst. Untuk ini, awali ekspresi dengan "@(variabel) …".

>"@(a,b) a^{2+b}2", %(4,5)

```
@(a,b) a^2+b^2
41
```

Hal ini memungkinkan untuk memanipulasi ekspresi dalam variabel lain untuk fungsi EMT yang memerlukan ekspresi dalam "x".

Cara paling dasar untuk mendefinisikan fungsi sederhana adalah dengan menyimpan rumusnya dalam ekspresi simbolik atau numerik. Jika variabel utamanya adalah x, ekspresi tersebut dapat dievaluasi seperti halnya fungsi.

Seperti yang Anda lihat dalam contoh berikut, variabel global terlihat selama evaluasi.

>fx &= x^3-a*x; …
> a=1.2; fx(0.5)

```
-0.475
```

Semua variabel lain dalam ekspresi dapat ditentukan dalam evaluasi menggunakan parameter yang ditetapkan.

>fx(0.5,a=1.1)

```
-0.425
```

Suatu ekspresi tidak harus bersifat simbolis. Hal ini diperlukan jika ekspresi tersebut mengandung fungsi-fungsi yang hanya diketahui

dalam kernel numerik, bukan dalam Maxima.

2.8 Matematika Simbolik

EMT mengerjakan matematika simbolik dengan bantuan Maxima. Untuk detailnya, mulailah dengan tutorial berikut, atau telusuri referensi untuk Maxima. Para ahli di Maxima harus memperhatikan bahwa ada perbedaan sintaksis antara sintaksis asli Maxima dan sintaksis default ekspresi simbolik di EMT.

Matematika simbolik terintegrasi dengan mulus ke Euler dengan &. Ekspresi apa pun yang dimulai dengan & adalah ekspresi simbolik. Ekspresi tersebut dievaluasi dan dicetak oleh Maxima.

Pertama-tama, Maxima memiliki aritmatika “tak terbatas” yang dapat menangani angka yang sangat besar.

>$&44!

$$2658271574788448768043625811014615890319638528000000000$$

Dengan cara ini, Anda dapat menghitung hasil yang besar secara tepat. Mari kita hitung

$$C(44,10)=\frac{44!}{34!\cdot 10!}$$

>$& 44!/(34!*10!) // nilai C(44,10)

$$2481256778$$

Tentu saja, Maxima memiliki fungsi yang lebih efisien untuk ini (seperti halnya bagian numerik EMT).

>$binomial(44,10) //menghitung C(44,10) menggunakan fungsi binomial()

$$2481256778$$

Untuk mempelajari lebih lanjut tentang fungsi tertentu, klik dua kali pada fungsi tersebut. Misalnya, coba klik dua kali pada “&binomial” di baris perintah sebelumnya. Ini akan membuka dokumentasi Maxima sebagaimana disediakan oleh penulis program tersebut.

Anda akan mempelajari bahwa hal berikut juga berfungsi.

$$C(x,3)=\frac{x!}{(x-3)!3!}=\frac{(x-2)(x-1)x}{6}$$

>$binomial(x,3) // C(x,3)

$$\frac{(x-2)\,(x-1)\,x}{6}$$

Jika Anda ingin mengganti x dengan nilai tertentu gunakan “with”.

>$&binomial(x,3) with x=10 // substitusi x=10 ke C(x,3)

$$120$$

Dengan cara itu Anda dapat menggunakan solusi persamaan dalam persamaan lain.

Ekspresi simbolik dicetak oleh Maxima dalam bentuk 2D. Alasannya adalah adanya tanda simbolik khusus dalam string.

Seperti yang telah Anda lihat pada contoh sebelumnya dan berikutnya, jika Anda telah menginstal LaTeX, Anda dapat mencetak ekspresi simbolik dengan Latex. Jika tidak, perintah berikut akan mengeluarkan pesan kesalahan.

Untuk mencetak ekspresi simbolik dengan LaTeX, gunakan $ di depan & (atau Anda dapat menghilangkan &) sebelum perintah. Jangan jalankan perintah Maxima dengan $, jika Anda tidak menginstal LaTeX.

>$(3+x)/(x^2+1)

$$\frac{x+3}{x^2+1}$$

Ekspresi simbolik diurai oleh Euler. Jika Anda memerlukan sintaksis yang kompleks dalam satu ekspresi, Anda dapat melampirkan ekspresi tersebut dalam "…". Menggunakan lebih dari satu ekspresi sederhana dimungkinkan, tetapi sangat tidak disarankan.

>&"v := 5; v^2"

```
25
```

Untuk kelengkapan, kami mencatat bahwa ekspresi simbolik dapat digunakan dalam program, tetapi harus disertakan dalam tanda kutip. Selain itu, akan jauh lebih efektif untuk memanggil Maxima pada waktu kompilasi jika memungkinkan.

>$&expand((1+x)^4), $&factor(diff(%,x)) // diff: turunan, factor: faktor

$$x^4+4\,x^3+6\,x^2+4\,x+1$$

$$4\,\left(x+1\right)^3$$

Sekali lagi, % mengacu pada hasil sebelumnya.

Untuk mempermudah, kami menyimpan solusi ke variabel simbolik. Variabel simbolik didefinisikan dengan "&="

>fx &= (x+1)/(x^4+1); $&fx

$$\frac{x+1}{x^4+1}$$

Ekspresi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

>$&factor(diff(fx,x))

$$\frac{-3\,x^4-4\,x^3+1}{\left(x^4+1\right)^2}$$

Input langsung perintah Maxima juga tersedia. Awali baris perintah dengan “::”. Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut “mode kompatibilitas”).

>&factor(20!)

```
2432902008176640000
```

>::: factor(10!)

```
 8  4  2
2  3  5  7
```

>:: factor(20!)

```
  18   8   4   2
2    3   5   7   11  13  17  19
```

Jika Anda ahli dalam Maxima, Anda mungkin ingin menggunakan sintaksis asli Maxima. Anda dapat melakukannya dengan “:::”.

>::: av:g$ av^2;

```
 2
g
```

>fx &= x^3*exp(x), $fx

```
 3   x
x   E
```

$$x^3\, e^x$$

Variabel tersebut dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya. Perhatikan bahwa dalam perintah berikut sisi kanan &= dievaluasi sebelum penugasan ke Fx.

>&(fx with x=5), $%, &float(%)

```
      5
125 E
```

$$125\,e^{5}$$

18551.64488782208

>fx(5)

```
18551.6448878
```

Untuk mengevaluasi suatu ekspresi dengan nilai variabel tertentu, Anda dapat menggunakan operator “with”.

Baris perintah berikut juga menunjukkan bahwa Maxima dapat mengevaluasi ekspresi secara numerik dengan float().

>&(fx with x=10)-(fx with x=5), &float(%)

```
                    10         5
              1000 E   - 125 E


             2.20079141499189e+7
```

>$factor(diff(fx,x,2))

$$x\,\left(x^2+6\,x+6\right)\,e^{x}$$

Untuk mendapatkan kode Latex untuk suatu ekspresi, Anda dapat menggunakan perintah tex.

>tex(fx)

```
x^3\,e^{x}
```

Ekspresi simbolik dapat dievaluasi seperti halnya ekspresi numerik.

>fx(0.5)

```
0.206090158838
```

alam ekspresi simbolik, ini tidak berfungsi, karena Maxima tidak mendukungnya. Sebagai gantinya, gunakan sintaks “with” (bentuk yang lebih baik dari perintah at(. . .) dari Maxima).

>$&fx with x=1/2

$$\frac{\sqrt{e}}{8}$$

Penugasan tersebut juga dapat bersifat simbolis.

>$&fx with x=1+t

$$(t+1)^3\ e^{t+1}$$

Perintah solve memecahkan ekspresi simbolik untuk variabel dalam Maxima. Hasilnya adalah vektor solusi.

>$&solve(x^2+x=4,x)

$$\left[x=\frac{-\sqrt{17}-1}{2}, x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$$

Bandingkan dengan perintah numerik "solve" di Euler, yang memerlukan nilai awal, dan secara opsional nilai target.

>solve("x^2+x",1,y=4)

```
1.56155281281
```

Nilai numerik dari solusi simbolik dapat dihitung dengan mengevaluasi hasil simbolik. Euler akan membaca ulang penugasan x= dst. Jika Anda tidak memerlukan hasil numerik untuk perhitungan lebih lanjut, Anda juga dapat membiarkan Maxima menemukan nilai numeriknya.

>sol &= solve(x^2+2*x=4,x); $&sol, sol(), $&float(sol)

$$\left[x=-\sqrt{5}-1, x=\sqrt{5}-1\right]$$

[-3.23607, 1.23607]

$$[x=-3.23606797749979, x=1.23606797749979]$$

Untuk mendapatkan solusi simbolis yang spesifik, seseorang dapat menggunakan "with" dan index.

>$&solve(x^2+x=1,x), x2 &= x with %[2]; $x2$

$$\left[x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan, gunakan vektor persamaan. Hasilnya adalah vektor solusi.

>sol &= solve([x+y=3,x^{2+y}2=5],[x,y]); $&sol, $xywithsol[1][[x=2,y=1],[x=1,y=2]]$$

$$2$$

Ekspresi simbolik dapat memiliki tanda, yang menunjukkan perlakuan khusus di Maxima. Beberapa tanda dapat digunakan sebagai perintah juga, yang lainnya tidak. Tanda ditambahkan dengan "|" (bentuk yang lebih baik dari "ev(…,flags)")

>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) //turunan bentuk pecahan

$$\frac{3\,x^2}{x+1}-\frac{x^3-1}{\left(x+1\right)^2}$$

>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) | ratsimp //menyederhanakan pecahan

$$\frac{2\,x^3+3\,x^2+1}{x^2+2\,x+1}$$

>$&factor(%)

$$\frac{2\,x^3+3\,x^2+1}{\left(x+1\right)^2}$$

Contoh soal

1. Tentukan hasil dari

$$C(13,2)=\frac{13!}{11!\cdot 2!}$$

>$binomial(13,2) // hasil c(13,2) dengan menggunakan binomial

$$78$$

2. Tentukan hasil dari

>$binomial(52,4) // hasil c(52,4) dengan menggunakan binomial

$$270725$$

3. Tentukan faktor dari

>$&solve(x^2+12*x+36,x)

$$[x = -6]$$

4. Tentukan faktor dari

>$&solve(x^{3-4*x}2+5*x-20,x)

$$\left[x = -\sqrt{5}\, i, x = \sqrt{5}\, i, x = 4\right]$$

5. Tentukan faktor dari

>$&solve(x^2-x+(1/4),x)

$$\left[x = \frac{1}{2}\right]$$

2.9 Fungsi

Dalam EMT, fungsi adalah program yang didefinisikan dengan perintah “function”. Fungsi ini dapat berupa fungsi satu baris atau fungsi multibaris.

Fungsi satu baris dapat berupa numerik atau simbolik. Fungsi satu baris numerik didefinisikan oleh “:=”.

>function f(x) := x*sqrt(x^2+1)

Sebagai gambaran umum, kami tampilkan semua definisi yang mungkin untuk fungsi satu baris. Suatu fungsi dapat dievaluasi seperti fungsi Euler bawaan lainnya.

>f(2)

```
4.472135955
```

Fungsi ini juga akan bekerja untuk vektor, mematuhi bahasa matriks Euler, karena ekspresi yang digunakan dalam fungsi tersebut divektorkan.

>f(0:0.1:1)

```
[0,  0.100499,  0.203961,  0.313209,  0.430813,  0.559017,  0.699714,
0.854459,  1.0245,  1.21083,  1.41421]
```

Fungsi dapat diplot. Alih-alih ekspresi, kita hanya perlu memberikan nama fungsi.

Berbeda dengan ekspresi simbolik atau numerik, nama fungsi harus diberikan dalam bentuk string.

>solve("f",1,y=1)

```
0.786151377757
```

Secara default, jika Anda perlu menimpa fungsi bawaan, Anda harus menambahkan kata kunci "overwrite". Menimpa fungsi bawaan berbahaya dan dapat menyebabkan masalah bagi fungsi lain yang bergantung padanya.

Anda masih dapat memanggil fungsi bawaan sebagai "_... ", jika itu adalah fungsi di inti Euler.

>function overwrite sin (x) := _sin(x°) // redine sine in degrees

>sin(45)

```
0.707106781187
```

Sebaiknya kita hilangkan pendefinisian ulang dari sin.

>forget sin; sin(pi/4)

```
0.707106781187
```

Contoh soal

1. Tentukan h(6) dari fungsi

>function h(x) := 4*x^2+3*x+8

>h(6)

```
170
```

2. Tentukan nilai h(25) dari fungsi h(x)

>h(25)

```
2583
```

3. Tentukan nilai b(654) dari fungsi

>function b(x) := 3*x^2-2*x+5

>b(625)

```
1170630
```

2.10 Default Parameters

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default.

>function f(x,a=1) := a*x^2

Mengabaikan parameter ini akan menggunakan nilai default.

>f(4)

```
16
```

Dengan menyettingnya akan menimpa/menutupi nilai default.

>f(4,5)

```
80
```

Parameter yang ditetapkan juga akan menimpanya. Ini digunakan oleh banyak fungsi Euler seperti plot2d, plot3d.

>f(4,a=1)

```
16
```

Jika suatu variabel bukan parameter, maka variabel tersebut harus bersifat global. Fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

>function f(x) := a*x^2

>a=6; f(2)

```
24
```

Namun, parameter yang ditetapkan akan menggantikan nilai global.

Jika argumen tidak ada dalam daftar parameter yang telah ditetapkan sebelumnya, argumen tersebut harus dideklarasikan dengan ":="!

>f(2,a:=5)

```
20
```

Fungsi simbolik didefinisikan dengan "&=". Fungsi ini didefinisikan dalam Euler dan Maxima, dan berfungsi di keduanya. Ekspresi yang mendefinisikan dijalankan melalui Maxima sebelum definisi.

>function g(x) &= x^3-x*exp(-x); $&g(x)

$$x^3 - x\,e^{-x}$$

Fungsi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik.

>$&diff(g(x),x), $&% with x=4/3

$$x\,e^{-x} - e^{-x} + 3\,x^2$$

$$\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{3} + \frac{16}{3}$$

Mereka juga dapat digunakan dalam ekspresi numerik. Tentu saja, ini hanya akan berfungsi jika EMT dapat menginterpretasikan semua hal di dalam fungsi tersebut.

>g(5+g(1))

```
178.635099908
```

Mereka dapat digunakan untuk mendefinisikan fungsi atau ekspresi simbolis lainnya.

>function G(x) &= factor(integrate(g(x),x)); $&G(c) // integrate: mengintegralkan

$$\frac{e^{-c}\,\left(c^4\,e^c + 4\,c + 4\right)}{4}$$

>solve(&g(x),0.5)

```
0.703467422498
```

Berikut ini juga berfungsi, karena Euler menggunakan ekspresi simbolik dalam fungsi g, jika tidak menemukan variabel simbolik g, dan

jika ada fungsi simbolik g.

>solve(&g,0.5)

```
0.703467422498
```

>function P(x,n) &= (2*x-1)^n; $&P(x,n)

$$(2\,x-1)^n$$

>function Q(x,n) &= (x+2)^n; $&Q(x,n)

$$(x+2)^n$$

>$&P(x,4), $&expand(%)

$$(2\,x-1)^4$$
$$16\,x^4-32\,x^3+24\,x^2-8\,x+1$$

>P(3,4)

```
625
```

>$&P(x,4)+ Q(x,3), $&expand(%)

$$(2\,x-1)^4+(x+2)^3$$
$$16\,x^4-31\,x^3+30\,x^2+4\,x+9$$

>$&P(x,4)-Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)

$$(2\,x-1)^4-(x+2)^3$$
$$16\,x^4-33\,x^3+18\,x^2-20\,x-7$$
$$16\,x^4-33\,x^3+18\,x^2-20\,x-7$$

>$&P(x,4)*Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)

$$(x+2)^3\ (2\,x-1)^4$$
$$16\,x^7+64\,x^6+24\,x^5-120\,x^4-15\,x^3+102\,x^2-52\,x+8$$
$$(x+2)^3\ (2\,x-1)^4$$

>$&P(x,4)/Q(x,1), $&expand(%), $&factor(%)

$$\frac{(2\,x-1)^4}{x+2}$$

$$\frac{16\,x^4}{x+2}-\frac{32\,x^3}{x+2}+\frac{24\,x^2}{x+2}-\frac{8\,x}{x+2}+\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{(2\,x-1)^4}{x+2}$$

>function f(x) &= x^3-x; $&f(x)

$$x^3-x$$

Dengan &= fungsinya bersifat simbolis, dan dapat digunakan dalam ekspresi simbolis lainnya.

>$&integrate(f(x),x)

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$$

Dengan := fungsinya adalah numerik. Contoh yang bagus adalah integral tentu seperti

$$f(x)=\int_1^x t^t\,dt,$$

yang tidak bisa dievalusi secara simbolis.

Jika kita mendefinisikan ulang fungsi tersebut dengan kata kunci "map", fungsi tersebut dapat digunakan untuk vektor x. Secara internal, fungsi

tersebut dipanggil untuk semua nilai x satu kali, dan hasilnya disimpan dalam sebuah vektor.

>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)

>f(0:0.5:2)

```
[-0.783431,  -0.410816,  0,  0.676863,  2.05045]
```

Fungsi dapat memiliki nilai default untuk parameter.

>function mylog (x,base=10) := ln(x)/ln(base);

Sekarang fungsi tersebut dapat dipanggil dengan atau tanpa parameter "base".

>mylog(100), mylog(2^6.7,2)

```
2
6.7
```

Selain itu, dimungkinkan untuk menggunakan parameter yang ditetapkan.

>mylog(E^2,base=E)

```
2
```

Sering kali, kita ingin menggunakan fungsi untuk vektor di satu tempat, dan untuk elemen individual di tempat lain. Hal ini dimungkinkandengan parameter vektor.

>function f([a,b]) &= a^{2+b}2-a*b+b; $&f(a,b), $&f(x,y)

$$b^2 - a\,b + b + a^2$$

$$y^2 - x\,y + y + x^2$$

Fungsi simbolik semacam itu dapat digunakan untuk variabel simbolik.

Namun, fungsi tersebut juga dapat digunakan untuk vektor numerik.

>v=[3,4]; f(v)

```
17
```

Ada pula fungsi yang murni simbolis, yang tidak dapat digunakan secara numerik.

>function lapl(expr,x,y) &&= diff(expr,x,2)+diff(expr,y,2)//turunan parsial kedua

```
diff(expr, y, 2) + diff(expr, x, 2)
```

>$&realpart((x+I*y)^4), $&lapl(%,x,y)

$$y^4 - 6\,x^2\,y^2 + x^4$$

$$0$$

Namun tentu saja, mereka dapat digunakan dalam ekspresi simbolik atau dalam definisi fungsi simbolik.

>function f(x,y) &= factor(lapl((x+y$^{2)}$5,x,y)); $&f(x,y)

$$10\,\left(y^2 + x\right)^3\,\left(9\,y^2 + x + 2\right)$$

Ringkasan

- &= mendefinisikan fungsi simbolik,
- := mendefinisikan fungsi numerik,
- &&= mendefinisikan fungsi simbolik murni.

Contoh soal

Diketahui dua fungsi yaitu S(x) dan T(x)

>function S(x,n) &= (2*x+5)^n; $&S(x,n)

$$(2\,x+5)^n$$

>function T(x,n) &= (7*x+4)^n; $&T(x,n)

$$(7\,x+4)^n$$

1. Berapa hasil S(x) dengan n=2 ditambah T(x) dengan n=3

>$&S(x,2)+ T(x,3), $&expand(%)

$$(7\,x+4)^3+(2\,x+5)^2$$

$$343\,x^3+592\,x^2+356\,x+89$$

2. Berapa hasil S(x) dengan n=2 ditambah T(x) dengan n=3 dengan x=2

>$&S(2,2)+ T(2,3)

$$5913$$

3. Berapa hasil S(x) dengan n=2 dikali T(x) dengan n=3 dan factornya

>$&S(x,2)* T(x,3); $&expand(%), $&factor(%)

$$1372\,x^5+9212\,x^4+21679\,x^3+21676\,x^2+9680\,x+1600$$

$$(2\,x+5)^2\,(7\,x+4)^3$$

4. Berapa hasil T(x) dengan n=4

>$&T(x,4), $&expand(%)

$$(7\,x+4)^4$$

$$2401\,x^4+5488\,x^3+4704\,x^2+1792\,x+256$$

5. Tentukan integral dari T(x) dengan n=2

>$&integrate(T(x,2),x)

$$\frac{49\,x^3}{3}+28\,x^2+16\,x$$

2.11 Memecahkan Ekspresi

Ekspresi dapat diselesaikan secara numerik dan simbolik.

Untuk menyelesaikan ekspresi sederhana dari satu variabel, kita dapat menggunakan fungsi solve(). Fungsi ini memerlukan nilai awal untuk memulai pencarian. Secara internal, solve() menggunakan metode secant.

>solve("x^2-2",1)

```
1.41421356237
```

Ini juga berlaku untuk ekspresi simbolik. Ambil fungsi berikut.

>$&solve(x^2=2,x)

$$\left[x=-\sqrt{2},x=\sqrt{2}\right]$$

>$&solve(x^2-2,x)

$$\left[x=-\sqrt{2},x=\sqrt{2}\right]$$

>$&solve(a*x^2+b*x+c=0,x)

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a},x=\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a}\right]$$

>$&solve([a*x+b*y=c,d*x+e*y=f],[x,y])

$$\left[\left[x=-\frac{c\,e}{b\,\left(d-5\right)-a\,e},y=\frac{c\,\left(d-5\right)}{b\,\left(d-5\right)-a\,e}\right]\right]$$

>px &= 4*x^{8+x}7-x^4-x; $&px

$$4\,x^8+x^7-x^4-x$$

Sekarang kita cari titik, di mana polinomialnya adalah 2. Dalam solve(), nilai target default y=0 dapat diubah dengan variabel yang ditetapkan.

Kita gunakan y=2 dan periksa dengan mengevaluasi polinomial pada hasil sebelumnya.

>solve(px,1,y=2), px(%)

```
0.966715594851
2
```

Memecahkan ekspresi simbolik dalam bentuk simbolik akan menghasilkan daftar solusi. Kami menggunakan pemecah simbolik solve() yang disediakan oleh Maxima.

>sol &= solve(x^2-x-1,x); $&sol

$$\left[x=\frac{1-\sqrt{5}}{2},x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$$

Cara termudah untuk mendapatkan nilai numerik adalah dengan mengevaluasi solusi secara numerik seperti sebuah ekspresi.

>longest sol()

```
    -0.6180339887498949        1.618033988749895
```

Untuk menggunakan solusi secara simbolis dalam ekspresi lain, cara termudah adalah menggunakan "with".

>$&x^2 with sol[1], $&expand(x^2-x-1 with sol[2])

$$\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4}$$

$$0$$

Memecahkan sistem persamaan secara simbolis dapat dilakukan dengan vektor persamaan dan penyelesai simbolis solve(). Jawabannya adalah daftar persamaan.

>$&solve([x+y=2,x^3+2*y+x=4],[x,y])

$$\left[\left[x=-1,y=3\right],\left[x=1,y=1\right],\left[x=0,y=2\right]\right]$$

Fungsi f() dapat melihat variabel global. Namun, sering kali kita ingin menggunakan parameter lokal. dengan a=3.

>function f(x,a) := x^{a-a}x;

Salah satu cara untuk meneruskan parameter tambahan ke f() adalah dengan menggunakan daftar dengan nama fungsi dan parameter (cara lainnya adalah parameter titik koma).

>solve({{"f",3}},2,y=0.1)

```
2.54116291558
```

Ini juga berlaku untuk ekspresi. Namun, elemen daftar bernama harus digunakan. (Informasi lebih lanjut tentang daftar dalam tutorial tentang sintaks EMT).

>solve({{"x^{a-a}x",a=3}},2,y=0.1)

```
2.54116291558
```

Contoh soal

1. Tentukan nilai x dari

>$&solve(x^2+3*x-28,x)

$$[x = 4, x = -7]$$

2. Tentukan nilai y dari

>$&solve(y^2+6*y+9,y)

$$[y = -3]$$

3. Tentukan nilai n dari

>$&solve(n^2+4*n+4,n)

$$[n = -2]$$

4. Tentukan nilai x dari

>$&solve(x^2-20*x+100,x)

$$[x = 10]$$

5. tentukan nilai a dari

>$&solve(12*a^2-5*a-28,a)

$$\left[a = -\frac{4}{3}, a = \frac{7}{4}\right]$$

2.12 Menyelesaikan Pertidaksamaan

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan, EMT tidak akan dapat melakukannya, melainkan dengan bantuan Maxima, artinya secara eksak (simbolik). Perintah Maxima yang digunakan adalah fourier_elim(), yang harus dipanggil dengan perintah “load(fourier_elim)” terlebih dahulu.

>&load(fourier_elim)

```
        C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

>$&fourier_elim([x^2 - 1>0],[x]) // x^2-1 > 0

$$[1 < x] \vee [x < -1]$$

>$&fourier_elim([x^2 - 1<0],[x]) // x^2-1 < 0

$$[-1 < x, x < 1]$$

>$&fourier_elim([x^2 - 1 # 0],[x]) // x^-1 <> 0

$$[-1 < x, x < 1] \vee [1 < x] \vee [x < -1]$$

>$&fourier_elim([x # 6],[x])

$$[x < 6] \vee [6 < x]$$

Ketika himpunan penyelesaiannya adalah kosong maka hasilnya ‘emptyset’ dan ketika himpunan penyelesaiannya adalah semua bilangan reak maka hasilnya ‘universalset’; sebagai contoh

>$&fourier_elim([x < 1, x > 1],[x]) // tidak memiliki penyelesaian

$$emptyset$$

>$&fourier_elim([minf < x, x < inf],[x]) // solusinya R

$$universalset$$

>$&fourier_elim([x^3 - 1 > 0],[x])

$$\left[1 < x, x^2 + x + 1 > 0\right] \vee \left[x < 1, -x^2 - x - 1 > 0\right]$$

>$&fourier_elim([cos(x) < 1/2],[x]) // ??? gagal

$$[1 - 2\, \cos x > 0]$$

>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[x,y]) // sistem pertidaksamaan

$$[y-5<x,x<y+7,10<y]$$

>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[y,x])

$$[max\left(10,x-7\right)<y,y<x+5,5<x]$$

>$&fourier_elim((x + y < 5) and (x - y >8),[x,y])

$$\left[y+8<x,x<5-y,y<-\frac{3}{2}\right]$$

>$&fourier_elim(((x + y < 5) and x < 1) or (x - y >8),[x,y])

$$[y+8<x]\vee[x<min\left(1,5-y\right)]$$

>&fourier_elim([max(x,y) > 6, x # 8, abs(y-1) > 12],[x,y])

```
        [6 &lt; x, x &lt; 8, y &lt; - 11] or [8 &lt; x, y &lt; - 11]
 or [x &lt; 8, 13 &lt; y] or [x = y, 13 &lt; y] or [8 &lt; x, x &lt; y, 13
 or [y &lt; x, 13 &lt; y]
```

>$&fourier_elim([(x+6)/(x-9) <= 6],[x])

$$[x=12]\vee[12<x]\vee[x<9]$$

Contoh soal

1. tentukan nilai x dari pertidaksamaan

>&load(fourier_elim)

```
        C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

>$&fourier_elim([2*y-3>=1-y+5],[x])

$$[y-3]\vee[y-3>0]$$

2. Tentukan nilai x dari pertidaksamaan

>$&fourier_elim([(x-2)*(x+5)>x*(x-3)],[x])

$$\left[\frac{5}{3} < x\right]$$

3. Tentukan nilai x dari pertidaksamaan

>$&fourier_elim([x+6>=7],[x])

$$[x = 1] \vee [1 < x]$$

4. Tentukan nilai x dari pertidaksamaan

>$&fourier_elim([x+(1/4)<=(2/3)],[x])

$$\left[x = \frac{5}{12}\right] \vee \left[x < \frac{5}{12}\right]$$

2.13 Bahasa Matriks

Dokumentasi inti EMT berisi pembahasan terperinci tentang bahasa matriks Euler.

Vektor dan matriks dimasukkan dengan tanda kurung siku, elemen dipisahkan dengan koma, baris dipisahkan dengan titik koma.

>A=[1,2;3,4]

```
            1                         2
            3                         4
```

Produk matriks dilambangkan dengan sebuah titik.

>b=[3;4]

```
            3
            4
```

>b' // transpose b

```
[3,   4]
```

>inv(A) //inverse A

```
           -2              1
          1.5           -0.5
```

>A.b //perkalian matriks

```
           11
           25
```

>A.inv(A)

```
            1              0
            0              1
```

Poin utama dari bahasa matriks adalah bahwa semua fungsi dan operator bekerja secara elemen demi elemen.

>A.A

```
            7             10
           15             22
```

>A^2 //perpangkatan elemen2 A

```
            1              4
            9             16
```

>A.A.A

```
           37             54
           81            118
```

>power(A,3) //perpangkatan matriks

```
           37             54
           81            118
```

>A/A //pembagian elemen-elemen matriks yang seletak

```
              1               1
              1               1
```

>A/b //pembagian elemen2 A oleh elemen2 b kolom demi kolom (karena b vektor kolom)

```
       0.333333        0.666667
           0.75               1
```

>A\b // hasilkali invers A dan b, A^(-1)b

```
             -2
            2.5
```

>inv(A).b

```
             -2
            2.5
```

>A\A //A^(-1)A

```
              1               0
              0               1
```

>inv(A).A

```
              1               0
              0               1
```

>A*A //perkalin elemen-elemen matriks seletak

```
              1               4
              9              16
```

Ini bukan hasil perkalian matriks, tetapi perkalian elemen demi elemen. Hal yang sama berlaku untuk vektor.

>b^2 // perpangkatan elemen-elemen matriks/vektor

```
              9
             16
```

Jika salah satu operan merupakan vektor atau skalar, ia diekspansi dengan cara alami.

>2*A

```
           2             4
           6             8
```

Misalnya, jika operan adalah vektor kolom maka elemen-elemennya diterapkan ke semua baris A.

>[1,2]*A

```
           1             4
           3             8
```

Jika itu adalah vektor baris maka diterapkan ke semua kolom A.

>A*[2,3]

```
           2             6
           6            12
```

Seseorang dapat membayangkan perkalian ini seolah-olah vektor baris v telah diduplikasi untuk membentuk matriks berukuran sama dengan A.

>dup([1,2],2) // dup: menduplikasi/menggandakan vektor [1,2] sebanyak 2 kali (baris)

```
           1             2
           1             2
```

>A*dup([1,2],2)

```
           1             4
           3             8
```

Hal ini juga berlaku untuk dua vektor, yang satu merupakan vektor baris dan yang lainnya merupakan vektor kolom. Kita menghitung i*j untuk i,j dari 1 hingga 5. Caranya adalah dengan mengalikan 1:5 dengan transposenya. Bahasa matriks Euler secara otomatis menghasilkan tabel nilai.

>(1:5)*(1:5)' // hasilkali elemen-elemen vektor baris dan vektor kolom

```
           1             2             3             4             5
           2             4             6             8            10
           3             6             9            12            15
           4             8            12            16            20
           5            10            15            20            25
```

Sekali lagi, ingatlah bahwa ini bukan produk matriks!

>(1:5).(1:5)' // hasilkali vektor baris dan vektor kolom

```
55
```

>sum((1:5)*(1:5)) // sama hasilnya

```
55
```

Bahkan operator seperti < atau == bekerja dengan cara yang sama.

>(1:10)<6 // menguji elemen-elemen yang kurang dari 6

```
[1,  1,  1,  1,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Misalnya, kita dapat menghitung jumlah elemen yang memenuhi kondisi tertentu dengan fungsi sum().

>sum((1:10)<6) // banyak elemen yang kurang dari 6

```
5
```

Euler memiliki operator perbandingan, seperti "==", yang memeriksa kesetaraan.

Kita memperoleh vektor 0 dan 1, di mana 1 berarti benar.

>t=(1:10)^2; t==25 //menguji elemen2 t yang sama dengan 25 (hanya ada 1)

```
[0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Dari vektor tersebut, "nonzeros" memilih elemen yang bukan nol.

Dalam kasus ini, kita memperoleh indeks semua elemen yang lebih besar dari 50.

>nonzeros(t>50) //indeks elemen2 t yang lebih besar daripada 50

```
[8,  9,  10]
```

Tentu saja, kita dapat menggunakan vektor indeks ini untuk mendapatkan nilai yang sesuai dalam t.

>t[nonzeros(t>50)] //elemen2 t yang lebih besar daripada 50

```
[64,  81,  100]
```

Sebagai contoh, mari kita cari semua kuadrat angka 1 hingga 1000, yaitu 5 modulo 11 dan 3 modulo 13.

```
>t=1:1000; nonzeros(mod(t^2,11)==5 && mod(t^2,13)==3)
```

```
[4,  48,  95,  139,  147,  191,  238,  282,  290,  334,  381,  425,
433,  477,  524,  568,  576,  620,  667,  711,  719,  763,  810,  854,
862,  906,  953,  997]
```

EMT tidak sepenuhnya efektif untuk komputasi integer. Ia menggunakan floating point presisi ganda secara internal. Namun, ia sering kali sangat berguna.

Kita dapat memeriksa keutamaan. Mari kita cari tahu, berapa banyak kuadrat ditambah 1 yang merupakan bilangan prima.

```
>t=1:1000; length(nonzeros(isprime(t^2+1)))
```

```
112
```

Fungsi nonzeros() hanya berfungsi untuk vektor. Untuk matriks, ada mnonzeros().

```
>seed(2); A=random(3,4)
```

```
    0.765761      0.401188      0.406347      0.267829
     0.13673      0.390567      0.495975      0.952814
    0.548138      0.006085      0.444255      0.539246
```

Ia mengembalikan indeks elemen, yang bukan nol.

```
>k=mnonzeros(A<0.4) //indeks elemen2 A yang kurang dari 0,4
```

```
           1             4
           2             1
           2             2
           3             2
```

Indeks ini dapat digunakan untuk menetapkan elemen pada nilai tertentu.

```
>mset(A,k,0) //mengganti elemen2 suatu matriks pada indeks tertentu
```

```
    0.765761      0.401188      0.406347             0
           0             0      0.495975      0.952814
    0.548138             0      0.444255      0.539246
```

Fungsi mset() juga dapat mengatur elemen pada indeks ke entri matriks lainnya.

>mset(A,k,-random(size(A)))

```
    0.765761      0.401188      0.406347     -0.126917
   -0.122404     -0.691673      0.495975      0.952814
    0.548138     -0.483902      0.444255      0.539246
```

Dan mungkin untuk mendapatkan elemen elemen dalam sebuah vektor.

>mget(A,k)

```
[0.267829,  0.13673,  0.390567,  0.006085]
```

Fungsi lain yang berguna adalah extrema, yang mengembalikan nilai minimal dan maksimal di setiap baris matriks dan posisinya.

>ex=extrema(A)

```
    0.267829             4      0.765761             1
     0.13673             1      0.952814             4
    0.006085             2      0.548138             1
```

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak nilai maksimal pada setiap baris.

>ex[,3]'

```
[0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Ini tentu saja sama dengan fungsi max().

>max(A)'

```
[0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Tetapi dengan mget(), kita dapat mengekstrak indeks dan menggunakan informasi ini untuk mengekstrak elemen pada posisi yang sama dari matriks lain.

>j=(1:rows(A))'|ex[,4], mget(-A,j)

```
           1             1
           2             4
           3             1
[-0.765761,  -0.952814,  -0.548138]
```

Contoh soal

1. Tentukan invers dari matriks

>A=[3,2;5,3]

```
         3            2
         5            3
```

>inv(A) // invers dari A

```
        -3            2
         5           -3
```

2. Tentukan invers dari matriks B berikut

>B=[3,1,0;1,1,1;1,-1,2]

```
         3            1            0
         1            1            1
         1           -1            2
```

>inv(B) // invers dari matriks B

```
     0.375        -0.25        0.125
    -0.125         0.75       -0.375
     -0.25          0.5         0.25
```

3. Berapa hasil dari perkalian matriks P dan matriks Q

>P=[-2,4;5,1;-1,-3]

```
        -2            4
         5            1
        -1           -3
```

>Q=[3,-6;-1,4]

```
         3           -6
        -1            4
```

>P.Q // mengalikan matriks P dan Q

```
          -10            28
           14           -26
            0            -6
```

4. Berapa hasil dari matriks Q kuadrat

>Q.Q // menghitung matriks Q kuadrat

```
           15           -42
           -7            22
```

5. Berapa hasil kuadrat dari masing masing elemen pada matriks B

>B^2

```
            9             1             0
            1             1             1
            1             1             4
```

2.14 Fungsi Matriks Lainnya (Membangun Matriks)

Untuk membuat matriks, kita dapat menumpuk satu matriks di atas matriks lainnya. Jika keduanya tidak memiliki jumlah kolom yang sama, matriks yang lebih pendek akan diisi dengan 0.

>v=1:3; v_v

```
            1             2             3
            1             2             3
```

Dengan cara yang sama, kita dapat menempelkan suatu matriks ke sisi lain yang berdampingan, jika keduanya memiliki jumlah baris yang sama.

>A=random(3,4); A|v'

```
     0.032444     0.0534171      0.595713      0.564454             1
      0.83916      0.175552      0.396988       0.83514             2
    0.0257573      0.658585      0.629832      0.770895             3
```

Jika tidak memiliki jumlah baris yang sama, matriks yang lebih pendek diisi dengan 0.

Ada pengecualian untuk aturan ini. Bilangan riil yang dilampirkan ke matriks akan digunakan sebagai kolom yang diisi dengan bilangan riil tersebut.

>A|1

```
     0.032444      0.0534171       0.595713       0.564454                1
      0.83916       0.175552       0.396988        0.83514                1
    0.0257573       0.658585       0.629832       0.770895                1
```

Dimungkinkan untuk membuat matriks dari vektor baris dan kolom

>[v;v]

```
            1             2             3
            1             2             3
```

>[v',v']

```
            1             1
            2             2
            3             3
```

Tujuan utama dari ini adalah untuk menafsirkan vektor ekspresi untuk vektor kolom.

>"[x,x^2]"(v')

```
            1             1
            2             4
            3             9
```

Untuk mendapatkan ukuran A, kita dapat menggunakan fungsi berikut.

>C=zeros(2,4); rows(C), cols(C), size(C), length(C)

```
2
4
[2,  4]
4
```

Untuk vektor, ada length().

>length(2:10)

```
9
```

Ada banyak fungsi lain yang menghasilkan matriks.

>ones(2,2)

```
            1             1
            1             1
```

Ini juga dapat digunakan dengan satu parameter. Untuk mendapatkan vektor dengan angka selain 1, gunakan yang berikut ini.

>ones(5)*6

```
[6,  6,  6,  6,  6]
```

Matriks bilangan acak juga dapat dihasilkan dengan acak (distribusi seragam) atau normal (distribusi Gauß).

>random(2,2)

```
      0.66566      0.831835
        0.977      0.544258
```

Berikut adalah fungsi berguna lainnya, yang merestrukturisasi elemen-elemen suatu matriks menjadi matriks lain.

>redim(1:9,3,3) // menyusun elemen2 1, 2, 3, . . . , 9 ke bentuk matriks 3x3

```
            1             2             3
            4             5             6
            7             8             9
```

Dengan fungsi berikut, kita dapat menggunakan ini dan fungsi dup untuk menulis fungsi rep(), yang mengulang vektor n kali.

>function rep(v,n) := redim(dup(v,n),1,n*cols(v))

Mari kita coba.

>rep(1:3,5)

```
[1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3]
```

Fungsi multdup() menduplikasi elemen suatu vektor.

>multdup(1:3,5), multdup(1:3,[2,3,2])

```
[1,  1,  1,  1,  1,  2,  2,  2,  2,  2,  3,  3,  3,  3,  3]
[1,  1,  2,  2,  2,  3,  3]
```

Fungsi flipx() dan flipy() membalikkan urutan baris atau kolom matriks. Yaitu, fungsi flipx() membalik secara horizontal.

>flipx(1:5) //membalik elemen2 vektor baris

```
[5,  4,  3,  2,  1]
```

Untuk rotasi, Euler memiliki rotleft() dan rotright().

>rotleft(1:5) // memutar elemen2 vektor baris

```
[2,  3,  4,  5,  1]
```

Fungsi khusus adalah drop(v,i), yang menghapus elemen dengan indeks di i dari vektor v.

>drop(10:20,3)

```
[10,  11,  13,  14,  15,  16,  17,  18,  19,  20]
```

Perhatikan bahwa vektor i dalam drop(v,i) merujuk pada indeks elemen dalam v, bukan nilai elemen. Jika Anda ingin menghapus elemen, Anda perlu menemukan elemen terlebih dahulu. Fungsi indexof(v,x) dapat digunakan untuk menemukan elemen x dalam vektor v yang diurutkan.

>v=primes(50), i=indexof(v,10:20), drop(v,i)

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
[0,  5,  0,  6,  0,  0,  0,  7,  0,  8,  0]
[2,  3,  5,  7,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
```

Seperti yang Anda lihat, tidak ada salahnya menyertakan indeks di luar rentang (seperti 0), indeks ganda, atau indeks yang tidak diurutkan.

>drop(1:10,shuffle([0,0,5,5,7,12,12]))

```
[1,  2,  3,  4,  6,  8,  9,  10]
```

Ada beberapa fungsi khusus untuk mengatur diagonal atau membuat matriks diagonal.

Kita mulai dengan matriks identitas.

>A=id(5) // matriks identitas 5x5

```
1    0    0    0    0
0    1    0    0    0
0    0    1    0    0
0    0    0    1    0
0    0    0    0    1
```

Kemudian kita atur diagonal bawah (-1) menjadi 1:4.

>setdiag(A,-1,1:4) //mengganti diagonal di bawah diagonal utama

```
1    0    0    0    0
1    1    0    0    0
0    2    1    0    0
0    0    3    1    0
0    0    0    4    1
```

Perhatikan bahwa kita tidak mengubah matriks A. Kita mendapatkan matriks baru sebagai hasil dari setdiag().

Berikut ini adalah fungsi yang mengembalikan matriks tri-diagonal.

>function tridiag (n,a,b,c) := setdiag(setdiag(b*id(n),1,c),-1,a); ...
> tridiag(5,1,2,3)

```
2    3    0    0    0
1    2    3    0    0
0    1    2    3    0
0    0    1    2    3
0    0    0    1    2
```

Diagonal matriks juga dapat diekstraksi dari matriks. Untuk menunjukkan hal ini, kami merubah struktur vektor 1:9 menjadi matriks 3x3.

>A=redim(1:9,3,3)

```
1    2    3
4    5    6
7    8    9
```

Sekarang kita dapat mengekstrak diagonalnya.

>d=getdiag(A,0)

```
[1,   5,   9]
```

Misalnya, kita dapat membagi matriks berdasarkan diagonalnya. Bahasa matriks memastikan bahwa vektor kolom d diterapkan ke matriks baris demi baris.

>fraction A/d'

```
     1         2         3
   4/5         1       6/5
   7/9       8/9         1
```

Contoh soal

1. Buatlah matriks identitas berukuran 4x4

>A=id(4)

```
1      0      0      0
0      1      0      0
0      0      1      0
0      0      0      1
```

2. Ubahlah elemen dibawah elemen diagonal utama matriks identitas 4x4 dengan 8

>setdiag(A,-1,8)

```
1      0      0      0
8      1      0      0
0      8      1      0
0      0      8      1
```

3. Susunlah elemen elemen 1,2,3,4,5,6 ke bentuk matriks berukuran 3X2

>redim(1:6,3,2)

```
1      2
3      4
5      6
```

2.15 Vektorisasi

Hampir semua fungsi di Euler juga berfungsi untuk input matriks dan vektor, jika ini masuk akal.

Misalnya, fungsi sqrt() menghitung akar kuadrat dari semua elemen vektor atau matriks.

>sqrt(1:3)

```
[1,  1.41421,  1.73205]
```

Jadi Anda dapat dengan mudah membuat tabel nilai. Ini adalah salah satu cara untuk memplot fungsi (alternatifnya menggunakan ekspresi).

>x=1:0.01:5; y=log(x)/x^2; // terlalu panjang untuk ditampikan

Dengan ini dan operator titik dua a:delta:b, vektor nilai fungsi dapat dibuat dengan mudah.

Dalam contoh berikut, kita buat vektor nilai t[i] dengan spasi 0,1 dari -1 hingga 1. Kemudian kita buat vektor nilai fungsi

>t=-1:0.1:1; s=t^3-t

```
[0,  0.171,  0.288,  0.357,  0.384,  0.375,  0.336,  0.273,  0.192,
0.099,  0,  -0.099,  -0.192,  -0.273,  -0.336,  -0.375,  -0.384,
-0.357,  -0.288,  -0.171,  0]
```

EMT mengembangkan operator untuk skalar, vektor, dan matriks dengan cara yang jelas.

Misalnya, vektor kolom dikalikan vektor baris akan mengembang menjadi matriks, jika operator diterapkan. Berikut ini, v' adalah vektor yang ditransposisikan (vektor kolom).

>shortest (1:5)*(1:5)'

```
     1      2      3      4      5
     2      4      6      8     10
     3      6      9     12     15
     4      8     12     16     20
     5     10     15     20     25
```

Perhatikan bahwa ini sangat berbeda dari perkalian matriks. Perkalian matriks dilambangkan dengan titik "." dalam EMT.

>(1:5).(1:5)'

```
55
```

Secara default, vektor baris dicetak dalam format ringkas.

>[1,2,3,4]

```
[1,  2,  3,  4]
```

Untuk matriks, operator khusus . menunjukkan perkalian matriks, dan A' menunjukkan transposisi. Matriks 1x1 dapat digunakan seperti bilangan riil.

>v:=[1,2]; v.v', %^2

```
5
25
```

Untuk mentranspos suatu matriks, kita menggunakan tanda apostrof.

>v=1:4; v'

```
            1
            2
            3
            4
```

Jadi kita dapat menghitung matriks A dikali vektor b.

>A=[1,2,3,4;5,6,7,8]; A.v'

```
           30
           70
```

Perhatikan bahwa v masih merupakan vektor baris. Jadi v'.v berbeda dari v.v'.

>v'.v

```
            1             2             3             4
            2             4             6             8
            3             6             9            12
            4             8            12            16
```

v.v' menghitung norma v kuadrat untuk vektor baris v. Hasilnya adalah vektor 1x1, yang bekerja seperti bilangan riil.

>v.v'

```
30
```

Ada juga norma fungsi (bersama dengan banyak fungsi Aljabar Linear lainnya).

>norm(v)^2

```
30
```

Operator dan fungsi mematuhi bahasa matriks Euler.

Berikut ini ringkasan aturannya. 1. Fungsi yang diterapkan pada vektor atau matriks diterapkan pada setiap elemen. 2. Operator yang beroperasi pada dua matriks dengan ukuran yang sama diterapkan secara berpasangan pada elemen-elemen matriks. 3. Jika kedua matriks memiliki dimensi yang berbeda, keduanya diekspansi dengan cara yang masuk akal, sehingga memiliki ukuran yang sama.

Misalnya, nilai skalar dikalikan vektor mengalikan nilai dengan setiap elemen vektor. Atau matriks dikalikan vektor (dengan *, bukan .) mengekspansi vektor ke ukuran matriks dengan menduplikasinya.

Berikut ini adalah kasus sederhana dengan operator ^.

>[1,2,3]^2

```
[1,  4,  9]
```

Berikut ini adalah kasus yang lebih rumit. Vektor baris dikalikan vektor kolom, keduanya diekspansi dengan cara menduplikasi.

>v:=[1,2,3]; v*v'

```
          1          2          3
          2          4          6
          3          6          9
```

Perhatikan bahwa produk skalar menggunakan produk matriks, bukan *!

>v.v'

```
14
```

Ada banyak fungsi untuk matriks. Kami memberikan daftar singkatnya. Anda harus merujuk ke dokumentasi untuk informasi lebih lanjut tentang perintah-perintah ini.

sum,prod menghitung jumlah dan hasil perkalian baris-baris
cumsum,cumprod melakukan hal yang sama secara kumulatif

menghitung nilai ekstrem dari setiap baris
extrema mengembalikan vektor dengan informasi ekstrem
diag(A,i) mengembalikan diagonal ke-i
setdiag(A,i,v) menetapkan diagonal ke-i
id(n) matriks identitas
det(A) determinan
charpoly(A) polinomial karakteristik
eigenvalues(A) nilai eigen

>v*v, sum(v*v), cumsum(v*v)

```
[1,  4,  9]
14
[1,  5,  14]
```

Operator : menghasilkan vektor baris dengan spasi yang sama, secara opsional dengan ukuran langkah.

>1:4, 1:2:10

```
[1,  2,  3,  4]
[1,  3,  5,  7,  9]
```

Untuk menggabungkan matriks dan vektor ada operator “|” dan “_“.

>[1,2,3]|[4,5], [1,2,3]_1

```
[1,  2,  3,  4,  5]
            1             2             3
            1             1             1
```

Elemen-elemen suatu matriks disebut dengan “A[i,j]”.

>A:=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; A[2,3]

```
6
```

Untuk vektor baris atau kolom, v[i] adalah elemen ke-i dari vektor. Untuk matriks, ini mengembalikan baris ke-i lengkap dari matriks.

>v:=[2,4,6,8]; v[3], A[3]

```
6
[7,  8,  9]
```

Indeks juga dapat berupa vektor baris indeks. : menunjukkan semua indeks.

>v[1:2], A[:,2]

```
[2,   4]
                2
                5
                8
```

Bentuk singkat dari : adalah menghilangkan indeks sepenuhnya.

>A[,2:3]

```
                2               3
                5               6
                8               9
```

Untuk tujuan vektorisasi, elemen-elemen matriks dapat diakses seolah-olah mereka adalah vektor.

>A{4}

```
4
```

Matriks juga dapat diratakan, menggunakan fungsi redim(). Hal ini diimplementasikan dalam fungsi flatten().

>redim(A,1,prod(size(A))), flatten(A)

```
[1,   2,   3,   4,   5,   6,   7,   8,   9]
[1,   2,   3,   4,   5,   6,   7,   8,   9]
```

Untuk menggunakan matriks pada tabel, mari kita atur ulang ke format default, dan hitung tabel nilai sinus dan cosinus. Perhatikan bahwa sudut dalam radian secara default.

>defformat; w=0°:45°:360°; w=w'; deg(w)

```
                0
               45
               90
              135
              180
              225
              270
              315
              360
```

Sekarang kita tambahkan kolom ke matriks.

>M = deg(w)|w|cos(w)|sin(w)

```
          0            0            1            0
         45     0.785398     0.707107     0.707107
         90       1.5708            0            1
        135      2.35619    -0.707107     0.707107
        180      3.14159           -1            0
        225      3.92699    -0.707107    -0.707107
        270      4.71239            0           -1
        315      5.49779     0.707107    -0.707107
        360      6.28319            1            0
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat membuat beberapa tabel dari beberapa fungsi sekaligus.

Dalam contoh berikut, kita menghitung t[j]^i untuk i dari 1 hingga n. Kita memperoleh matriks, di mana setiap baris adalah tabel t^i untuk satu i. Yaitu, matriks tersebut memiliki elemen-elemen

Fungsi yang tidak berfungsi untuk input vektor harus "divektorkan". Ini dapat dicapai dengan kata kunci "map" dalam definisi fungsi. Kemudian fungsi akan dievaluasi untuk setiap elemen parameter vektor.

Integrasi numerik integr() hanya berfungsi untuk batas interval skalar. Jadi, kita perlu memvektorkannya.

>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)

Kata kunci "map" akan memvektorkan fungsi tersebut. Fungsi tersebut sekarang akan berfungsi untuk vektor angka.

>f([1:5])

```
[0,  2.05045,  13.7251,  113.336,  1241.03]
```

Contoh soal

1. Butlah matriks yang berisi hasil dari perkalian 6x6

>shortest (1:6)*(1:6)'

```
     1      2      3      4      5      6
     2      4      6      8     10     12
     3      6      9     12     15     18
     4      8     12     16     20     24
     5     10     15     20     25     30
     6     12     18     24     30     36
```

2. Transpose kan matriks berikut

>S=[9,4,3;4,1,3;0,5,7]

```
            9             4             3
            4             1             3
            0             5             7
```

>S' // transpose dari matriks S

```
            9             4             0
            4             1             5
            3             3             7
```

3. Diketahui matriks D=[2,3,4;6,7,8;4,5,6]. Tentukan hasil dari

>D:=[2,3,4;6,7,8;4,5,6]; D.D'; %^2

```
          841          4225          2209
         4225         22201         11449
         2209         11449          5929
```

2.16 Sub-Matriks dan Elemen Matriks

Untuk mengakses elemen matriks, gunakan notasi tanda kurung.

>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9], A[2,2]

```
            1             2             3
            4             5             6
            7             8             9
5
```

Kita dapat mengakses baris matriks yang lengkap.

>A[2]

```
[4,  5,  6]
```

Dalam kasus vektor baris atau kolom, ini mengembalikan elemen vektor.

>v=1:3; v[2]

```
2
```

Untuk memastikan, Anda mendapatkan baris pertama untuk matriks 1xn dan mxn, tentukan semua kolom menggunakan indeks kedua yang kosong.

>A[2,]

```
[4,  5,  6]
```

Jika indeks adalah vektor indeks, Euler akan mengembalikan baris matriks yang sesuai.

Di sini kita menginginkan baris pertama dan kedua dari A.

```
              1              2              3
              4              5              6
```

Kita bahkan dapat menyusun ulang A menggunakan vektor indeks. Untuk lebih tepatnya, kita tidak mengubah A di sini, tetapi menghitung versi A yang telah disusun ulang.

```
              7              8              9
              4              5              6
              1              2              3
```

Trik indeks juga berfungsi dengan kolom.

Contoh ini memilih semua baris A dan kolom kedua dan ketiga.

>A[1:3,2:3]

```
              2              3
              5              6
              8              9
```

Untuk singkatan ":" menunjukkan semua indeks baris atau kolom.

>A[:,3]

```
              3
              6
              9
```

Atau, biarkan indeks pertama kosong.

>A[,2:3]

```
2          3
5          6
8          9
```

Kita juga bisa mendapatkan baris terakhir A.

>A[-1]

```
[7,  8,  9]
```

Sekarang mari kita ubah elemen A dengan menetapkan submatriks A ke suatu nilai. Hal ini sebenarnya mengubah matriks A yang tersimpan.

>A[1,1]=4

```
 4          2          3
 4          5          6
 7          8          9
```

Kita juga dapat menetapkan nilai ke baris A.

>A[1]=[-1,-1,-1]

```
-1         -1         -1
 4          5          6
 7          8          9
```

Kita bahkan dapat menetapkannya ke submatriks jika ukurannya tepat.

>A[1:2,1:2]=[5,6;7,8]

```
 5          6         -1
 7          8          6
 7          8          9
```

Selain itu, beberapa jalan pintas diperbolehkan.

>A[1:2,1:2]=0

```
 0          0         -1
 0          0          6
 7          8          9
```

Peringatan: Indeks yang tidak sesuai batas akan mengembalikan matriks kosong, atau pesan kesalahan, tergantung pada pengaturan sistem. Pesan kesalahan adalah standar. Namun, perlu diingat bahwa indeks negatif dapat digunakan untuk mengakses elemen matriks yang dihitung dari akhir.

>A[4]

```
Row index 4 out of bounds!
Error in:
A[4] ...
    ^
```

Contoh soal

Diketahui sebuah matriks

>A=[9,8,7;6,5,4;3,2,1]

```
          9           8           7
          6           5           4
          3           2           1
```

1. Apa elemen baris ke 3 kolom ke 1 dari matriks diatas?

>A[3,1]

```
3
```

2. Apa saja elemen elemen yang ada di baris pertama?

>A[1,]

```
[9,  8,  7]
```

3. Apa saja elemen elemen yang ada di kolom kedua?

>A[,2]

```
          8
          5
          2
```

4. Tukarkan baris ke 1 dan ke 3 dalam matriks A

```
          3           2           1
          6           5           4
          9           8           7
```

2.17 Sorting and Shuffling

Fungsi sort() mengurutkan vektor baris.

>sort([5,6,4,8,1,9])

```
[1,  4,  5,  6,  8,  9]
```

Seringkali perlu untuk mengetahui indeks vektor yang diurutkan dalam vektor asli. Ini dapat digunakan untuk menyusun ulang vektor lain dengan cara yang sama.

Mari kita acak sebuah vektor.

>v=shuffle(1:10)

```
[4,  5,  10,  6,  8,  9,  1,  7,  2,  3]
```

Indeks berisi urutan v yang tepat.

>{vs,ind}=sort(v); v[ind]

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Ini juga berlaku untuk vektor string.

>s=[“a”,“d”,“e”,“a”,“aa”,“e”]

```
a
d
e
a
aa
e
```

>{ss,ind}=sort(s); ss

```
a
a
aa
d
e
e
```

Seperti yang Anda lihat, posisi entri ganda agak acak.

>ind

```
[4,  1,  5,  2,  6,  3]
```

Fungsi unik mengembalikan daftar yang diurutkan dari elemen unik suatu vektor.

>intrandom(1,10,10), unique(%)

```
[4,  4,  9,  2,  6,  5,  10,  6,  5,  1]
[1,  2,  4,  5,  6,  9,  10]
```

Ini juga berlaku untuk vektor string.

>unique(s)

```
a
aa
d
e
```

2.18 Aljabar Linear

EMT memiliki banyak fungsi untuk memecahkan sistem linear, sistem sparse, atau masalah regresi.

Untuk sistem linear Ax=b, Anda dapat menggunakan algoritma Gauss, matriks invers, atau kecocokan linear. Operator Amenggunakan versi algoritma Gauss.

>A=[1,2;3,4]; b=[5;6]; A\b

```
           -4
          4.5
```

Untuk contoh lain, kita buat matriks 200x200 dan jumlah barisnya. Kemudian kita selesaikan Ax=b menggunakan matriks invers. Kita ukur kesalahan sebagai deviasi maksimal semua elemen dari 1, yang tentu saja merupakan solusi yang benar.

>A=normal(200,200); b=sum(A); longest totalmax(abs(inv(A).b-1))

```
  8.790745908981989e-13
```

Jika sistem tidak mempunyai solusi, penyesuaian linier meminimalkan norma kesalahan Ax-b.

>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Determinan matriks ini adalah 0.

>det(A)

```
0
```

2.19 Symbolic Matrices

Maxima memiliki matriks simbolik. Tentu saja, Maxima dapat digunakan untuk masalah aljabar linear sederhana tersebut. Kita dapat mendefinisikan matriks untuk Euler dan Maxima dengan &:=, lalu menggunakannya dalam ekspresi simbolik. Bentuk [...] yang biasa digunakan untuk mendefinisikan matriks dapat digunakan dalam Euler untuk mendefinisikan matriks simbolik.

>A &= [a,1,1;1,a,1;1,1,a]; $A

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

>$&det(A), $&factor(%)

$$a\,\left(a^2-1\right)-2\,a+2$$

$$\left(a-1\right)^2\,\left(a+2\right)$$

>$&invert(A) with a=0

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

>A &= [1,a;b,2]; $A

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Seperti semua variabel simbolik, matriks ini dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

>$&det(A-x*ident(2)), $&solve(%,x)

$$\left(1-x\right)\,\left(2-x\right)-a\,b$$

$$\left[x=\frac{3-\sqrt{4\,a\,b+1}}{2}, x=\frac{\sqrt{4\,a\,b+1}+3}{2}\right]$$

Nilai eigen juga dapat dihitung secara otomatis. Hasilnya adalah vektor dengan dua vektor nilai eigen dan multiplisitas.

>$&eigenvalues([a,1;1,a])

$$[[a-1,a+1]\,,[1,1]]$$

Untuk mengekstrak vektor eigen tertentu dibutuhkan pengindeksan yang cermat.

>$&eigenvectors([a,1;1,a]), &%[2][1][1]

$$[[[a-1,a+1]\,,[1,1]]\,,[[[1,-1]]\,,[[1,1]]]]$$

[1, - 1]

Matriks simbolik dapat dievaluasi dalam Euler secara numerik seperti ekspresi simbolik lainnya.

>A(a=4,b=5)

```
1                 4
5                 2
```

Dalam ekspresi simbolik, gunakan dengan.

>$&A with [a=4,b=5]

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

Akses terhadap baris matriks simbolik bekerja seperti halnya matriks numerik.

>$&A[1]

$$[1,a]$$

Ekspresi simbolik dapat berisi sebuah penugasan. Dan itu mengubah matriks A.

>&A[1,1]:=t+1; $&A

$$\begin{pmatrix}t+1 & a\\ b & 2\end{pmatrix}$$

Maxima memiliki fungsi simbolis untuk membuat vektor dan matriks. Untuk itu, lihat dokumentasi Maxima atau tutorial tentang Maxima di EMT.

>v &= makelist(1/(i+j),i,1,3); $v

$$\left[\frac{1}{j+1},\frac{1}{j+2},\frac{1}{j+3}\right]$$

>B &:= [1,2;3,4]; $B, $&invert(B)

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Hasilnya dapat dievaluasi secara numerik di Euler. Untuk informasi lebih lanjut tentang Maxima, lihat pengantar Maxima.

>$&invert(B)()

```
                 -2                  1
                1.5               -0.5
```

Euler juga memiliki fungsi xinv() yang hebat, yang melakukan upaya lebih besar dan mendapatkan hasil yang lebih tepat.

Perlu dicatat, bahwa dengan &:= matriks B telah didefinisikan sebagai simbolik dalam ekspresi simbolik dan sebagai numerik dalam ekspresi numerik. Jadi kita dapat menggunakannya di sini.

>longest B.xinv(B)

```
                  1                      0
                  0                      1
```

Misalnya nilai eigen A dapat dihitung secara numerik.

>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; real(eigenvalues(A))

```
[16.1168,  -1.11684,  0]
```

Atau secara simbolis. Lihat tutorial tentang Maxima untuk detailnya.

>$&eigenvalues(**(A?)**)

$$\left[\left[\frac{15-3\sqrt{33}}{2},\frac{3\sqrt{33}+15}{2},0\right],[1,1,1]\right]$$

Contoh soal

1. Tentukan determinan dari matriks berikut

>A &= [1,-5,-8;6,4,-2;-3,0,7]; $A

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -8 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

>$&det(A)

$$112$$

2. Tentukan determinan matriks G

>G &= [1,-6,0;-3,2,0;0,5,9]; $G

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

>$&det(G)

$$-144$$

3. Tentukan determinan dari matriks berikut

>D &= [-8]; $D

$$[-8]$$

>$&det(D)

$$-8$$

4. Tentukan determinan dari matriks L

>L &= [5,a,6;9,a,4;a,5,1]; $L

$$\begin{pmatrix} 5 & a & 6 \\ 9 & a & 4 \\ a & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

>$&det(L), $factor(%)

$$6\left(45-a^2\right)-(9-4\,a)\,a+5\,(a-20)$$
$$-2\left(a^2+2\,a-85\right)$$

2.20 Nilai Numerik dalam Ekspresi Simbolik

Ekspresi simbolik hanyalah string yang berisi ekspresi. Jika kita ingin menentukan nilai untuk ekspresi simbolik dan ekspresi numerik, kita harus menggunakan "&:=".

>A &:= [1,pi;4,5]

```
                1         3.14159
                4               5
```

Masih terdapat perbedaan antara bentuk numerik dan bentuk simbolik. Saat mengubah matriks ke bentuk simbolik, pendekatan pecahan untuk bilangan riil akan digunakan.

>$&A

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1146408}{364913}\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

Untuk menghindari hal ini, ada fungsi "mxmset(variabel)".

>mxmset(A); $&A

$$\begin{pmatrix}1 & 3.141592653589793\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

Maxima juga dapat melakukan komputasi dengan angka floating point, dan bahkan dengan angka floating point besar dengan 32 digit. Namun, evaluasinya jauh lebih lambat.

>$&bfloat(sqrt(2)), $&float(sqrt(2))

$$1.4142135623730950488016887242097_B \times 10^0$$

$$1.414213562373095$$

Ketepatan angka floating point besar dapat diubah.

>&fpprec:=100; &bfloat(pi)

```
        3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\
4592307816406286208998628034825342117068b0
```

Variabel numerik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik apa pun menggunakan “(**var?**)”.

Perlu dicatat bahwa ini hanya diperlukan jika variabel telah didefinisikan dengan “:=” atau “=” sebagai variabel numerik.

>B:=[1,pi;3,4]; $&det((**B?**))

$$-5.424777960769379$$

2.21 Demo - Interest Rates

Di bawah ini, kami menggunakan Euler Math Toolbox (EMT) untuk menghitung suku bunga. Kami melakukannya secara numerik dan simbolis untuk menunjukkan kepada Anda bagaimana Euler dapat digunakan untuk memecahkan masalah kehidupan nyata.

Asumsikan Anda memiliki modal awal sebesar 5000 (misalnya dalam dolar).

>K=5000

```
5000
```

Sekarang kita asumsikan suku bunga 3% per tahun. Mari kita tambahkan satu suku bunga sederhana dan hitung hasilnya.

>K*1.03

```
5150
```

Euler juga akan memahami sintaksis berikut.

>K+K*3%

```
5150
```

Namun lebih mudah menggunakan faktor.

>q=1+3%, K*q

```
1.03
5150
```

Selama 10 tahun, kita cukup mengalikan faktor-faktornya dan mendapatkan nilai akhir dengan suku bunga majemuk.

>K*q^10

```
6719.58189672
```

Untuk keperluan kita, kita dapat mengatur format menjadi 2 digit setelah titik desimal.

>format(12,2); K*q^10

```
    6719.58
```

Mari kita cetak angka tersebut dibulatkan menjadi 2 digit dalam kalimat lengkap.

>“Starting from” + K + “$ you get” + round(K*q^10,2) + “$.”

```
Starting from 5000$ you get 6719.58$.
```

Bagaimana jika kita ingin mengetahui hasil antara dari tahun 1 hingga tahun 9? Untuk ini, bahasa matriks Euler sangat membantu. Anda tidak perlu menulis loop, tetapi cukup masukkan.

>K*q^(0:10)

```
Real 1 x 11 matrix

    5000.00     5150.00     5304.50     5463.64     ...
```

Bagaimana keajaiban ini bekerja? Pertama, ekspresi 0:10 menghasilkan vektor bilangan bulat.

>short 0:10

```
[0,  1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Maka semua operator dan fungsi di Euler dapat diaplikasikan ke vektor elemen demi elemen. Jadi

>short q^(0:10)

```
[1,  1.03,  1.0609,  1.0927,  1.1255,  1.1593,  1.1941,  1.2299,
1.2668,  1.3048,  1.3439]
```

adalah vektor faktor q^0 hingga q^10. Ini dikalikan dengan K, dan kita memperoleh vektor nilai.

>VK=K*q^(0:10);

Tentu saja, cara realistis untuk menghitung suku bunga ini adalah dengan membulatkannya ke sen terdekat setelah setiap tahun. Mari kita tambahkan fungsi untuk ini.

>function oneyear (K) := round(K*q,2)

Mari kita bandingkan kedua hasil, dengan dan tanpa pembulatan.

>longest oneyear(1234.57), longest 1234.57*q

```
              1271.61
             1271.6071
```

Sekarang tidak ada rumus sederhana untuk tahun ke-n, dan kita harus mengulangnya selama bertahun-tahun. Euler menyediakan banyak solusi untuk ini.

Cara termudah adalah fungsi iterate, yang mengulang fungsi yang diberikan beberapa kali.

>VKr=iterate("oneyear",5000,10)

```
Real 1 x 11 matrix

    5000.00     5150.00     5304.50     5463.64     ...
```

Kita dapat mencetaknya dengan cara yang ramah, menggunakan format kami dengan tempat desimal tetap.

>VKr'

```
    5000.00
    5150.00
    5304.50
    5463.64
    5627.55
    5796.38
    5970.27
    6149.38
    6333.86
    6523.88
    6719.60
```

Untuk mendapatkan elemen vektor tertentu, kita menggunakan indeks dalam tanda kurung siku.

>VKr[2], VKr[1:3]

```
    5150.00
    5000.00     5150.00     5304.50
```

Anehnya, kita juga dapat menggunakan vektor indeks. Ingat bahwa 1:3 menghasilkan vektor [1,2,3].

Mari kita bandingkan elemen terakhir dari nilai yang dibulatkan dengan nilai penuh.

>VKr[-1], VK[-1]

```
    6719.60
    6719.58
```

Perbedaannya sangat kecil.

2.22 Memecahkan Persamaan

Sekarang kita ambil fungsi yang lebih maju, yang menambahkan jumlah uang tertentu setiap tahun.

>function onepay (K) := K*q+R

Kita tidak perlu menentukan q atau R untuk definisi fungsi. Hanya jika kita menjalankan perintah, kita harus menentukan nilai-nilai ini. Kita pilih R=200.

>R=200; iterate("onepay",5000,10)

```
Real 1 x 11 matrix

    5000.00     5350.00     5710.50     6081.82     ...
```

Bagaimana jika kita menghilangkan jumlah yang sama setiap tahun?

>R=-200; iterate("onepay",5000,10)

```
Real 1 x 11 matrix

    5000.00     4950.00     4898.50     4845.45     ...
```

Kita melihat bahwa uang berkurang. Jelas, jika kita hanya memperoleh bunga sebesar 150 pada tahun pertama, tetapi mengurangi 200, kita akan kehilangan uang setiap tahun.

Bagaimana kita dapat menentukan berapa tahun uang tersebut akan bertahan? Kita harus menulis sebuah loop untuk ini. Cara termudah adalah dengan melakukan iterasi yang cukup lama.

>VKR=iterate("onepay",5000,50)

```
Real 1 x 51 matrix

    5000.00     4950.00     4898.50     4845.45     ...
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menentukan nilai negatif pertama dengan cara berikut.

```
>min(nonzeros(VKR<0))
```

```
48.00
```

Alasannya adalah nonzeros(VKR<0) mengembalikan vektor indeks i, di mana VKR[i]<0, dan min menghitung indeks minimal.

Karena vektor selalu dimulai dengan indeks 1, jawabannya adalah 47 tahun.

Fungsi iterate() memiliki satu trik lagi. Fungsi ini dapat mengambil kondisi akhir sebagai argumen. Kemudian, fungsi ini akan mengembalikan nilai dan jumlah iterasi.

```
>{x,n}=iterate(“onepay”,5000,till=“x<0”); x, n,
```

```
-19.83
 47.00
```

Mari kita coba menjawab pertanyaan yang lebih ambigu. Asumsikan kita tahu bahwa nilainya adalah 0 setelah 50 tahun. Berapa tingkat bunganya?

Ini adalah pertanyaan yang hanya dapat dijawab secara numerik. Di bawah ini, kita akan memperoleh rumus yang diperlukan. Kemudian Anda akan melihat bahwa tidak ada rumus yang mudah untuk tingkat bunga. Namun untuk saat ini, kita bertujuan untuk mencari solusi numerik.

Langkah pertama adalah mendefinisikan fungsi yang melakukan iterasi sebanyak n kali. Kita menambahkan semua parameter ke fungsi ini.

```
>function f(K,R,P,n) := iterate(“x*(1+P/100)+R”,K,n;P,R)[-1]
```

Iterasinya sama seperti di atas

Namun, kita tidak lagi menggunakan nilai global R dalam ekspresi kita. Fungsi seperti iterate() memiliki trik khusus di Euler. Anda dapat meneruskan nilai variabel dalam ekspresi sebagai parameter titik koma. Dalam kasus ini, P dan R.

Selain itu, kita hanya tertarik pada nilai terakhir. Jadi, kita ambil indeks [-1].

Mari kita coba uji coba.

```
>f(5000,-200,3,47)
```

```
-19.83
```

Sekarang kita bisa memecahkan masalah kita.

```
>solve(“f(5000,-200,x,50)”,3)
```

```
3.15
```

Rutin solve menyelesaikan ekspresi=0 untuk variabel x. Jawabannya adalah 3,15% per tahun. Kita ambil nilai awal 3% untuk algoritma tersebut. Fungsi solve() selalu membutuhkan nilai awal.

Kita dapat menggunakan fungsi yang sama untuk menyelesaikan pertanyaan berikut: Berapa banyak yang dapat kita hapus per tahun sehingga modal awal habis setelah 20 tahun dengan asumsi suku bunga 3% per tahun.

>solve("f(5000,x,3,20)",-200)

```
-336.08
```

Perhatikan bahwa Anda tidak dapat menghitung jumlah tahun, karena fungsi kami mengasumsikan n sebagai nilai integer.

2.23 Solusi Simbolis untuk Masalah Suku Bunga

Kita dapat menggunakan bagian simbolik Euler untuk mempelajari masalah ini. Pertama, kita mendefinisikan fungsi onepay() secara simbolis.

>function op(K) &= K*q+R; $&op(K)

$$R + q\,K$$

Sekarang kita dapat mengulanginya.

>$&op(op(op(op(K)))), $&expand(%)

$$q\,\left(q\,\left(q\,\left(R+q\,K\right)+R\right)+R\right)+R$$

$$q^3\,R+q^2\,R+q\,R+R+q^4\,K$$

Kita melihat suatu pola. Setelah n periode kita memiliki

Rumus tersebut adalah rumus jumlah geometri yang diketahui oleh Maxima.

>&sum(q^k,k,0,n-1); $& % = ev(%,simpsum)

$$\sum_{k=0}^{n-1}{q^{k}}=\frac{q^{n}-1}{q-1}$$

Ini agak rumit. Jumlahnya dievaluasi dengan tanda "simpsum" untuk mereduksinya menjadi hasil bagi.

Mari kita buat fungsi untuk ini.

>function fs(K,R,P,n) &= (1+P/100)^n*K + ((1+P/100)^n-1)/(P/100)*R; $&fs(K,R,P,n)

$$\frac{100\,\left(\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}-1\right)\,R}{P}+K\,\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}$$

Fungsi ini melakukan hal yang sama seperti fungsi f sebelumnya. Namun, fungsinya lebih efektif.

>longest f(5000,-200,3,47), longest fs(5000,-200,3,47)

```
-19.82504734650985
-19.82504734652684
```

Kita sekarang dapat menggunakannya untuk menanyakan waktu n. Kapan modal kita habis? Perkiraan awal kita adalah 30 tahun.

>solve("fs(5000,-330,3,x)",30)

```
20.51
```

Jawaban ini menyatakan bahwa akan negatif setelah 21 tahun.

Kita juga dapat menggunakan sisi simbolik Euler untuk menghitung rumus pembayaran.

Asumsikan kita mendapatkan pinjaman sebesar K, dan membayar n kali cicilan sebesar R (dimulai setelah tahun pertama) sehingga menyisakan utang residual sebesar Kn (pada saat pembayaran terakhir). Rumus untuk ini jelas

>equ &= fs(K,R,P,n)=Kn; $&equ

$$\frac{100\,\left(\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}-1\right)\,R}{P}+K\,\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}=Kn$$

Biasanya rumus ini diberikan dalam bentuk

>equ &= (equ with P=100*i); $&equ

$$\frac{\left((i+1)^{n}-1\right)\,R}{i}+(i+1)^{n}\,K=Kn$$

Kita dapat mencari laju R secara simbolis.

>$&solve(equ,R)

$$\left[R=\frac{i\,Kn-i\,(i+1)^{n}\,K}{(i+1)^{n}-1}\right]$$

Seperti yang dapat Anda lihat dari rumus, fungsi ini mengembalikan kesalahan floating point untuk i=0. Namun, Euler memplotnya.

Tentu saja, kita memiliki limit berikut.

>$&limit(R(5000,0,x,10),x,0)

$$\lim_{x \to 0} R\left(5000, 0, x, 10\right)$$

Jelas, tanpa bunga, kita harus membayar kembali 10 suku bunga sebesar 500.

Persamaan ini juga dapat diselesaikan untuk n. Akan terlihat lebih bagus jika kita menerapkan beberapa penyederhanaan.

>fn &= solve(equ,n) | ratsimp; $&fn

$$\left[n = \frac{\log\left(\frac{R+i\,K\,n}{R+i\,K}\right)}{\log\left(i+1\right)}\right]$$

BAB III

MENGGAMBAR GRAFIK 2D DENGAN EMT

Notebook ini menjelaskan tentang cara menggambar berbagaikurva dan grafik 2D dengan software EMT. EMT menyediakan fungsi plot2d() untuk menggambar berbagai kurva dan grafik dua dimensi (2D).

3.1 Plot Dasar

Ada beberapa fungsi dasar plot. Ada koordinat layar, yang selalu berkisar dari 0 hingga 1024 di setiap sumbu, tidak peduli apakah layarnya persegi atau tidak. Selain itu, ada koordinat plot, yang dapat diatur dengan setplot(). Pemetaan antara koordinat bergantung pada jendela plot saat ini. Misalnya, shrinkwindow() default menyisakan ruang untuk label sumbu dan judul plot.

Dalam contoh, kita hanya menggambar beberapa garis acak dalam berbagai warna. Untuk detail tentang fungsi-fungsi ini, pelajari fungsi inti EMT.

```
>clg; // kosongkan layar

>window(0,0,1024,1024); // gunakan semua jendela

>setplot(0,1,0,1); // mengatur koordinat plot

>hold on; // mulai mode penimpaan

>n=100; X=random(n,2); Y=random(n,2); // membuat koordinat acak

>colors=rgb(random(n),random(n),random(n)); // dapatkan warna acak

>loop 1 to n; color(colors[#]); plot(X[#],Y[#]); end; // plot

>hold off; // akhir mode penimpaan

>insimg; // masukan ke notebook

>reset;
```

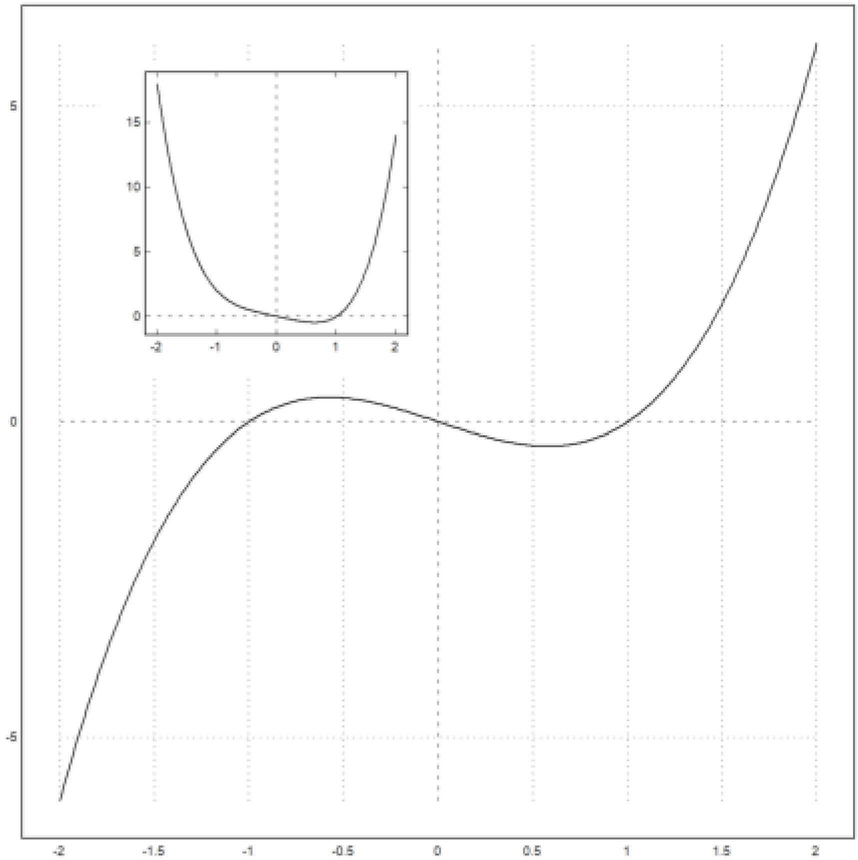
Grafik perlu ditahan, karena perintah plot() akan membersihkan jendela plot.

Untuk membersihkan semua yang telah kita lakukan, kita menggunakan reset().

Untuk menampilkan gambar hasil plot di layar notebook, perintah plot2d() dapat diakhiri dengan titik dua (:). Cara lainnya adalah perintah plot2d() diakhiri dengan titik koma (;), kemudian menggunakan perintah insimg() untuk menampilkan gambar hasil plot.

Sebagai contoh lain, kita menggambar plot sebagai inset di plot lain. Ini dilakukan dengan

Gambar 3.1 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-001.png



Gambar 3.2 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-002.png

mendefinisikan jendela plot yang lebih kecil. Perhatikan bahwa jendela ini tidak menyediakan ruang untuk label sumbu di luar jendela plot. Kita harus menambahkan beberapa margin untuk ini yang sesuai kebutuhan. Perhatikan bahwa kita menyimpan dan memulihkan jendela penuh, dan menahan plot saat ini saat kita memplot inset.

>plot2d("x^3-x");

>xw=200; yw=100; ww=300; hw=300;

>ow=window();

>window(xw,yw,xw+ww,yw+hw);

>hold on;

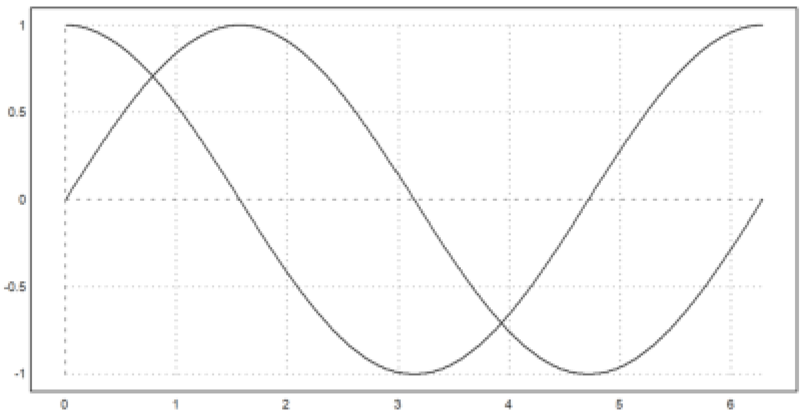
>barclear(xw-50,yw-10,ww+60,ww+60);

>plot2d("x^4-x",grid=6):

>hold off;

>window(ow);

Plot dengan beberapa gambar dibuat dengan cara yang sama. Ada fungsi utilitas figure() untuk ini.



Gambar 3.3 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-003.png

3.2 Aspek Plot

Plot default menggunakan jendela plot persegi. Anda dapat mengubahnya dengan fungsi aspect(). Jangan lupa untuk mengatur ulang aspect nanti. Anda juga dapat mengubah default ini di menu dengan “Set Aspect” ke rasio aspek tertentu atau ke ukuran jendela grafik saat ini.

Namun, Anda juga dapat mengubahnya untuk satu plot. Untuk ini, ukuran area plot saat ini diubah, dan jendela diatur sehingga label memiliki cukup ruang.

>aspect(2); // rasio panjang dan lebar 2:1

>plot2d([“sin(x)”,“cos(x)”],0,2pi):

>aspect();

>reset;

Fungsi reset() mengembalikan pengaturan plot default termasuk rasio aspek.

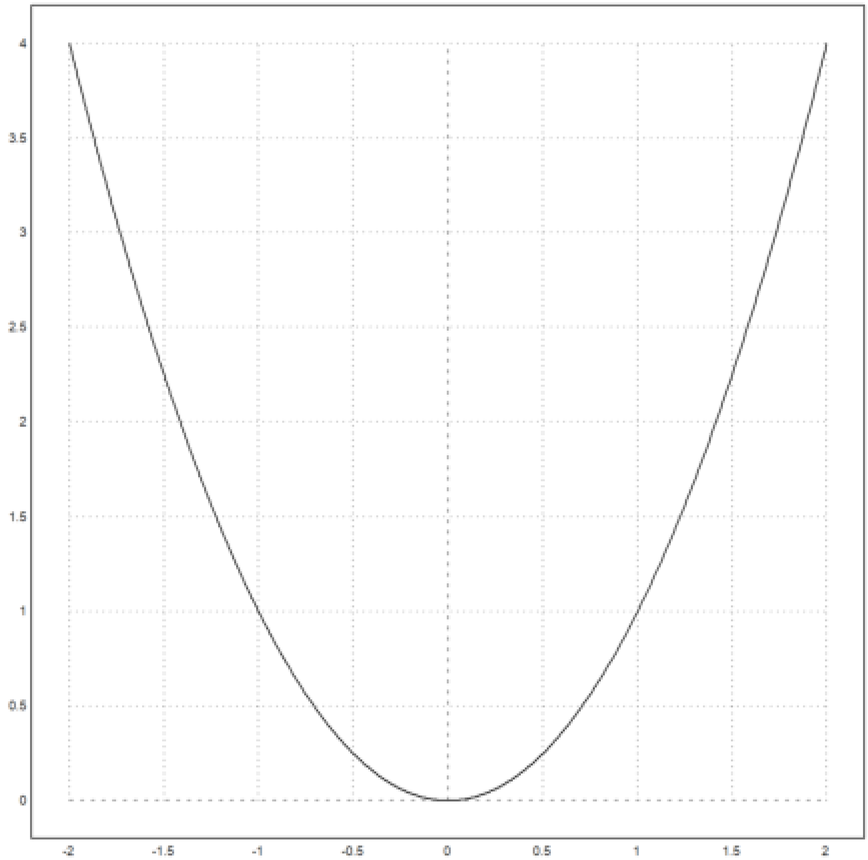
3.3 Plot 2D di Euler

EMT Math Toolbox memiliki plot dalam 2D, baik untuk data maupun fungsi. EMT menggunakan fungsi plot2d. Fungsi ini dapat memplot fungsi dan data.

Anda dapat memplot dalam Maxima menggunakan Gnuplot atau dalam Python menggunakan Math Plot Lib.

Euler dapat memplot plot 2D dari 1. ekspresi fungsi, variabel, atau kurva berparameter, 2. vektor nilai x-y, 3. awan titik dalam bidang, 4. kurva implisit dengan level atau daerah level. 5. Fungsi kompleks

Gaya plot mencakup berbagai gaya untuk garis dan titik, plot batang, dan plot berbayang.



Gambar 3.4 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-004.png

3.4 Plot Ekspresi atau Variabel

Ekspresi tunggal dalam "x" (misalnya "4*x^2") atau nama fungsi (misalnya "f") menghasilkan grafik fungsi.

Berikut adalah contoh paling dasar, yang menggunakan rentang default dan menetapkan rentang y yang tepat agar sesuai dengan plot fungsi.

Catatan: Jika Anda mengakhiri baris perintah dengan titik dua ":", plot akan disisipkan ke dalam jendela teks. Jika tidak, tekan TAB untuk melihat plot jika jendela plot tertutup.

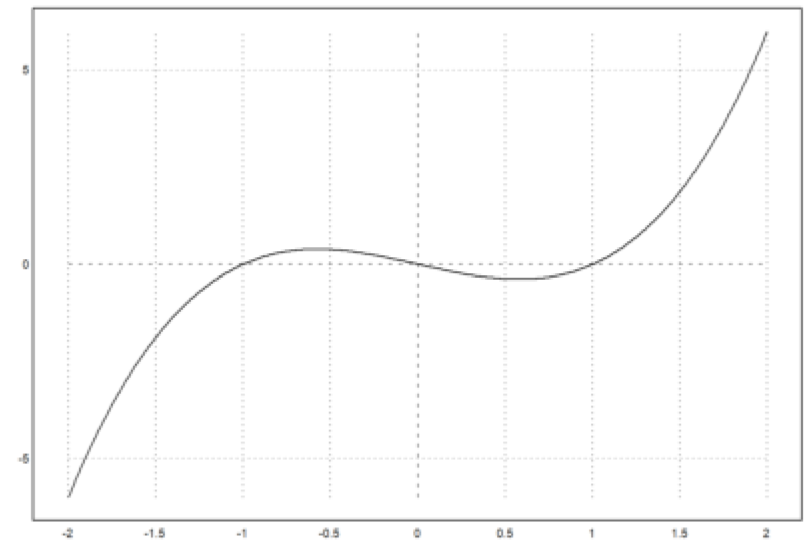
>plot2d("x^2"):

>aspect(1.5); plot2d("x^3-x"):

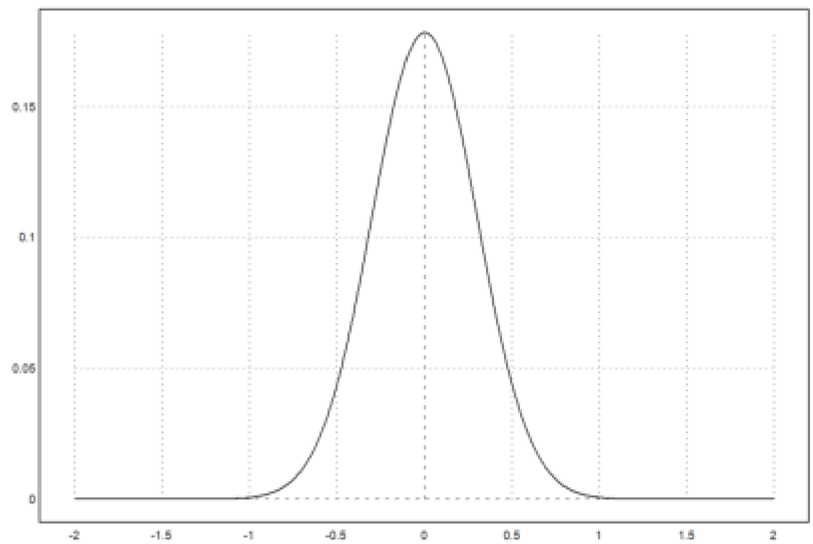
>a:=5.6; plot2d("exp(-a*x^2)/a"); insimg(30); // menampilkan gambar hasil plot setinggi 25 baris

Dari beberapa contoh sebelumnya Anda dapat melihat bahwa aslinya gambar plot menggunakan sumbu X dengan rentang nilai dari -2 sampai dengan 2. Untuk mengubah rentang nilai X dan Y, Anda dapat menambahkan nilai-nilai batas X (dan Y) di belakang ekspresi yang digambar.

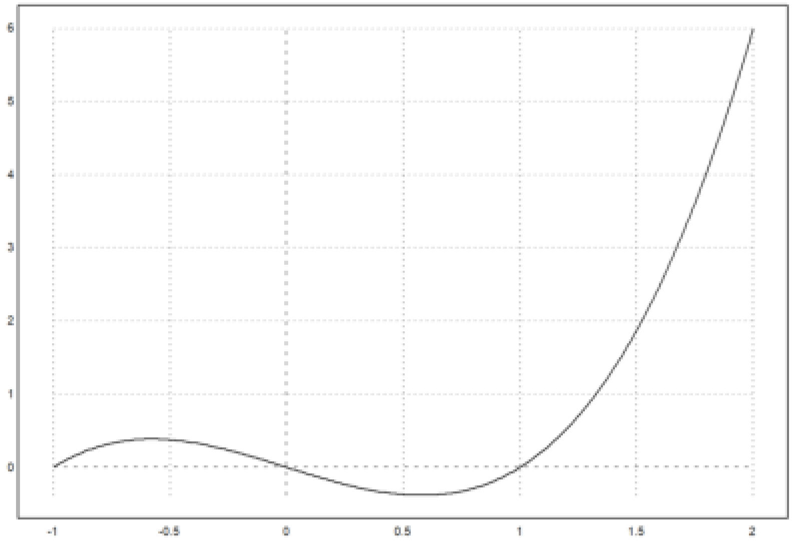
Rentang plot ditetapkan dengan parameter yang ditetapkan berikut



Gambar 3.5 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-005.png



Gambar 3.6 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-006.png



Gambar 3.7 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-007.png

- a,b: rentang x (default -2,2)
- c,d: rentang y (default: skala dengan nilai)
- r: alternatifnya radius di sekitar pusat plot
- cx,cy: koordinat pusat plot (default 0,0)
- cx,cy: the coordinates of the plot center (default 0,0)

>plot2d("x^3-x",-1,2):

>plot2d("sin(x)",-2*pi,2*pi): // plot sin(x) pada interval [-2pi, 2pi]

>plot2d("cos(x)","sin(3*x)",xmin=0,xmax=2pi):

Alternatif untuk titik dua adalah perintah insimg(lines), yang menyisipkan plot yang menempati sejumlah baris teks tertentu.

Dalam opsi, plot dapat diatur agar muncul + di jendela terpisah yang dapat diubah ukurannya, + di jendela buku catatan.

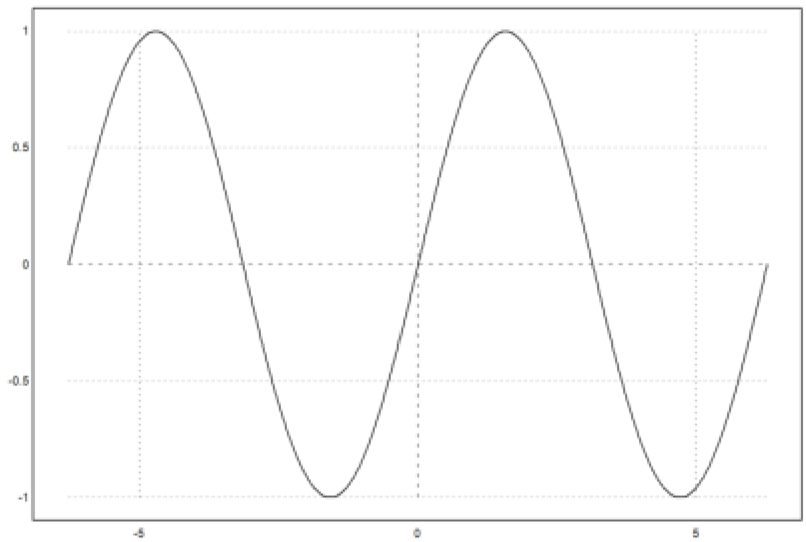
Lebih banyak gaya dapat dicapai dengan perintah plot tertentu.

Dalam kasus apa pun, tekan tombol tabulator untuk melihat plot, jika disembunyikan.

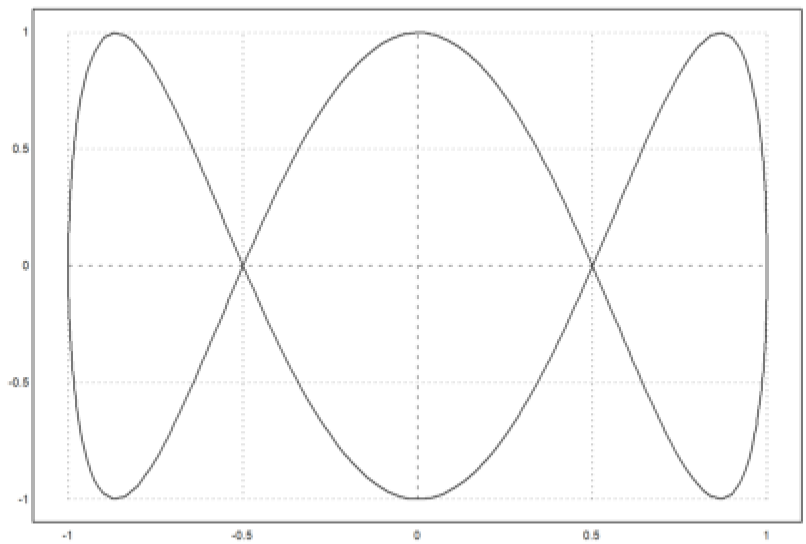
Untuk membagi jendela menjadi beberapa plot, gunakan perintah figure(). Dalam contoh, kita memplot x^1 hingga x^4 menjadi 4 bagian jendela. figure(0) mengatur ulang jendela default.

>reset;

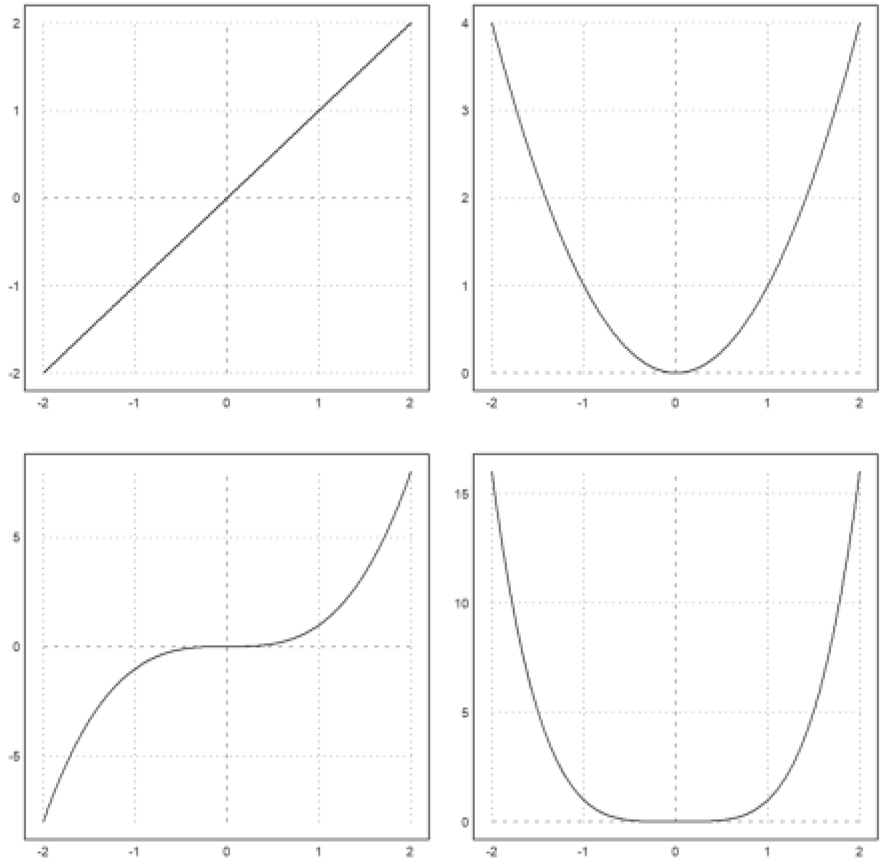
>figure(2,2); . . .
> for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^"+n); end; . . .



Gambar 3.8 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-008.png



Gambar 3.9 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-009.png



Gambar 3.10 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-010.png

> figure(0):

Dalam plot2d(), tersedia gaya alternatif dengan grid=x. Sebagai gambaran umum, kami menampilkan berbagai gaya grid dalam satu gambar (lihat di bawah untuk perintah figure()). Gaya grid=0 tidak disertakan. Gaya ini tidak menampilkan grid dan bingkai.

>figure(3,3); . . .
> for k=1:9; figure(k); plot2d("x^3-x",-2,1,grid=k); end; . . .
> figure(0):

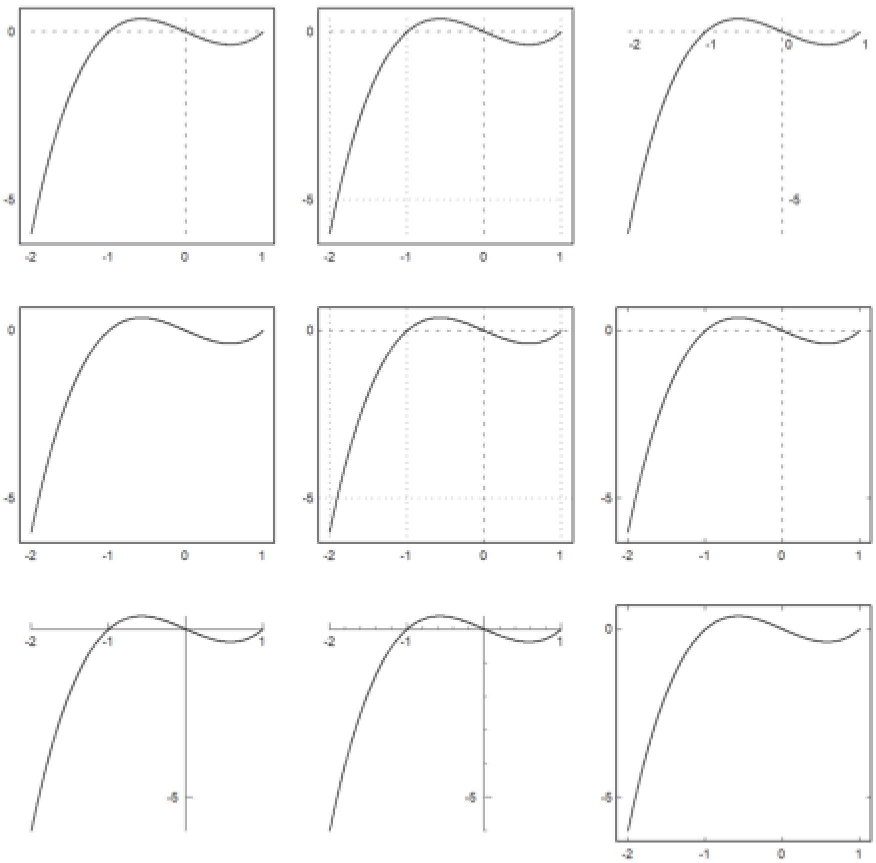
Jika argumen untuk plot2d() adalah ekspresi yang diikuti oleh empat angka, angka-angka ini adalah rentang x dan y untuk plot.

Atau, a, b, c, d dapat ditetapkan sebagai parameter yang ditetapkan sebagai a=. . . dst.

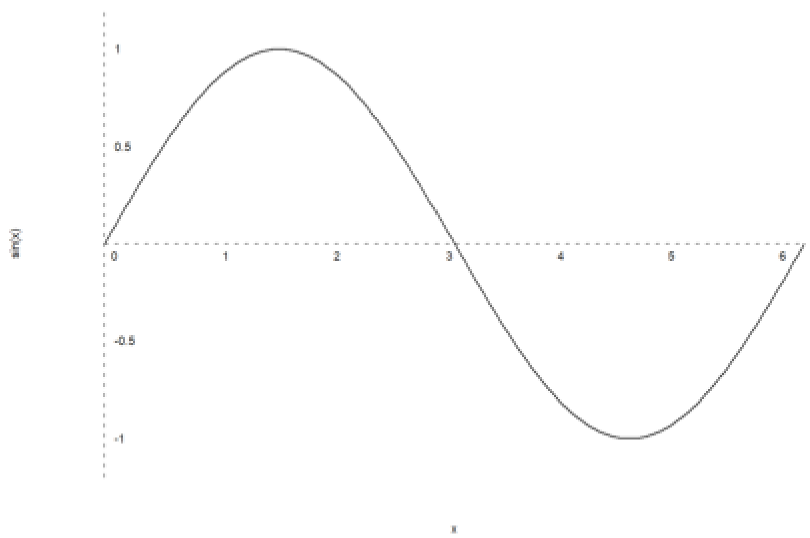
Dalam contoh berikut, kami mengubah gaya kisi, menambahkan label, dan menggunakan label vertikal untuk sumbu y.

>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi,-1.2,1.2,grid=3,xl="x",yl="sin(x)"):

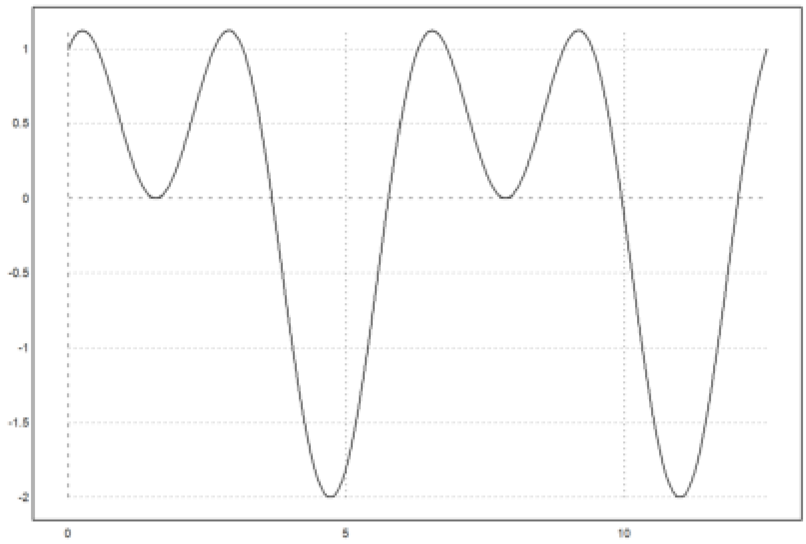
>plot2d("sin(x)+cos(2*x)",0,4pi):



Gambar 3.11 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-011.png



Gambar 3.12 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-012.png



Gambar 3.13 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-013.png

Gambar yang dihasilkan dengan memasukkan plot ke dalam jendela teks disimpan dalam direktori yang sama dengan buku catatan, secara default dalam subdirektori bernama “images”. Gambar tersebut juga digunakan oleh ekspor HTML.

Anda cukup menandai gambar apa pun dan menyalinnya ke clipboard dengan Ctrl-C. Tentu saja, Anda juga dapat mengekspor grafik saat ini dengan fungsi-fungsi di menu File.

Fungsi atau ekspresi dalam plot2d dievaluasi secara adaptif. Untuk kecepatan lebih, matikan plot adaptif dengan <adaptive dan tentukan jumlah subinterval dengan n=... Ini hanya diperlukan dalam kasus yang jarang terjadi.

>plot2d(“sign(x)*exp(-x^2)”,-1,1,<adaptive,n=10000):

>plot2d(“x^x”,r=1.2,cx=1,cy=1):

Perhatikan bahwa x^x tidak didefinisikan untuk x<=0. Fungsi plot2d menangkap kesalahan ini, dan mulai memplot segera setelah fungsi didefinisikan. Ini berfungsi untuk semua fungsi yang mengembalikan NAN di luar rentang definisinya.

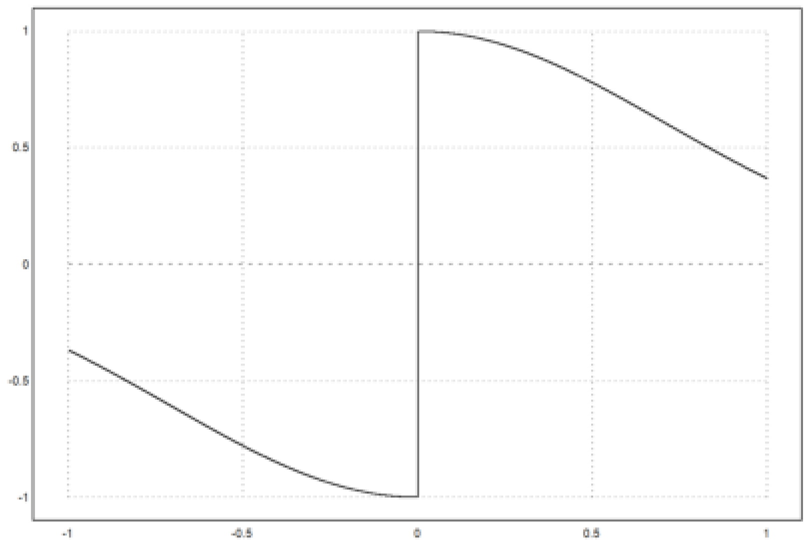
>plot2d(“log(x)”,-0.1,2):

Parameter square=true (atau >square) memilih rentang y secara otomatis sehingga hasilnya adalah jendela plot persegi. Perhatikan bahwa secara default, Euler menggunakan ruang persegi di dalam jendela plot.

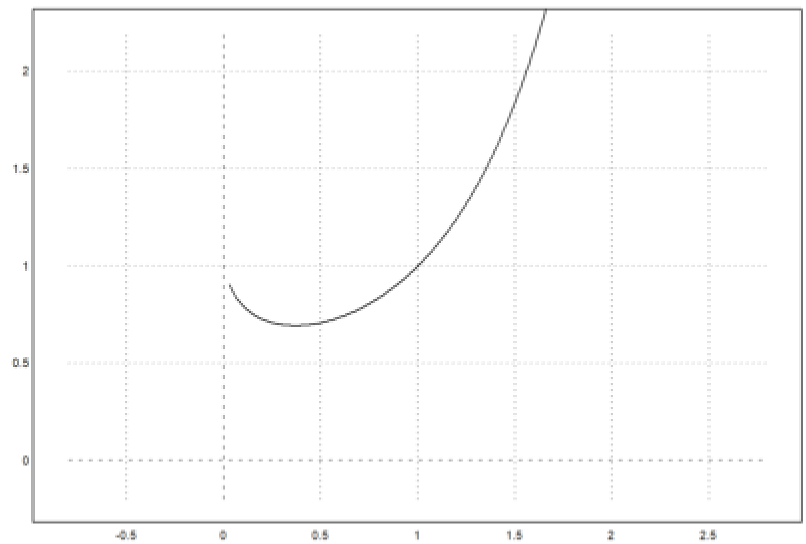
>plot2d(“x^3-x”,>square):

>plot2d(‘’integrate(“sin(x)*exp(-x^2)”,0,x)’ ’,0,2): // plot integral

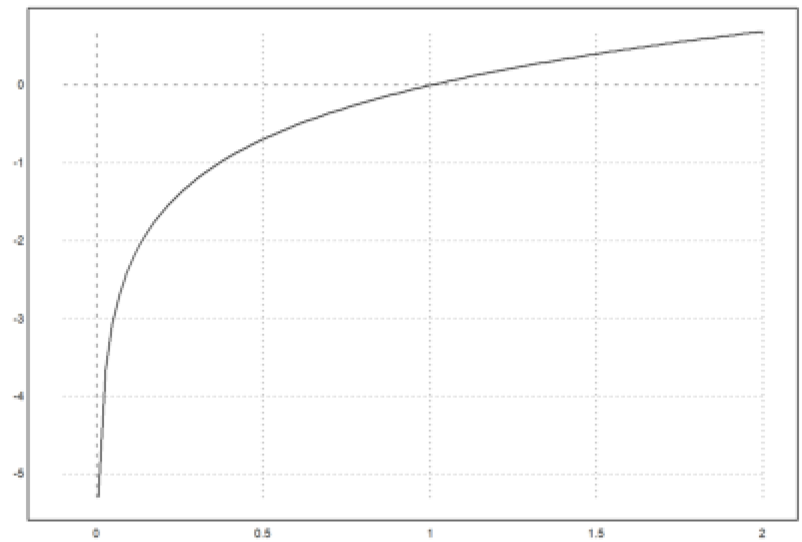
Jika Anda memerlukan lebih banyak ruang untuk label-y, panggil shrinkwindow() dengan parameter yang lebih kecil, atau tetapkan nilai positif untuk “lebih kecil” di plot2d().



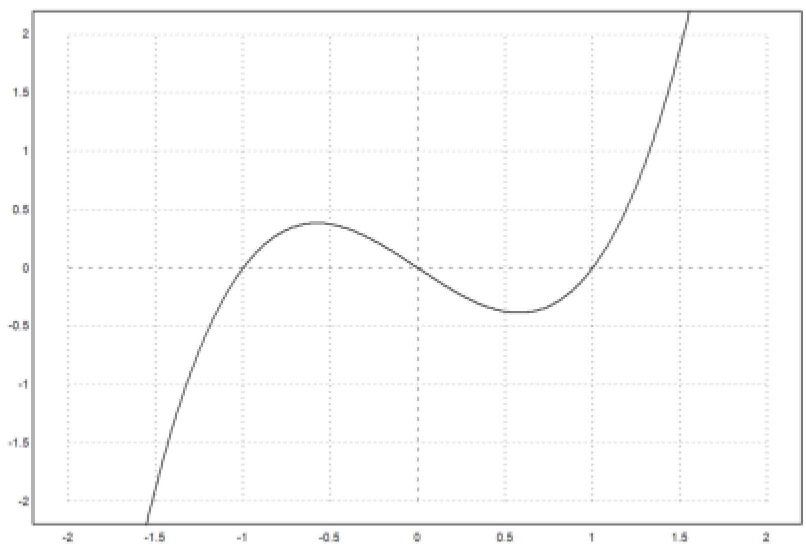
Gambar 3.14 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-014.png



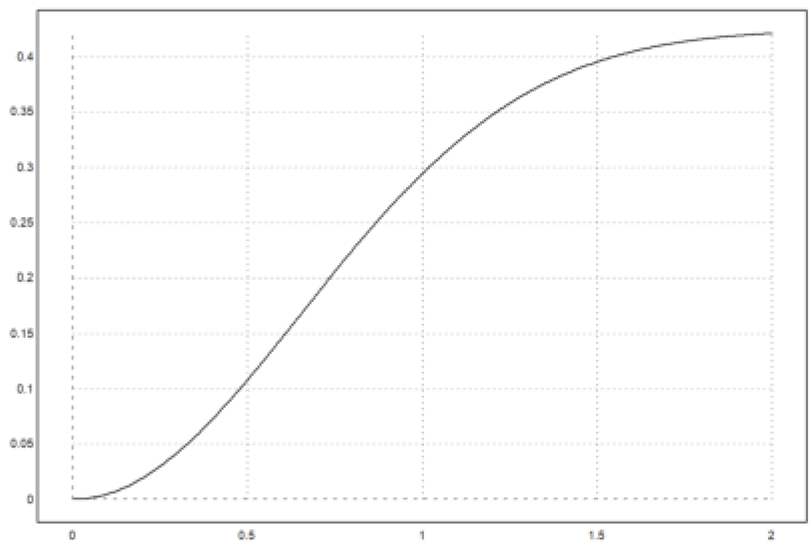
Gambar 3.15 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-015.png



Gambar 3.16 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-016.png



Gambar 3.17 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-017.png



Gambar 3.18 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-018.png

>plot2d("gamma(x)",1,10,yl="y-values",smaller=6,<vertical):

Ekspresi simbolik juga dapat digunakan, karena disimpan sebagai ekspresi string sederhana.

>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(5x),cos(7x)):

>a:=5.6; expr &= exp(-a*x^2)/a; // define expression

>plot2d(expr,-2,2): // plot from -2 to 2

>plot2d(expr,r=1,thickness=2): // plot in a square around (0,0)

>plot2d(&diff(expr,x),>add,style="–",color=red): // add another plot

>plot2d(&diff(expr,x,2),a=-2,b=2,c=-2,d=1): // plot in rectangle

>plot2d(&diff(expr,x),a=-2,b=2,>square): // keep plot square

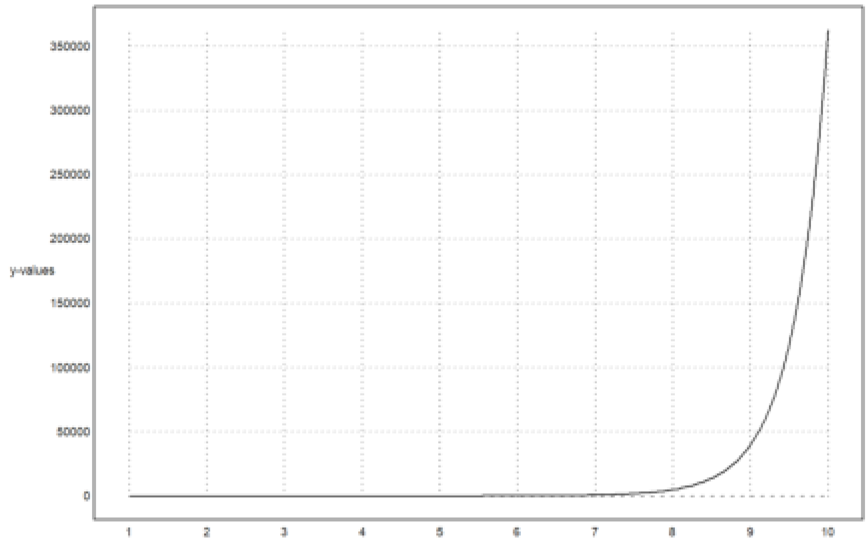
>plot2d("x^2",0,1,steps=1,color=red,n=10):

>plot2d("x^2",>add,steps=2,color=blue,n=10):

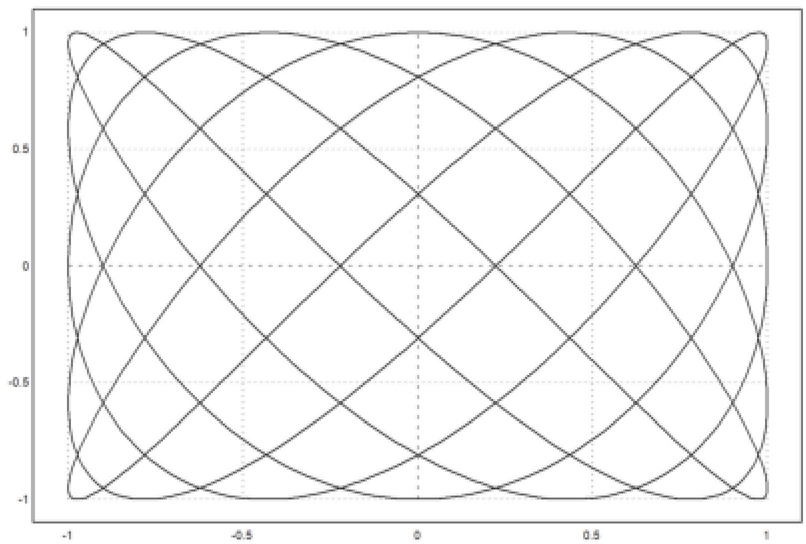
3.5 Fungsi dalam satu Parameter

Fungsi plotting yang paling penting untuk plot planar adalah plot2d(). Fungsi ini diimplementasikan dalam bahasa Euler dalam file "plot.e", yang dimuat di awal program.

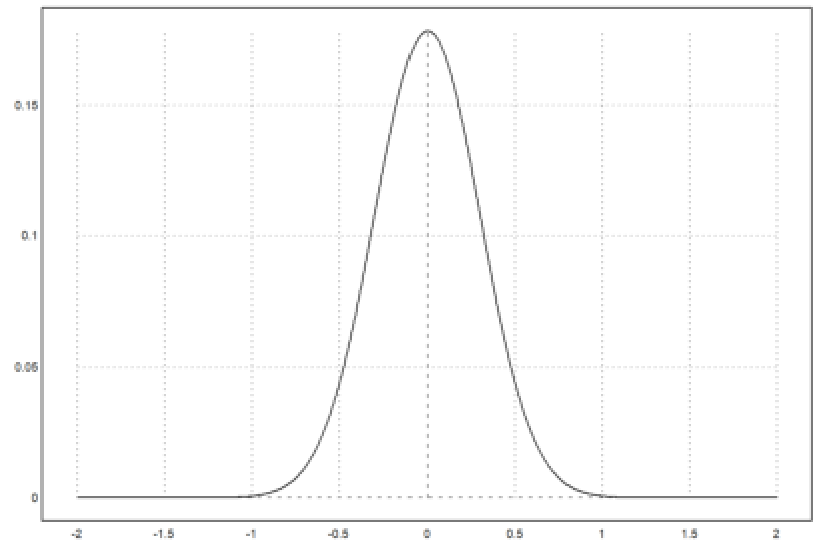
Berikut ini beberapa contoh penggunaan fungsi. Seperti biasa dalam EMT, fungsi yang berfungsi untuk fungsi atau ekspresi lain, Anda dapat meneruskan parameter tambahan (selain x) yang bukan variabel global ke fungsi dengan parameter titik koma atau dengan koleksi panggilan.



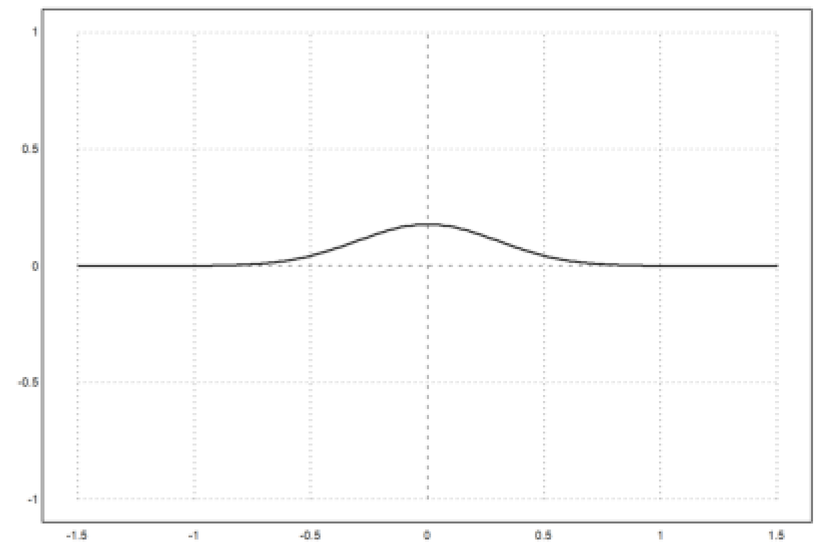
Gambar 3.19 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-019.png



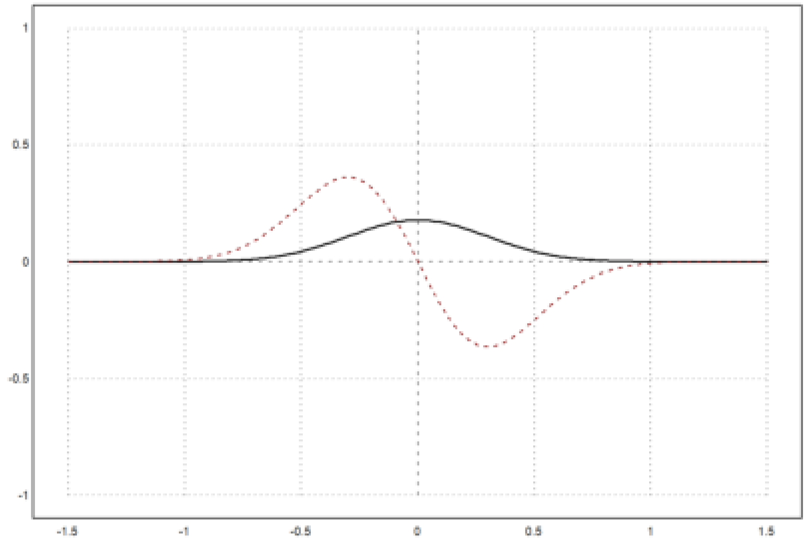
Gambar 3.20 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-020.png



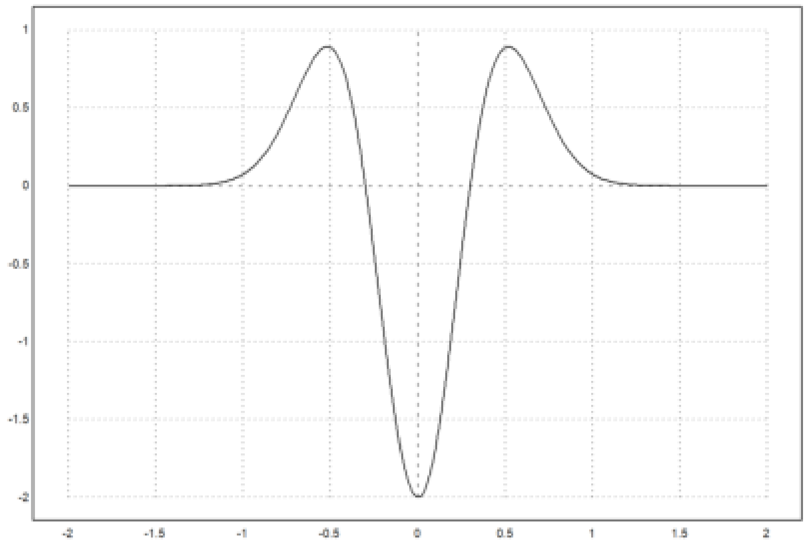
Gambar 3.21 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-021.png



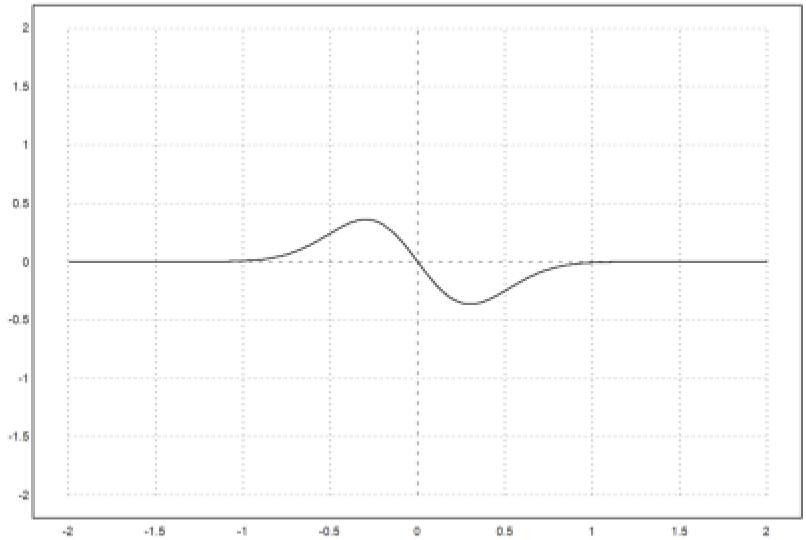
Gambar 3.22 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-022.png



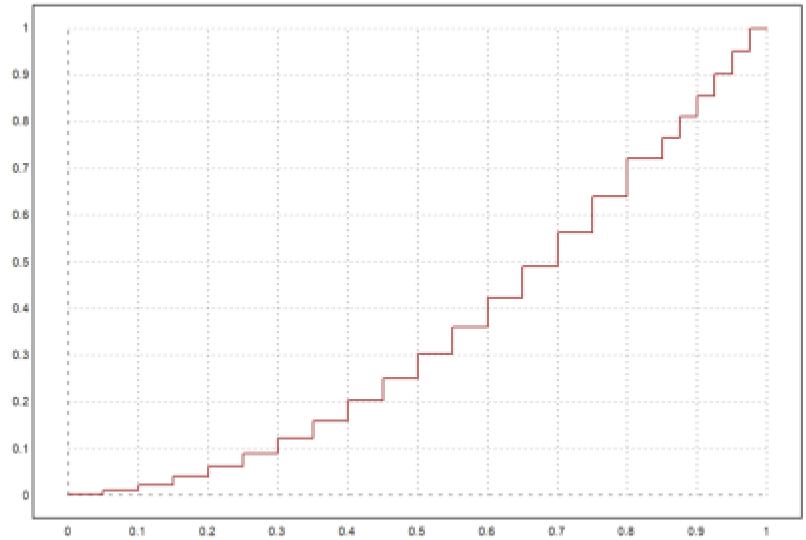
Gambar 3.23 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-023.png



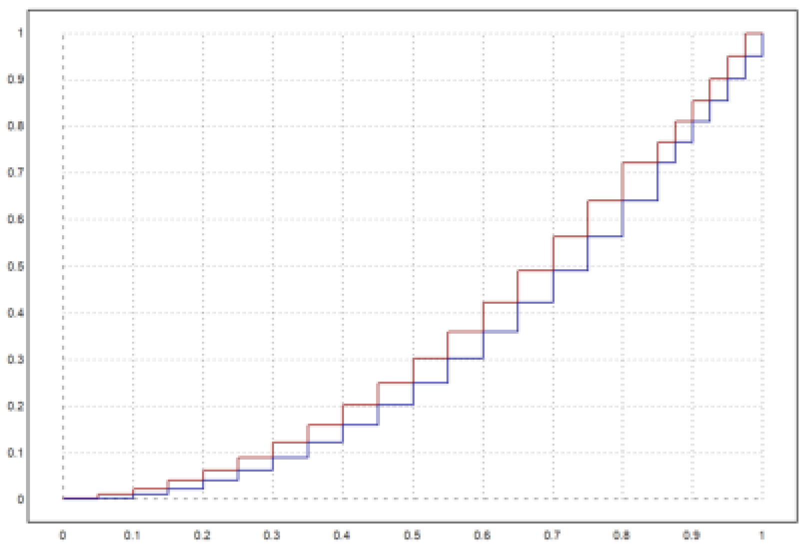
Gambar 3.24 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-024.png



Gambar 3.25 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-025.png



Gambar 3.26 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-026.png



Gambar 3.27 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-027.png

>function f(x,a) := $x^{2/a+a*x}$2-x; // define a function

>a=0.3; plot2d("f",0,1;a): // plot with a=0.3

>plot2d("f",0,1;0.4): // plot with a=0.4

>plot2d({{"f",0.2}},0,1): // plot with a=0.2

>plot2d({{"f(x,b)",b=0.1}},0,1): // plot with 0.1

>function f(x) := x^3-x; . . .
> plot2d("f",r=1):

Berikut ini adalah ringkasan fungsi yang diterima 1. ekspresi atau ekspresi simbolik dalam x 2. fungsi atau fungsi simbolik berdasarkan nama seperti "f" 3. fungsi simbolik hanya berdasarkan nama f

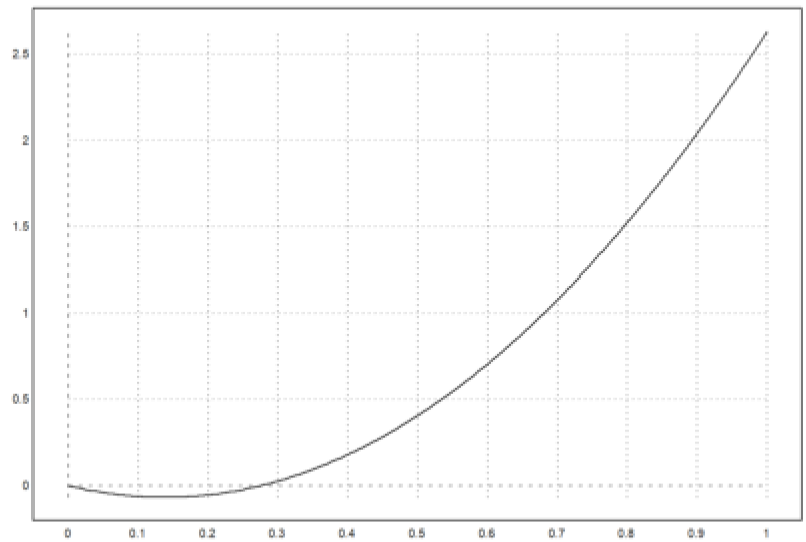
Fungsi plot2d() juga menerima fungsi simbolik. Untuk fungsi simbolik, hanya nama yang berfungsi.

>function f(x) &= diff(x^x,x)

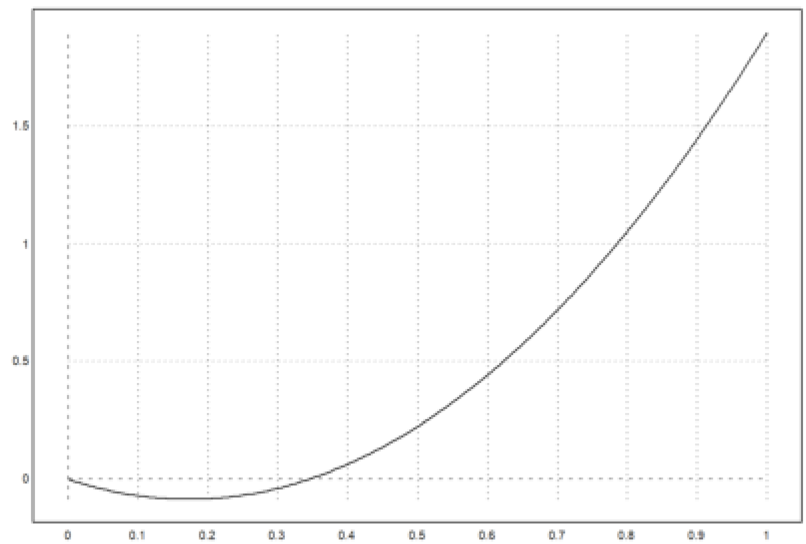
```
             x
            x   (log(x) + 1)
```

>plot2d(f (x),0,2):

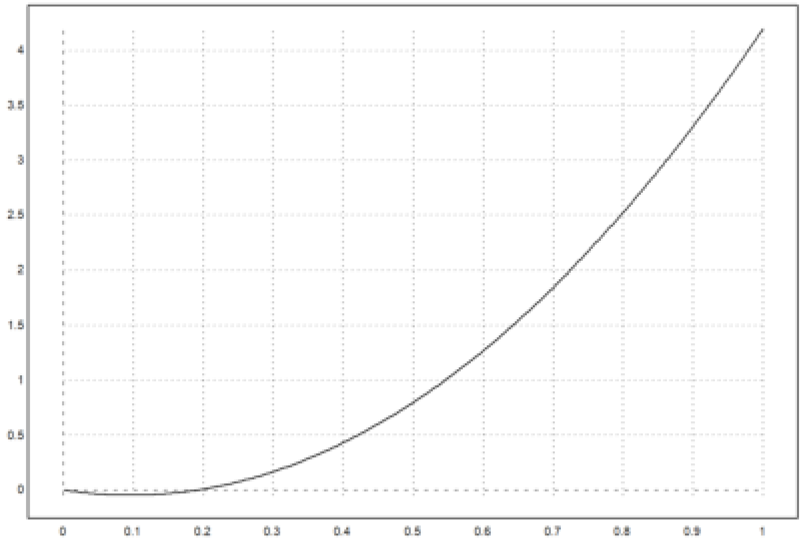
```
log defined only for positive numbers!
Error in log
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
f:
```



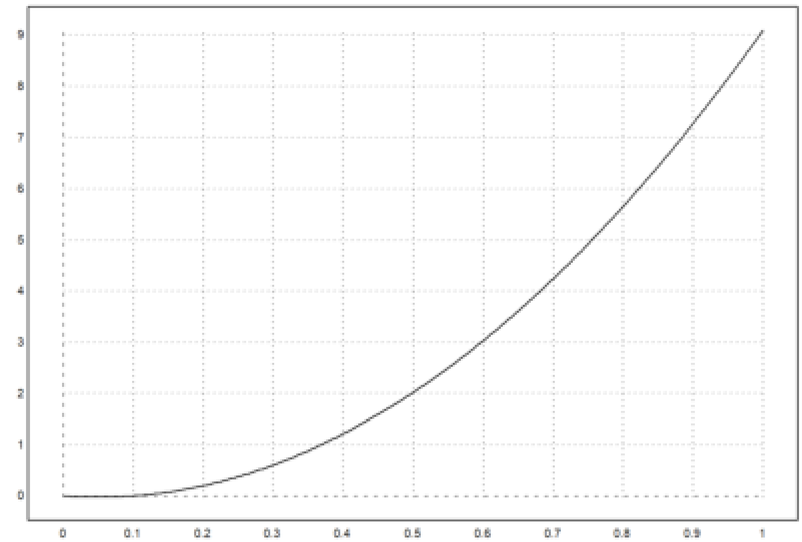
Gambar 3.28 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-028.png



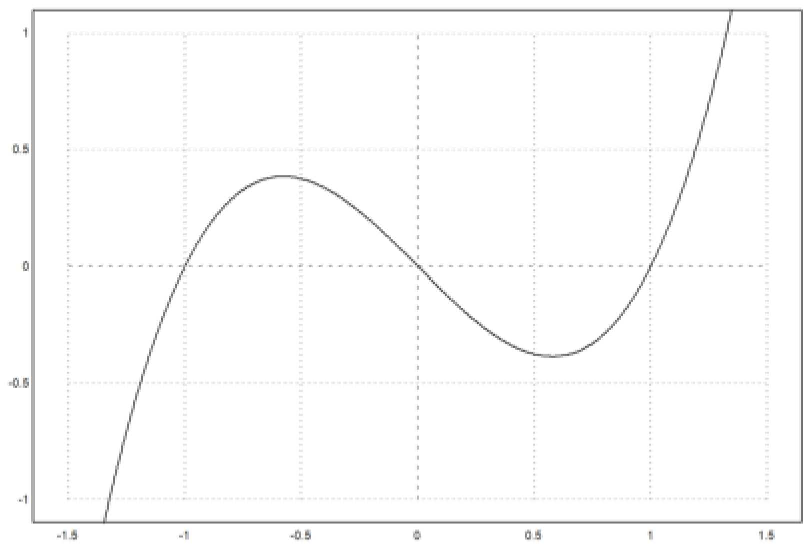
Gambar 3.29 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-029.png



Gambar 3.30 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-030.png



Gambar 3.31 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-031.png



Gambar 3.32 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-032.png

```
    useglobal; return x^x*(log(x)+1)
Error in:
plot2d(f (x),0,2): ...
            ^
```

Tentu saja, untuk ekspresi atau ungkapan simbolik, nama variabel sudah cukup untuk memplotnya.

>expr &= sin(x)*exp(-x)

```
                   - x
                  E    sin(x)
```

>plot2d(expr,0,3pi):

>function f(x) &= x^x;

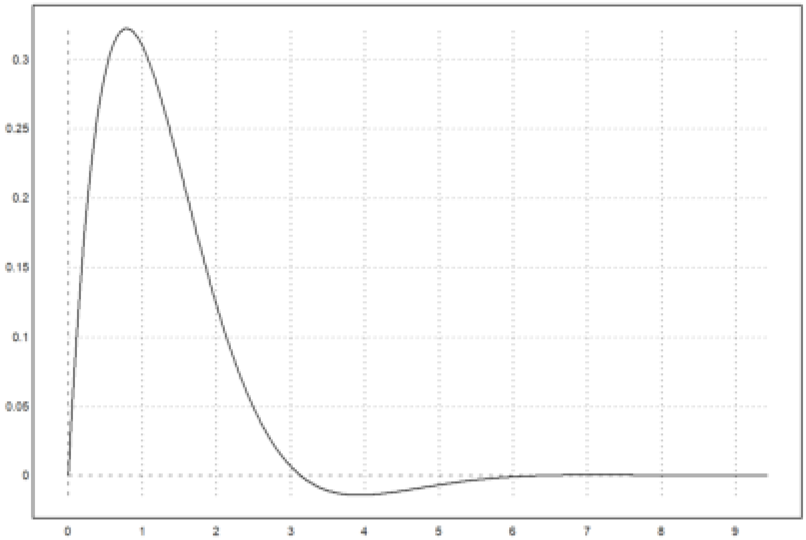
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=blue,thickness=2);

>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="-.-"):

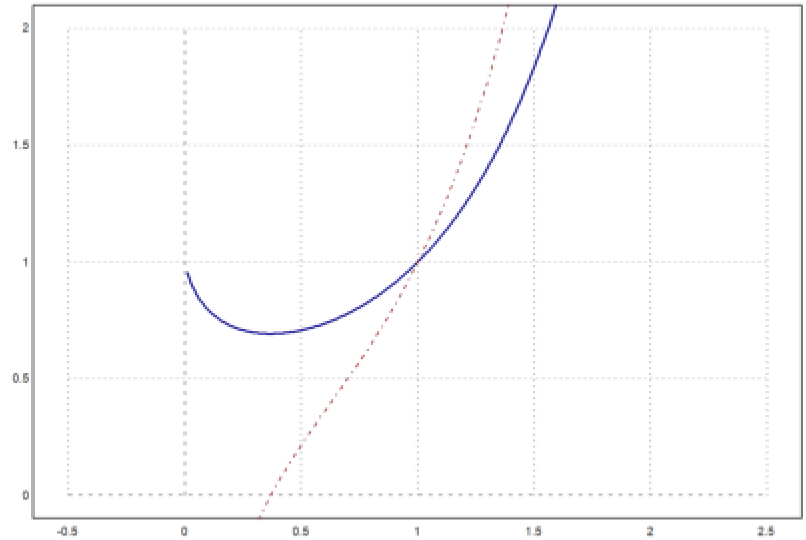
Untuk gaya garis, ada berbagai pilihan. + style="...". Pilih dari "-", "–", "-.", ".", ".-.", "-.-". + color: Lihat di bawah untuk warna.

thickness: Default adalah 1.

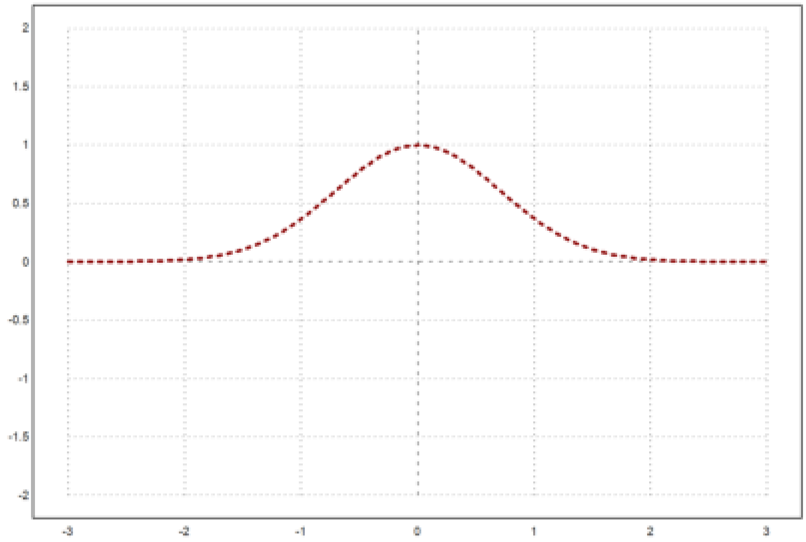
Warna dapat dipilih sebagai salah satu warna default, atau sebagai warna RGB. + 0..15: indeks warna default. + konstanta warna: putih, hitam, merah, hijau, biru, cyan, zaitun, abu-abu muda, abu-abu, abu-abu tua, oranye, hijau muda, biru kehijauan, biru muda, oranye muda, kuning + rgb(merah,hijau,biru): parameter adalah bilangan real dalam [0,1].



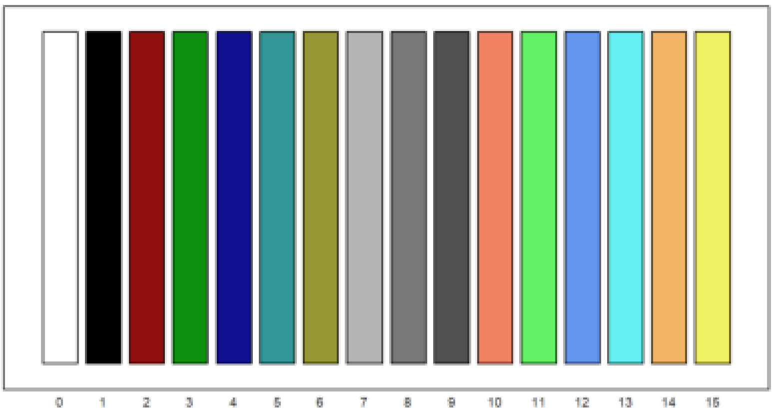
Gambar 3.33 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-033.png



Gambar 3.34 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-034.png



Gambar 3.35 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-035.png



Gambar 3.36 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-036.png

>plot2d("exp(-x^2)",r=2,color=red,thickness=3,style="–"):

Berikut ini tampilan warna EMT yang telah ditetapkan sebelumnya.

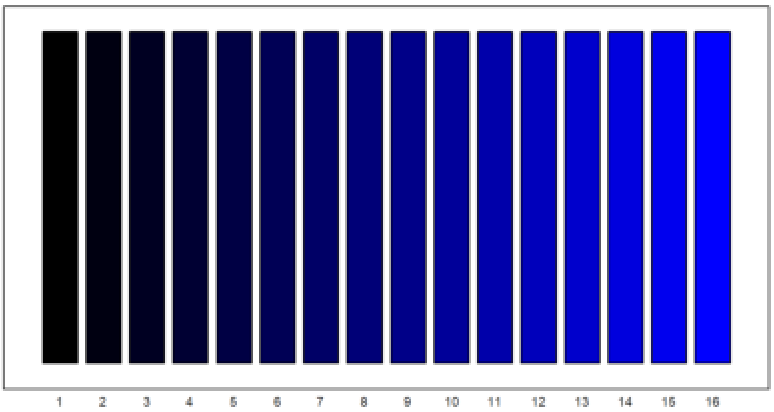
>aspect(2); columnsplot(ones(1,16),lab=0:15,grid=0,color=0:15):

Namun Anda dapat menggunakan warna apa pun.

>columnsplot(ones(1,16),grid=0,color=rgb(0,0,linspace(0,1,15))):

3.6 Menggambar Beberapa Kurva pada bidang koordinat yang sama

Plotting lebih dari satu fungsi (multifungsi) ke dalam satu jendela dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu metodenya adalah menggunakan >add untuk beberapa panggilan ke plot2d secara



Gambar 3.37 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-037.png

keseluruhan, kecuali panggilan pertama. Kami telah menggunakan fitur ini pada contoh di atas.

>aspect(); plot2d("cos(x)",r=2,grid=6); plot2d("x",style=".",>add):

>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi); plot2d("cos(x)",color=blue,style="–",>add):

Salah satu kegunaan >add adalah untuk menambahkan titik pada kurva.

>plot2d("sin(x)",0,pi); plot2d(2,sin(2),>points,>add):

Kami menambahkan titik potong dengan label (pada posisi "cl" untuk tengah kiri), dan memasukkan hasilnya ke dalam buku catatan. Kami juga menambahkan judul pada plot.

>plot2d(["cos(x)","x"],r=1.1,cx=0.5,cy=0.5, ...
> color=[black,blue],style=["-","."], ...
> grid=1):

>x0=solve("cos(x)-x",1); ...
> plot2d(x0,x0,>points,>add,title="Intersection Demo"); ...
> label("cos(x) = x",x0,x0,pos="cl",offset=20):

Dalam demo berikut, kami memplot fungsi sinc(x)=sin(x)/x dan ekspansi Taylor ke-8 dan ke-16. Kami menghitung ekspansi ini menggunakan Maxima melalui ekspresi simbolik.

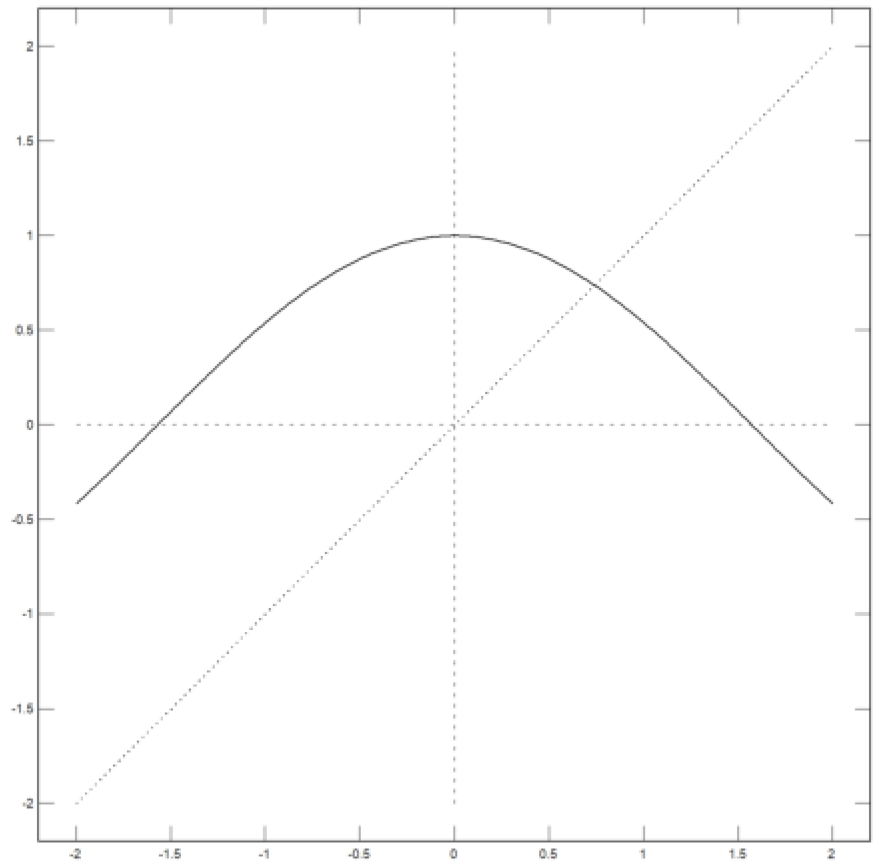
Plot ini dilakukan dalam perintah multi-baris berikut dengan tiga panggilan ke plot2d(). Yang kedua dan ketiga memiliki set flag >add, yang membuat plot menggunakan rentang sebelumnya.

Kami menambahkan kotak label yang menjelaskan fungsi-fungsi tersebut.

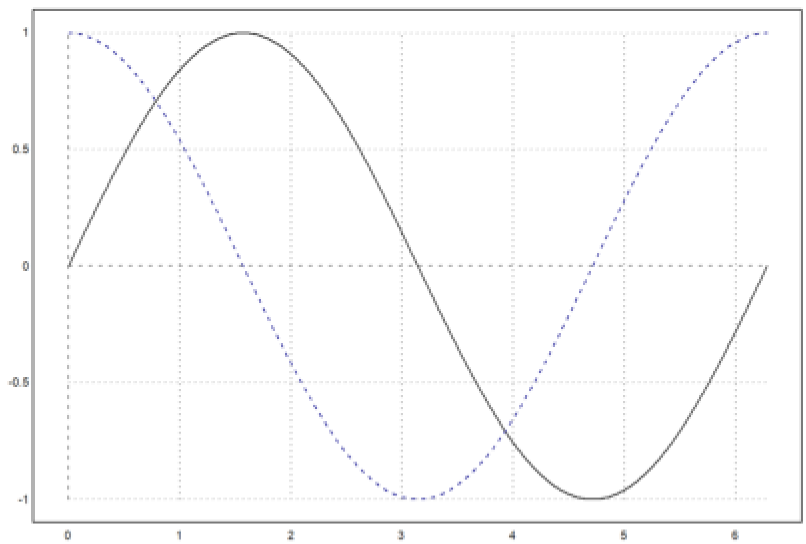
>$taylor(sin(x)/x,x,0,4)

$$\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1$$

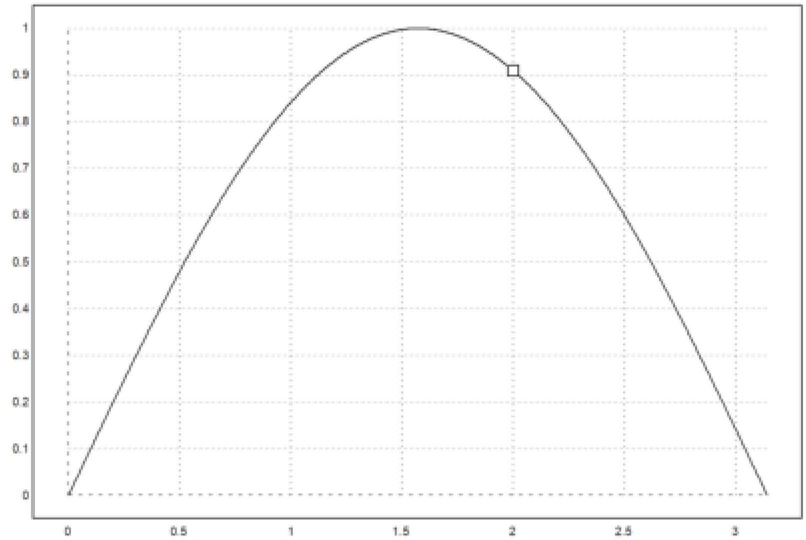
>plot2d("sinc(x)",0,4pi,color=green,thickness=2); ...



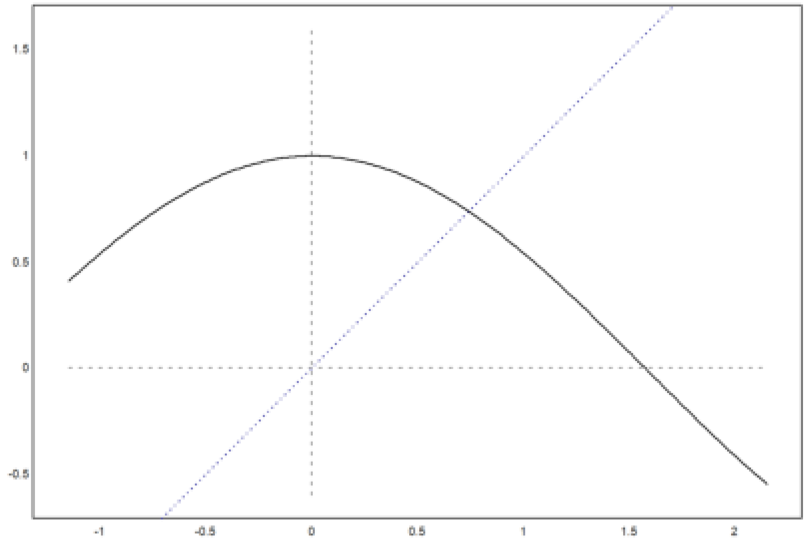
Gambar 3.38 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-038.png



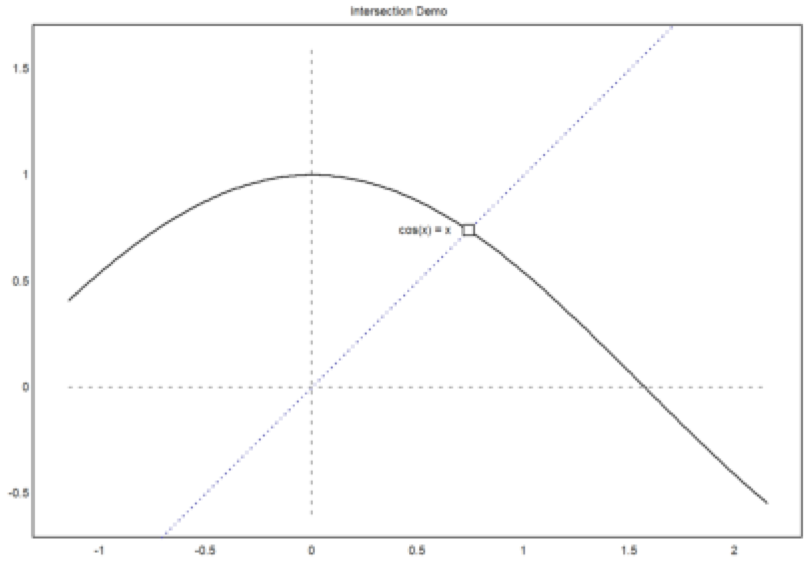
Gambar 3.39 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-039.png



Gambar 3.40 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-040.png



Gambar 3.41 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-041.png



Gambar 3.42 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-042.png

> plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,8),>add,color=blue,style="–"); . . .
> plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,16),>add,color=red,style="-.-"); . . .
> labelbox(["sinc","T8","T16"],styles=["-","–","-.-"], . . .
> colors=[black,blue,red]):

Dalam contoh berikut, kami menghasilkan Polinomial Bernstein.

>plot2d("(1-x)ˆ10",0,1); // plot first function

>for i=1 to 10; plot2d("bin(10,i)*x$^{i*(1-x)}$(10-i)",>add); end;

>insimg;

Metode kedua menggunakan sepasang matriks nilai-x dan matriks nilai-y dengan ukuran yang sama.

Kita buat matriks nilai dengan satu Polinomial Bernstein di setiap baris. Untuk ini, kita cukup menggunakan vektor kolom i. Lihat pengantar tentang bahasa matriks untuk mempelajari lebih detail.

>x=linspace(0,1,500);

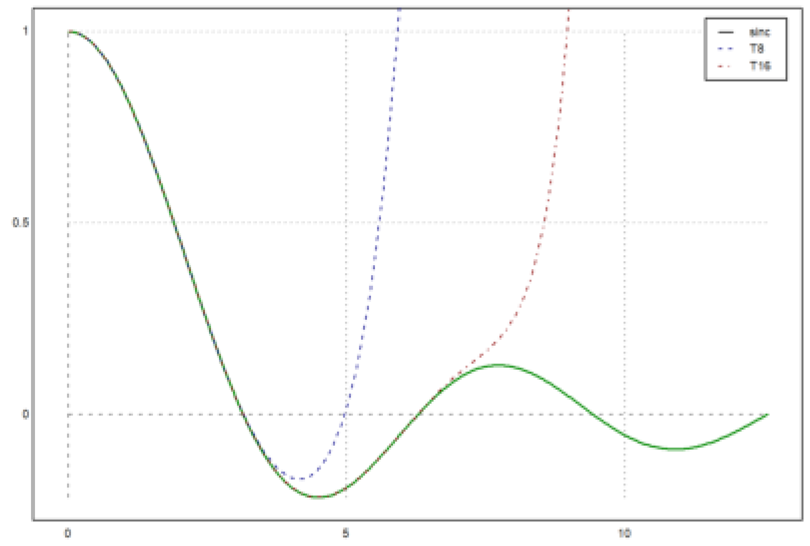
>n=10; k=(0:n)'; // n is row vector, k is column vector

>y=bin(n,k)*x$^{k*(1-x)}$(n-k); // y is a matrix then

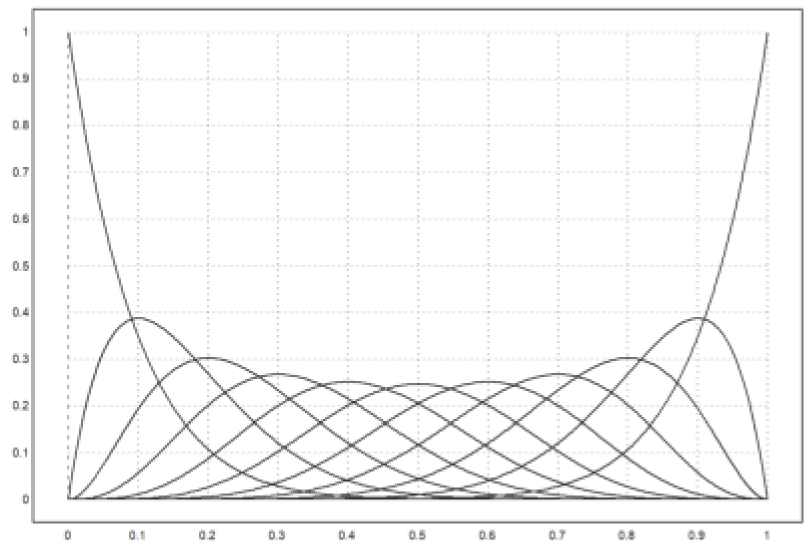
>plot2d(x,y):

Perhatikan bahwa parameter warna dapat berupa vektor. Maka setiap warna digunakan untuk setiap baris matriks.

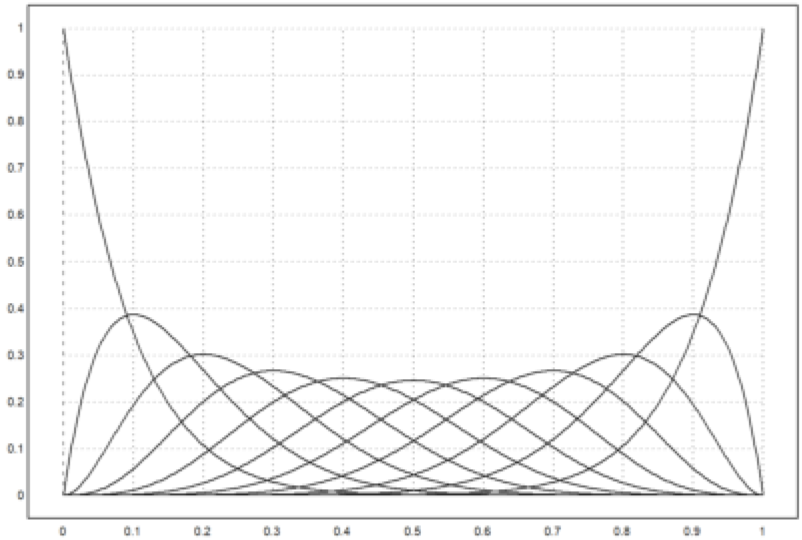
>x=linspace(0,1,200); y=xˆ(1:10)'; plot2d(x,y,color=1:10):



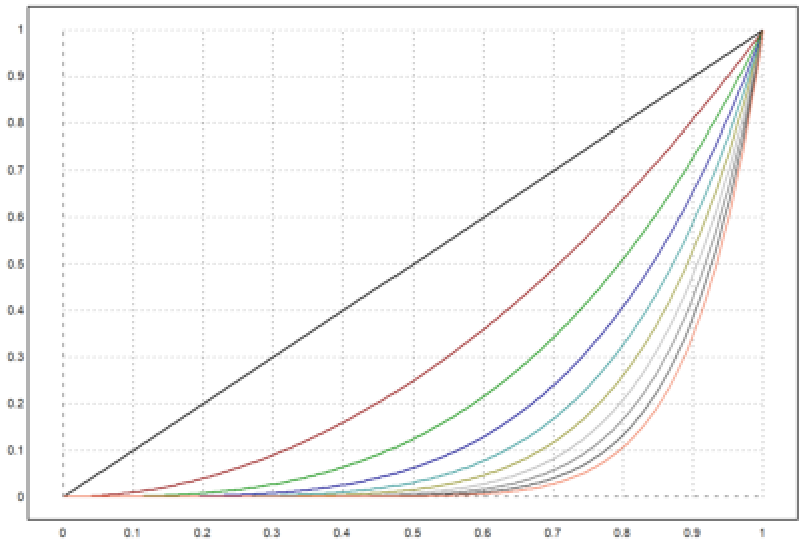
Gambar 3.43 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-044.png



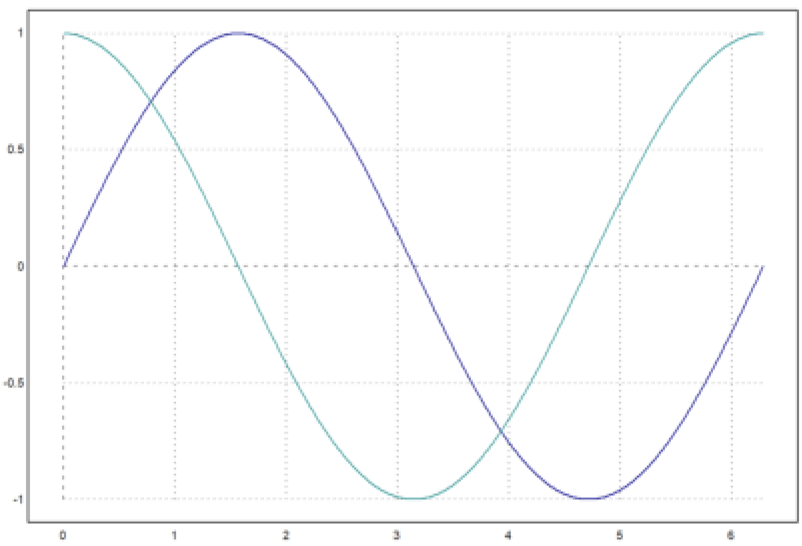
Gambar 3.44 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-045.png



Gambar 3.45 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-046.png



Gambar 3.46 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-047.png



Gambar 3.47 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-048.png

Metode lain adalah menggunakan vektor ekspresi (string). Anda kemudian dapat menggunakan array warna, array gaya, dan array ketebalan dengan panjang yang sama.

>plot2d([“sin(x)”,“cos(x)”],0,2pi,color=4:5):

>plot2d([“sin(x)”,“cos(x)”],0,2pi): // plot vector of expressions

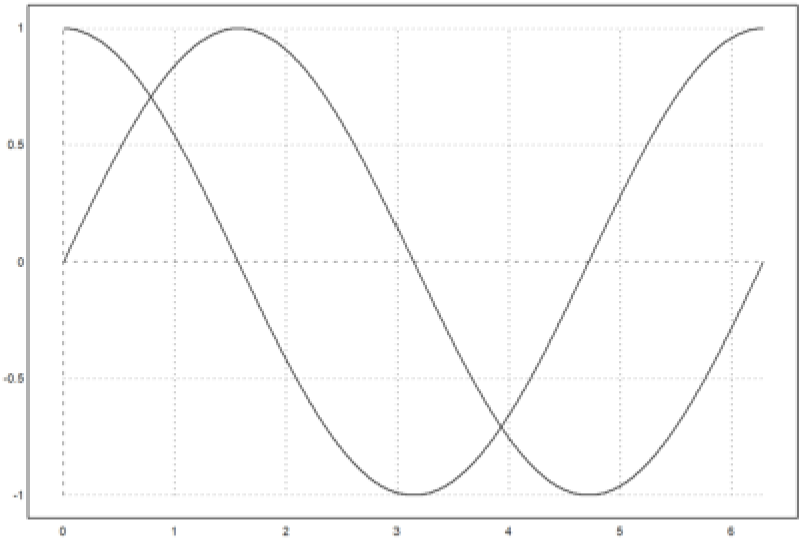
Kita bisa mendapatkan vektor tersebut dari Maxima menggunakan makelist() dan mxm2str().

>v &= makelist(binomial(10,i)*x$^{i*(1-x)}$(10-i),i,0,10) // make list

```
               10              9                8   2                7   3
       [(1 - x)   , 10 (1 - x)   x, 45 (1 - x)   x , 120 (1 - x)   x ,
           6   4               5   5               4   6              3   7
210 (1 - x)   x , 252 (1 - x)   x , 210 (1 - x)   x , 120 (1 - x)   x ,
          2   8              9    10
45 (1 - x)   x , 10 (1 - x) x , x   ]
```

>mxm2str(v) // get a vector of strings from the symbolic vector

```
(1-x)^10
10*(1-x)^9*x
45*(1-x)^8*x^2
120*(1-x)^7*x^3
210*(1-x)^6*x^4
252*(1-x)^5*x^5
210*(1-x)^4*x^6
120*(1-x)^3*x^7
```



Gambar 3.48 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-049.png

```
45*(1-x)^2*x^8
10*(1-x)*x^9
x^10
```

>plot2d(mxm2str(v),0,1): // plot functions

Alternatif lain adalah dengan menggunakan bahasa matriks Euler.

Jika suatu ekspresi menghasilkan matriks fungsi, dengan satu fungsi di setiap baris, semua fungsi ini akan diplot menjadi satu plot.

Untuk ini, gunakan vektor parameter dalam bentuk vektor kolom. Jika array warna ditambahkan, array tersebut akan digunakan untuk setiap baris plot.

>n=(1:10)'; plot2d("x^n",0,1,color=1:10):

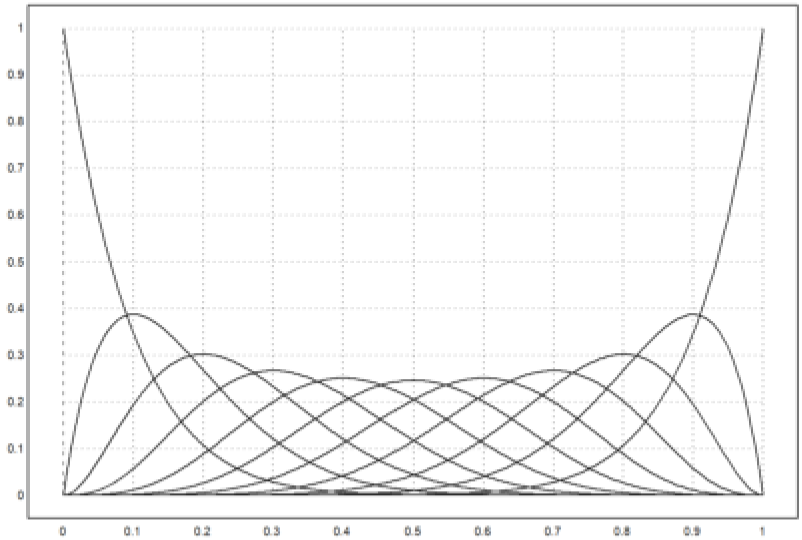
Ekspresi dan fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

Jika Anda tidak dapat menggunakan variabel global, Anda perlu menggunakan fungsi dengan parameter tambahan, dan meneruskan parameter ini sebagai parameter titik koma.

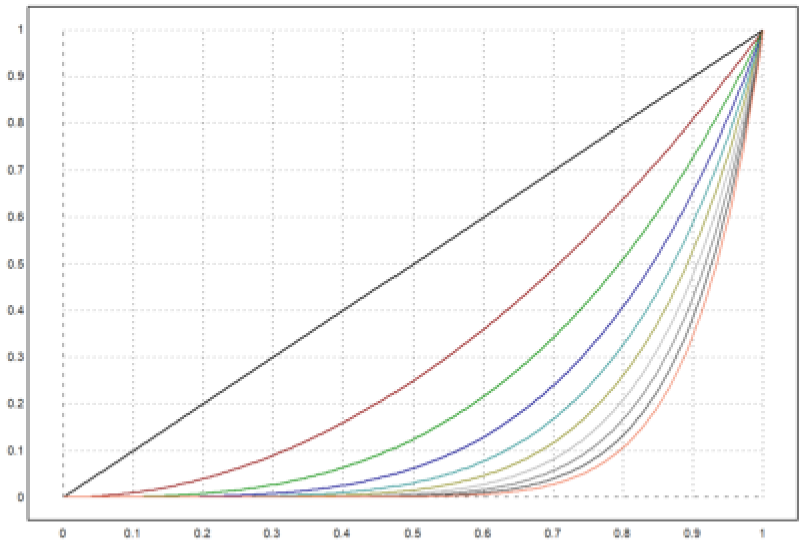
Berhati-hatilah, untuk meletakkan semua parameter yang ditetapkan di akhir perintah plot2d. Dalam contoh ini, kami meneruskan a=5 ke fungsi f, yang kami plot dari -10 hingga 10.

>function f(x,a) := 1/a*exp(-x^2/a); ...
> plot2d("f",-10,10;5,thickness=2,title="a=5"):

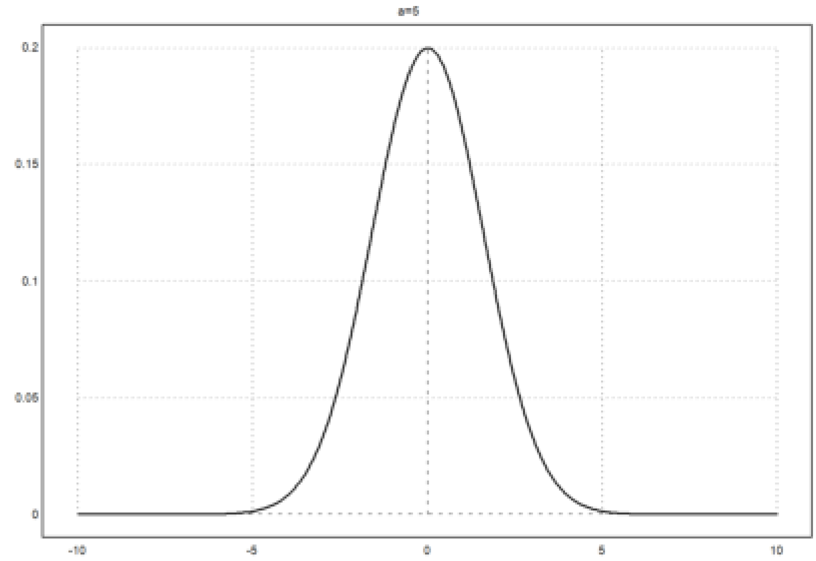
Atau, gunakan koleksi dengan nama fungsi dan semua parameter tambahan. Daftar khusus ini disebut koleksi panggilan, dan itu adalah cara yang lebih disukai untuk meneruskan argumen ke suatu fungsi yang diteruskan sebagai argumen ke fungsi lain.



Gambar 3.49 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-050.png



Gambar 3.50 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-051.png



Gambar 3.51 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-052.png

Dalam contoh berikut, kami menggunakan loop untuk memplot beberapa fungsi (lihat tutorial tentang pemrograman untuk loop).

>plot2d({{“f”,1}},-10,10); ...
> for a=2:10; plot2d({{“f”,a}},>add); end:

Kita dapat memperoleh hasil yang sama dengan cara berikut menggunakan bahasa matriks EMT. Setiap baris matriks f(x,a) adalah satu fungsi. Selain itu, kita dapat mengatur warna untuk setiap baris matriks. Klik dua kali pada fungsi getspectral() untuk penjelasannya.

>x=-10:0.01:10; a=(1:10)’; plot2d(x,f(x,a),color=getspectral(a/10)):

3.7 Label Teks

Dekorasi sederhana dapat berupa - judul dengan title=“...” - label x dan y dengan xl=“...”, yl=“...” - label teks lain dengan label(“...”,x,y)

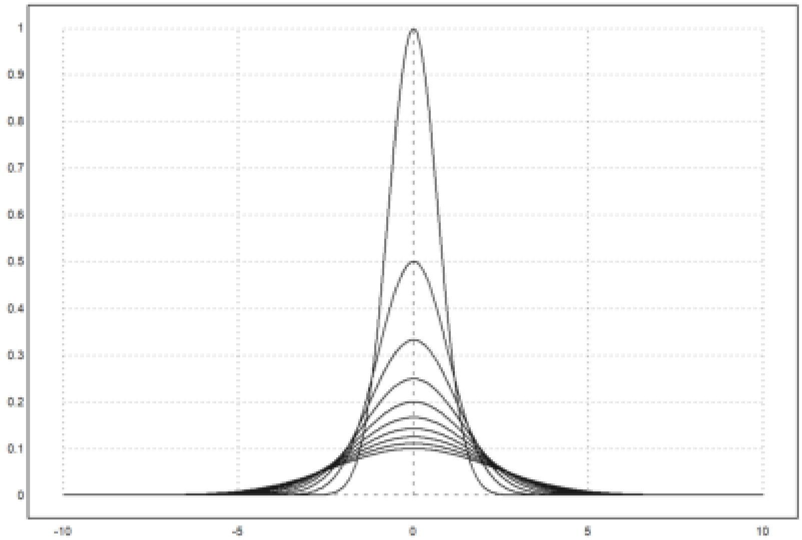
Perintah label akan memplot ke dalam plot saat ini pada koordinat plot (x,y). Perintah ini dapat mengambil argumen posisi.

>plot2d(“x$^{\text{3-x”,-1,2,title=”y=x}}$3-x”,yl=“y”,xl=“x”):

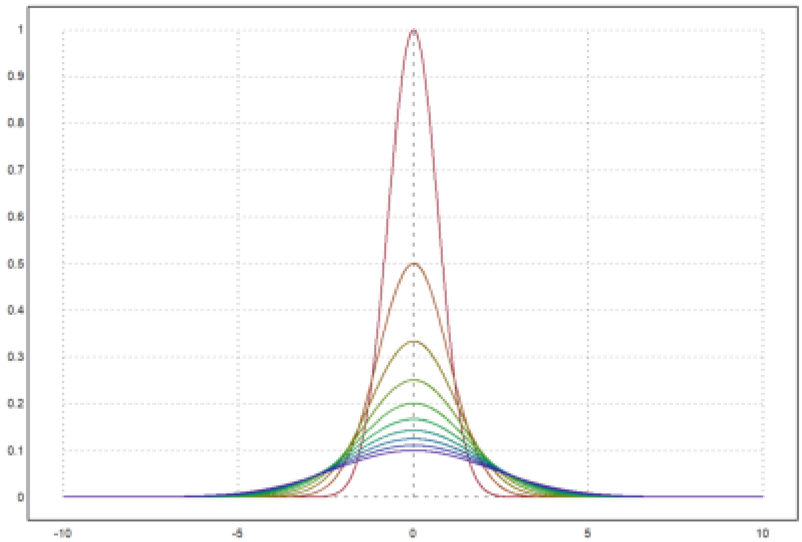
>expr := “log(x)/x”; ...
> plot2d(expr,0.5,5,title=“y=”+expr,xl=“x”,yl=“y”); ...
> label(“(1,0)”,1,0); label(“Max”,E,expr(E),pos=“lc”):

Ada juga fungsi labelbox(), yang dapat menampilkan fungsi dan teks. Fungsi ini mengambil vektor string dan warna, satu item untuk setiap fungsi.

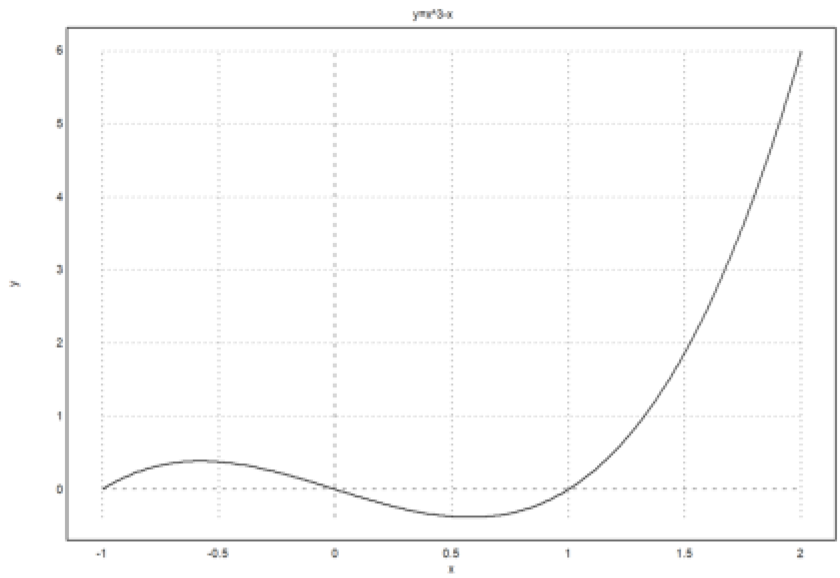
>function f(x) &= x$^{\text{2*exp(-x}}$2); ...



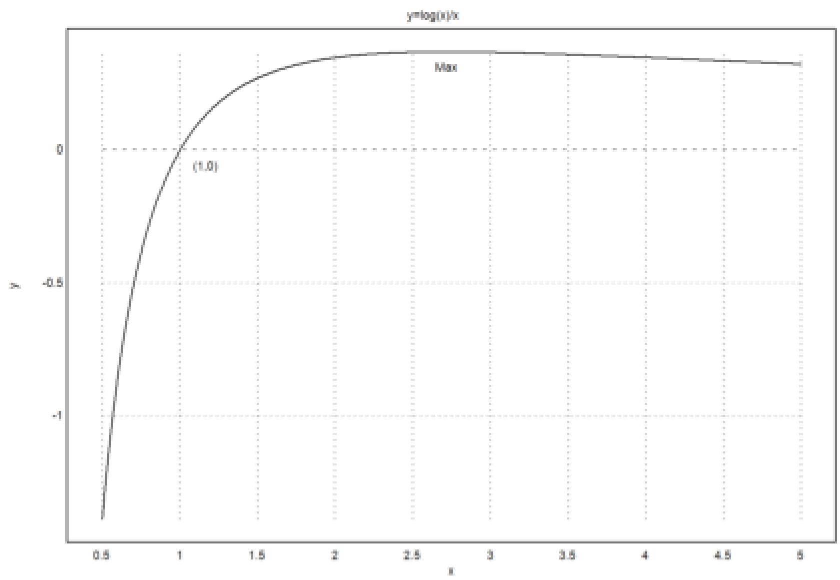
Gambar 3.52 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-053.png



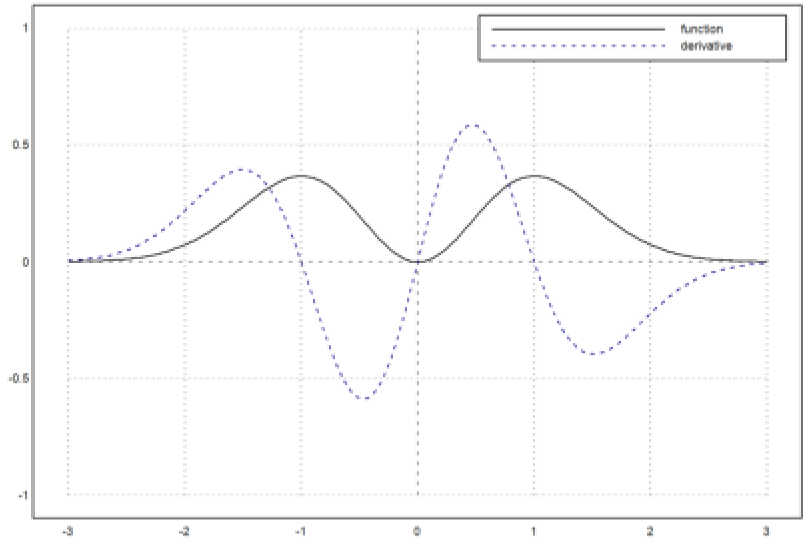
Gambar 3.53 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-054.png



Gambar 3.54 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-055.png



Gambar 3.55 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-056.png



Gambar 3.56 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-057.png

> plot2d(&f(x),a=-3,b=3,c=-1,d=1); . . .
> plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="–"); . . .
> labelbox(["function","derivative"],styles=["-","–"], . . .
> colors=[black,blue],w=0.4):

Kotak tersebut ditambatkan di kanan atas secara default, tetapi >left menambatkannya di kiri atas. Anda dapat memindahkannya ke tempat mana pun yang Anda suka. Posisi jangkar adalah sudut kanan atas kotak, dan angka-angkanya adalah pecahan dari ukuran jendela grafik. Lebarnya otomatis.

Untuk plot titik, kotak label juga berfungsi. Tambahkan parameter >points, atau vektor bendera, satu untuk setiap label.

Dalam contoh berikut, hanya ada satu fungsi. Jadi, kita dapat menggunakan string alih-alih vektor string. Kita tetapkan warna teks menjadi hitam untuk contoh ini.

>n=10; plot2d(0:n,bin(n,0:n),>addpoints); . . .
> labelbox("Binomials",styles="[]",>points,x=0.1,y=0.1, . . .
> tcolor=black,>left):

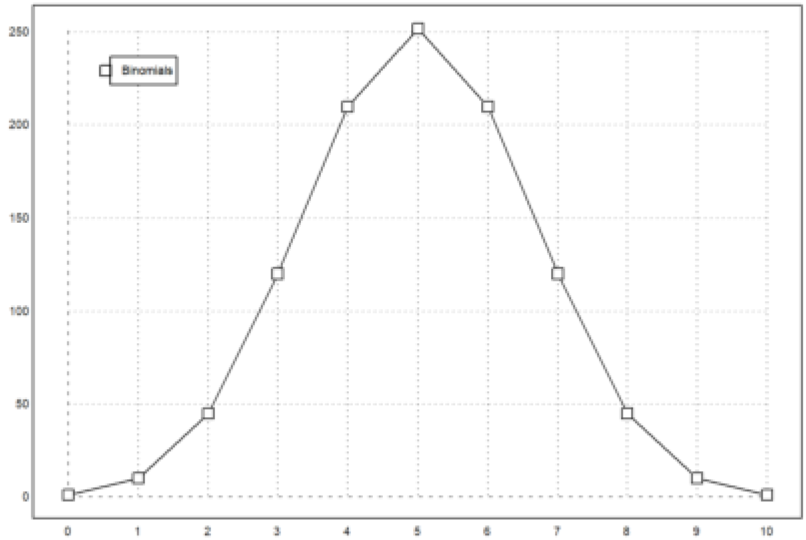
Gaya plot ini juga tersedia di statplot(). Seperti di plot2d(), warna dapat diatur untuk setiap baris plot. Ada plot yang lebih khusus untuk keperluan statistik (lihat tutorial tentang statistik).

>statplot(1:10,random(3,10),color=[red,blue,black]):

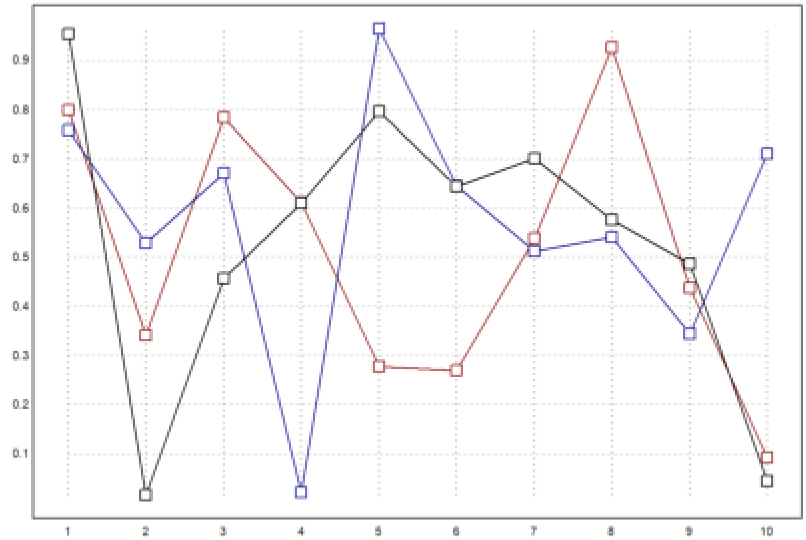
Fitur serupa adalah fungsi textbox().

Lebar secara default adalah lebar maksimal baris teks. Namun, pengguna juga dapat mengaturnya.

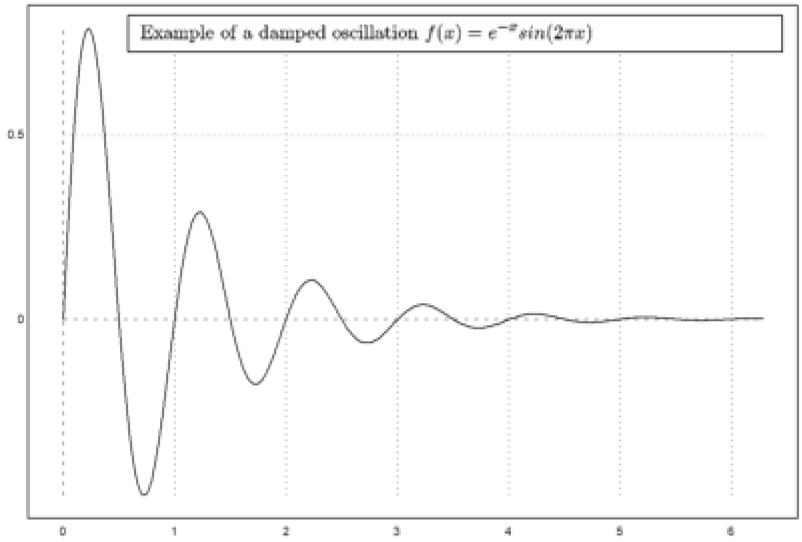
>function f(x) &= exp(-x)*sin(2*pi*x); . . .
> plot2d("f(x)",0,2pi); . . .
> textbox(latex("\text{Example of a damped oscillation}\ f(x)=e^{-x}sin(2\pi x)"),w=0.85):



Gambar 3.57 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-058.png



Gambar 3.58 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-059.png



Gambar 3.59 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-060.png

Label teks, judul, kotak label, dan teks lainnya dapat berisi string Unicode (lihat sintaksis EMT untuk informasi lebih lanjut tentang string Unicode).

>plot2d("x^3-x",title=u"x → x³ - x"):

Label pada sumbu x dan y dapat vertikal, begitu pula sumbunya.

>plot2d("sinc(x)",0,2pi,xl="x",yl=u"x → sinc(x)",>vertical):

3.8 LaTeX

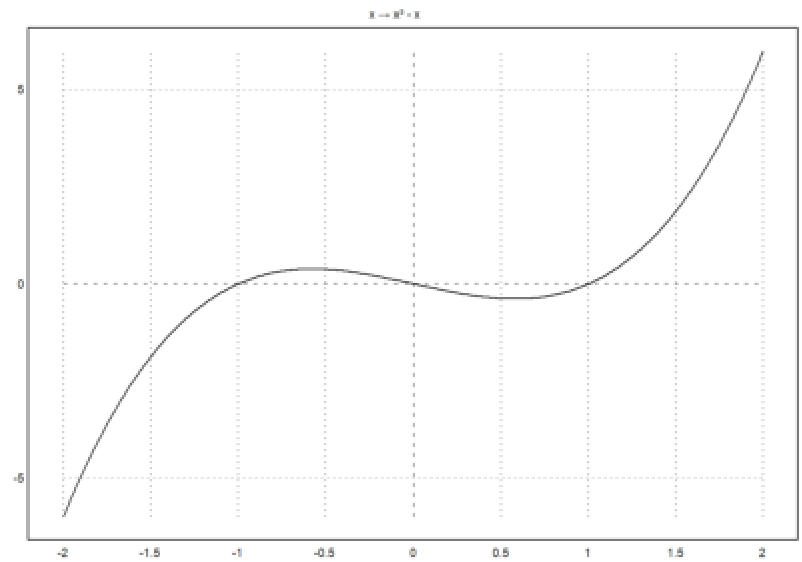
Anda juga dapat memplot rumus LaTeX jika Anda telah menginstal sistem LaTeX. Saya merekomendasikan MiKTeX. Jalur ke biner "latex" dan "dvipng" harus berada di jalur sistem, atau Anda harus mengatur LaTeX di menu opsi.

Perlu dicatat, bahwa penguraian LaTeX lambat. Jika Anda ingin menggunakan LaTeX dalam plot animasi, Anda harus memanggil latex() sebelum loop sekali dan menggunakan hasilnya (gambar dalam matriks RGB).

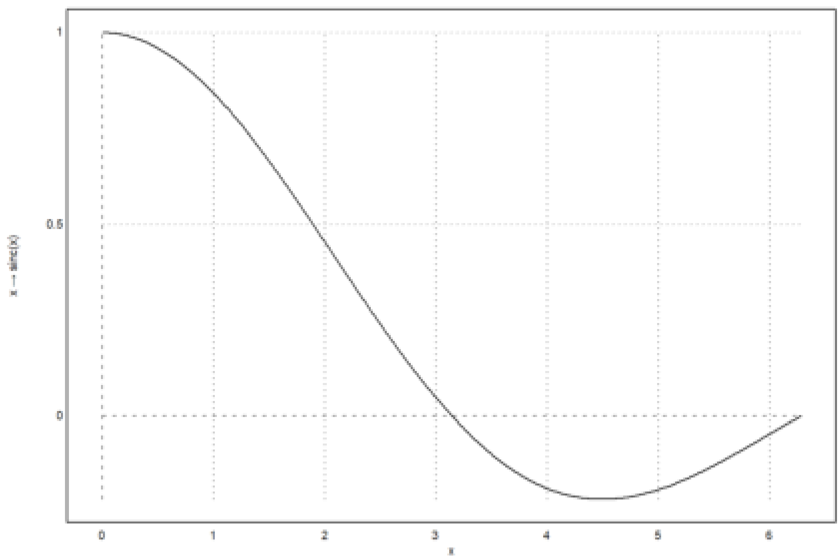
Dalam plot berikut, kami menggunakan LaTeX untuk label x dan y, label, kotak label, dan judul plot.

>plot2d("exp(-x)*sin(x)/x",a=0,b=2pi,c=0,d=1,grid=6,color=blue, ...
> title=latex("\text{Function
Phi}"), ...
> xl=latex("\phi"),yl=latex("\Phi(\phi)")); ...
> textbox(...
> latex("\Phi(\phi) = e^{-\phi} \frac{\sin(\phi)}{\phi}"),x=0.8,y=0.5); ...
> label(latex("\Phi",color=blue),1,0.4):

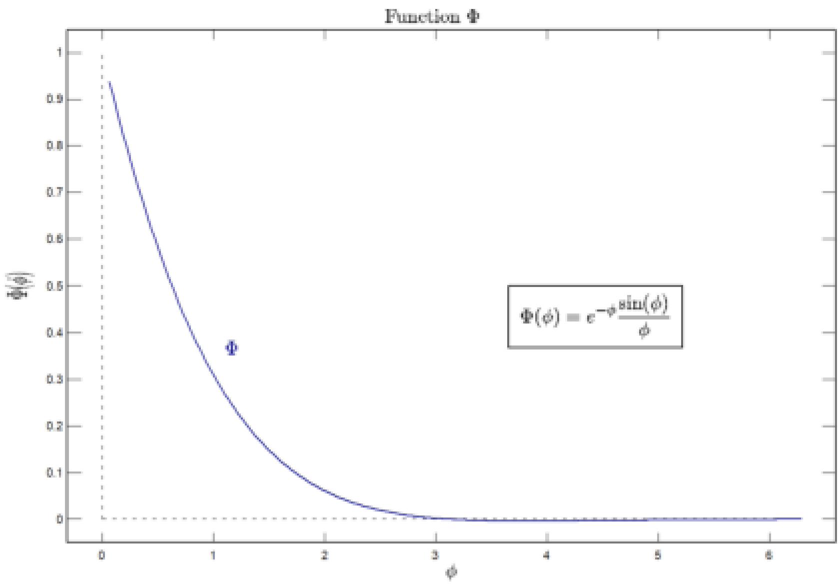
Sering kali, kita menginginkan spasi nonkonformal dan label teks pada sumbu x. Kita dapat



Gambar 3.60 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-061.png



Gambar 3.61 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-062.png



Gambar 3.62 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-063.png

menggunakan xaxis() dan yaxis() seperti yang akan kita tunjukkan nanti.

Cara termudah adalah membuat plot kosong dengan bingkai menggunakan grid=4, lalu menambahkan grid dengan ygrid() dan xgrid(). Dalam contoh berikut, kita menggunakan tiga string LaTeX untuk label pada sumbu x dengan xtick().

>plot2d("sinc(x)",0,2pi,grid=4,<ticks); ...
> ygrid(-2:0.5:2,grid=6); ...
> xgrid([0:2]*pi,<ticks,grid=6); ...
> xtick([0,pi,2pi],["0","\pi","2\pi"],>latex):

Tentu saja, fungsi juga dapat digunakan.

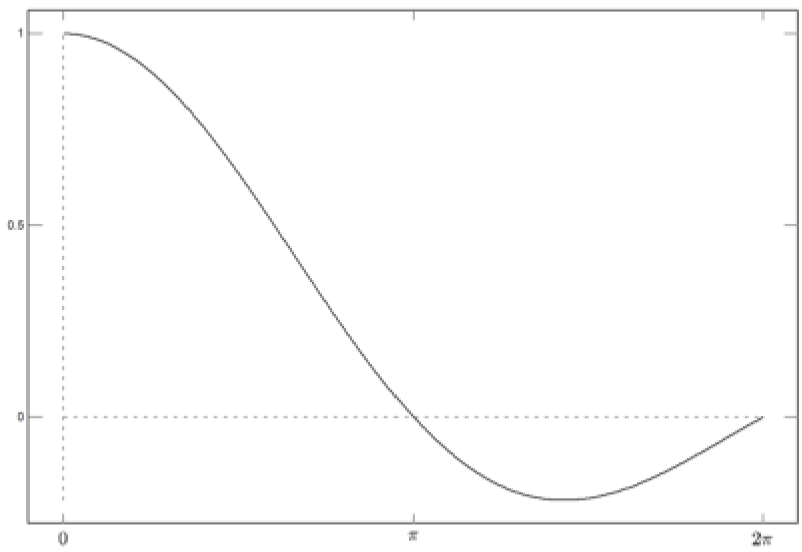
>function map f(x) ...

```
if x>0 then return x^4
else return x^2
endif
endfunction
```

Parameter "peta" membantu menggunakan fungsi untuk vektor. Untuk plot, parameter tersebut tidak diperlukan. Namun, untuk menunjukkan bahwa vektorisasi berguna, kami menambahkan beberapa poin penting ke plot pada x=-1, x=0, dan x=1.

Dalam plot berikut, kami juga memasukkan beberapa kode LaTeX. Kami menggunakannya untuk dua label dan kotak teks. Tentu saja, Anda hanya dapat menggunakan LaTeX jika Anda telah menginstal LaTeX dengan benar.

>plot2d("f",-1,1,xl="x",yl="f(x)",grid=6); ...
> plot2d([-1,0,1],f([-1,0,1]),>points,>add); ...



Gambar 3.63 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-064.png

> label(latex(“x^3”),0.72,f(0.72)); . . .
> label(latex(“x^2”),-0.52,f(-0.52),pos=“ll”); . . .
> textbox(. . .
> latex(“f(x)=\begin{cases} x^3 & x>0 \\ x^2 & x \le 0\end{cases}”), . . .
> x=0.7,y=0.2):

3.9 Interaksi Pengguna

Saat memplot fungsi atau ekspresi, parameter >user memungkinkan pengguna untuk memperbesar dan menggeser plot dengan tombol kursor atau tetikus. Pengguna dapat

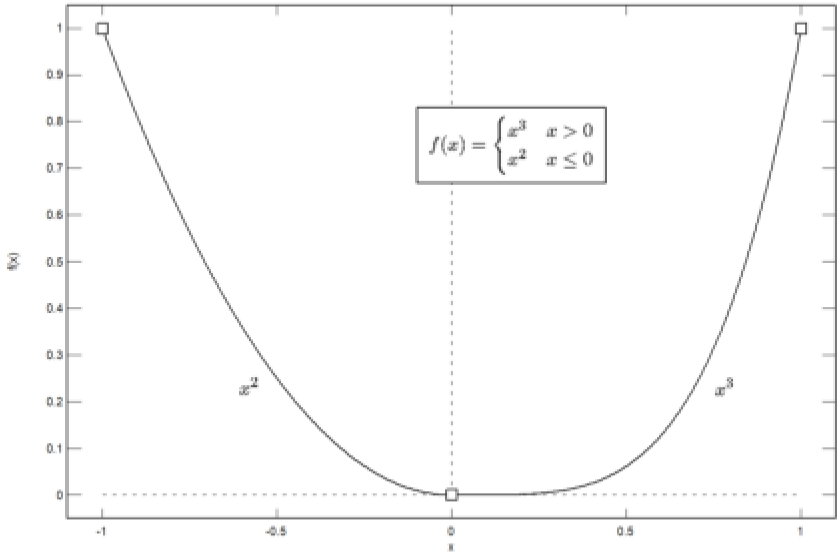
1. memperbesar dengan + atau -
2. memindahkan plot dengan tombol kursor
3. memilih jendela plot dengan tetikus
4. mengatur ulang tampilan dengan spasi
5. keluar dengan kembali

Tombol spasi akan mengatur ulang plot ke jendela plot asli.

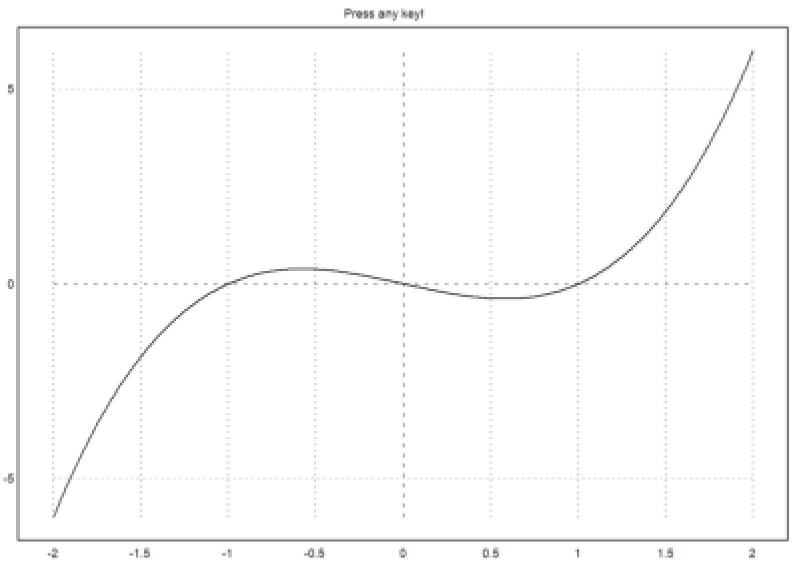
Saat memplot data, tanda >user akan menunggu penekanan tombol.

>plot2d({{“x^3-a*x”,a=1}},>user,title=“Press any key!”):

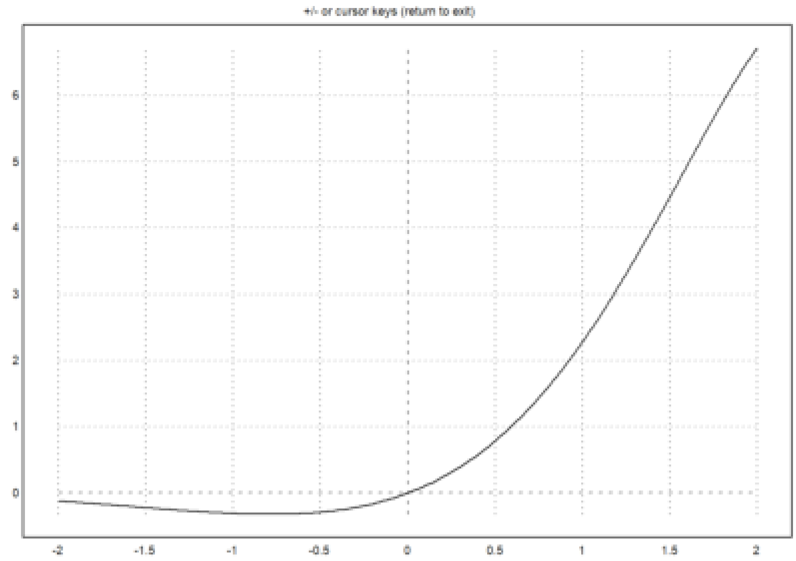
>plot2d(“exp(x)*sin(x)”,user=true, . . .
> title=“+/- or cursor keys (return to exit)”):



Gambar 3.64 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-065.png



Gambar 3.65 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-066.png



Gambar 3.66 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-067.png

Berikut ini menunjukkan cara interaksi pengguna tingkat lanjut (lihat tutorial tentang pemrograman untuk detailnya).

Fungsi bawaan mousedrag() menunggu kejadian tetikus atau papan ketik. Fungsi ini melaporkan gerakan tetikus ke bawah, gerakan tetikus ke atas, dan penekanan tombol. Fungsi dragpoints() memanfaatkan fungsi ini, dan memungkinkan pengguna menyeret titik mana pun dalam plot.

Pertama-tama, kita memerlukan fungsi plot. Misalnya, kita melakukan interpolasi pada 5 titik dengan polinomial. Fungsi ini harus memplot ke dalam area plot yang tetap.

>function plotf(xp,yp,select) ...

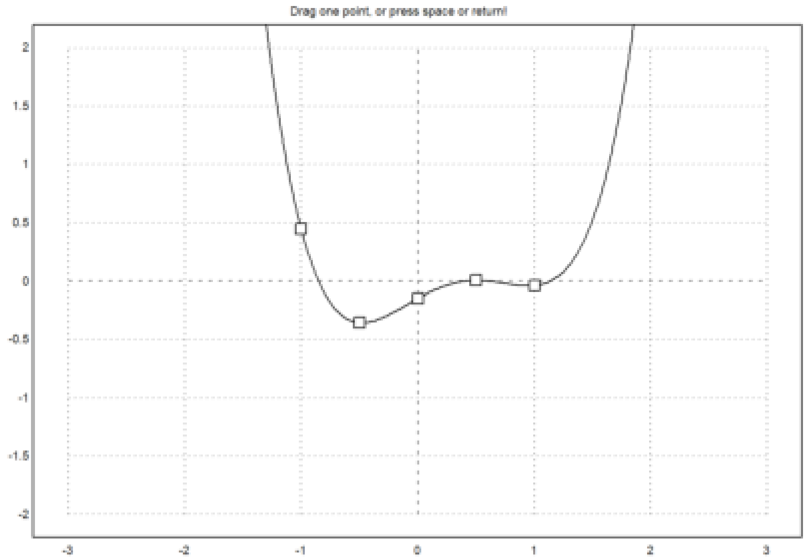
```
  d=interp(xp,yp);
  plot2d("interpval(xp,d,x)";d,xp,r=2);
  plot2d(xp,yp,>points,>add);
  if select>0 then
    plot2d(xp[select],yp[select],color=red,>points,>add);
  endif;
  title("Drag one point, or press space or return!");
endfunction
```

Perhatikan parameter titik koma di plot2d (d dan xp), yang diteruskan ke evaluasi fungsi interp(). Tanpa ini, kita harus menulis fungsi plotinterp() terlebih dahulu, mengakses nilai secara global.

Sekarang kita buat beberapa nilai acak, dan biarkan pengguna menyeret titik-titiknya.

>t=-1:0.5:1; dragpoints(“plotf”,t,random(size(t))-0.5):

Ada juga fungsi yang memplot fungsi lain tergantung pada vektor parameter dan memungkinkan pengguna menyesuaikan parameter tersebut.



Gambar 3.67 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-068.png

Pertama, kita perlu fungsi plot.

>function plotf([a,b]) := plot2d("exp(a*x)*cos(2pi*b*x)",0,2pi;a,b);

Kemudian kita perlu nama untuk parameter, nilai awal, dan matriks rentang nx2, secara opsional baris judul.

Ada slider interaktif, yang dapat mengatur nilai oleh pengguna. Fungsi dragvalues() menyediakan ini.

>dragvalues("plotf",["a","b"],[-1,2],[[-2,2];[1,10]], ...
> heading="Drag these values:",hcolor=black):

Dimungkinkan untuk membatasi nilai yang diseret ke bilangan bulat. Misalnya, kita menulis fungsi plot, yang memplot polinomial Taylor berderajat n ke fungsi kosinus.

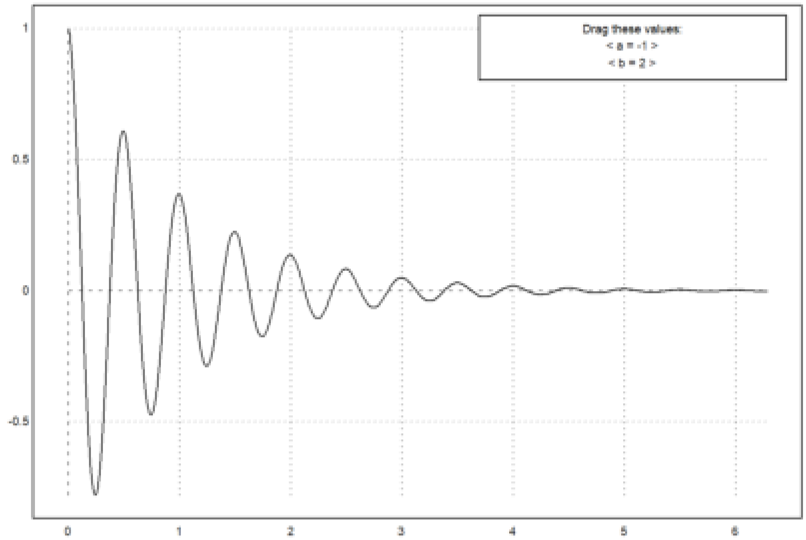
>function plotf(n) ...

```
plot2d("cos(x)",0,2pi,>square,grid=6);
plot2d(&"taylor(cos(x),x,0,@n)",color=blue,>add);
textbox("Taylor polynomial of degree "+n,0.1,0.02,style="t",>left);
endfunction
```

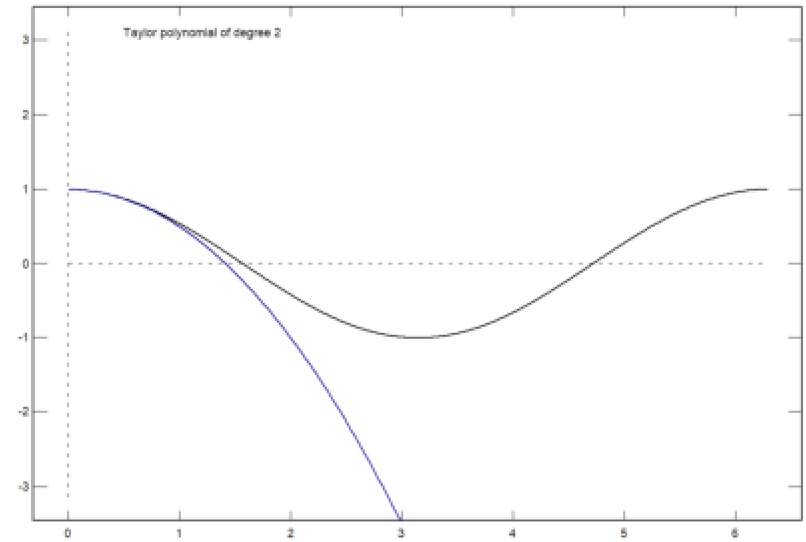
Sekarang kita biarkan derajat n bervariasi dari 0 hingga 20 dalam 20 stop. Hasil dragvalues() digunakan untuk memplot sketsa dengan n ini, dan untuk memasukkan plot ke dalam notebook.

>nd=dragvalues("plotf","degree",2,[0,20],20,y=0.8, ...
> heading="Drag the value:"); ...
> plotf(nd):

Berikut ini adalah demonstrasi sederhana dari fungsi tersebut. Pengguna dapat menggambar di atas



Gambar 3.68 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-069.png



Gambar 3.69 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-070.png

jendela plot, meninggalkan jejak titik-titik.

>function dragtest ...

```
  plot2d(none,r=1,title="Drag with the mouse, or press any key!");
  start=0;
  repeat
    {flag,m,time}=mousedrag();
    if flag==0 then return; endif;
    if flag==2 then
      hold on; mark(m[1],m[2]); hold off;
    endif;
  end
endfunction
```

>dragtest // lihat hasilnya dan cobalah lakukan!

3.10 Gaya Plot 2D

Secara default, EMT menghitung tanda centang sumbu otomatis dan menambahkan label ke setiap tanda centang. Ini dapat diubah dengan parameter grid. Gaya default sumbu dan label dapat dimodifikasi. Selain itu, label dan judul dapat ditambahkan secara manual. Untuk mengatur ulang ke gaya default, gunakan reset().

>aspect();

>figure(3,4); ...
> figure(1); plot2d("x^3-x",grid=0); ... // tidak ada tampilan, bingkai dan sumbu

> figure(2); plot2d("x^3-x",grid=1); ... // terdapat sumbu x-y

> figure(3); plot2d("x^3-x",grid=2); ... // terdapat penanda kecil otomatis

> figure(4); plot2d("x^3-x",grid=3); ... // sumbu x-y dengan label di dalamnya

> figure(5); plot2d("x^3-x",grid=4); ... // tidak ada penanda hanya label

> figure(6); plot2d("x^3-x",grid=5); ... // default tapi tidak ada margin

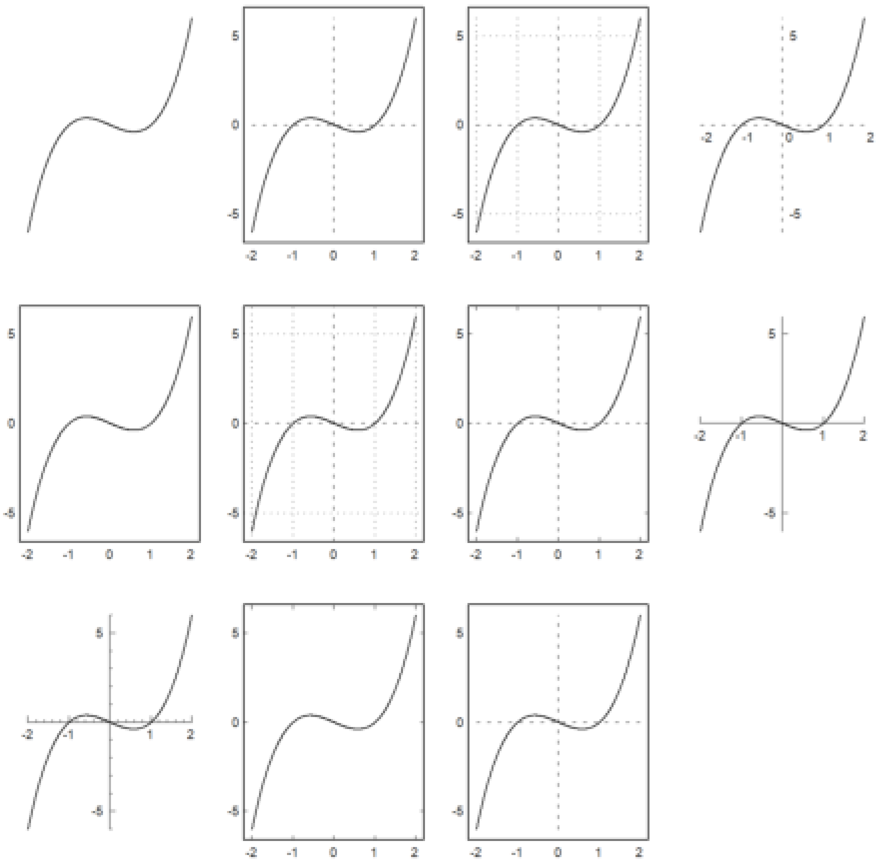
> figure(7); plot2d("x^3-x",grid=6); ... // hanya sumbu dan penanda kecil

> figure(8); plot2d("x^3-x",grid=7); ... // hanya sumbu dan penanda kecil pada sumbu

> figure(9); plot2d("x^3-x",grid=8); ... // hanya sumbu dan penanda kecil terperinci pada sumbu tertentu

> figure(10); plot2d("x^3-x",grid=9); ... // default dengan penanda penanda kecil di dalamnya

> figure(11); plot2d("x^3-x",grid=10); ... // tidak ada penanda kecil, hanya sumbu



Gambar 3.70 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-071.png

> figure(0):

Parameter <frame menonaktifkan bingkai, dan framecolor=blue menyetel bingkai ke warna biru.

Jika Anda menginginkan tanda centang Anda sendiri, Anda dapat menggunakan style=0, dan menambahkan semuanya nanti.

>aspect(1.5);

>plot2d("x^3-x",grid=0); // plot

>frame; xgrid([-1,0,1]); ygrid(0): // add frame and grid

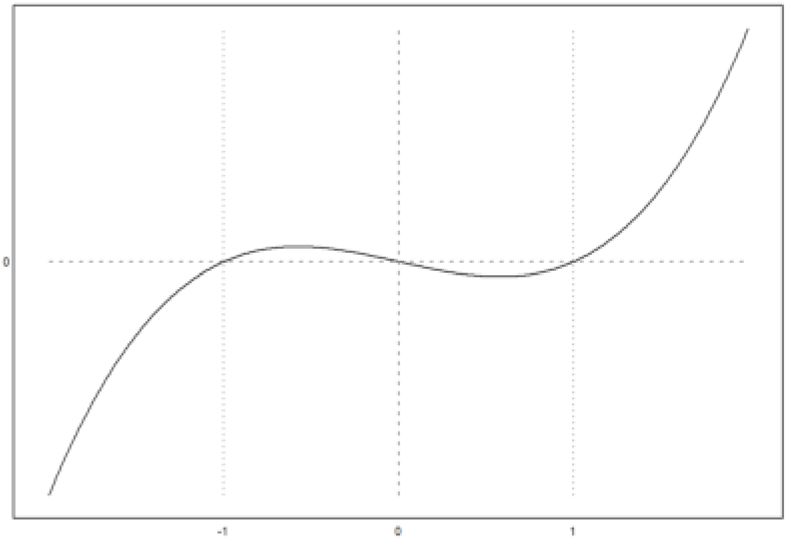
Untuk judul plot dan label sumbu, lihat contoh berikut.

>plot2d("exp(x)",-1,1);

>textcolor(black); // set the text color to black

>title(latex("y=e^x")); // title above the plot

>xlabel(latex("x")); // "x" for x-axis



Gambar 3.71 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-072.png

>ylabel(latex("y"),>vertical); // vertical "y" for y-axis

>label(latex("(0,1)"),0,1,color=blue): // label a point

Sumbu dapat digambar secara terpisah dengan xaxis() dan yaxis().

>plot2d("x^3-x",<grid,<frame);

>xaxis(0,xx=-2:1,style="->"); yaxis(0,yy=-5:5,style="->"):

Teks pada plot dapat diatur dengan label(). Dalam contoh berikut, "lc" berarti tengah bawah. Ini mengatur posisi label relatif terhadap koordinat plot.

>function f(x) &= x^3-x

```
 3
x  - x
```

>plot2d(f,-1,1,>square);

>x0=fmin(f,0,1); // compute point of minimum

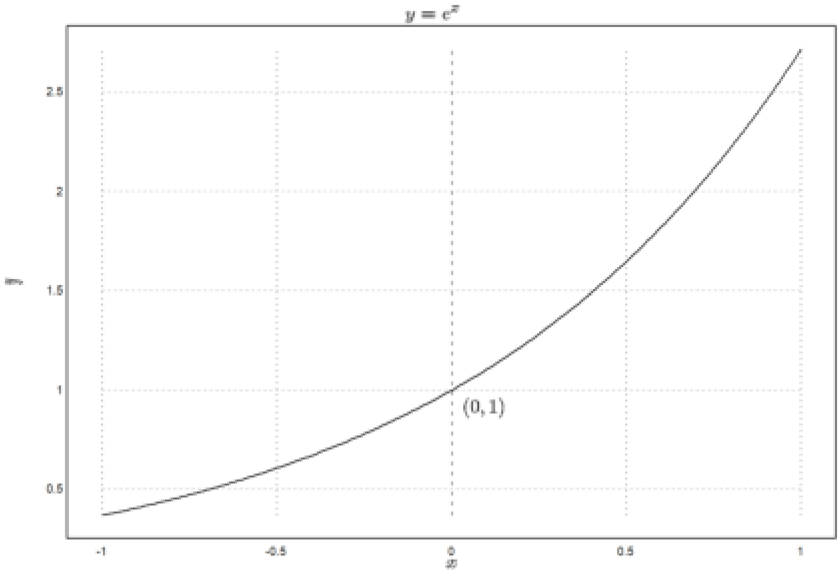
>label("Rel. Min.",x0,f(x0),pos="lc"): // add a label there

Ada juga teks box.

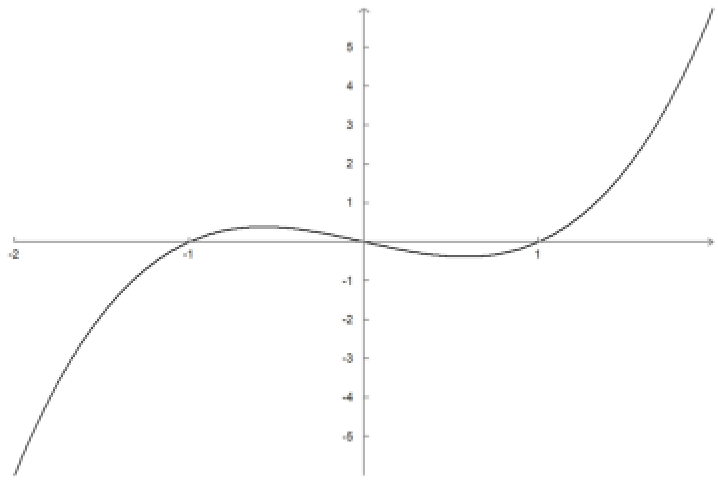
>plot2d(&f(x),-1,1,-2,2); // function

>plot2d(&diff(f(x),x),>add,style="–",color=red); // derivative

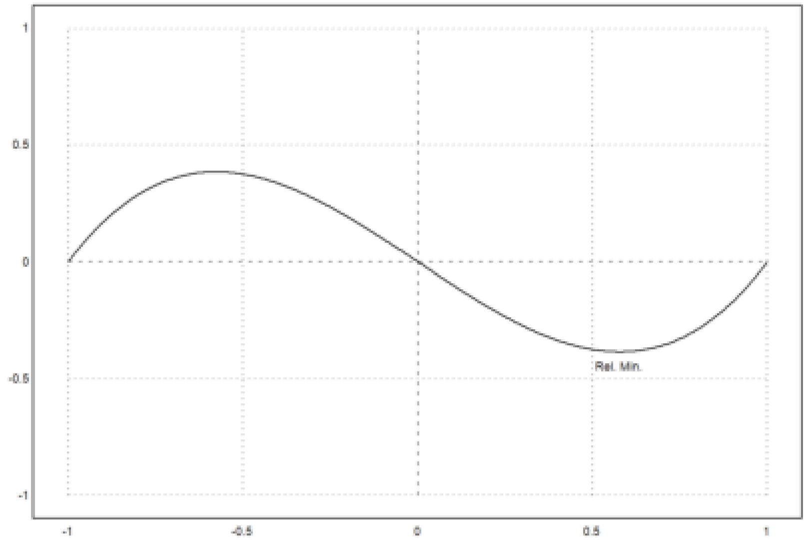
>labelbox(["f","f'"],["-","–"],[black,red]): // label box



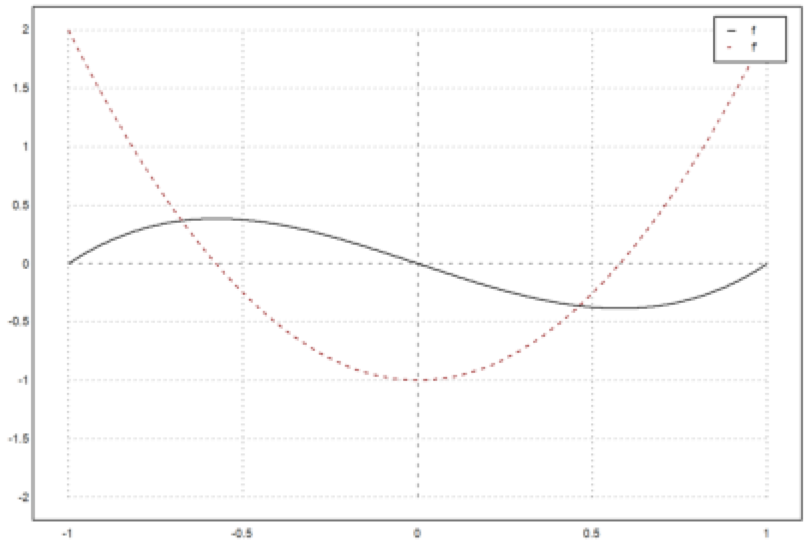
Gambar 3.72 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-073.png



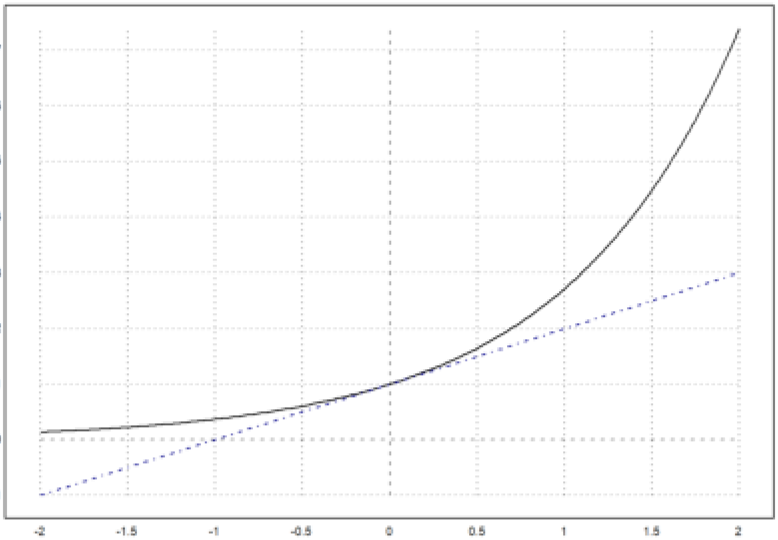
Gambar 3.73 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-074.png



Gambar 3.74 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-075.png



Gambar 3.75 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-076.png



Gambar 3.76 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-077.png

>plot2d([“exp(x)”,“1+x”],color=[black,blue],style=[“-”,“-.-”]):

>gridstyle(“->”,color=gray,textcolor=gray,framecolor=gray); . . .
> plot2d(“x^3-x”,grid=1); . . .
> settitle(“y=x^3-x”,color=black); . . .
> label(“x”,2,0,pos=“bc”,color=gray); . . .
> label(“y”,0,6,pos=“cl”,color=gray); . . .
> reset():

Untuk kontrol yang lebih baik, sumbu x dan sumbu y dapat dilakukan secara manual.

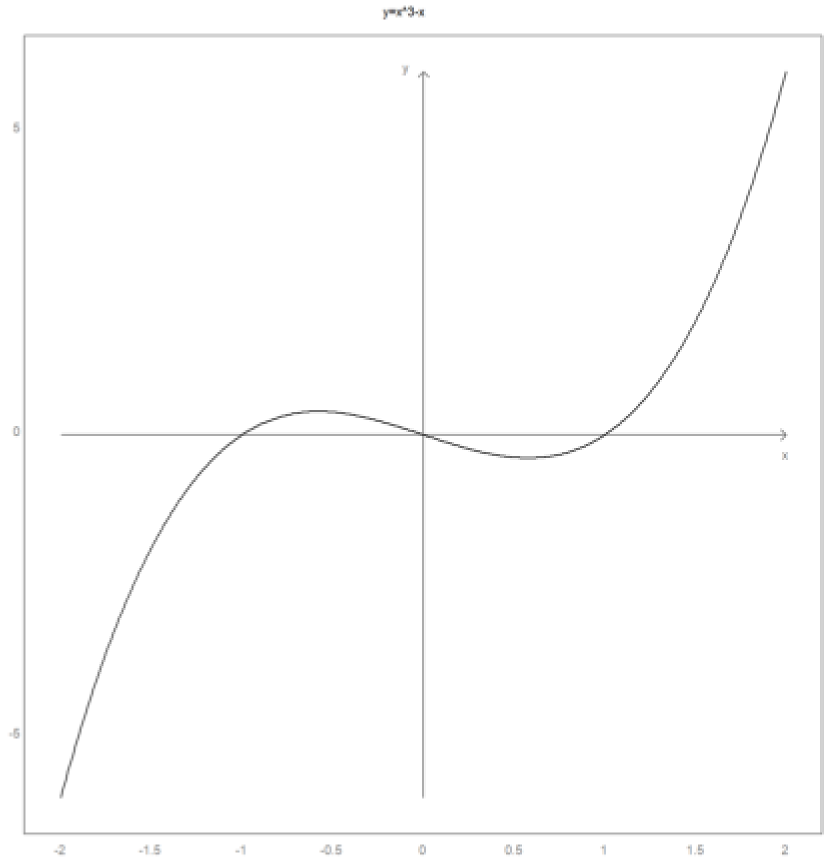
Perintah fullwindow() memperluas jendela plot karena kita tidak lagi memerlukan tempat untuk label di luar jendela plot. Gunakan shrinkwindow() atau reset() untuk mengatur ulang ke default.

>fullwindow; . . .
> gridstyle(color=darkgray,textcolor=darkgray); . . .
> plot2d([“2x”,”1”,”2(-x)”],a=-2,b=2,c=0,d=4,<grid,color=4:6,<frame); . . .
> xaxis(0,-2:1,style=“->”); xaxis(0,2,“x”,<axis); . . .
> yaxis(0,4,“y”,style=“->”); . . .
> yaxis(-2,1:4,>left); . . .
> yaxis(2,2^(-2:2),style=“.”,<left); . . .
> labelbox([“2x”,”1”,”2-x”],colors=4:6,x=0.8,y=0.2); . . .
> reset:

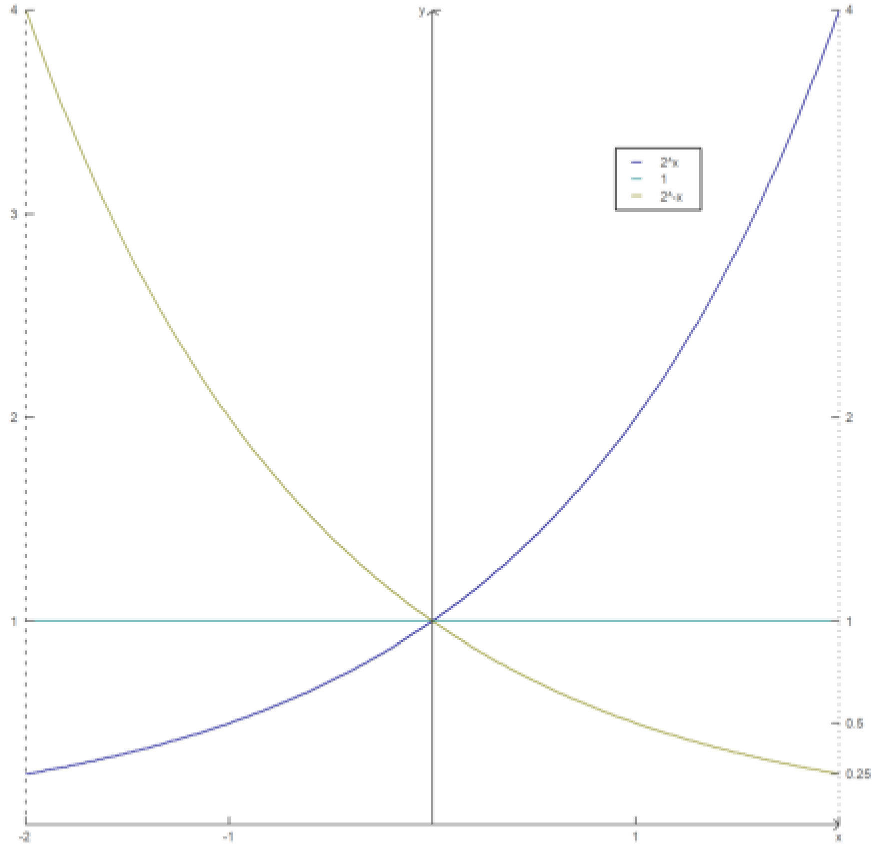
Berikut contoh lain, di mana string Unicode digunakan dan sumbu berada di luar area plot.

>aspect(1.5);

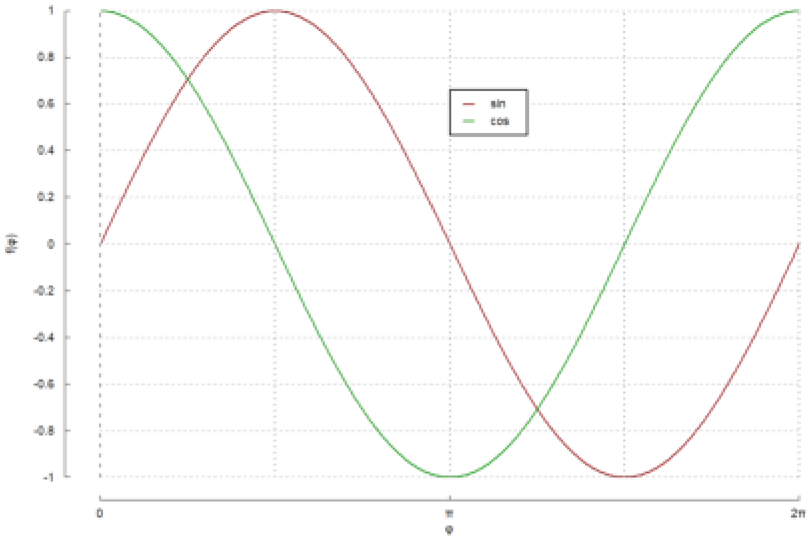
>plot2d([“sin(x)”,“cos(x)”],0,2pi,color=[red,green],<grid,<frame); . . .
> xaxis(-1.1,(0:2)*pi,xt=[“0”,u”“,u”2”],style=“-”,>ticks,>zero); . . .



Gambar 3.77 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-078.png



Gambar 3.78 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-079.png



Gambar 3.79 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-080.png

> xgrid((0:0.5:2)*pi,<ticks); ...
> yaxis(-0.1*pi,-1:0.2:1,style=“-”,>zero,>grid); ...
> labelbox([“sin”,“cos”],colors=[red,green],x=0.5,y=0.2,>left); ...
> xlabel(u”“); ylabel(u”f()“):

3.11 Plotting Data 2D

Jika x dan y adalah vektor data, data ini akan digunakan sebagai koordinat x dan y dari sebuah kurva. Dalam kasus ini, a, b, c, dan d, atau radius r dapat ditentukan, atau jendela plot akan menyesuaikan secara otomatis dengan data. Atau, >square dapat diatur untuk mempertahankan rasio aspek persegi.

Plotting ekspresi hanyalah singkatan untuk plot data. Untuk plot data, Anda memerlukan satu atau beberapa baris nilai-x, dan satu atau beberapa baris nilai-y. Dari rentang dan nilai-x, fungsi plot2d akan menghitung data yang akan diplot, secara default dengan evaluasi adaptif fungsi. Untuk plot titik gunakan “>points”, untuk garis dan titik campuran gunakan “>addpoints”.

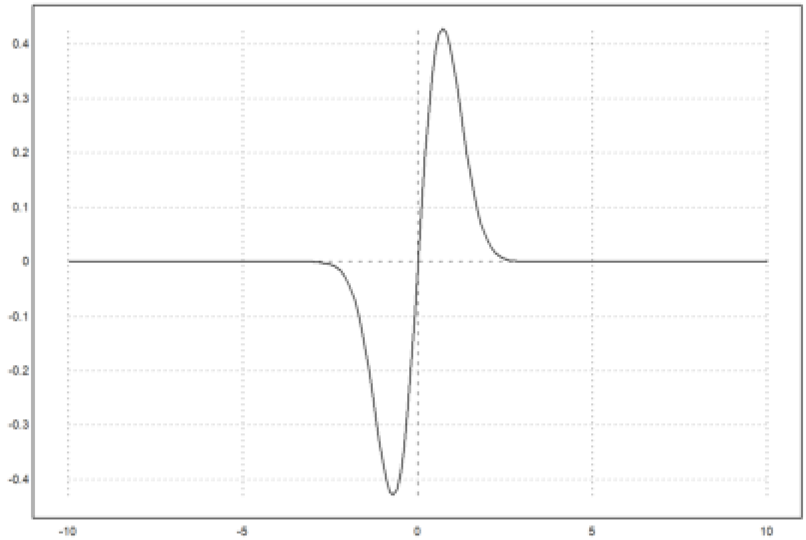
Namun, Anda dapat memasukkan data secara langsung.

- Gunakan vektor baris untuk x dan y untuk satu fungsi.
- Matriks untuk x dan y diplot baris demi baris.

Berikut adalah contoh dengan satu baris untuk x dan y.

>x=-10:0.1:10; y=exp(-x^2)*x; plot2d(x,y):

Data juga dapat diplot sebagai titik. Gunakan points=true untuk ini. Plot bekerja seperti poligon, tetapi hanya menggambar sudutnya.



Gambar 3.80 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-081.png

- style="...": Pilih dari "[]", "<>", "o", ".", "..", "+", "*","[]#",
- "<>#", "o#", "..#", "#", "|".

Untuk memplot kumpulan titik, gunakan >points. Jika warnanya adalah vektor warna, setiap titik

mendapatkan warna yang berbeda. Untuk matriks koordinat dan vektor kolom, warna berlaku untuk baris matriks.

Parameter >addpoints menambahkan titik ke segmen garis untuk plot data.

>xdata=[1,1.5,2.5,3,4]; ydata=[3,3.1,2.8,2.9,2.7]; // data

>plot2d(xdata,ydata,a=0.5,b=4.5,c=2.5,d=3.5,style="."); // lines

>plot2d(xdata,ydata,>points,>add,style="o"): // add points

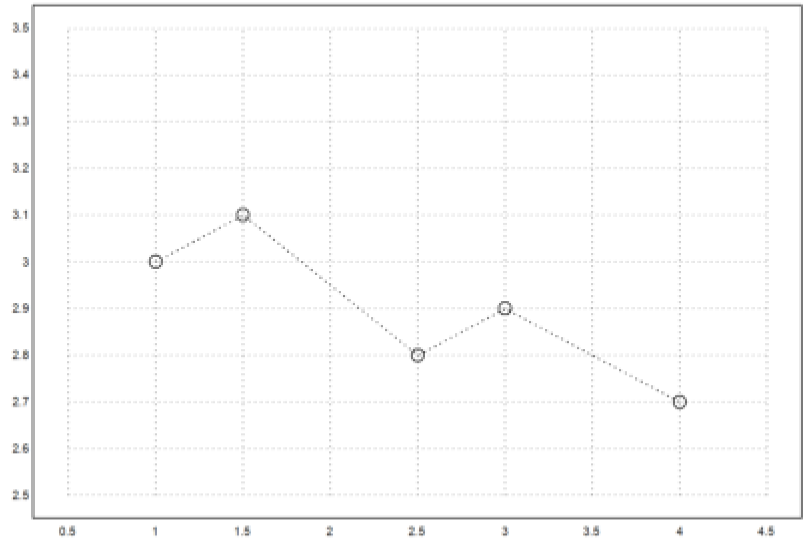
>p=polyfit(xdata,ydata,1); // get regression line

>plot2d("polyval(p,x)",>add,color=red): // add plot of line

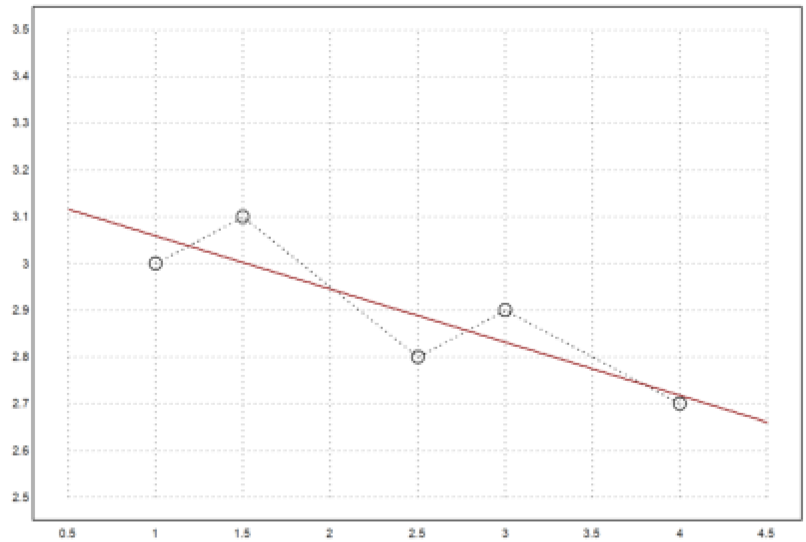
3.12 Menggambar Daerah Yang Berbatasan Kurva

Plot data sebenarnya adalah poligon. Kita juga dapat memplot kurva atau kurva terisi.

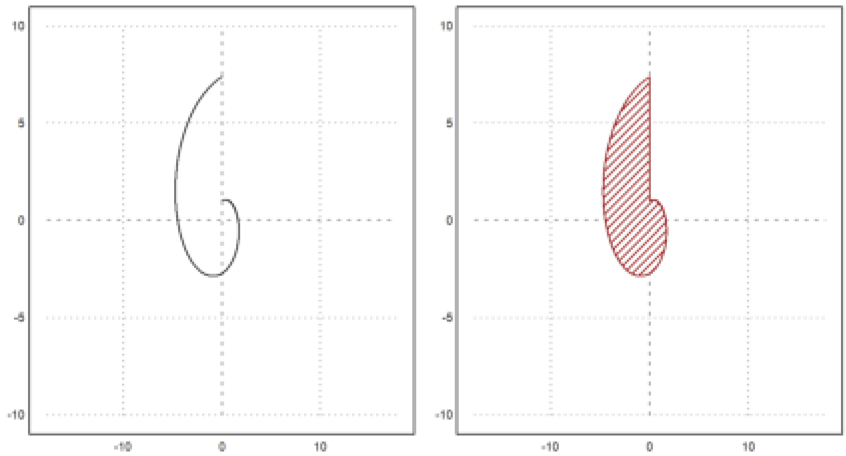
- fillex=benar mengisi plot.
- style="...": Pilih dari "#", "/", "","/".
- fillcolor: Lihat di atas untuk warna yang tersedia.



Gambar 3.81 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-082.png



Gambar 3.82 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-083.png



Gambar 3.83 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-084.png

Warna isian ditentukan oleh argumen “fillcolor”, dan pada <outline opsional mencegah penggambaran batas untuk semua gaya kecuali yang default.

>t=linspace(0,2pi,1000); // parameter for curve

>x=sin(t)*exp(t/pi); y=cos(t)*exp(t/pi); // x(t) and y(t)

>figure(1,2); aspect(16/9)

>figure(1); plot2d(x,y,r=10); // plot curve

>figure(2); plot2d(x,y,r=10,>filled,style="/",fillcolor=red); // fill curve

>figure(0):

Pada contoh berikut ini kami memplot elips yang terisi dan dua segi enam yang terisi menggunakan kurva tertutup dengan 6 titik dengan gaya isian yang berbeda.

>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(x),cos(x)*0.5,r=1,>filled,style="/"):

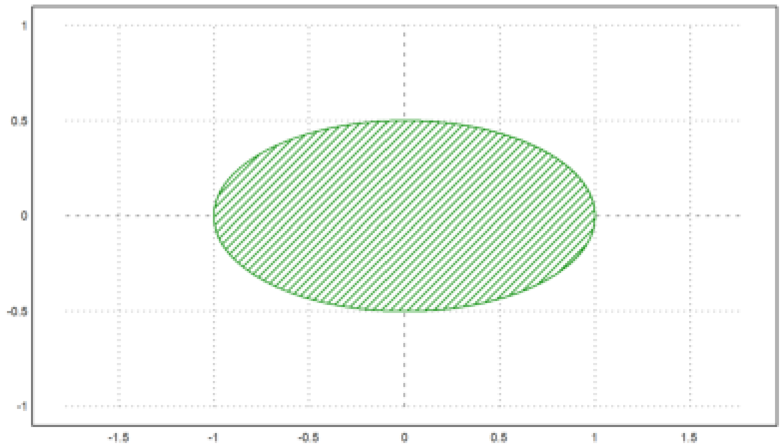
>t=linspace(0,2pi,6); . . .
> plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="/",fillcolor=red,r=1.2):

>t=linspace(0,2pi,6); plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="#"):

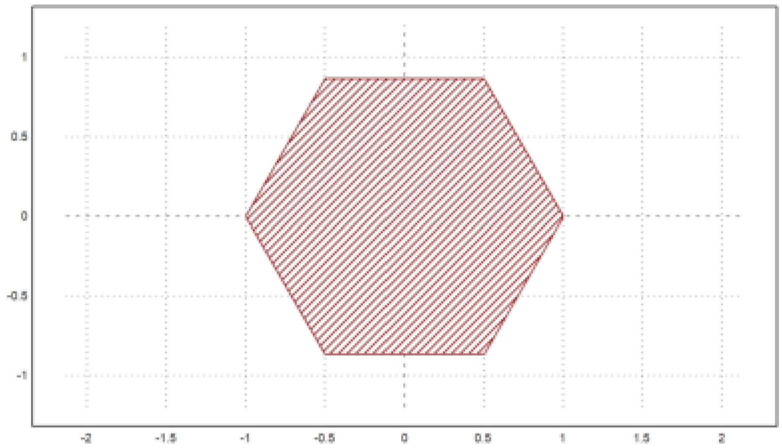
Contoh lain adalah septagon, yang kita buat dengan 7 titik pada lingkaran satuan.

>t=linspace(0,2pi,7); . . .
> plot2d(cos(t),sin(t),r=1,>filled,style="/",fillcolor=red):

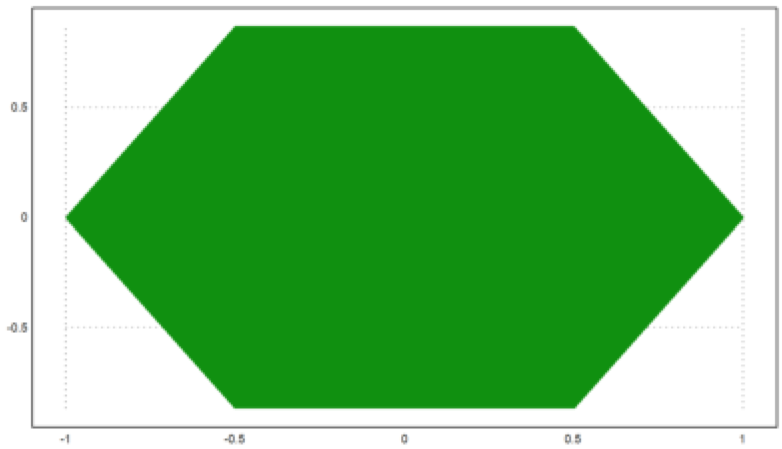
Berikut ini adalah himpunan nilai maksimal dari empat kondisi linier yang kurang dari atau sama dengan 3. Ini adalah A[k].v<=3 untuk semua baris A. Untuk mendapatkan sudut yang bagus, kita menggunakan n yang relatif besar.



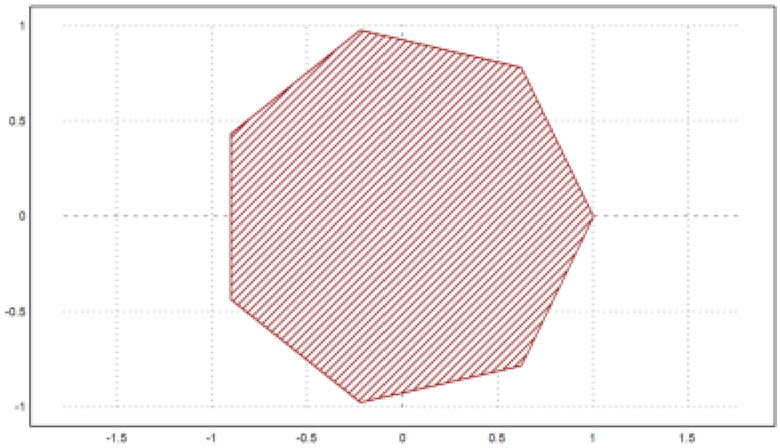
Gambar 3.84 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-085.png



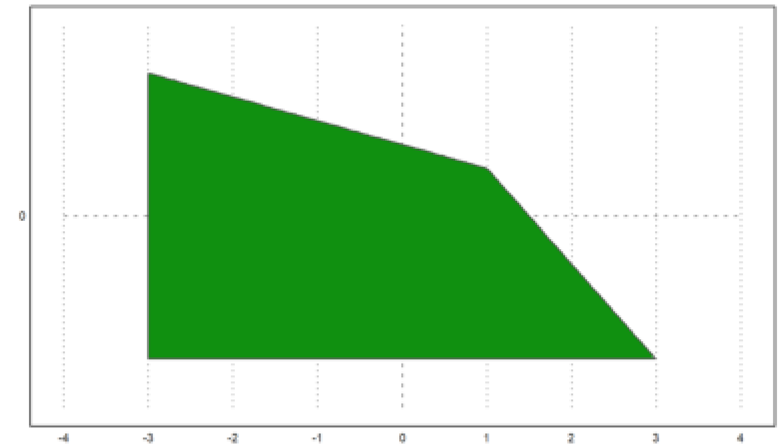
Gambar 3.85 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-086.png



Gambar 3.86 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-087.png



Gambar 3.87 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-088.png



Gambar 3.88 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-089.png

>A=[2,1;1,2;-1,0;0,-1]

```
            2             1
            1             2
           -1             0
            0            -1
```

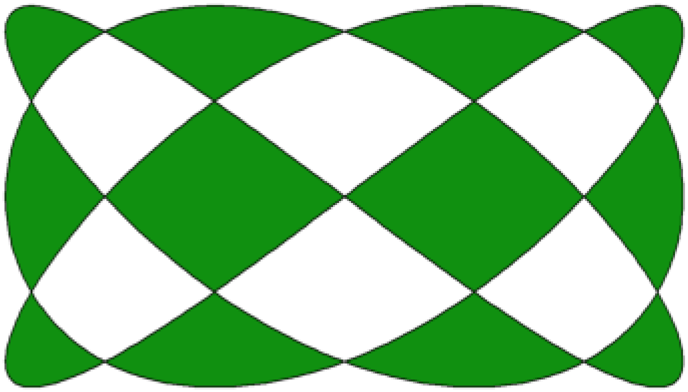
>function f(x,y) := max([x,y].A');

>plot2d("f",r=4,level=[0;3],color=green,n=111):

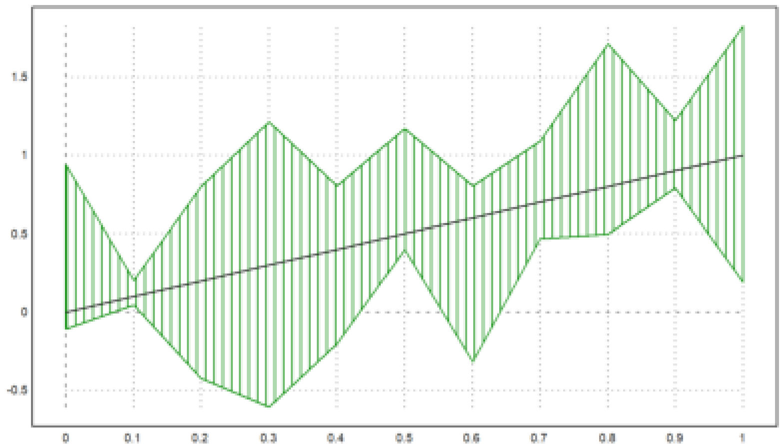
Poin utama dari bahasa matriks adalah memungkinkan pembuatan tabel fungsi dengan mudah.

>t=linspace(0,2pi,1000); x=cos(3*t); y=sin(4*t);

Sekarang kita memiliki vektor nilai x dan y. plot2d() dapat memplot nilai-nilai ini sebagai kurva



Gambar 3.89 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-090.png



Gambar 3.90 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-091.png

yang menghubungkan titik-titik. Plot dapat diisi. Dalam kasus ini, hasilnya akan bagus karena aturan lilitan, yang digunakan untuk pengisian.

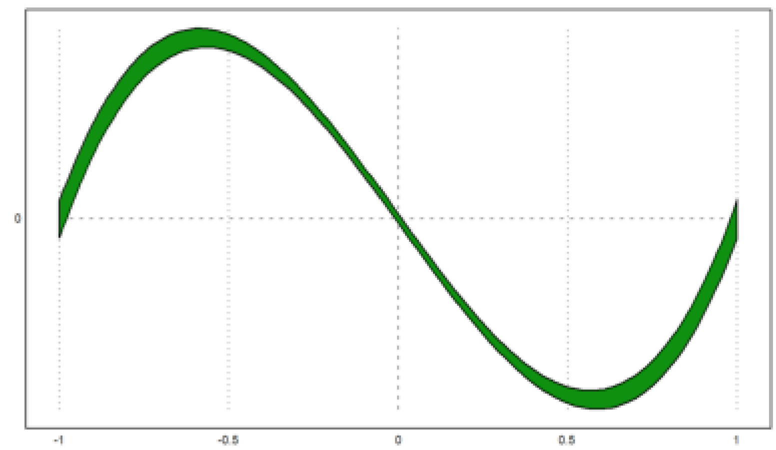
```
>plot2d(x,y,<grid,<frame,>filled):
```

Vektor interval diplot terhadap nilai x sebagai daerah terisi antara nilai interval yang lebih rendah dan lebih tinggi.

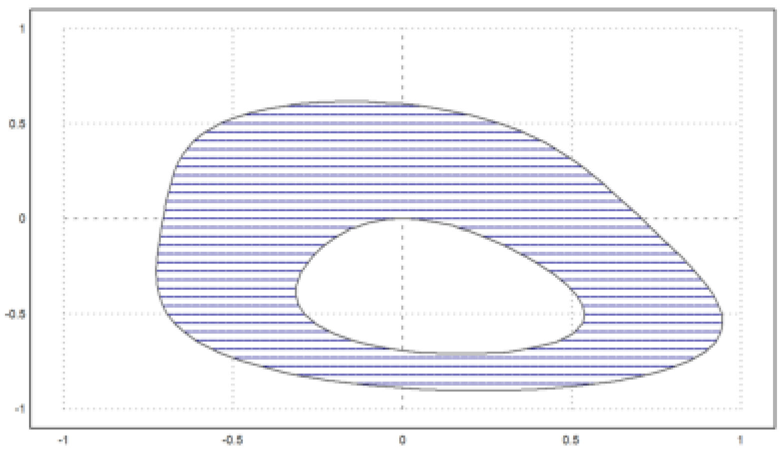
Hal ini dapat berguna untuk memplot kesalahan perhitungan. Namun, hal ini juga dapat digunakan untuk memplot kesalahan statistik.

```
>t=0:0.1:1; ...
> plot2d(t,interval(t-random(size(t)),t+random(size(t))),style="|"); ...
> plot2d(t,t,add=true):
```

Jika x adalah vektor yang diurutkan, dan y adalah vektor interval, maka plot2d akan memplot rentang interval yang terisi pada bidang. Gaya isiannya sama dengan gaya poligon.



Gambar 3.91 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-092.png



Gambar 3.92 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-093.png

>t=-1:0.01:1; x=$_{t-0.01,t+0.01}$; y=x^3-x;

>plot2d(t,y):

Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

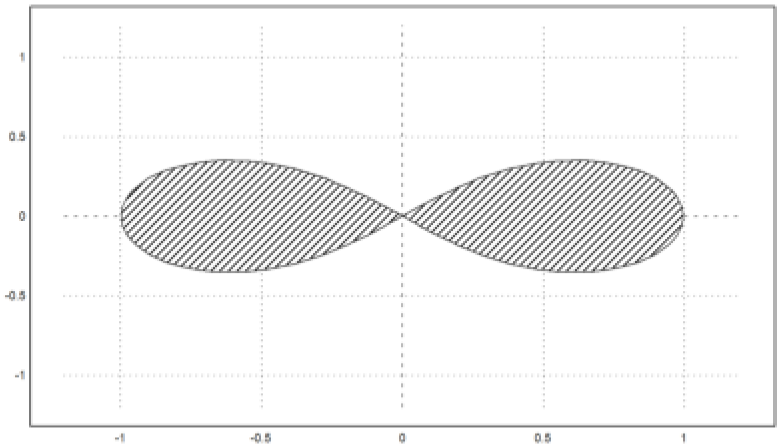
>expr := "2*x$^{2+x*y+3*y}$4+y"; // define an expression f(x,y)

>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1

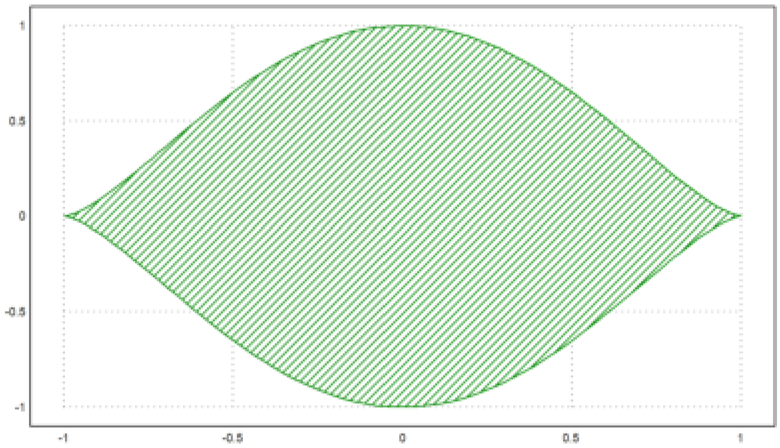
Kita juga dapat mengisi rentang nilai seperti

>plot2d("(x^{2+y}2)$^{2-x}$2+y^2",r=1.2,level=[-1;0],style="/"):

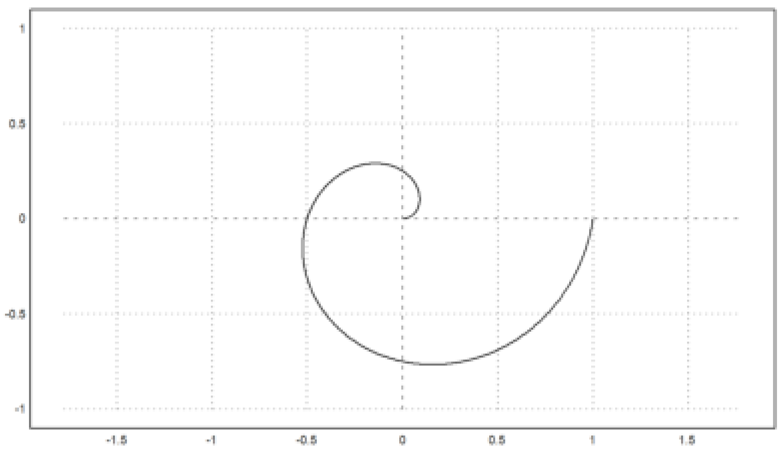
>plot2d("cos(x)","sin(x)^3",xmin=0,xmax=2pi,>filled,style="/"):



Gambar 3.93 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-094.png



Gambar 3.94 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-095.png



Gambar 3.95 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-096.png

3.13 Grafik Fungsi Parametrik

Nilai-nilai x tidak perlu diurutkan. (x,y) hanya menggambarkan sebuah kurva. Jika x diurutkan, kurva tersebut adalah grafik dari sebuah fungsi.

Dalam contoh berikut, kita memplot spiral

Kita perlu menggunakan banyak titik agar terlihat halus atau fungsi adaptive() untuk mengevaluasi ekspresi (lihat fungsi adaptive() untuk detail lebih lanjut).

>t=linspace(0,1,1000); ...
> plot2d(t*cos(2*pi*t),t*sin(2*pi*t),r=1):

Atau, ada kemungkinan untuk menggunakan dua ekspresi untuk kurva. Berikut ini memplot kurva yang sama seperti di atas.

>plot2d("x*cos(2*pi*x)","x*sin(2*pi*x)",xmin=0,xmax=1,r=1):

>t=linspace(0,1,1000); r=exp(-t); x=r*cos(2pi*t); y=r*sin(2pi*t);

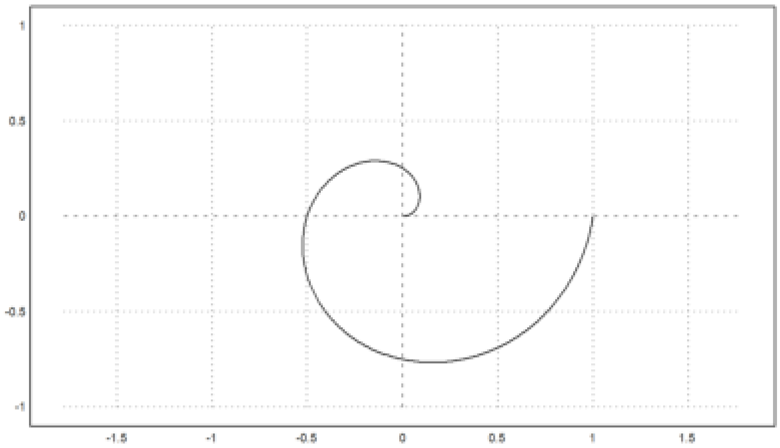
>plot2d(x,y,r=1):

Pada contoh berikutnya, kita memplot kurva dengan

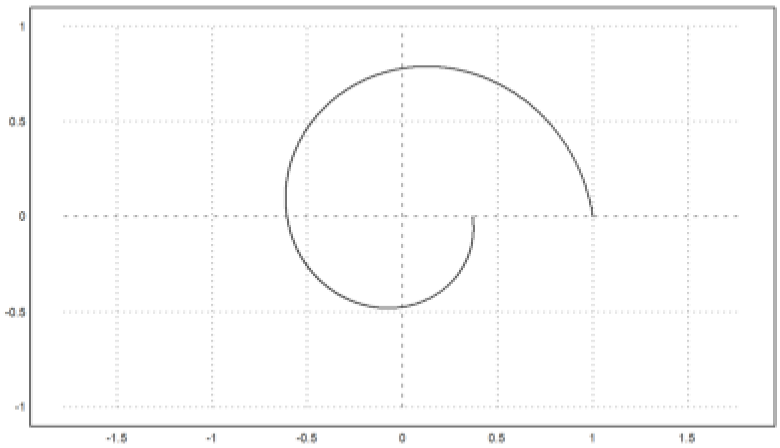
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
> plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5):

3.14 Menggambar Grafik Bilangan Kompleks

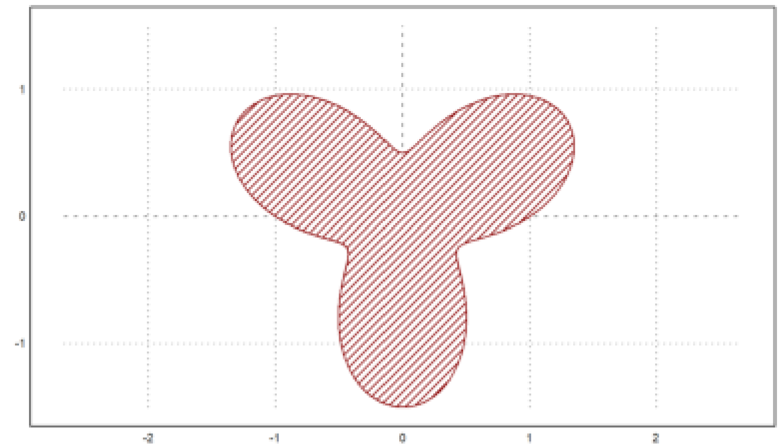
Rangkaian bilangan kompleks juga dapat diplot. Kemudian titik-titik grid akan dihubungkan. Jika sejumlah garis grid ditentukan (atau vektor garis grid 1x2) dalam argumen cgrid, hanya garis-garis grid tersebut yang terlihat.



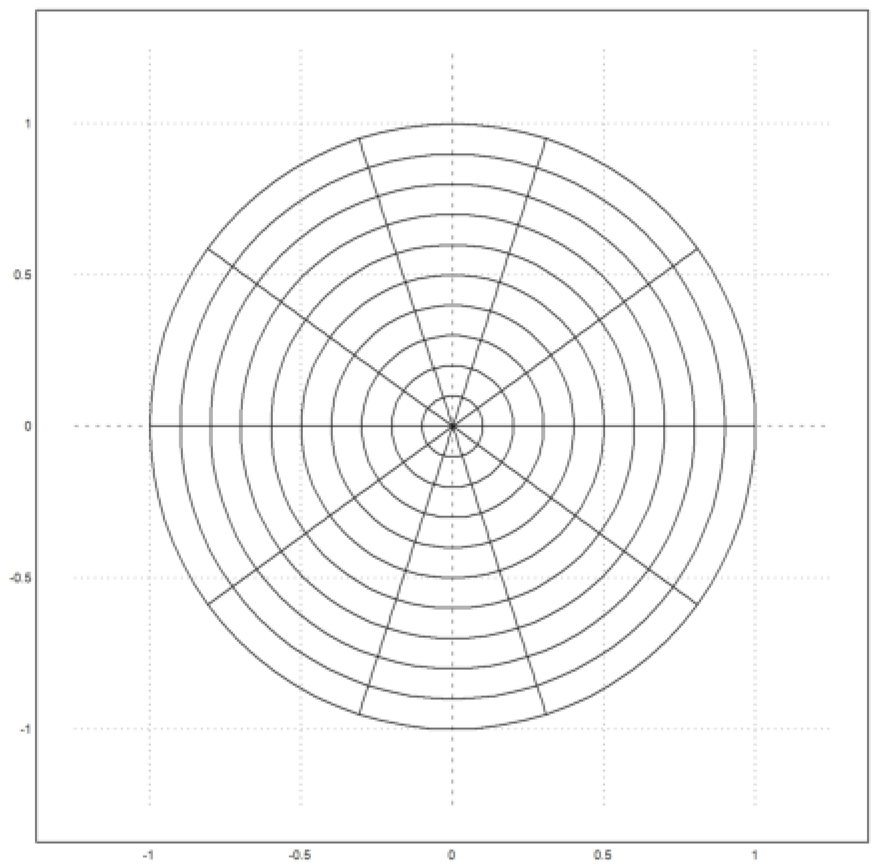
Gambar 3.96 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-097.png



Gambar 3.97 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-098.png



Gambar 3.98 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-099.png



Gambar 3.99 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-100.png

Matriks bilangan kompleks akan secara otomatis diplot sebagai grid dalam bidang kompleks.

Dalam contoh berikut, kami memplot gambar lingkaran satuan di bawah fungsi eksponensial. Parameter cgrid menyembunyikan beberapa kurva grid.

>aspect(); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,80)'; z=r*exp(I*a);...
> plot2d(z,a=-1.25,b=1.25,c=-1.25,d=1.25,cgrid=10):

>aspect(1.25); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,200)'; z=r*exp(I*a);

>plot2d(exp(z),cgrid=[40,10]):

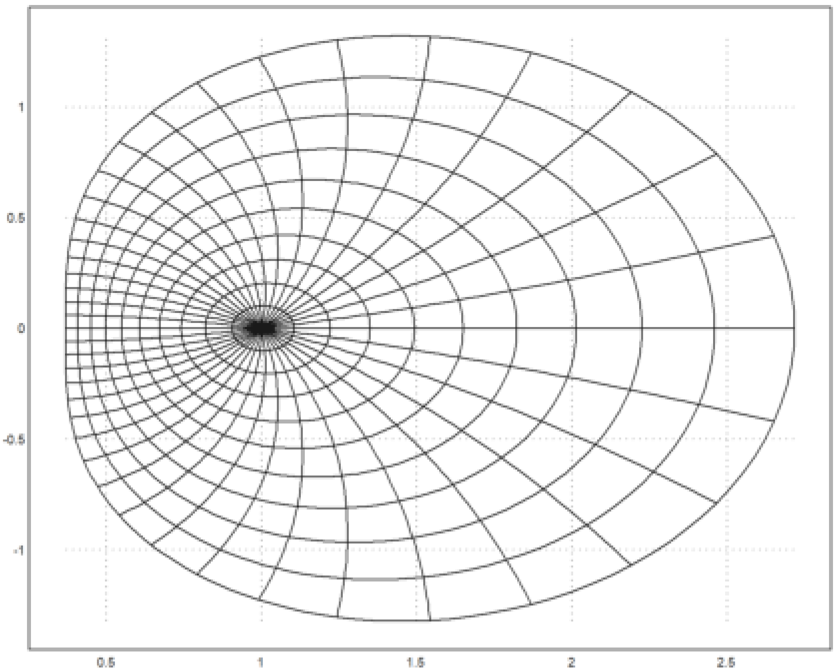
>r=linspace(0,1,10); a=linspace(0,2pi,40)'; z=r*exp(I*a);

>plot2d(exp(z),>points,>add):

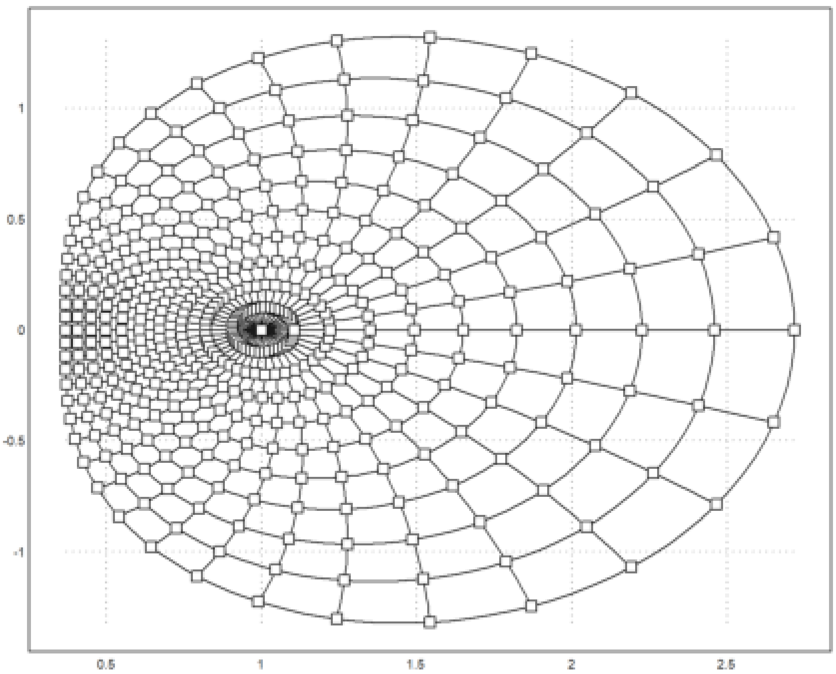
Vektor bilangan kompleks secara otomatis diplot sebagai kurva pada bidang kompleks dengan bagian riil dan bagian imajiner.

Dalam contoh, kita memplot lingkaran satuan dengan

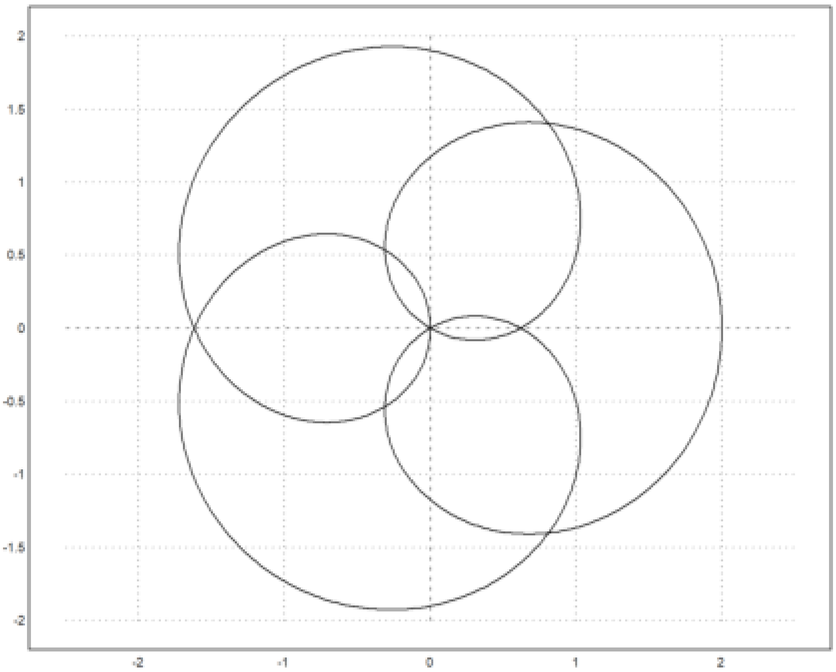
>t=linspace(0,2pi,1000); ...
> plot2d(exp(I*t)+exp(4*I*t),r=2):



Gambar 3.100 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-101.png



Gambar 3.101 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-102.png



Gambar 3.102 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-103.png

3.15 Plot Statistik

Ada banyak fungsi yang dikhususkan pada plot statistik. Salah satu plot yang sering digunakan adalah plot kolom.

Penjumlahan kumulatif dari nilai-nilai berdistribusi normal 0-1 menghasilkan pergerakan acak.

>plot2d(cumsum(randnormal(1,1000))):

Menggunakan dua baris menunjukkan jalan dalam dua dimensi.

>X=cumsum(randnormal(2,1000)); plot2d(X[1],X[2]):

>columnsplot(cumsum(random(10)),style="/",color=blue):

Ia juga dapat menampilkan string sebagai label.

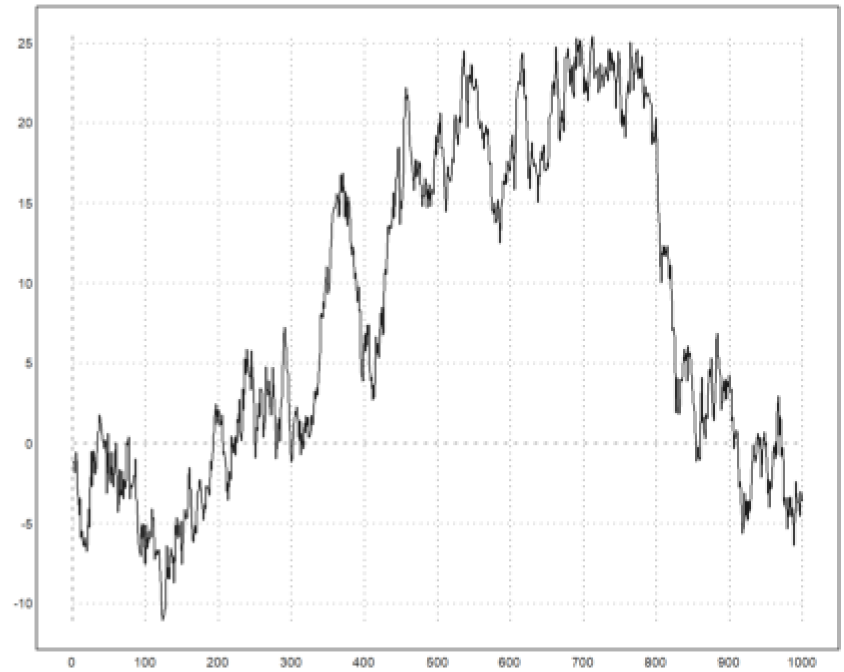
>months=["Jan","Feb","Mar","Apr","May","Jun", ...
> "Jul","Aug","Sep","Oct","Nov","Dec"];

>values=[10,12,12,18,22,28,30,26,22,18,12,8];

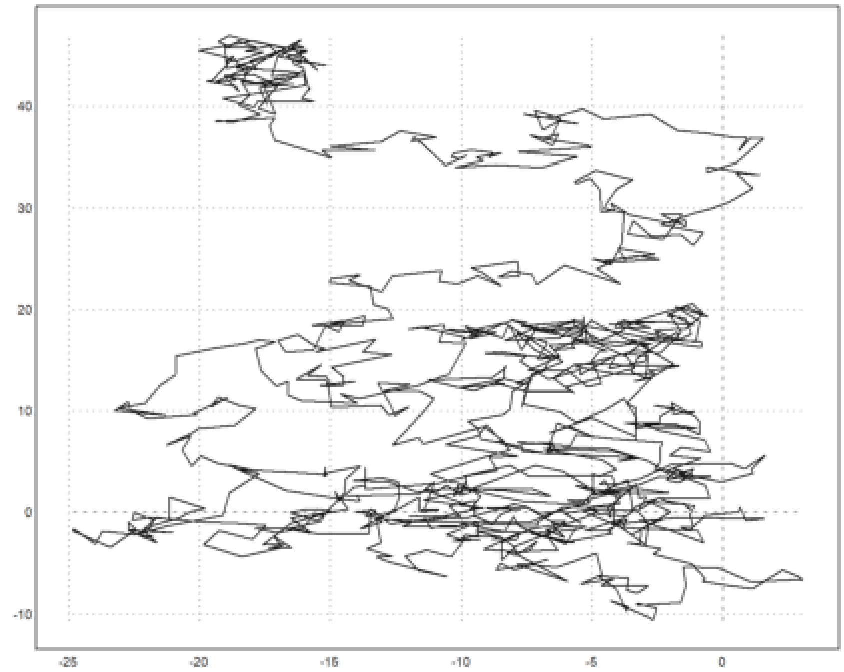
>columnsplot(values,lab=months,color=red,style="-");

>title("Temperature"):

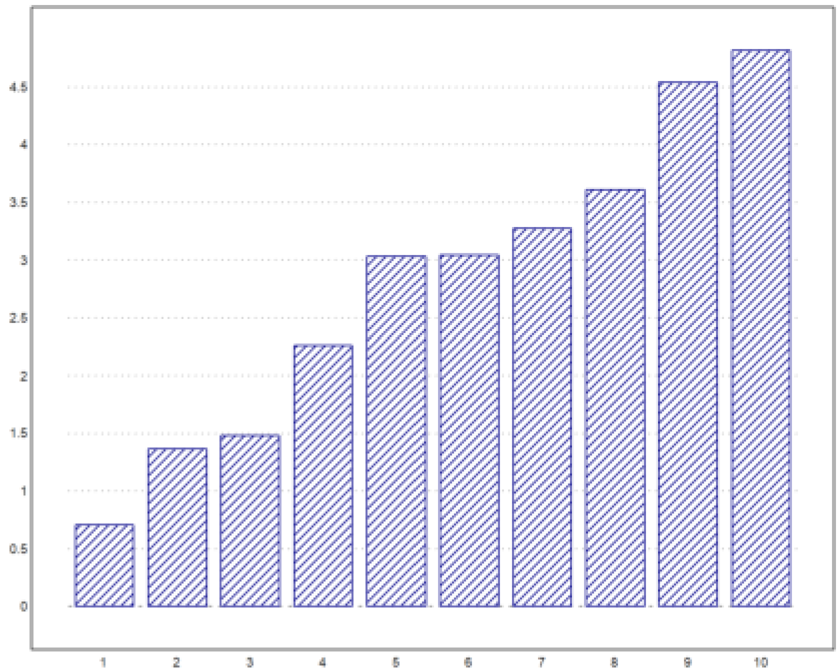
>k=0:10;



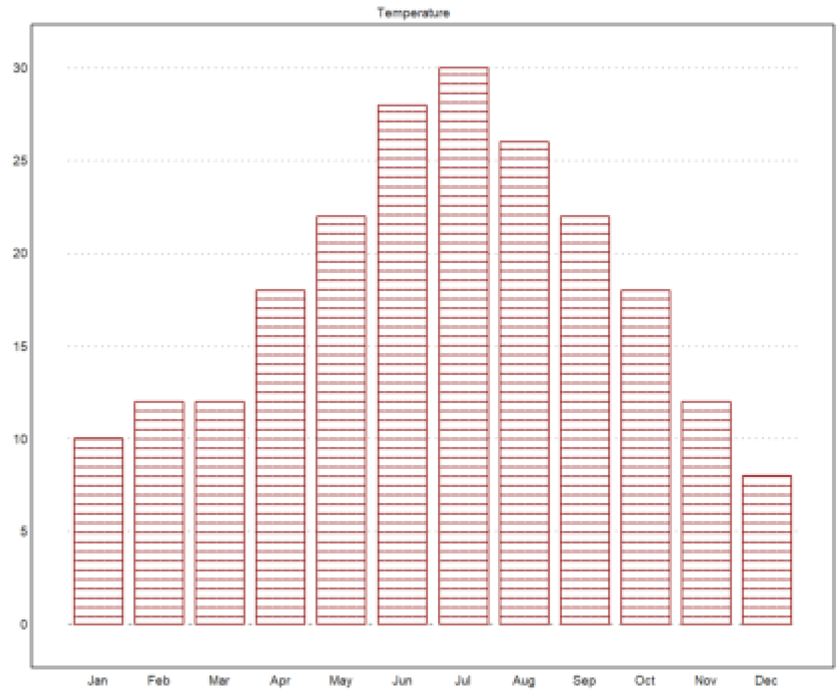
Gambar 3.103 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-104.png



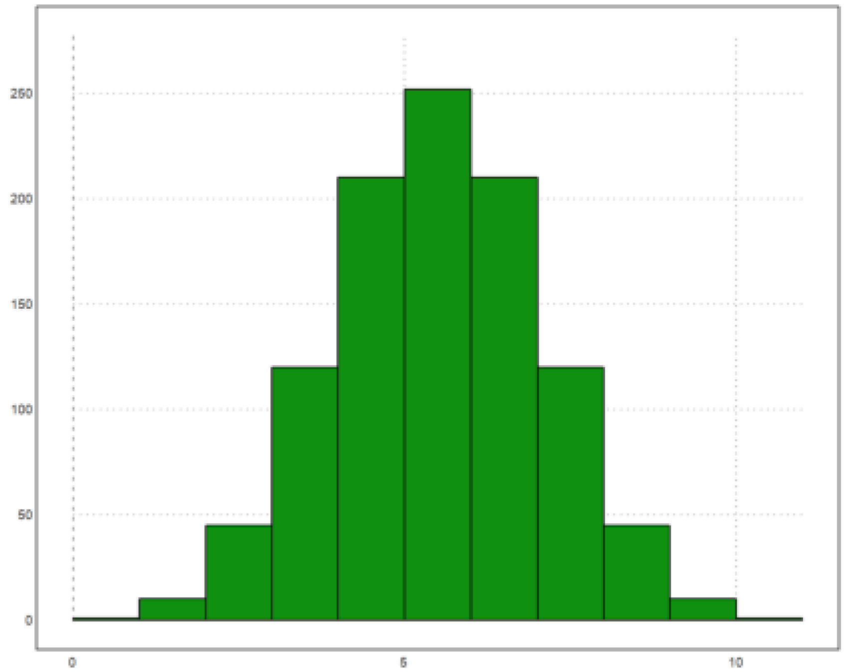
Gambar 3.104 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-105.png



Gambar 3.105 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-106.png



Gambar 3.106 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-107.png



Gambar 3.107 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-108.png

>plot2d(k,bin(10,k),>bar):

>plot2d(k,bin(10,k)); plot2d(k,bin(10,k),>points,>add):

>plot2d(normal(1000),normal(1000),>points,grid=6,style="..."):

>plot2d(normal(1,1000),>distribution,style="O"):

>plot2d("qnormal",0,5;2.5,0.5,>filled):

Untuk memplot distribusi statistik eksperimental, Anda dapat menggunakan distribution=n dengan plot2d.

>w=randexponential(1,1000); // exponential distribution

>plot2d(w,>distribution): // or distribution=n with n intervals

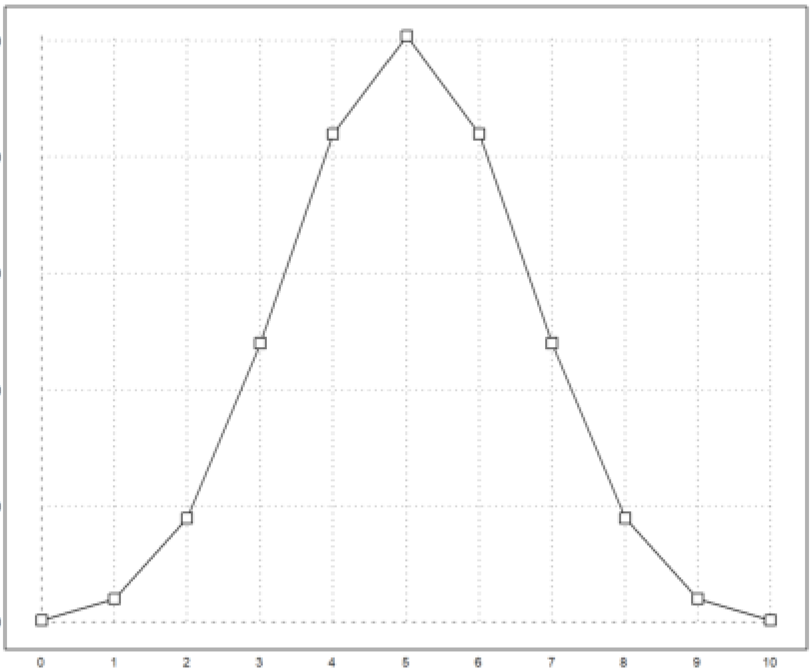
Atau Anda dapat menghitung distribusi dari data dan memplot hasilnya dengan >bar di plot3d, atau dengan plot kolom.

>w=normal(1000); // 0-1-normal distribution

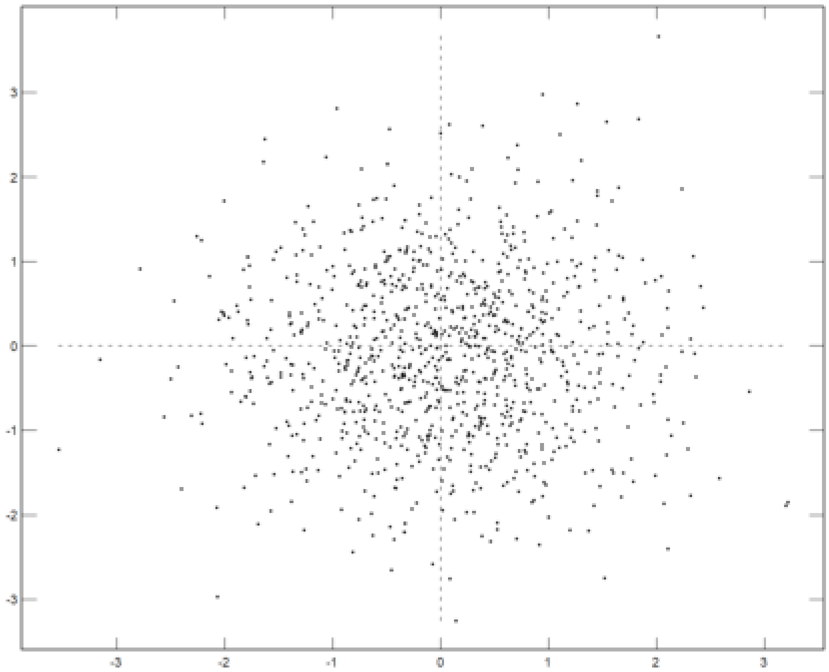
>{x,y}=histo(w,10,v=[-6,-4,-2,-1,0,1,2,4,6]); // interval bounds v

>plot2d(x,y,>bar):

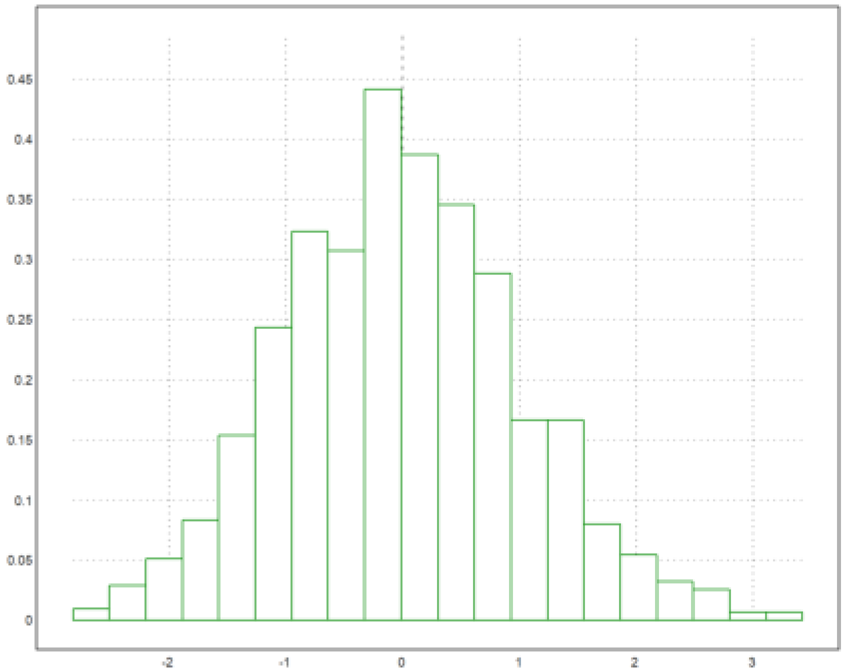
Fungsi statplot() mengatur gaya dengan string sederhana.



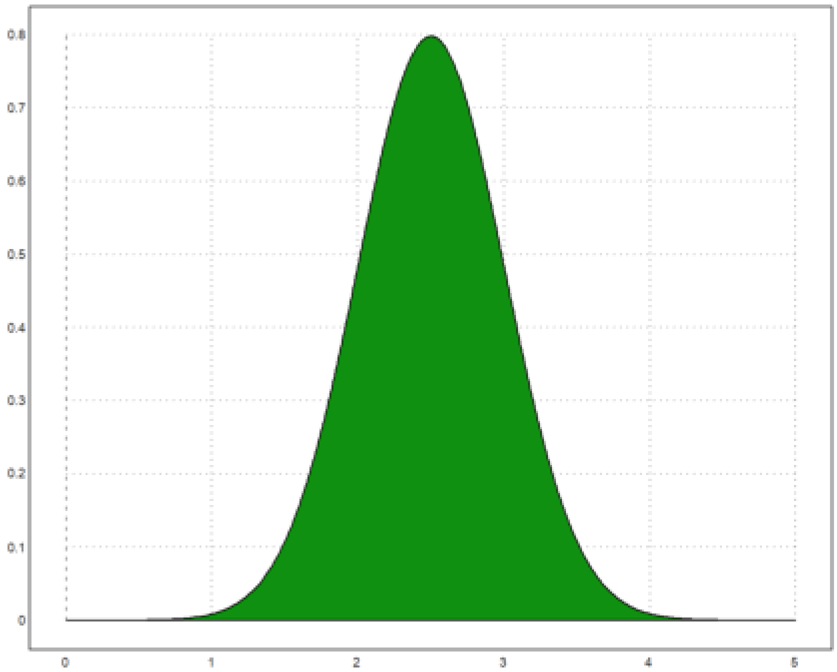
Gambar 3.108 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-109.png



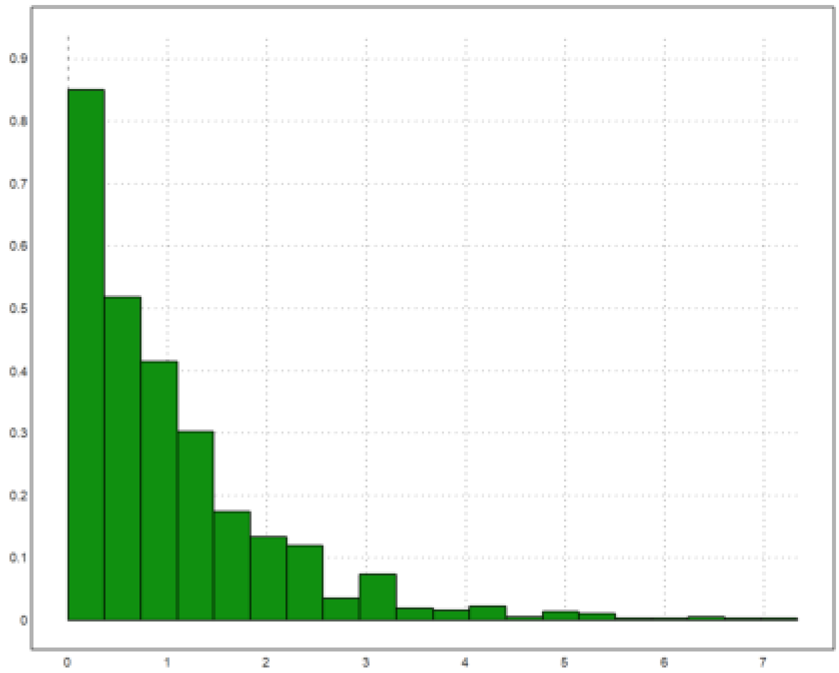
Gambar 3.109 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-110.png



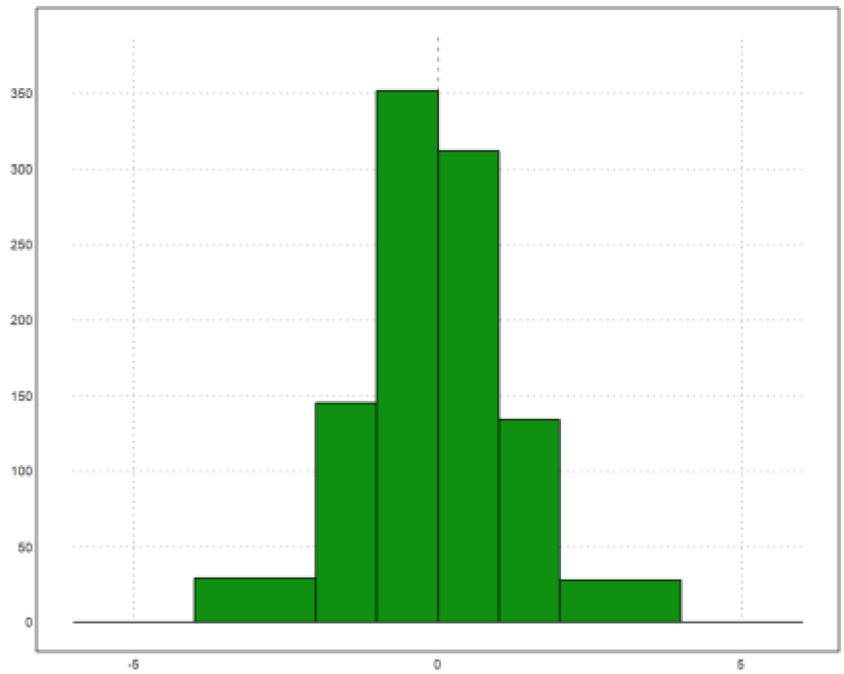
Gambar 3.110 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-111.png



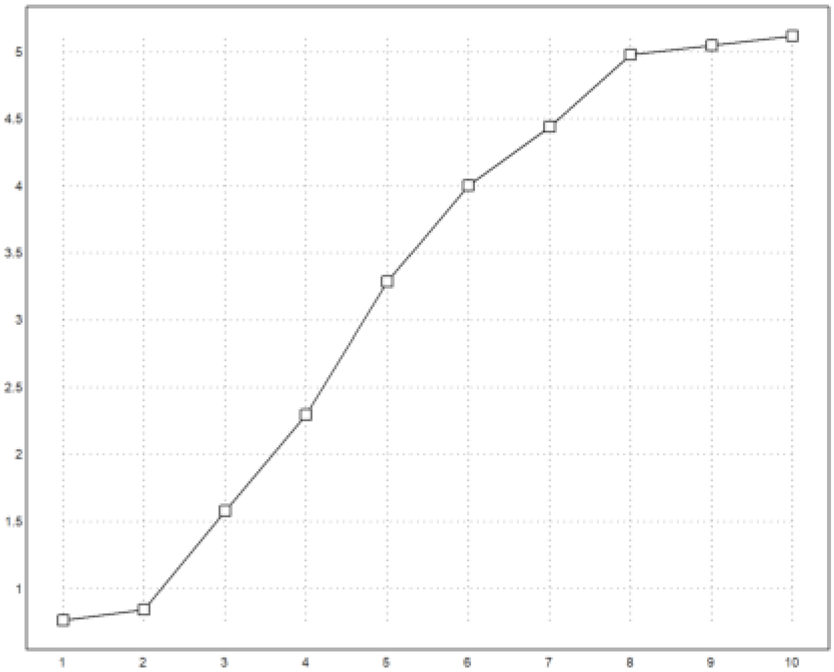
Gambar 3.111 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-112.png



Gambar 3.112 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-113.png



Gambar 3.113 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-114.png



Gambar 3.114 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-115.png

>statplot(1:10,cumsum(random(10)),“b”):

>n=10; i=0:n; . . .
> plot2d(i,bin(n,i)/2^n,a=0,b=10,c=0,d=0.3); . . .
> plot2d(i,bin(n,i)/2^n,points=true,style=“ow”,add=true,color=blue):

Selain itu, data dapat diplot sebagai batang. Dalam kasus ini, x harus diurutkan dan satu elemen lebih panjang dari y. Batang akan memanjang dari x[i] ke x[i+1] dengan nilai y[i]. Jika x memiliki ukuran yang sama dengan y, maka akan memanjang satu elemen dengan spasi terakhir.

Gaya isian dapat digunakan seperti di atas.

>n=10; k=bin(n,0:n); . . .
> plot2d(-0.5:n+0.5,k,bar=true,fillcolor=lightgray):

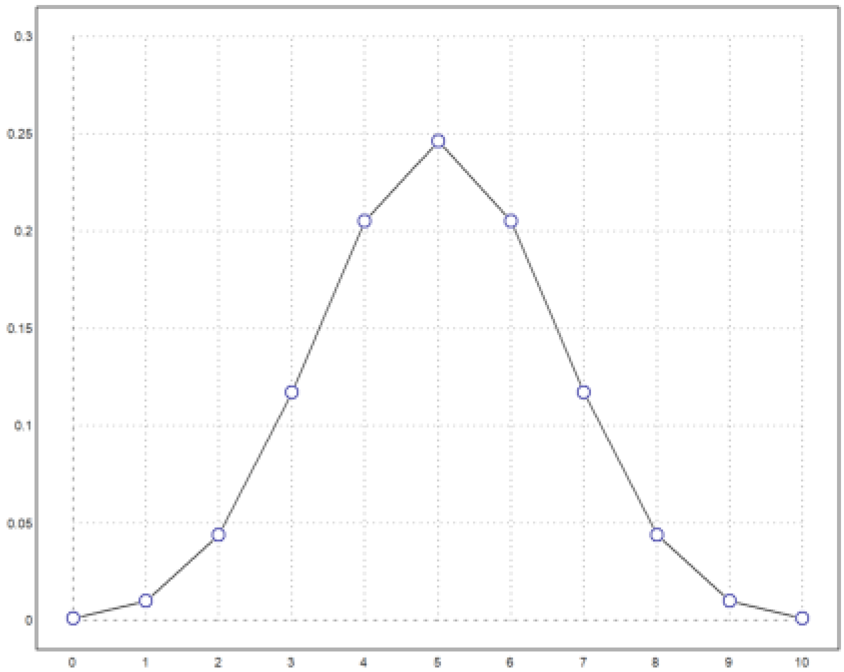
Data untuk diagram batang (batang=1) dan histogram (histogram=1) dapat diberikan secara eksplisit dalam xv dan yv, atau dapat dihitung dari distribusi empiris dalam xv dengan >distribusi (atau distribusi=n). Histogram nilai xv akan dihitung secara otomatis dengan >histogram. Jika >even ditentukan, nilai xv akan dihitung dalam interval integer.

>plot2d(normal(10000),distribution=50):

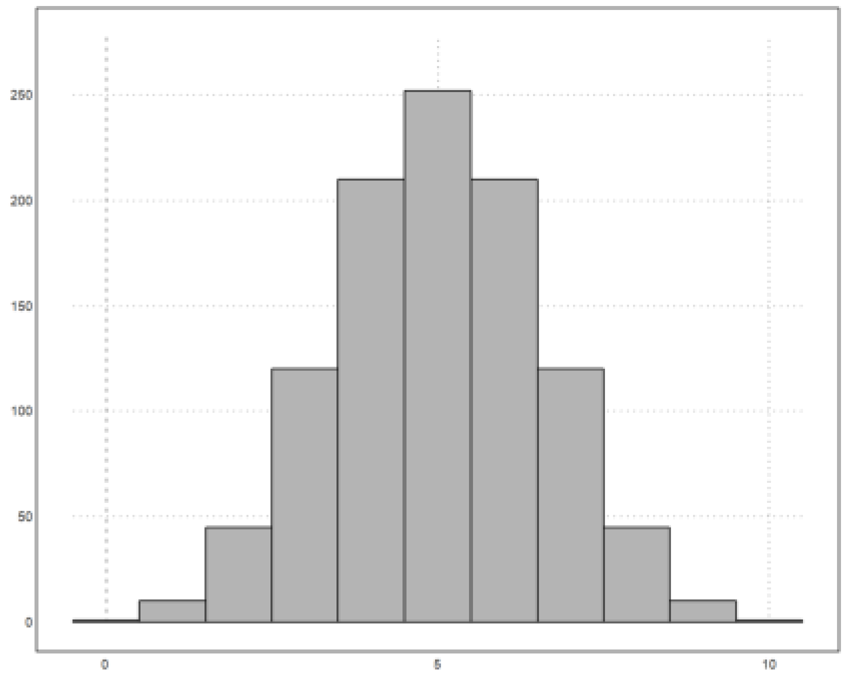
>k=0:10; m=bin(10,k); x=(0:11)-0.5; plot2d(x,m,>bar):

>columnsplot(m,k):

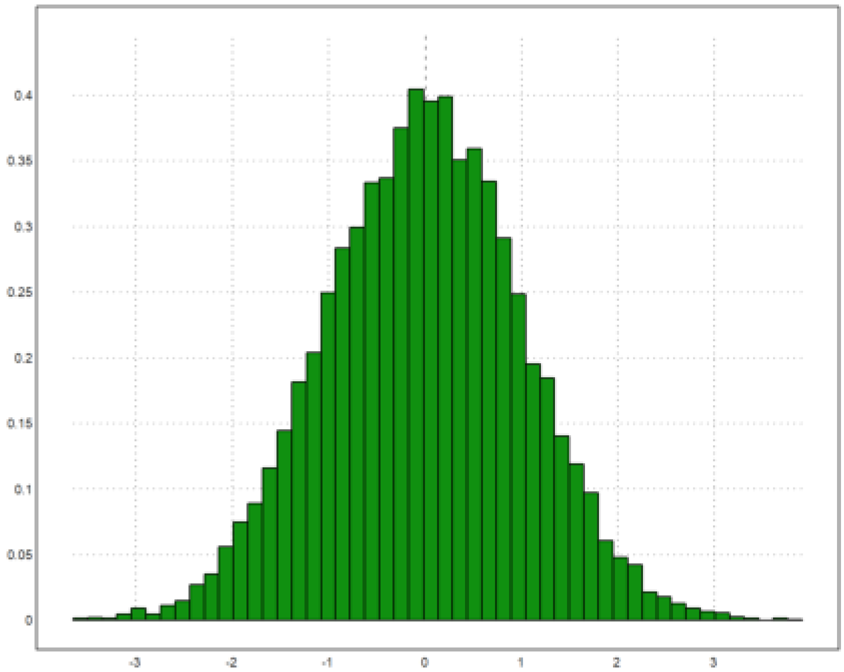
>plot2d(random(600)*6,histogram=6):



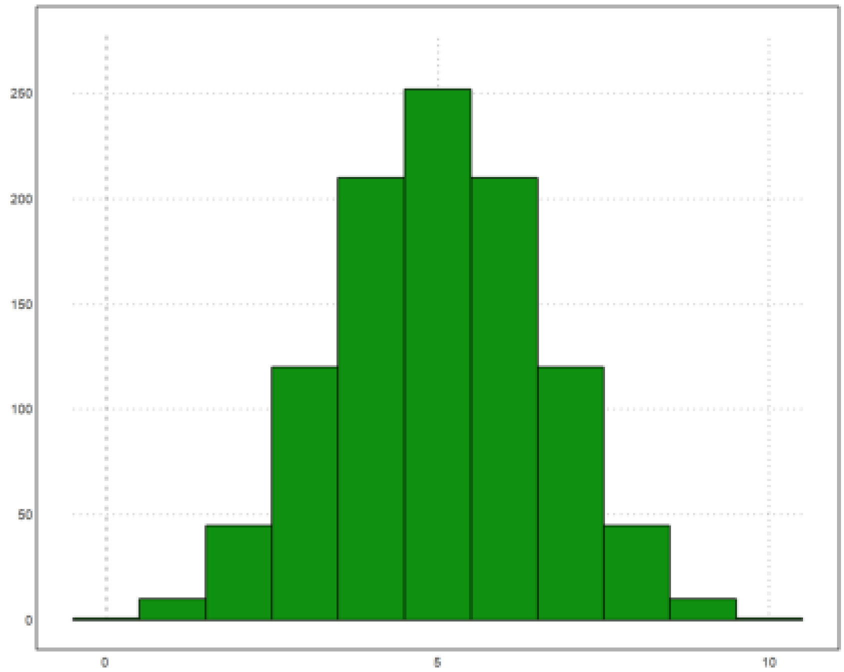
Gambar 3.115 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-116.png



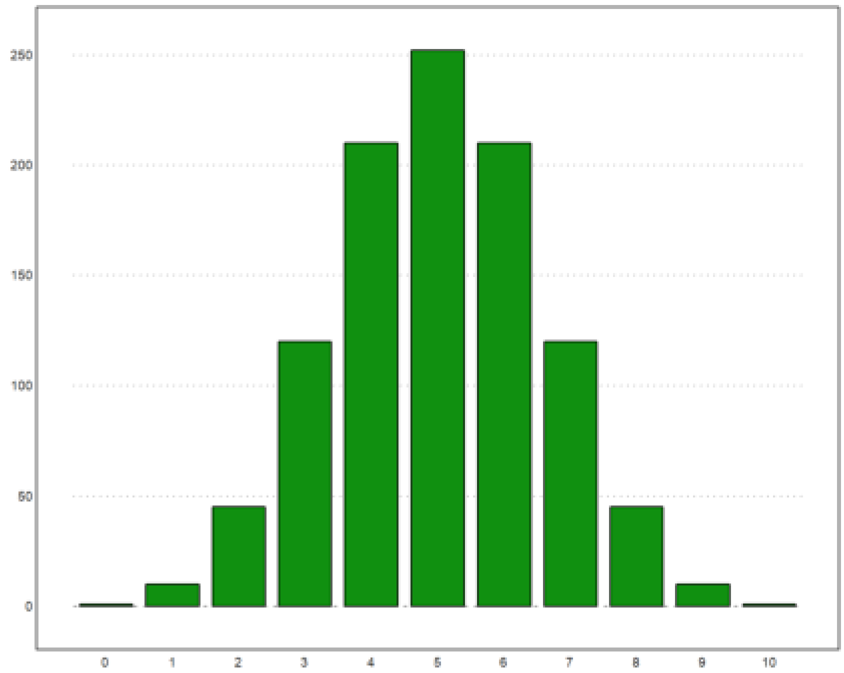
Gambar 3.116 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-117.png



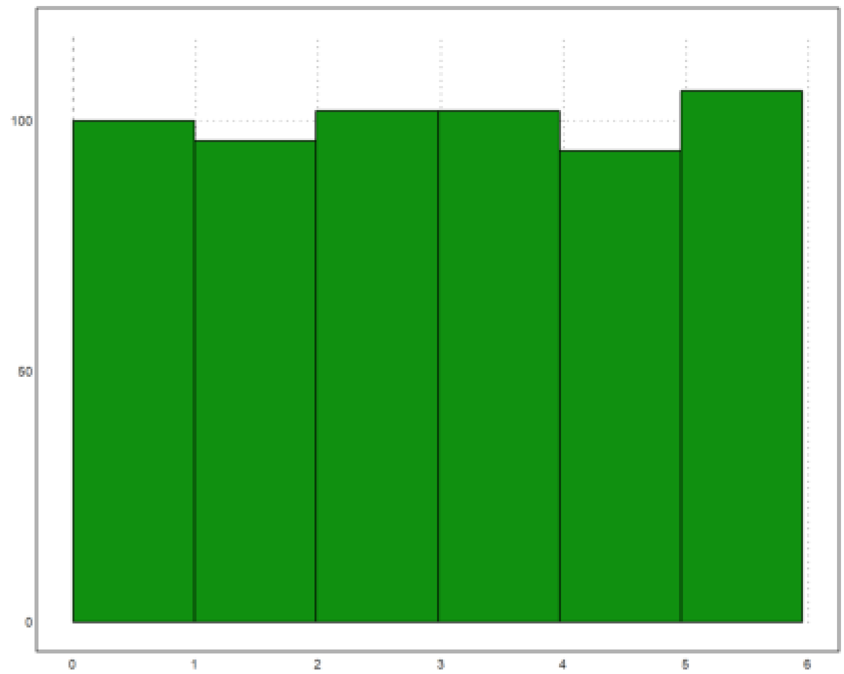
Gambar 3.117 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-118.png



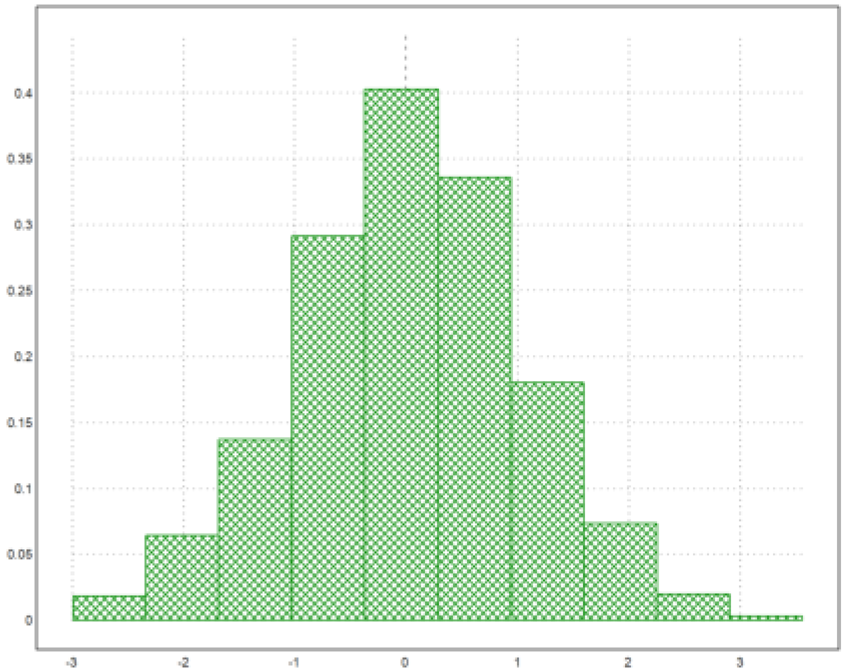
Gambar 3.118 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-119.png



Gambar 3.119 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-120.png



Gambar 3.120 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-121.png



Gambar 3.121 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-122.png

Untuk distribusi, ada parameter distribution=n, yang menghitung nilai secara otomatis dan mencetak distribusi relatif dengan n sub-interval.

>plot2d(normal(1,1000),distribution=10,style="\/"):

Dengan parameter even=true, ini akan menggunakan interval integer.

>plot2d(intrandom(1,1000,10),distribution=10,even=true):

Perhatikan bahwa ada banyak plot statistik yang mungkin berguna. Lihatlah tutorial tentang statistik.

>columnsplot(getmultiplicities(1:6,intrandom(1,6000,6))):

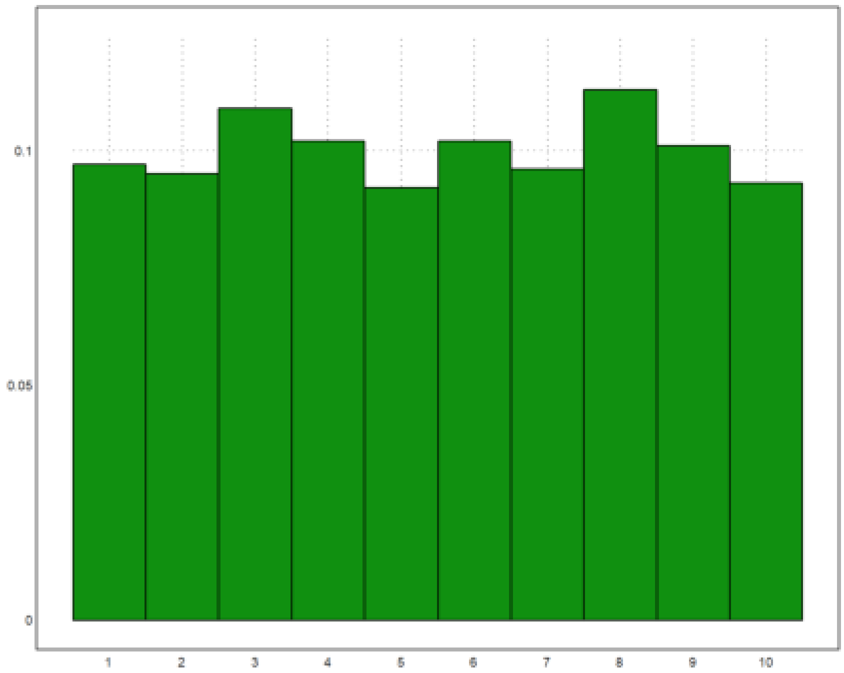
>plot2d(normal(1,1000),>distribution); . . .
> plot2d("qnormal(x)",color=red,thickness=2,>add):

Ada juga banyak plot khusus untuk statistik. Boxplot menunjukkan kuartil dari distribusi ini dan banyak outlier. Menurut definisi, outlier dalam boxplot adalah data yang melebihi 1,5 kali rentang tengah 50% dari plot.

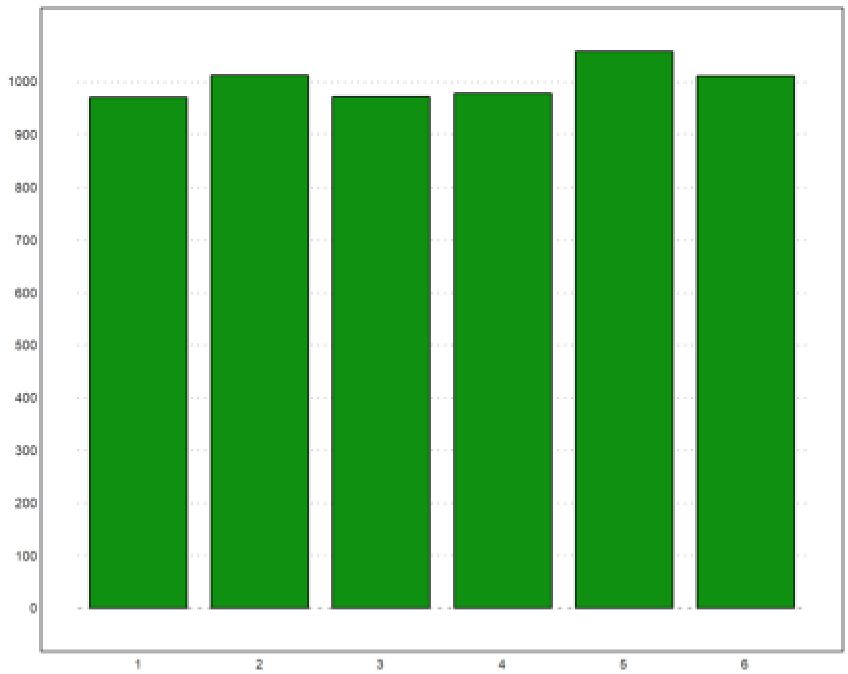
>M=normal(5,1000); boxplot(quartiles(M)):

3.16 Fungsi Implisit

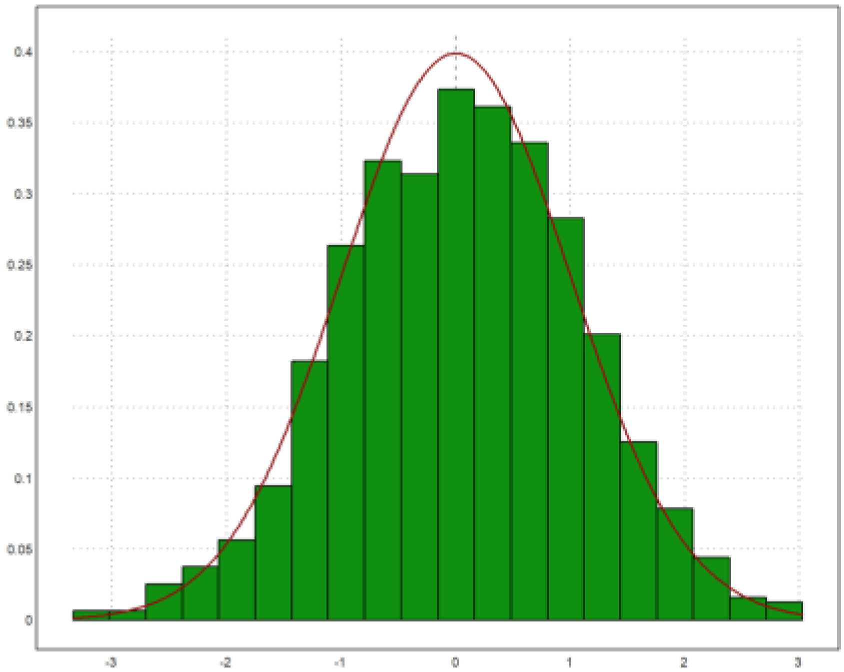
Plot implisit menunjukkan garis level yang menyelesaikan f(x,y)=level, di mana "level" dapat berupa nilai tunggal atau vektor nilai. Jika level="auto", akan ada garis level nc, yang akan menyebar antara minimum dan maksimum fungsi secara merata. Warna yang lebih gelap atau lebih terang dapat



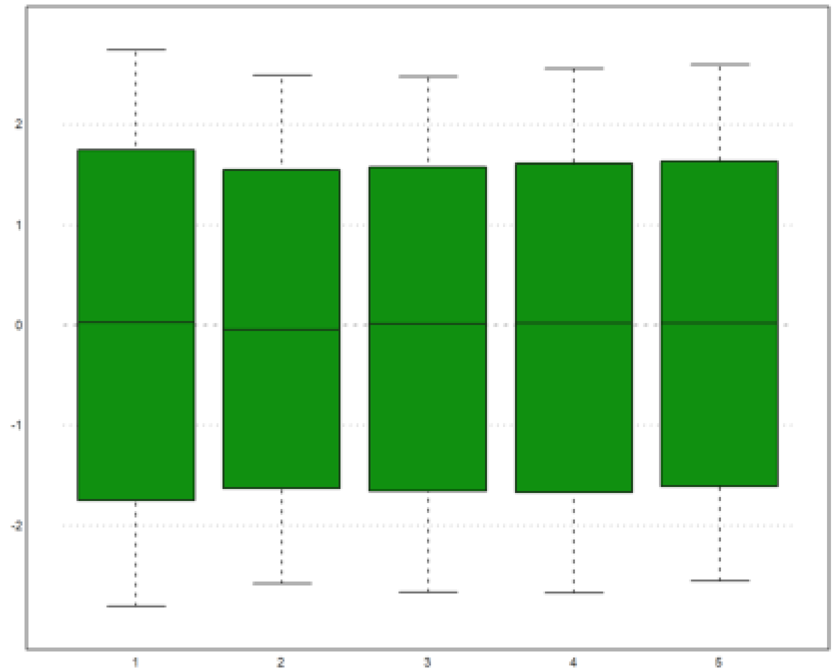
Gambar 3.122 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-123.png



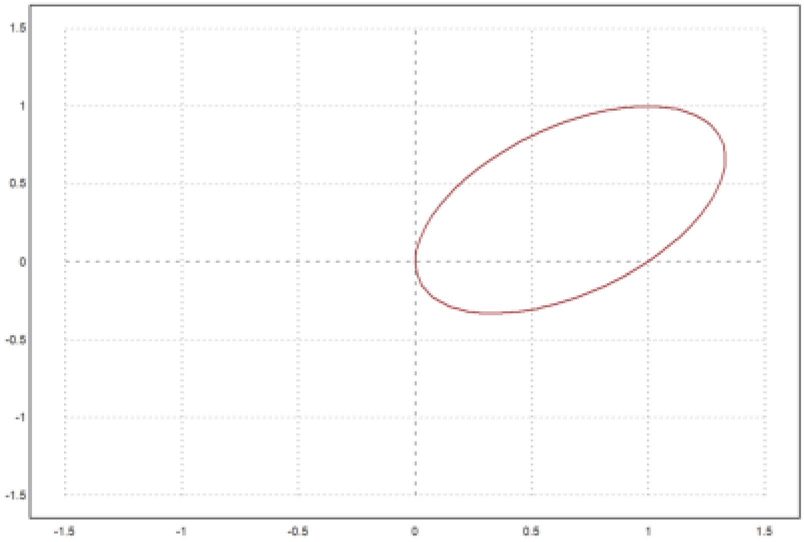
Gambar 3.123 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-124.png



Gambar 3.124 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-125.png



Gambar 3.125 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-126.png



Gambar 3.126 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-127.png

ditambahkan dengan >hue untuk menunjukkan nilai fungsi. Untuk fungsi implisit, xv harus berupa fungsi atau ekspresi parameter x dan y, atau, sebagai alternatif, xv dapat berupa matriks nilai.

Euler dapat menandai garis level dari fungsi apa pun.

Untuk menggambar himpunan f(x,y)=c untuk satu atau lebih konstanta c, Anda dapat menggunakan plot2d() dengan plot implisitnya di bidang. Parameter untuk c adalah level=c, di mana c dapat berupa vektor garis level. Selain itu, skema warna dapat digambar di latar belakang untuk menunjukkan nilai fungsi untuk setiap titik dalam plot. Parameter “n” menentukan kehalusan plot.

>aspect(1.5);

>plot2d(“x^{2+y}2-x*y-x”,r=1.5,level=0,contourcolor=red):

>expr := “2*x$^{2+x*y+3*y}$4+y”; // define an expression f(x,y)

>plot2d(expr,level=0): // Solutions of f(x,y)=0

>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,contourcolor=white,n=200): // nice

>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4): // nicer

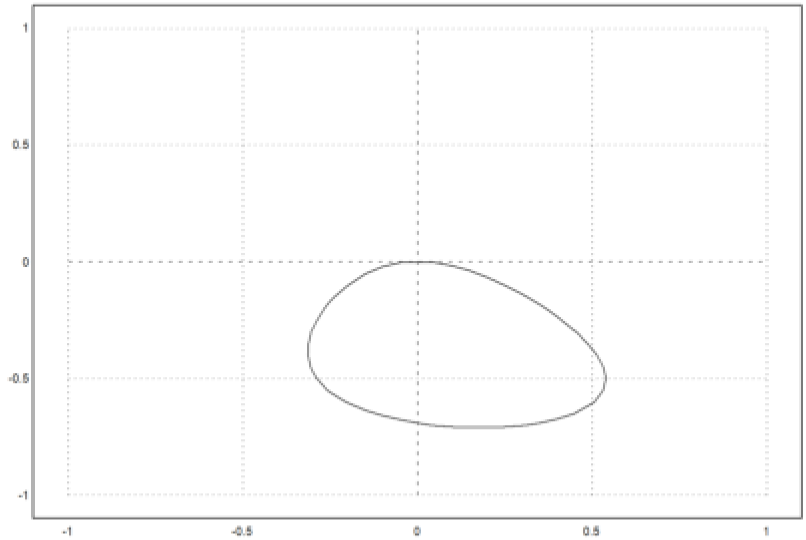
Ini juga berlaku untuk plot data. Namun, Anda harus menentukan rentang untuk label sumbu.

>x=-2:0.05:1; y=x’; z=expr(x,y);

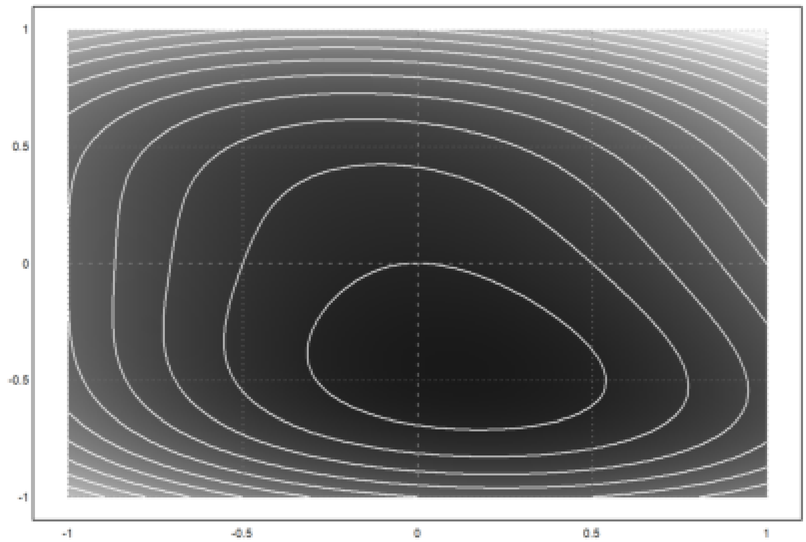
>plot2d(z,level=0,a=-1,b=2,c=-2,d=1,>hue):

>plot2d(“x^{3-y}2”,>contour,>hue,>spectral):

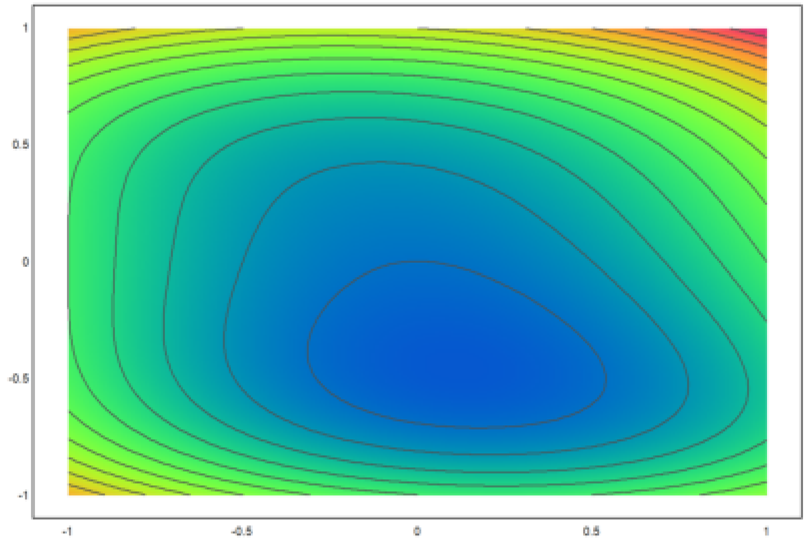
>plot2d(“x^{3-y}2”,level=0,contourwidth=3,>add,contourcolor=red):



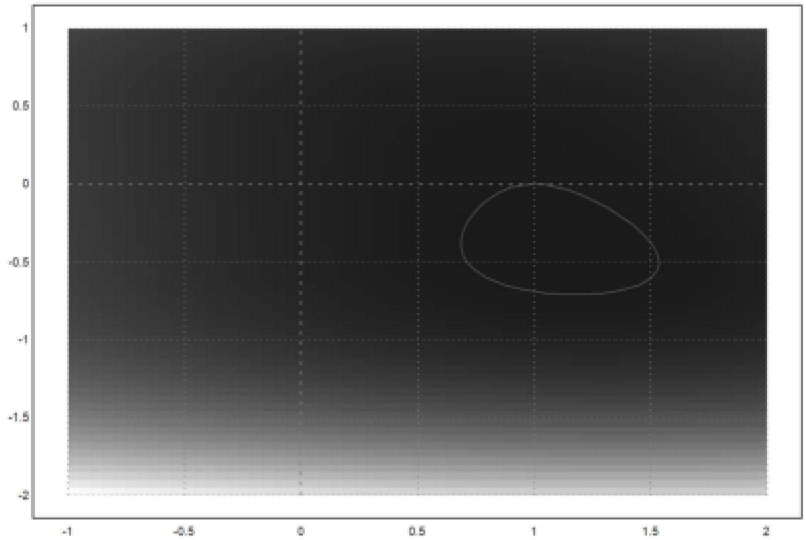
Gambar 3.127 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-128.png



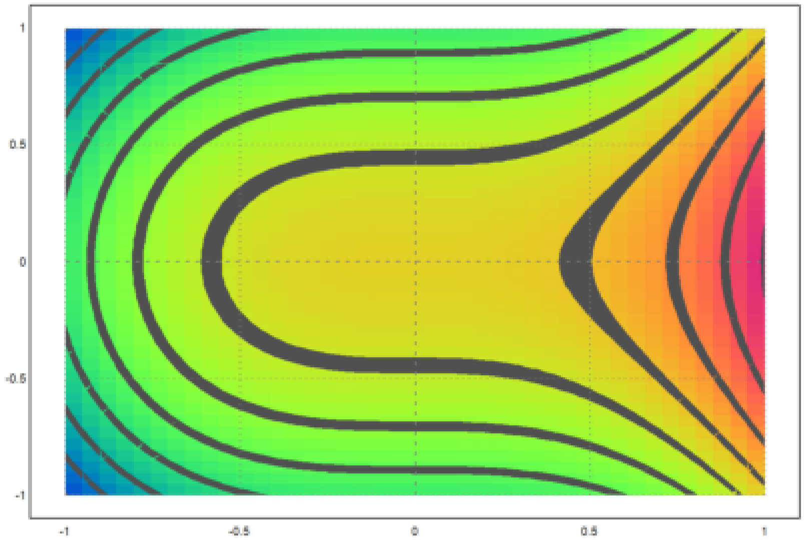
Gambar 3.128 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-129.png



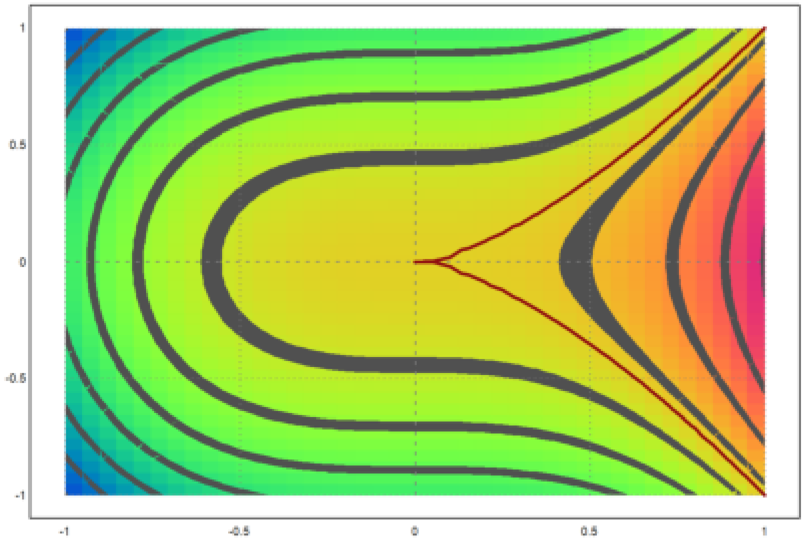
Gambar 3.129 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-130.png



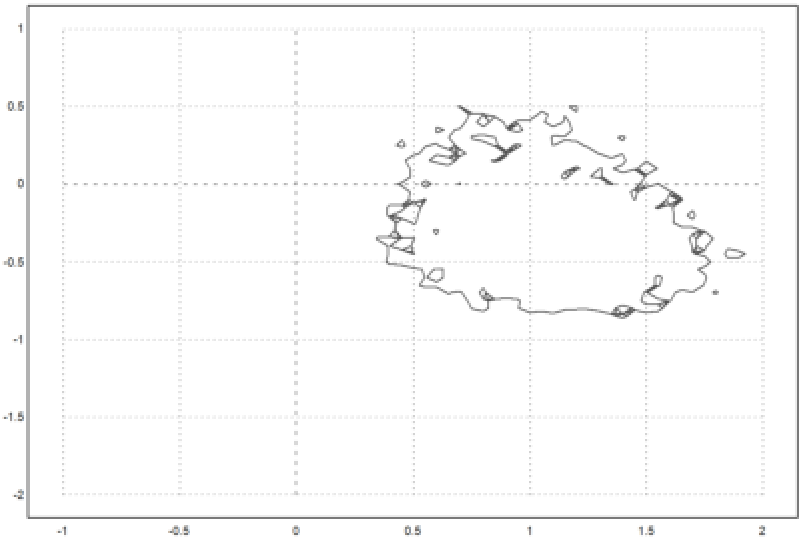
Gambar 3.130 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-131.png



Gambar 3.131 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-132.png



Gambar 3.132 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-133.png



Gambar 3.133 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-134.png

>z=z+normal(size(z))*0.2;

>plot2d(z,level=0.5,a=-1,b=2,c=-2,d=1):

>plot2d(expr,level=[0:0.2:5;0.05:0.2:5.05],color=lightgray):

>plot2d("x^{2+y}3+x*y",level=1,r=4,n=100):

>plot2d("x^{2+2*y}2-x*y",level=0:0.1:10,n=10,contourcolor=white,>hue):

Dimungkinkan juga untuk mengisi himpunan

dengan rentang level.

Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1

Plot implisit juga dapat menunjukkan rentang level. Level harus berupa matriks 2xn interval level, di mana baris pertama berisi awal dan baris kedua berisi akhir setiap interval. Atau, vektor baris sederhana dapat digunakan untuk level, dan parameter dl memperluas nilai level ke interval.

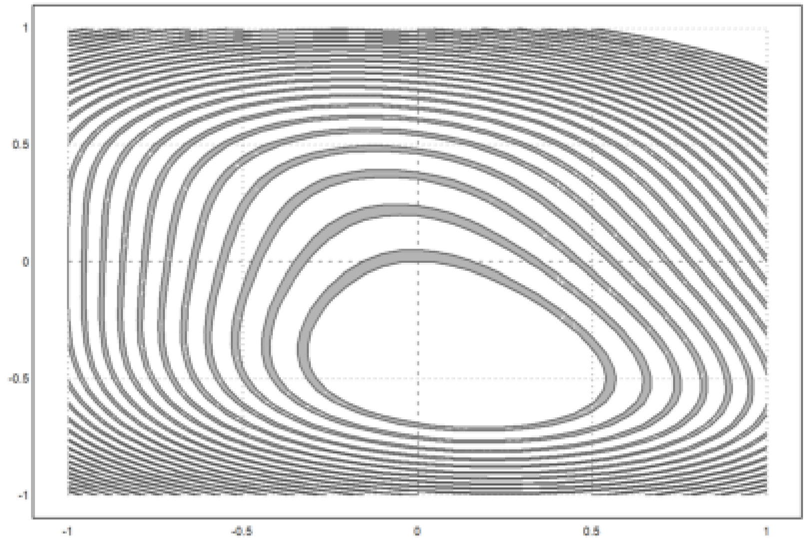
>plot2d("x^{4+y}4",r=1.5,level=[0;1],color=blue,style="/"):

>plot2d("x^{2+y}3+x*y",level=[0,2,4;1,3,5],style="/",r=2,n=100):

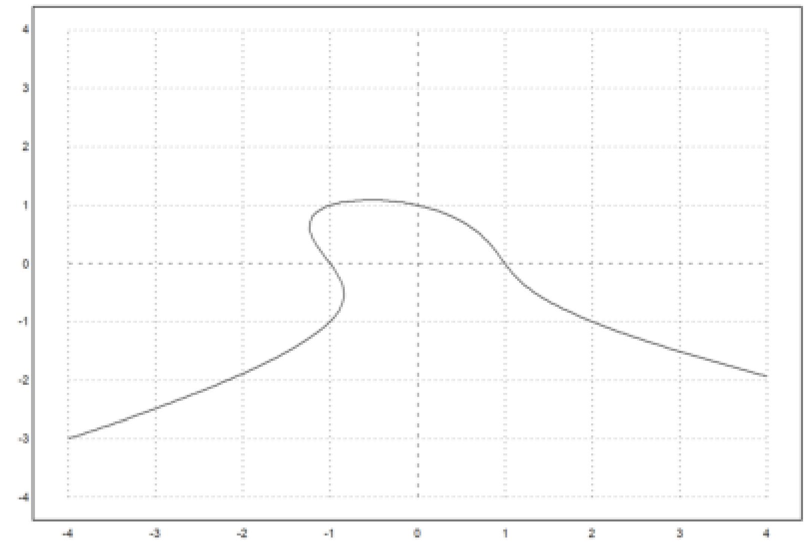
>plot2d("x^{2+y}3+x*y",level=-10:20,r=2,style="-",dl=0.1,n=100):

>plot2d("sin(x)*cos(y)",r=pi,>hue,>levels,n=100):

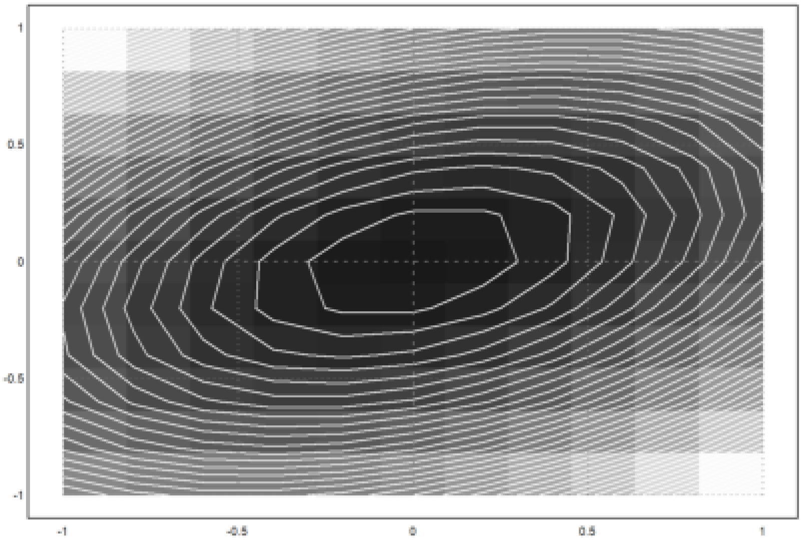
Dimungkinkan juga untuk menandai suatu wilayah



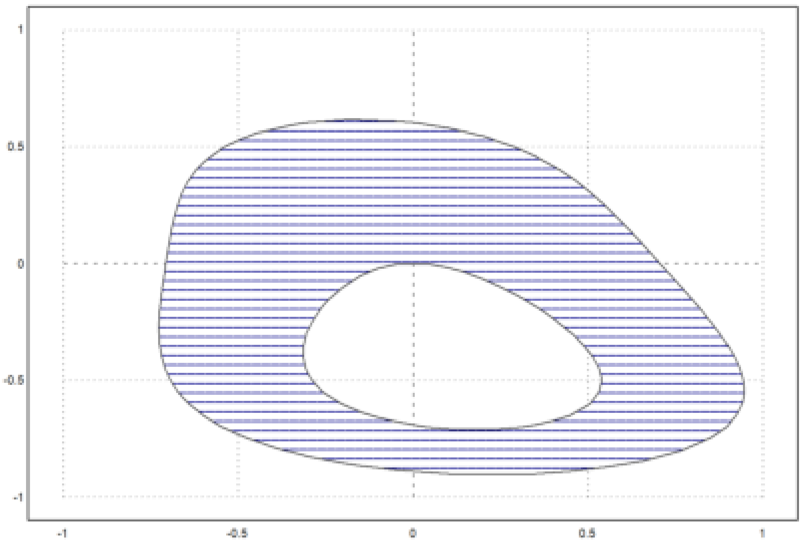
Gambar 3.134 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-135.png



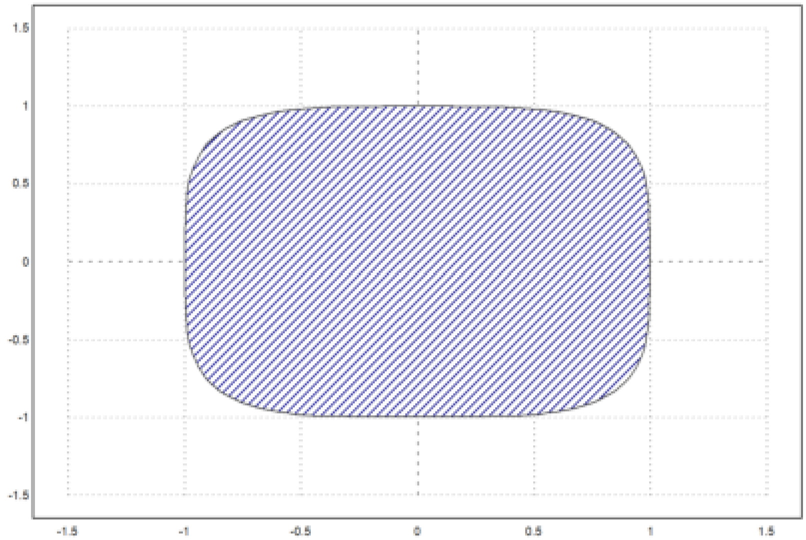
Gambar 3.135 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-136.png



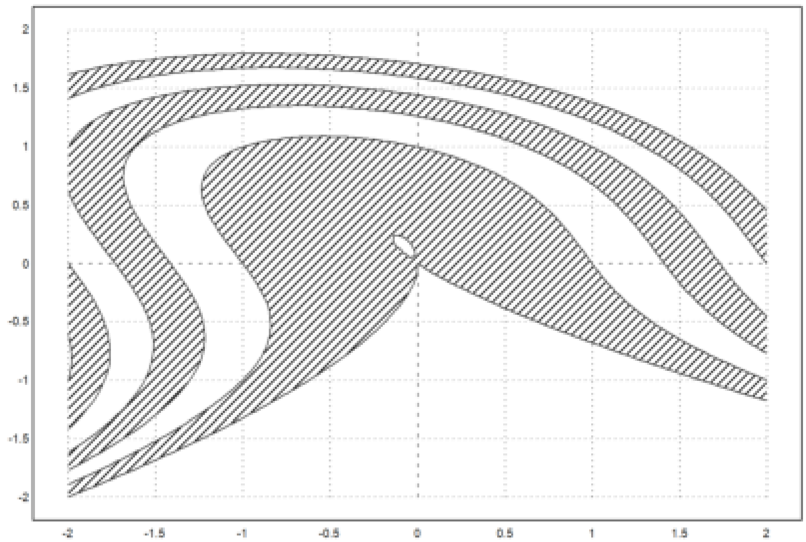
Gambar 3.136 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-137.png



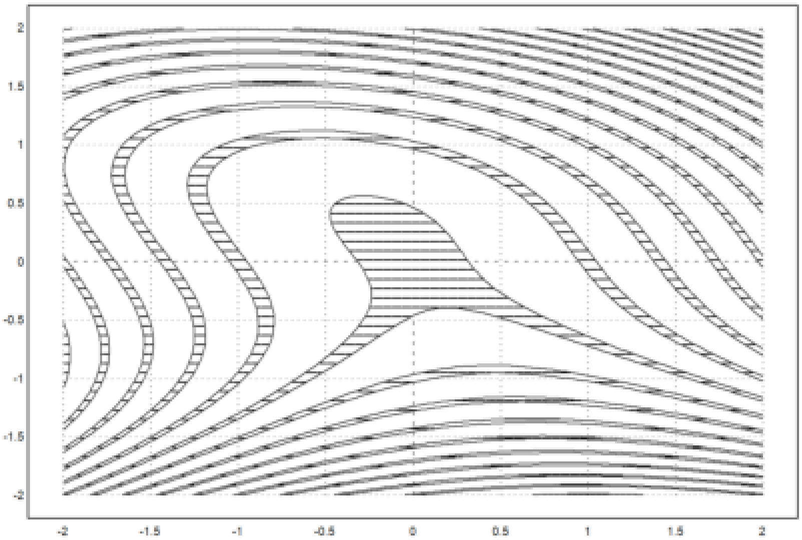
Gambar 3.137 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-138.png



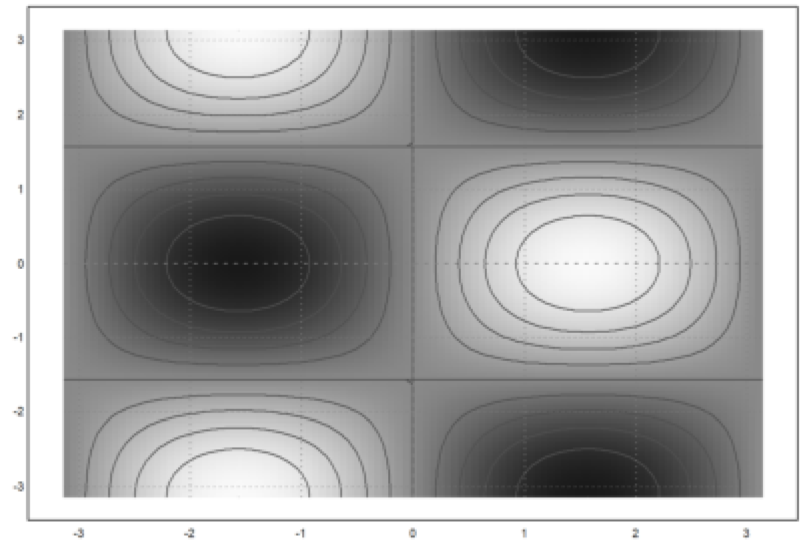
Gambar 3.138 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-139.png



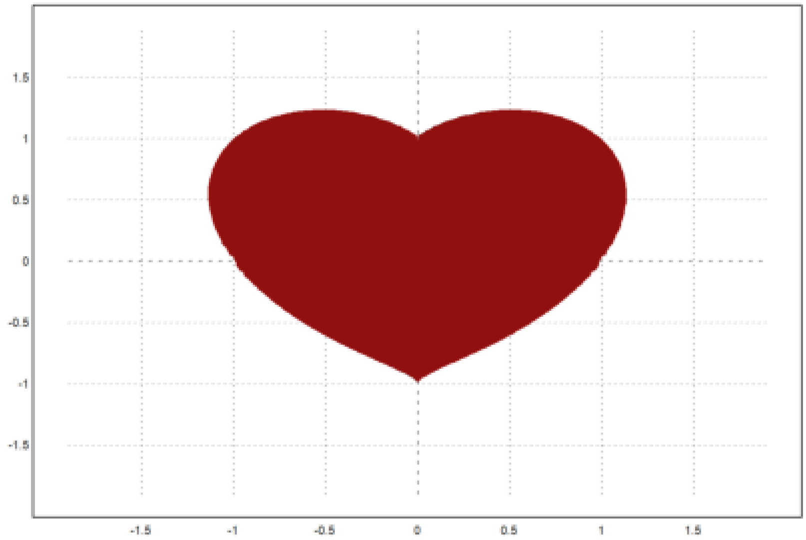
Gambar 3.139 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-140.png



Gambar 3.140 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-141.png



Gambar 3.141 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-142.png



Gambar 3.142 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-143.png

Hal ini dilakukan dengan menambahkan level dengan dua baris.

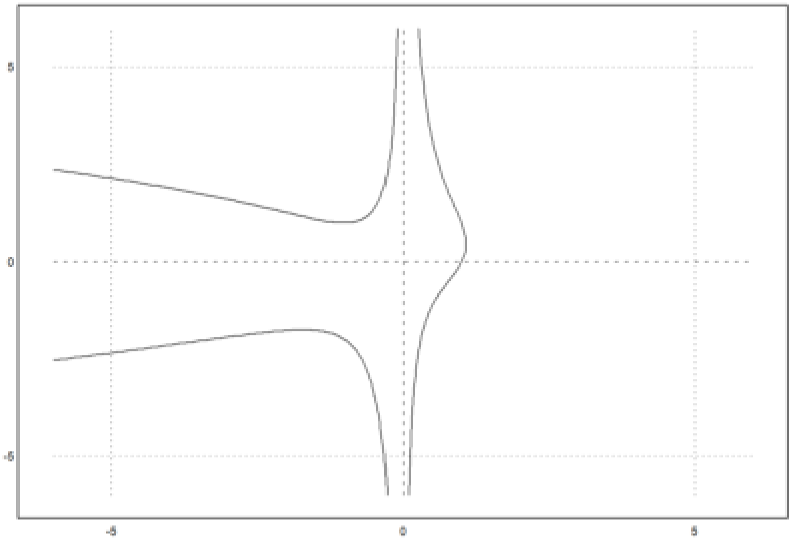
>plot2d("(x^{2+y}2-1)$^{3-x}$2*y^3",r=1.9, ...
> style="#",color=red,<outline, ...
> level=[-2;0],n=100):

Dimungkinkan untuk menentukan level tertentu. Misalnya, kita dapat memplot solusi persamaan seperti

>plot2d("x$^{3-x*y+x}$2*y^2",r=6,level=1,n=100):

>function starplot1 (v, style="/", color=green, lab=none) ...

```
if !holding() then clg; endif;
w=window(); window(0,0,1024,1024);
h=holding(1);
r=max(abs(v))*1.2;
setplot(-r,r,-r,r);
n=cols(v); t=linspace(0,2pi,n);
v=v|v[1]; c=v*cos(t); s=v*sin(t);
cl=barcolor(color); st=barstyle(style);
loop 1 to n
  polygon([0,c[#],c[#+1]],[0,s[#],s[#+1]],1);
  if lab!=none then
    rlab=v[#]+r*0.1;
    {col,row}=toscreen(cos(t[#])*rlab,sin(t[#])*rlab);
    ctext(""+lab[#],col,row-textheight()/2);
  endif;
end;
barcolor(cl); barstyle(st);
```



Gambar 3.143 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-144.png

```
  holding(h);
  window(w);
endfunction
```

Tidak ada tanda centang pada grid atau sumbu di sini. Selain itu, kami menggunakan jendela penuh untuk plot.

Kami memanggil reset sebelum menguji plot ini untuk mengembalikan grafik ke default. Ini tidak perlu, jika Anda yakin bahwa plot Anda berfungsi.

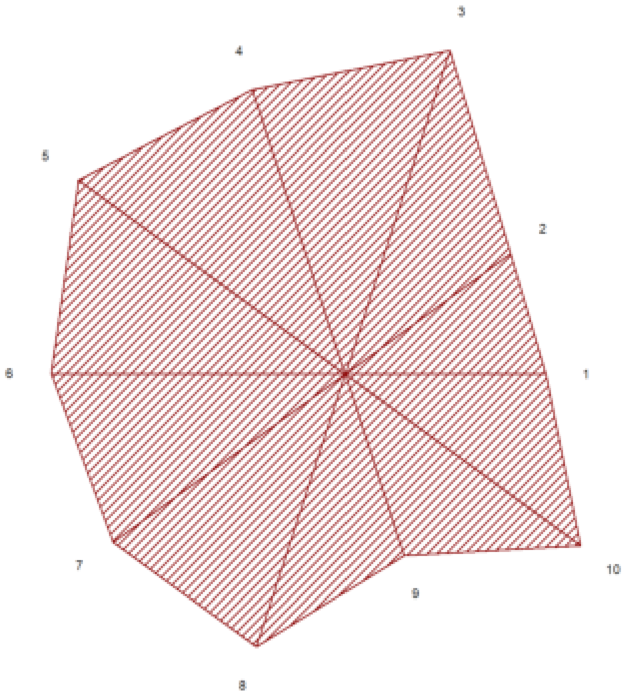
>reset; starplot1(normal(1,10)+5,color=red,lab=1:10):

Terkadang, Anda mungkin ingin memplot sesuatu yang tidak dapat dilakukan oleh plot2d, tetapi hampir.

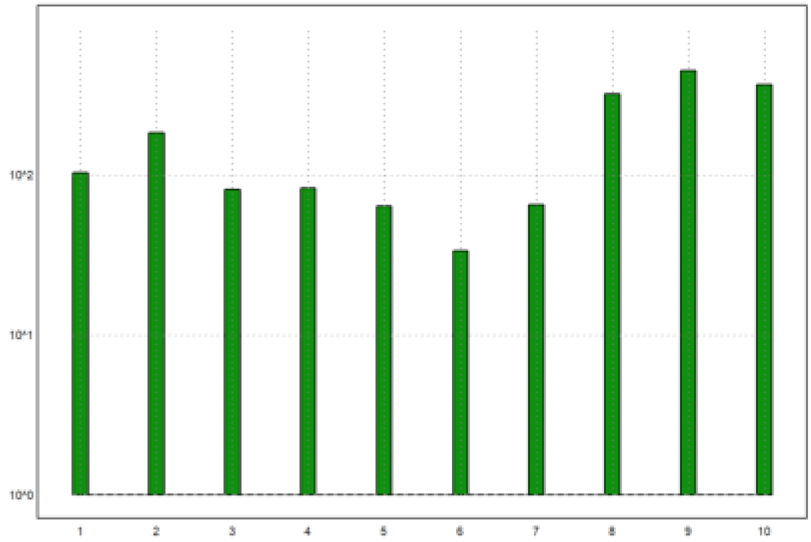
Dalam fungsi berikut, kita melakukan plot impuls logaritmik. plot2d dapat melakukan plot logaritmik, tetapi tidak untuk batang impuls.

>function logimpulseplot1 (x,y) ...

```
  {x0,y0}=makeimpulse(x,log(y)/log(10));
  plot2d(x0,y0,>bar,grid=0);
  h=holding(1);
  frame();
  xgrid(ticks(x));
  p=plot();
  for i=-10 to 10;
    if i<=p[4] and i>=p[3] then
       ygrid(i,yt="10^"+i);
```



Gambar 3.144 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-145.png



Gambar 3.145 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-146.png

```
    endif;
  end;
  holding(h);
endfunction
```

Mari kita mengujinya dengan nilai-nilai yang terdistribusi secara eksponensial.

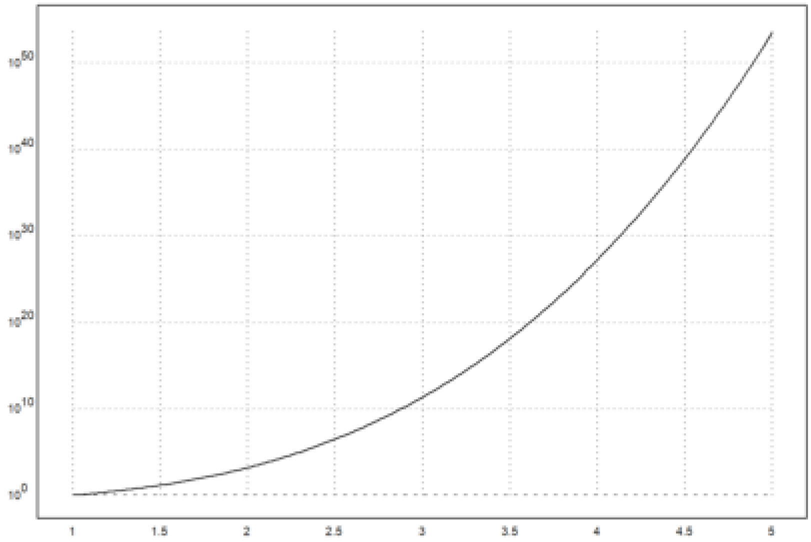
>aspect(1.5); x=1:10; y=-log(random(size(x)))*200; . . .
> logimpulseplot1(x,y):

Mari kita animasikan kurva 2D menggunakan plot langsung. Perintah plot(x,y) cukup memplot kurva ke dalam jendela plot. setplot(a,b,c,d) mengatur jendela ini.

Fungsi wait(0) memaksa plot untuk muncul di jendela grafik. Jika tidak, penggambaran ulang akan dilakukan dalam interval waktu yang jarang.

>function animliss (n,m) . . .

```
t=linspace(0,2pi,500);
f=0;
c=framecolor(0);
l=linewidth(2);
setplot(-1,1,-1,1);
repeat
  clg;
  plot(sin(n*t),cos(m*t+f));
  wait(0);
  if testkey() then break; endif;
  f=f+0.02;
```



Gambar 3.146 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-147.png

```
end;
framecolor(c);
linewidth(l);
endfunction
```

Tekan tombol apa saja untuk menghentikan animasi ini.

>animliss(2,3); // lihat hasilnya, jika sudah puas, tekan ENTER

3.17 Plot Logaritmik

EMT menggunakan parameter “logplot” untuk skala logaritmik.

Plot logaritmik dapat diplot menggunakan skala logaritmik dalam y dengan logplot=1, atau menggunakan skala logaritmik dalam x dan y dengan logplot=2, atau dalam x dengan logplot=3.

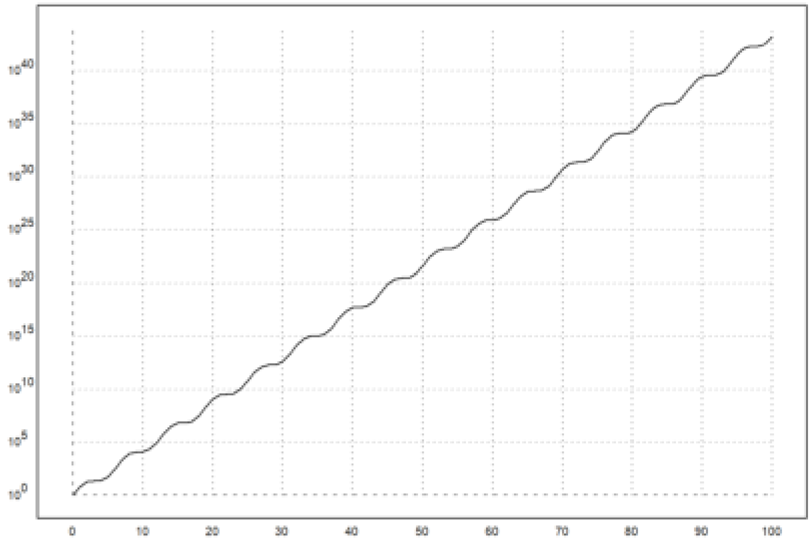
- logplot=1: y-logaritmik
- logplot=2: x-y-logaritmik
- logplot=3: x-logaritmik

>plot2d(“exp(x$^{3-x)*x}$2”,1,5,logplot=1):

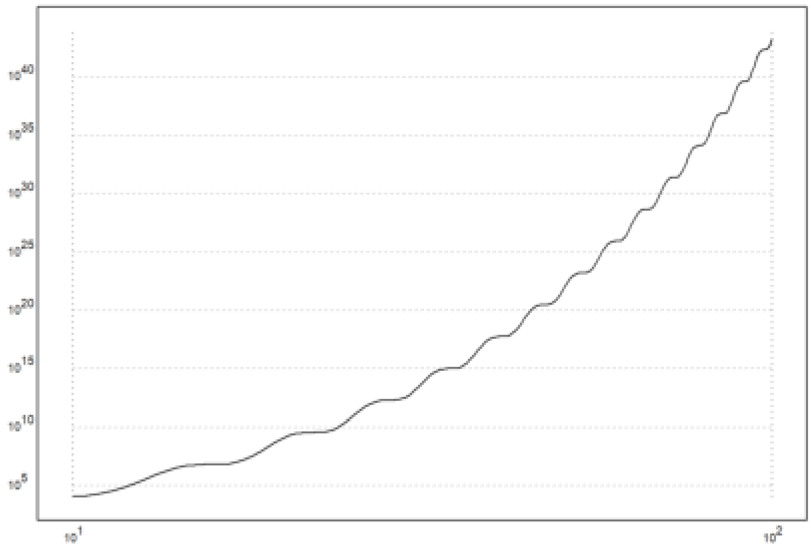
>plot2d(“exp(x+sin(x))”,0,100,logplot=1):

>plot2d(“exp(x+sin(x))”,10,100,logplot=2):

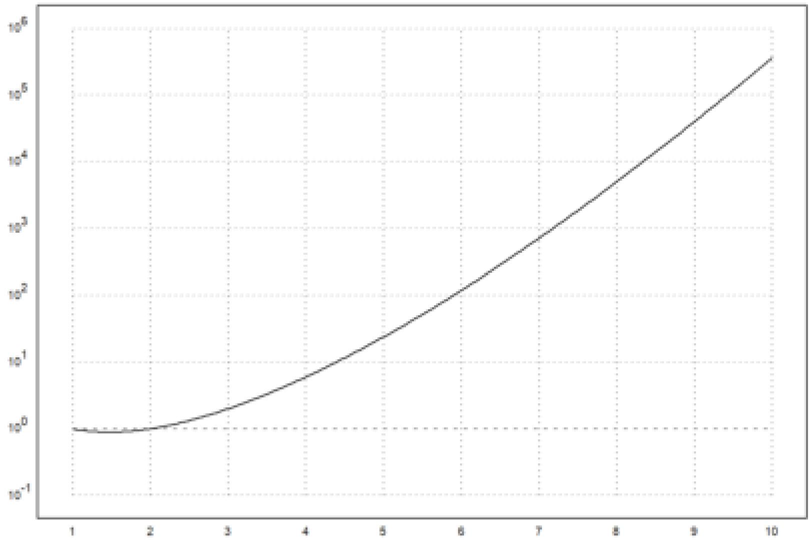
>plot2d(“gamma(x)”,1,10,logplot=1):



Gambar 3.147 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-148.png



Gambar 3.148 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-149.png



Gambar 3.149 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-150.png

>plot2d("log(x*(2+sin(x/100)))",10,1000,logplot=3):

Hal ini juga berlaku untuk plot data.

>x=10^(1:20); y=x^2-x;

>plot2d(x,y,logplot=2):

Contoh soal

1. Buatlah plot 2D dari

$y = 8x^3e^{-x^3}$

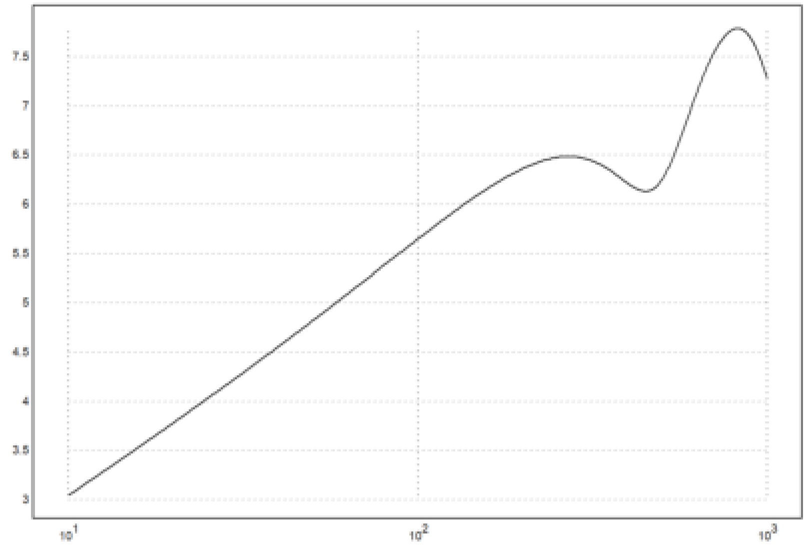
dan turunannya terhadap x, dengan grafik turunannya berwarna merah putus putus. Plot dari x=-2 hingga x=3 dan y=-6 hingga y=6 dengan grid=2. Berikan keterangan pada masing masing grafik

>function f(x) &= 8*x$^{3*exp(-x}$3); . . .
> plot2d(&f(x),a=-2,b=3,c=-6,d=6, grid=2); . . .
> plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="–"); . . .
> labelbox(["fungsi","turunan"],styles=["-","–"], . . .
> colors=[black,blue],w=0.4):

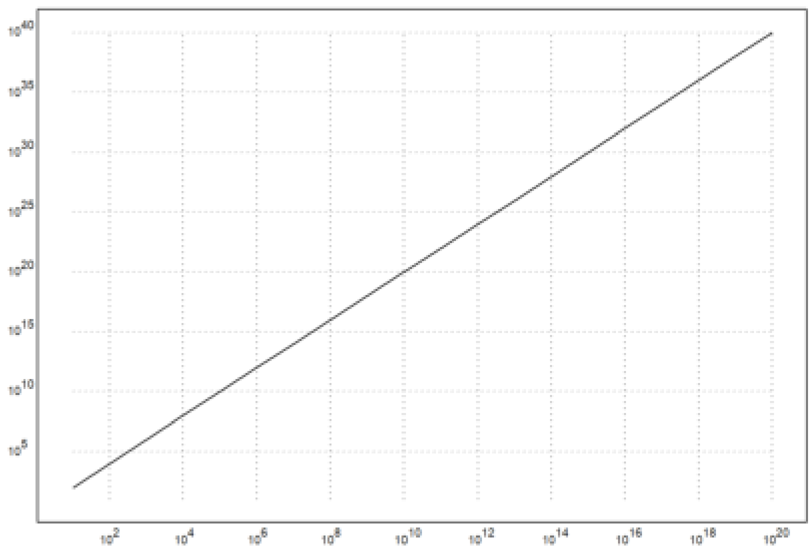
2. Buatlah titik titik (1,4.5),(2.5,3),(3.5,6),(4,4) dan hubungkan keempat titik tersebut dengan garis putus putus

>xdata=[1,2.5,3.5,4]; ydata=[4.5,3.5,6,4]; // data

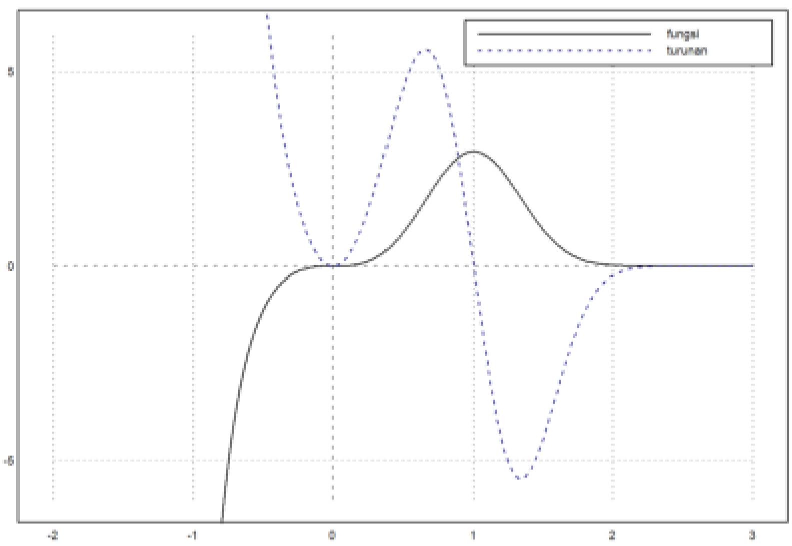
>plot2d(xdata,ydata,a=0.5,b=4.5,c=3.0,d=6.5, style="."); // lines



Gambar 3.150 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-151.png



Gambar 3.151 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-152.png



Gambar 3.152 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-153.png

>plot2d(xdata,ydata,>points,>add,style=“o”): // add points

3. Buatlah plot 2D dari fungsi

$y = \frac{x^3}{a}$

dengan a=3 dan interval dari x=-2 sampai x=1. Buatlah plot tersebut dalam grid 6.

>a:=3; plot2d(“x^3/a”,-2,1,grid=6):

4. Buatlah peta contour dari

$x^3 + y^2 + xy$

dengan gradasi gelap terang warna spectral dan n=200

>plot2d(“x^{3+y}2+x*y”,>contour,>hue,>spectral,n=200):

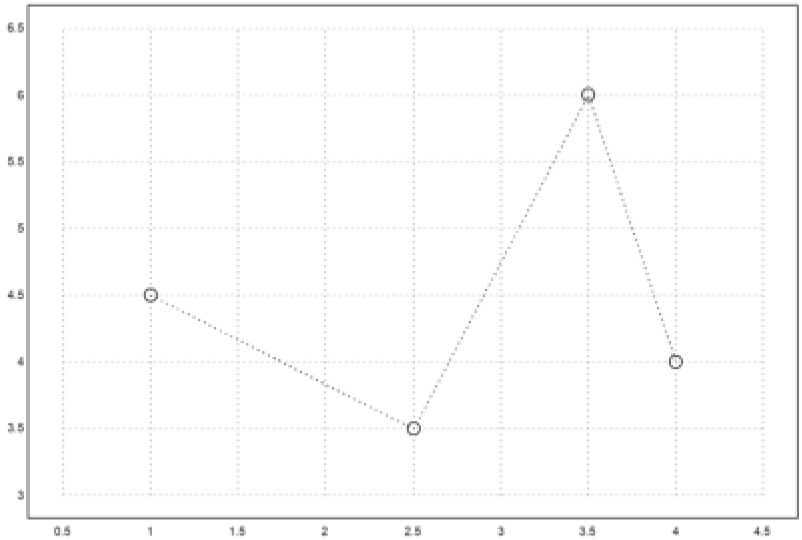
5. Buatlah plot 2D dari fungsi

$y(x, a) = x + ax^3$

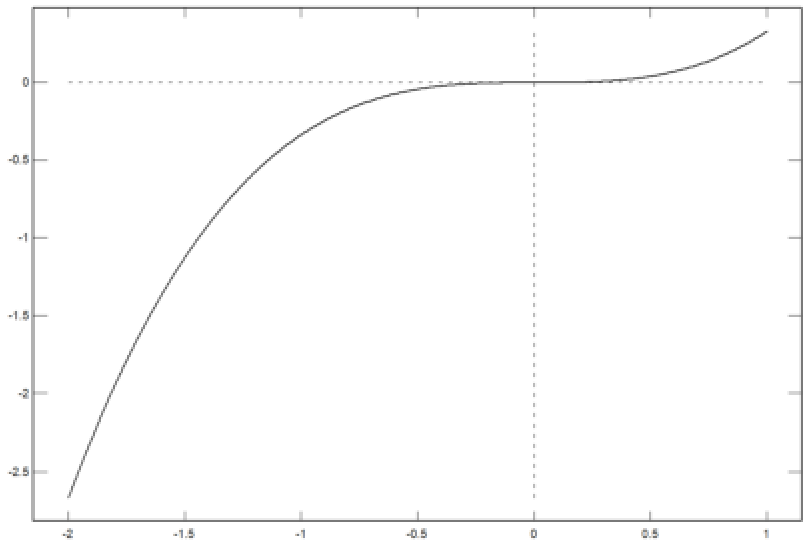
dengan nilai parameter a=4 dan interval x dari -2 sampai 2

>function f(x,a):=x+a*x^3;

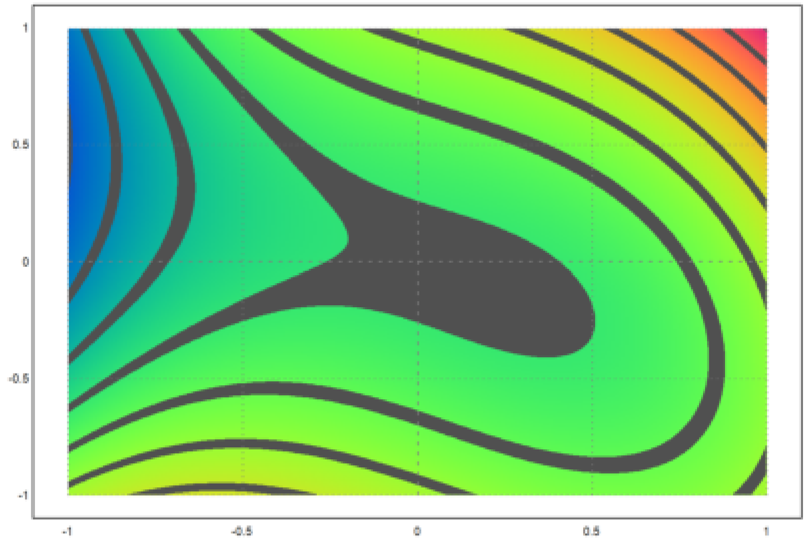
>a=4; plot2d(“f”,-2,2;a):



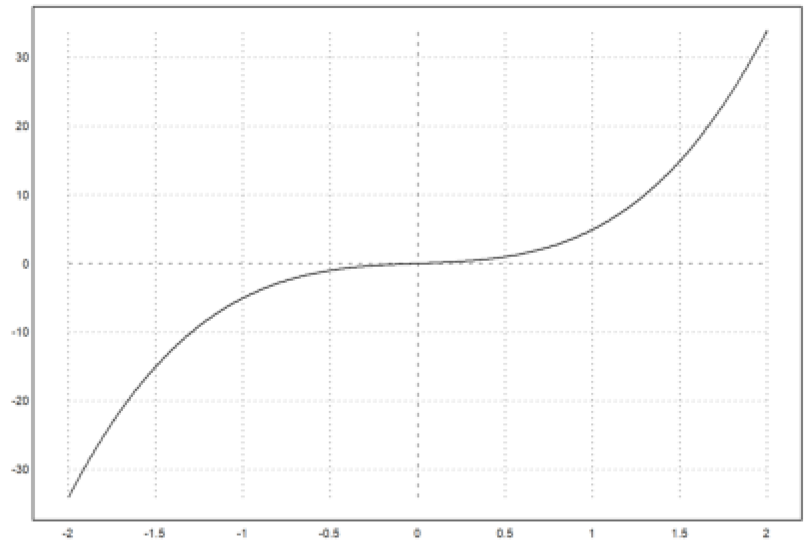
Gambar 3.153 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-154.png



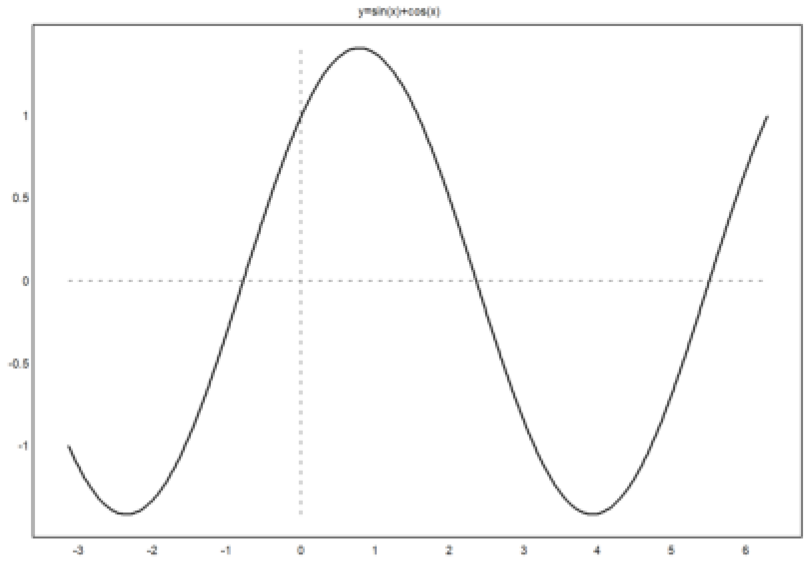
Gambar 3.154 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-155.png



Gambar 3.155 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-156.png



Gambar 3.156 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-157.png



Gambar 3.157 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-158.png

6. Buatlah plot 2D dari fungsi

$$y = sin(x) + cos(x)$$

dengan x dari -pi sampai 2pi dengan grid 10, ketebalan 2 dan beri nama plot

>plot2d("sin(x)+cos(x)",-pi,2*pi,grid=10,thickness=2, title="y=sin(x)+cos(x)"):

7. Diketahui rata-rata waktu istiharat pekerja di suatu perusahaan yaitu hari Senin 5 jam, Selasa 7 jam, Rabu 5 jam, Kamis 4 jam, Jumat 3 jam, Sabtu 13 jam, dan Minggu 15 jam. Buatlah data tersebut dalam diagram batang

>hari=["Senin","Selasa","Rabu","Kamis","Jumat","Sabtu","Minggu"];

>values=[5,7,5,4,3,13,15];

>columnsplot(values,lab=hari,color=blue,style="-");

>title("Waktu istirahat"):

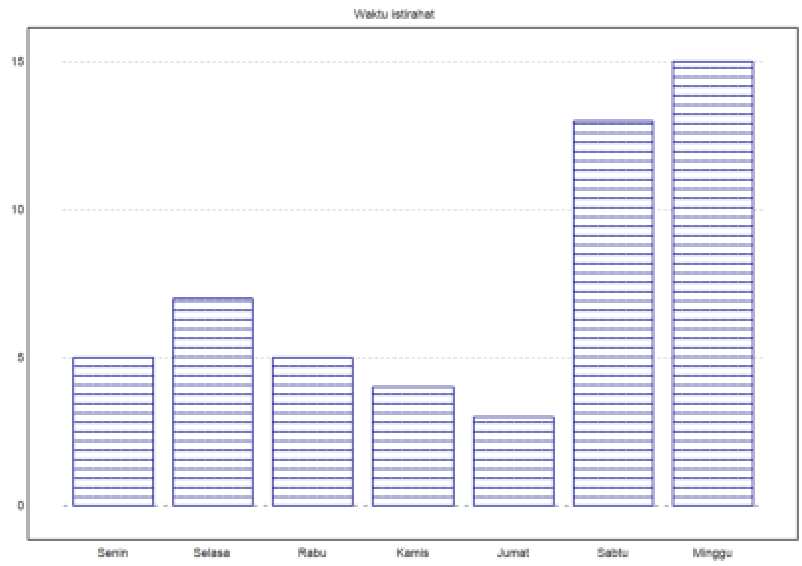
8. Buatlah plot 2D dari turunan fungsi

$$y = 2x^3 + x^2 - 4x$$

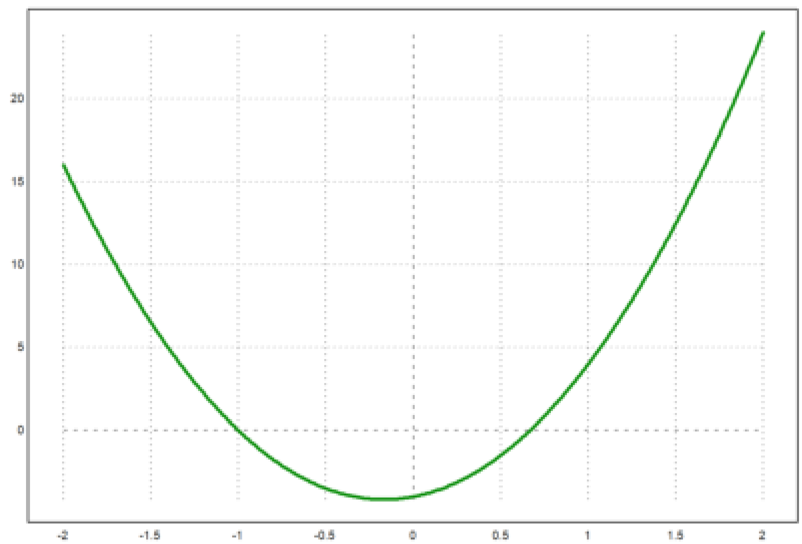
terhadap x dengan grid 2, ketebalan 3 dan warna hijau.

>function f(x) &= 2*x^{3+x}2-4*x;

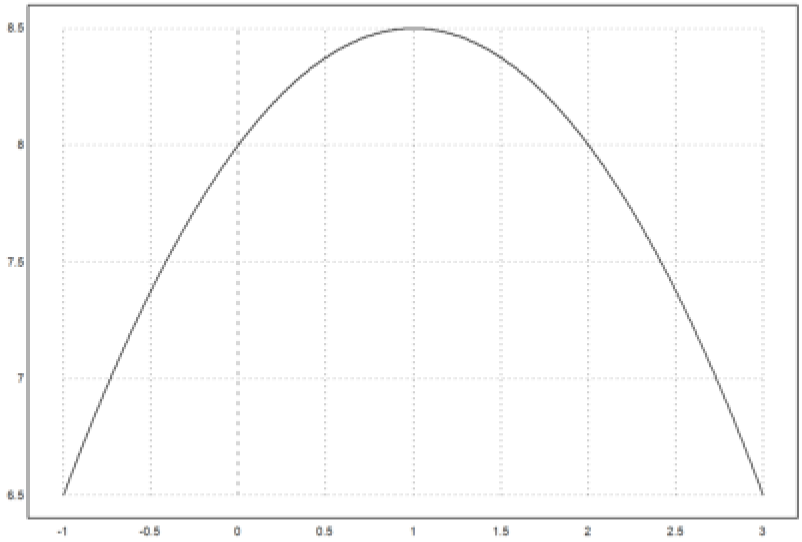
>plot2d(&diff(f(x),x), grid=2, color=green, thickness=3):



Gambar 3.158 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-159.png



Gambar 3.159 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-160.png



Gambar 3.160 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-161.png

9. Buatlah plot 2D dari fungsi

$\frac{a^4-x^2}{a+x}$

dengan a=2, dari x=-1 sampai x=3

>a=2; plot2d("(a^{4-x}2)/a+x",-1,3):

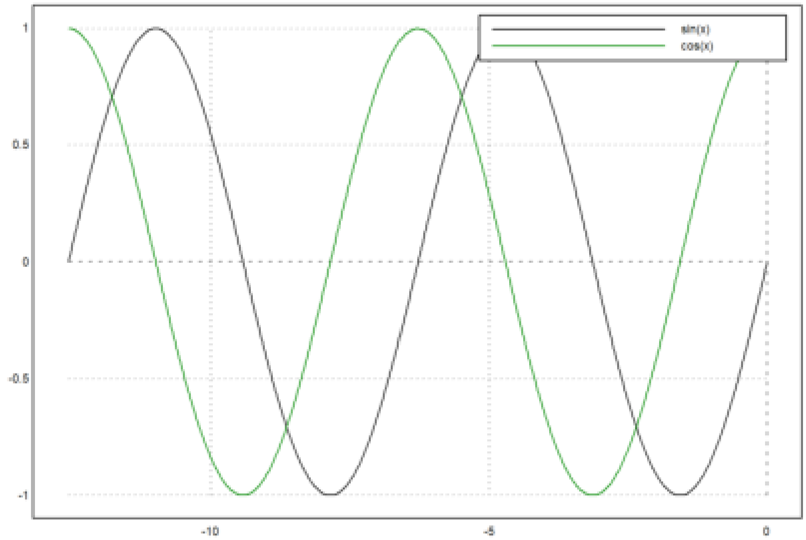
10. Buatlah plot 2D dari sin(x) dan cos(x) dari -4pi sampai 0

>plot2d("sin(x)",-4*pi,0, grid=2); ...
> plot2d("cos(x)",>add,color=green,style=" "); ...
> labelbox(["sin(x)","cos(x)"],styles=["-","-"], ...
> colors=[black,green],w=0.4):

3.18 Rujukan Lengkap Fungsi plot2d()

function plot2d (xv, yv, btest, a, b, c, d, xmin, xmax, r, n, ..
logplot, grid, frame, framecolor, square, color, thickness, style, ..
auto, add, user, delta, points, addpoints, pointstyle, bar, histogram, ..
distribution, even, steps, own, adaptive, hue, level, contour, ..
nc, filled, fillcolor, outline, title, xl, yl, maps, contourcolor, ..
contourwidth, ticks, margin, clipping, cx, cy, insimg, spectral, ..
cgrid, vertical, smaller, dl, niveau, levels)

Multipurpose plot function for plots in the plane (2D plots). This function can do plots of functions of one variables, data plots, curves in the plane, bar plots, grids of complex numbers, and implicit plots of functions of two variables.



Gambar 3.161 images/Alfi%20Nur%20Azumah-23030630002-MatB23-EMT%20Plot%202D-162.png

Parameters

x,y : equations, functions or data vectors

a,b,c,d : Plot area (default a=-2,b=2)

r : if r is set, then a=cx-r, b=cx+r, c=cy-r, d=cy+r

```
r can be a vector [rx,ry] or a vector [rx1,rx2,ry1,ry2].
```

xmin,xmax : range of the parameter for curves

auto : Determine y-range automatically (default)

square : if true, try to keep square x-y-ranges

n : number of intervals (default is adaptive)

grid : 0 = no grid and labels,

```
1 = axis only,

2 = normal grid (see below for the number of grid lines)

3 = inside axis
```

4 = no grid

5 = full grid including margin

6 = ticks at the frame

7 = axis only

8 = axis only, sub-ticks

frame : 0 = no frame

framecolor: color of the frame and the grid

margin : number between 0 and 0.4 for the margin around the plot

color : Color of curves. If this is a vector of colors,

it will be used for each row of a matrix of plots. In the case of point plots, it should be a column vector. If a row vector or a full matrix of colors is used for point plots, it will be used for each data point.

thickness : line thickness for curves

This value can be smaller than 1 for very thin lines.

style : Plot style for lines, markers, and fills.

For points use

"[]", "<>", ".", "..", "...",

"*", "+", "|", "-", "o"

"[]#", "<>#", "o#" (filled shapes)

"[]w", "<>w", "ow" (non-transparent)

For lines use

"-", "--", "-.", ".", ".-.", "-.-", "->"

For filled polygons or bar plots use

"#", "#O", "O", "/", "\", "\/",

"+", "|", "-", "t"

points : plot single points instead of line segments

addpoints : if true, plots line segments and points

add : add the plot to the existing plot

user : enable user interaction for functions

delta : step size for user interaction

bar : bar plot (x are the interval bounds, y the interval values)

histogram : plots the frequencies of x in n subintervals

distribution=n : plots the distribution of x with n subintervals

even : use inter values for automatic histograms.

steps : plots the function as a step function (steps=1,2)

adaptive : use adaptive plots (n is the minimal number of steps)

level : plot level lines of an implicit function of two variables

outline : draws boundary of level ranges.

If the level value is a 2xn matrix, ranges of levels will be drawn in the color using the given fill style. If outline is true, it will be drawn in the contour color. Using this feature, regions of f(x,y) between limits can be marked.

hue : add hue color to the level plot to indicate the function

```
value
```

contour : Use level plot with automatic levels

nc : number of automatic level lines

title : plot title (default " ")

xl, yl : labels for the x- and y-axis

smaller : if >0, there will be more space to the left for labels.

vertical :

Turns vertical labels on or off. This changes the global variable verticallabels locally for one plot. The value 1 sets only vertical text, the value 2 uses vertical numerical labels on the y axis.

filled : fill the plot of a curve

fillcolor : fill color for bar and filled curves

outline : boundary for filled polygons

logplot : set logarithmic plots

```
1 = logplot in y,

2 = logplot in xy,

3 = logplot in x
```

own :

A string, which points to an own plot routine. With >user, you get the same user interaction as in plot2d. The range will be set before each call to your function.

maps : map expressions (0 is faster), functions are always mapped.

contourcolor : color of contour lines

contourwidth : width of contour lines

clipping : toggles the clipping (default is true)

title :

This can be used to describe the plot. The title will appear above

the plot. Moreover, a label for the x and y axis can be added with

xl="string" or yl="string". Other labels can be added with the

functions label() or labelbox(). The title can be a unicode

string or an image of a Latex formula.

cgrid :

Determines the number of grid lines for plots of complex grids.

Should be a divisor of the the matrix size minus 1 (number of

subintervals). cgrid can be a vector [cx,cy].

Overview

The function can plot

- expressions, call collections or functions of one variable,
- parametric curves,
- x data against y data,
- implicit functions,
- bar plots,
- complex grids,
- polygons.

If a function or expression for xv is given, plot2d() will compute values in the given range using the function or expression. The expression must be an expression in the variable x. The range must be defined in the parameters a and b unless the default range [-2,2] should be used. The y-range will be computed automatically, unless c and d are specified, or a radius r, which yields the range [-r,r] for x and y. For plots of functions, plot2d will use an adaptive evaluation of the function by default. To speed up the plot for complicated functions, switch this off with <adaptive, and optionally decrease the number of intervals n. Moreover, plot2d() will by default use mapping. I.e., it will compute the plot element for element. If your expression or your functions can handle a vector x, you can switch that off with <maps for faster evaluation.

Note that adaptive plots are always computed element for element. If functions or expressions for both xv and for yv are specified, plot2d() will compute a curve with the xv values as x-coordinates and the yv values as y-coordinates. In this case, a range should be defined for the parameter using xmin, xmax. Expressions contained

BAB IV

MENGGAMBAR PLOT 3D DENGAN EMT

Ini adalah pengenalan plot 3D di Euler. Kita membutuhkan plot 3D untuk memvisualisasikan fungsi dari dua variabel.

Euler menggambar fungsi tersebut menggunakan algoritma pengurutan untuk menyembunyikan bagian di latar belakang. Secara umum, Euler menggunakan proyeksi pusat. Standarnya adalah dari kuadran x-y positif menuju titik asal x=y=z=0, tetapi sudut=0° terlihat dari arah sumbu y. Sudut pandang dan tinggi dapat diubah.

Euler dapat merencanakan

- permukaan dengan bayangan dan garis level atau rentang level,
- awan poin,
- kurva parametrik,
- permukaan implisit.

Plot 3D dari suatu fungsi menggunakan plot3d. Cara termudah adalah dengan memplot ekspresi dalam x dan y. Parameter r mengatur kisaran plot di sekitar (0,0).

>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",r=pi):

4.1 Menggambar Grafik Fungsi Dua Variabel dalam Bentuk

Ekspresi Langsung

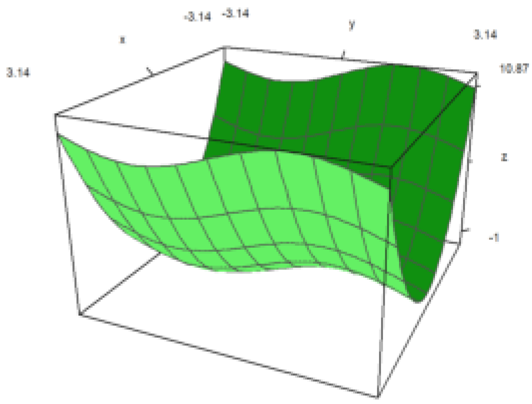
Grafik fungsi dua variabel dalam bentuk ekspresi langsung adalah representasi visual dari hubungan matematis antara dua variabel independen yang dinyatakan dalam bentuk persamaan atau ekspresi matematis. Biasanya, grafik ini digunakan untuk menggambarkan hubungan antara dua variabel dalam bidang dua dimensi dan tiga dimensi. Dalam konteks ini, variabel independen (x dan y) adalah variabel input, sedangkan variabel dependen (z) adalah variabel output yang dihasilkan oleh ekspresi matematis.

Rumus umum untuk menggambar grafik fungsi dua variabel dalam bentuk ekspresi langsung adalah:

$$z = f(x, y)$$

Dalam rumus ini:

- z adalah variabel dependen yang ingin kita gambar dalam grafik.



Gambar 4.1 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-001.png

- f(x, y) adalah ekspresi matematis yang menghubungkan variabel z dengan variabel independen x dan y. Ekspresi ini dapat berupa fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi akar kuadrat, eksponensial, logaritma, trigonometri, nilai mutlak, atau jenis fungsi matematis lainnya, tergantung pada hubungan yang ingin diilustrasikan.

1. Grafik Fungsi Linear

Fungsi linear dua variabel biasanya dinyatakan dalam bentuk

$$f(x, y) = ax + by + c$$

dimana a,b, dan c adalah konstanta. Grafik fungsi linear ini adalah sebuah bidang datar, dan bentuknya akan bervariasi tergantung pada nilai a dan b.

Contoh:

$$f(x, y) = 2x + 3y + 5$$

>plot3d("2*x+3*y+5"):

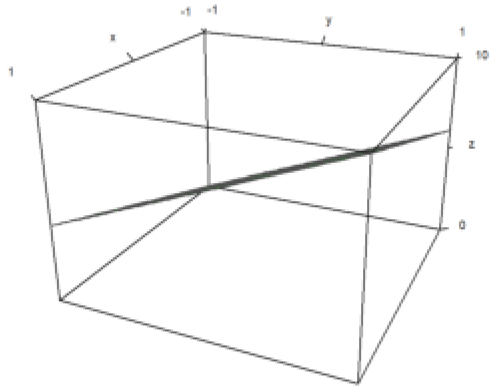
$$f(x, y) = -2x - 3y - 5$$

>plot3d("-2*x-3*y-5"):

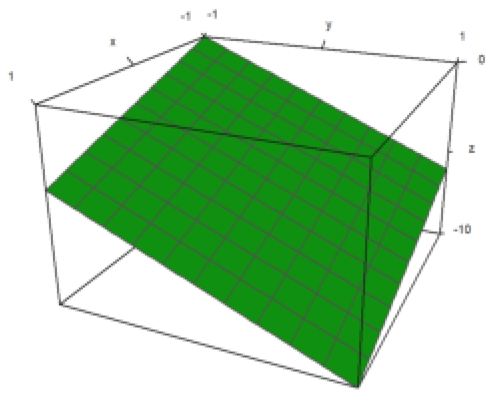
$$f(x, y) = 5x - 7y + 9$$

>plot3d("5*x-7*y+9"):

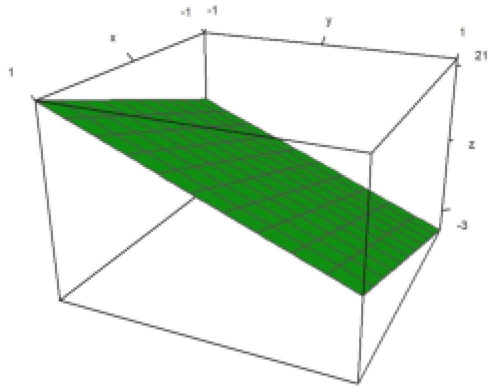
2. Grafik Fungsi Kuadrat



Gambar 4.2 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-005.png



Gambar 4.3 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-007.png



Gambar 4.4 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-009.png

Fungsi kuadrat dua variabel biasanya dinyatakan dalam bentuk

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$$

dimana a, b, c, d, e, dan f adalah konstanta. Grafik fungsi kuadrat ini adalah sebuah permukaan yang dapat memiliki berbagai bentuk tergantung pada nilai-nilai konstantanya.

Contoh:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy + 8x + 3y + 1$$

>plot3d("x^{2+y}2+4*x*y+8*x+3*y+1"):

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 7xy - 5$$

>plot3d("3*x^{2-y}2+7*x*y-5"):

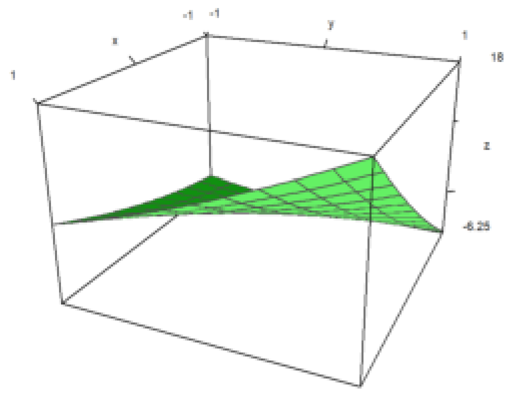
3. Grafik Fungsi Akar Kuadrat

Grafik fungsi akar kuadrat dua variabel

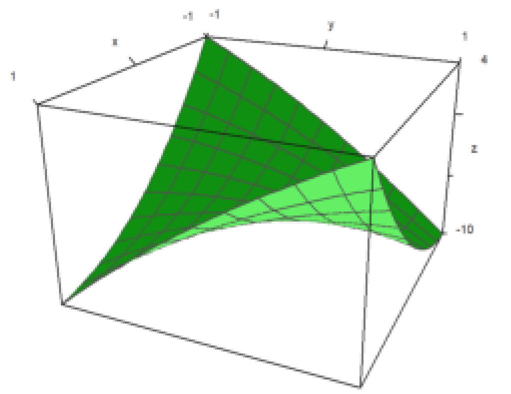
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

adalah grafik permukaan yang menggambarkan jarak titik (x, y) dari titik asal (0, 0) dalam ruang tiga dimensi.

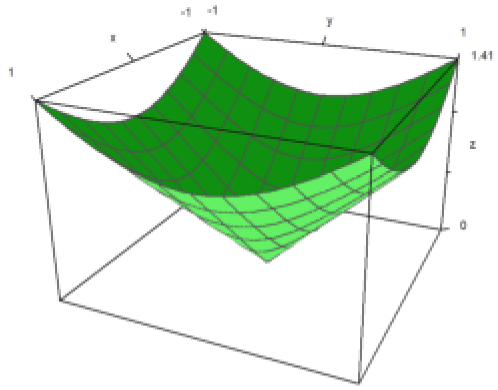
Contoh:



Gambar 4.5 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-012.png



Gambar 4.6 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-014.png



Gambar 4.7 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-017.png

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

>plot3d(“sqrt(x^{2+y}2)”):

$$f(x, y) = \sqrt{2x^2 + 7y^2}$$

>plot3d(“sqrt(2*x^{2+7*y}2)”):

$$f(x, y) = \sqrt{10x^2 + y^2}$$

>plot3d(“sqrt(10*x^{2+y}2)”):

4. Grafik Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial dua variabel bisa dinyatakan

$$f(x, y) = a.b^{xy}$$

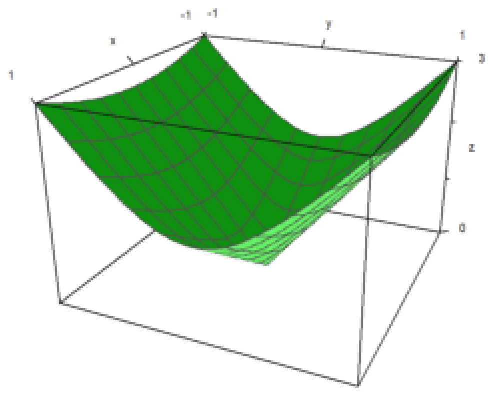
dimana a dan b adalah konstanta, x dan y adalah variabel. Fungsi ini menggambarkan pertumbuhan eksponensial yang bergantung pada nilai x dan y.

Contoh:

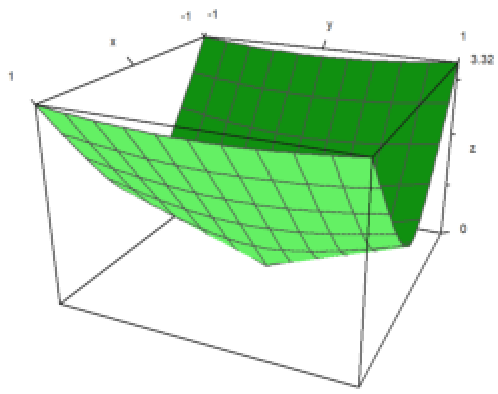
$$f(x, y) = 2.3^{xy}$$

>plot3d(“2*3^(x*y)”):

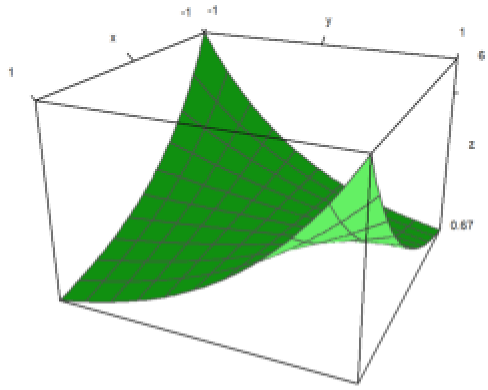
$$f(x, y) = -3.8^{xy}$$



Gambar 4.8 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-019.png



Gambar 4.9 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-021.png



Gambar 4.10 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-024.png

>plot3d("-3*8^(x*y)"):

5. Grafik Fungsi Logaritma

Grafik fungsi logaritma dua variabel adalah grafik yang menggambarkan nilai logaritma dari suatu ekspresi yang melibatkan dua variabel (biasanya x dan y). Fungsi logaritma dua variabel ini dinyatakan sebagai

$$f(x, y) = log_b(xy)$$

dimana b adalah basis logaritma. Basis logaritma ini dapat berbeda-beda.

Contoh:

$$f(x, y) = log(xy), basis10$$

>plot3d("log(x*y)"):

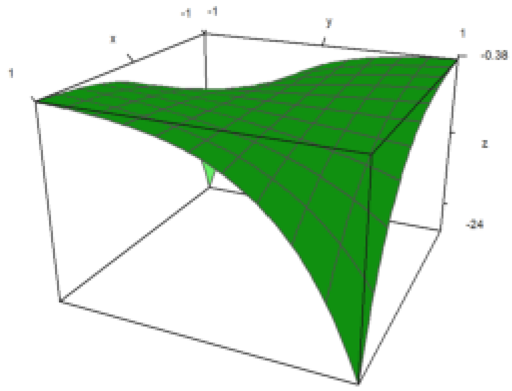
$$f(x, y) = log(2x.9y), basis10$$

>plot3d("log(2x*9y)"):

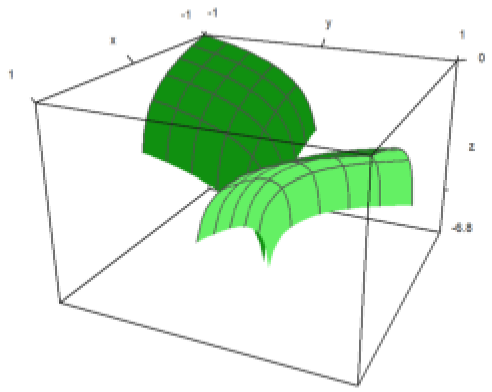
6. Grafik Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri dua variabel adalah fungsi matematika yang melibatkan operasi trigonometri (seperti sin, cos, tan) pada kedua variabel x dan y.

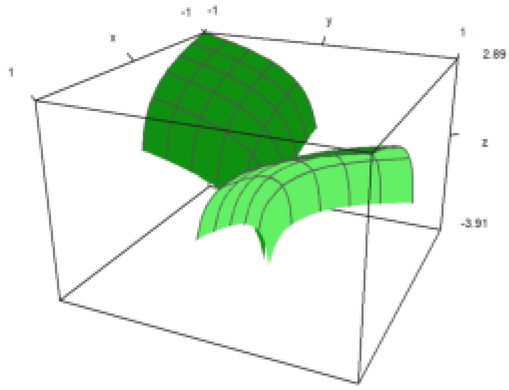
Contoh:



Gambar 4.11 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-026.png



Gambar 4.12 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-029.png



Gambar 4.13 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-031.png

$$f(x, y) = sin(x).cos(y)$$

>plot3d("sin(x)*cos(y)"):

$$f(x, y) = sin(2x).cos(y)$$

>plot3d("sin(2x)*cos(y)"):

$$f(x, y) = sin(x).tan(y)$$

>plot3d("sin(x)*tan(y)"):

$$f(x, y) = cos(x).tan(y)$$

>plot3d("cos(x)*tan(y)"):

$$f(x, y) = cosec(x).sec(y)$$

>plot3d("cosec(x)*sec(y)"):

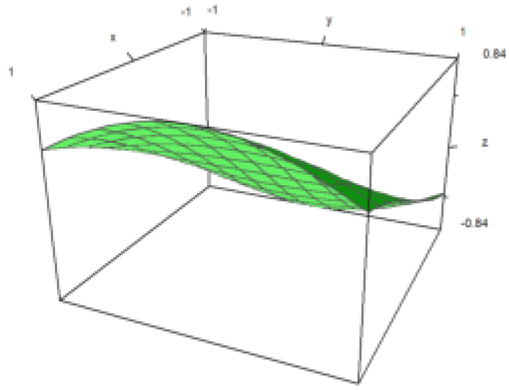
$$f(x, y) = cot(x).cosec(y)$$

>plot3d("cot(x)*cosec(y)"):

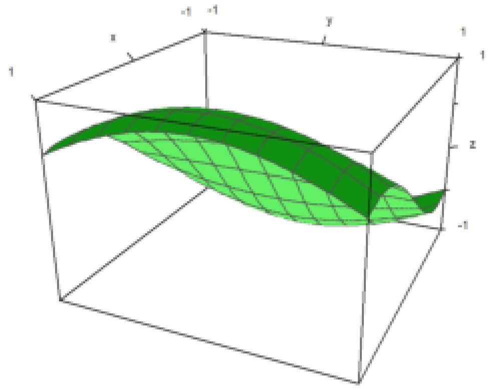
7. Grafik Fungsi Nilai Mutlak

Fungsi nilai mutlak dua variabel, juga dikenal sebagai fungsi modul dua variabel, dinyatakan sebagai

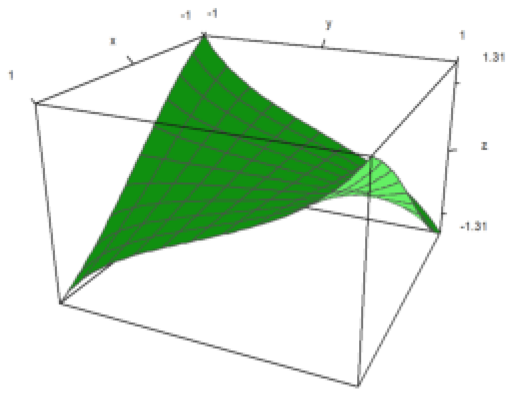
$$f(x, y) = |g(x, y)|$$



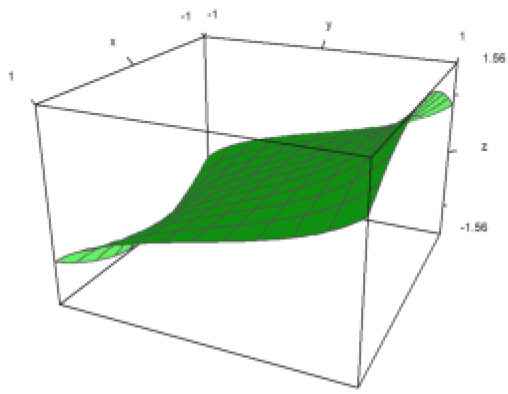
Gambar 4.14 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-033.png



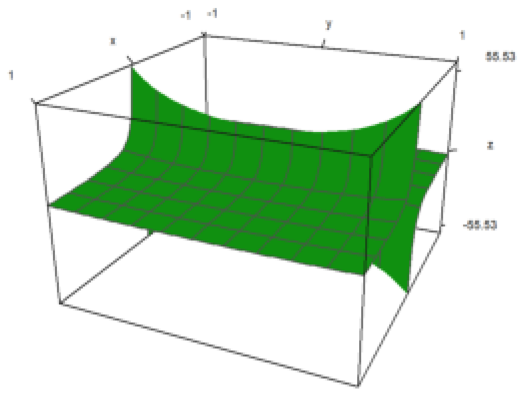
Gambar 4.15 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-035.png



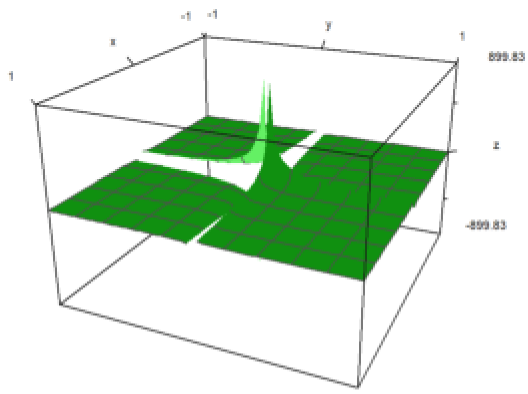
Gambar 4.16 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-037.png



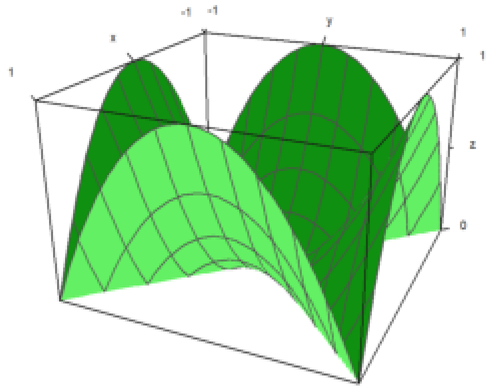
Gambar 4.17 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-039.png



Gambar 4.18 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-041.png



Gambar 4.19 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-043.png



Gambar 4.20 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-046.png

dimana g(x,y) adalah fungsi dua variabel.

Contoh:

$$f(x, y) = |x^2 - y^2|$$

>plot3d("abs(x^2 - y^2)"):

$$f(x, y) = |x^2 + y^2|$$

>plot3d("abs(x^2 + y^2)"):

$$f(x, y) = | - 2x^2 - 5y^2|$$

>plot3d("abs(-2x^2 - 5y^2)"):

$$f(x, y) = |x^2 - 8y^2|$$

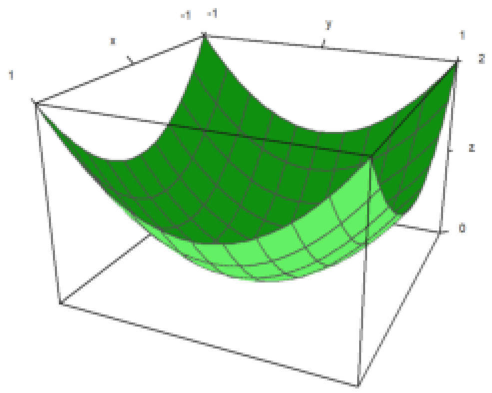
>plot3d("abs(x^2 - 8y^2)"):

Latihan soal

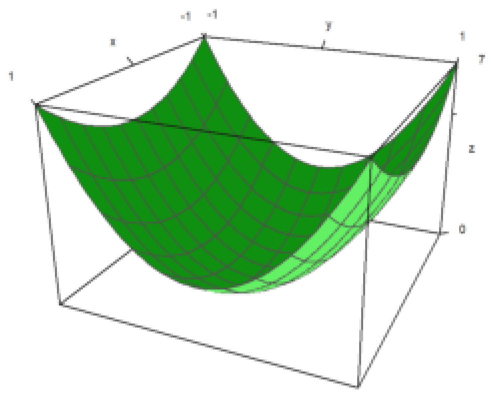
Buatkan grafik dari fungsi berikut:

1. $$f(x, y) = 8x - 3y + 7$$

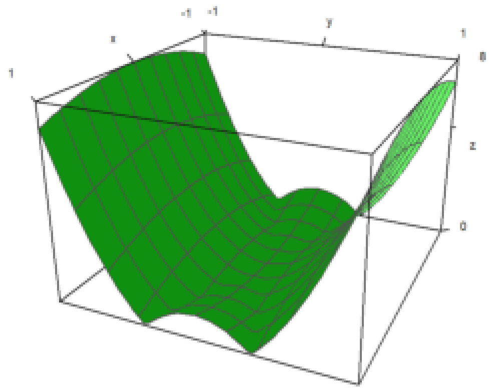
   >plot3d("8*x - 3*y +7"):



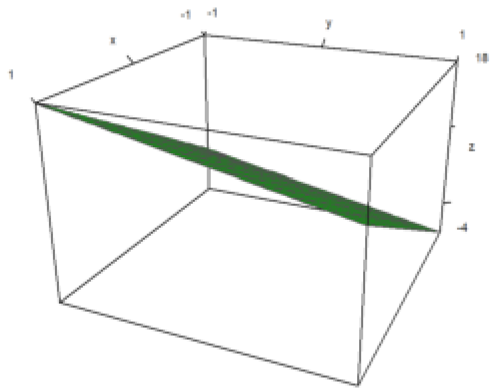
Gambar 4.21 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-048.png



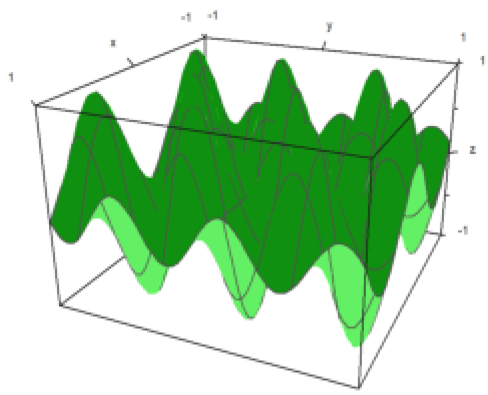
Gambar 4.22 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-050.png



Gambar 4.23 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-052.png



Gambar 4.24 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-054.png



Gambar 4.25 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-056.png

2.

$$f(x, y) = cos(5x).sin(9y)$$

>plot3d(“cos(5*x)*sin(9*y)”):

3.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 20y^2}$$

>plot3d(“sqrt(x^{2+20*y}2)”):

4.2 Menggambar Grafik Fungsi Dua Variabel yang Rumusnya Disimpan dalam Variabel Ekspresi

Apa yang dimaksud dengan Grafik Fungsi Dua Variabel?

Grafik fungsi dua variabel adalah representasi visual dari hubungan antara sebuah fungsi matematika dengan dua variabel independen (biasanya disebut sebagai “x” dan “y”) dan variabel dependen (biasanya disebut sebagai “z” atau “f(x, y)”).

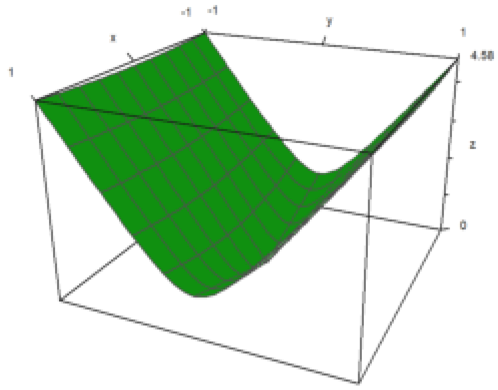
Dalam grafik ini, sumbu x dan sumbu y digunakan untuk menggambarkan nilai-nilai dua variabel independen, sementara permukaan atau grafik 3D digunakan untuk menggambarkan nilai-nilai variabel dependen yang dihasilkan oleh fungsi tersebut.

Grafik fungsi dua variabel membantu memvisualisasikan bagaimana nilai variabel dependen (z) berubah seiring perubahan kedua variabel independen (x dan y) sesuai dengan aturan fungsi tersebut.

Fungsi matematika yg terlibat dalam Menggambar Grafik

A. Fungsi Dua Variabel

1. Fungsi Linear



Gambar 4.26 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-058.png

Bentuk umum

f(x, y) = ax + by + c, di mana a, b, dan c adalah konstanta. Grafiknya adalah bidang datar.

2. Fungsi Kuadratik

Bentuk umum f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f.

Grafiknya dapat berupa permukaan yang berbentuk paraboloid, baik terbuka ke atas atau ke bawah.

3. Fungsi Trigonometri

Bentuk umum sinus dan cosinus

(x, y) = sin(x) + cos(y)

akan menghasilkan permukaan yang berulang-ulang naik dan turun.

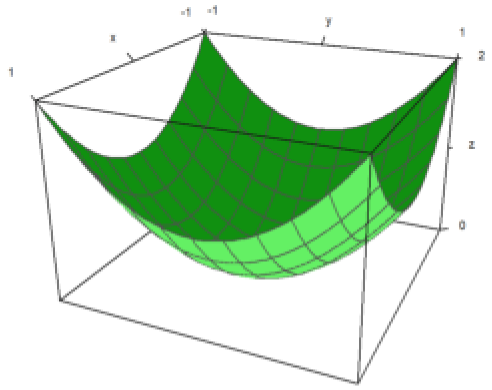
4. Fungsi Pecahan

Bentuk umum f(x, y) = g(x, y) / h(x, y), di mana g(x, y) dan h(x, y) adalah fungsi-fungsi lain.

grafiknya dapat menghasilkan berbagai pola yang tergantung pada sifat fungsi g dan h.

Menggambar Grafik Fungsi

Perintah yang digunakan untuk menggambar grafik fungsi dalam EMT yaitu dengan menggunakan plot3d.



Gambar 4.27 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-059.png

Untuk menampilkan grafik, akhiri perintah plot3d dengan tanda (:).

Tanda (:) akan menampilkan grafik di layar yang berbeda.

>plot3d(“x^{2+y}2”):

>plot3d(“x^3+x*sin(y)”,-5,5,0,6*pi):

Menyimpan Variabel Ekspresi

Untuk menyimpan sebuah fungsi, dapat dilakukan dengan menggunakan perintah function. Lalu, ketika ingin memanggil atau membuat grafik dari fungsi tersebut, cukup dengan memanggil nama fungsi tersebut.

>function a(x,y):= x^{2+y}3

>plot3d(“a”):

>function f(x,y):= x^{3-y}2

>plot3d(“f”):

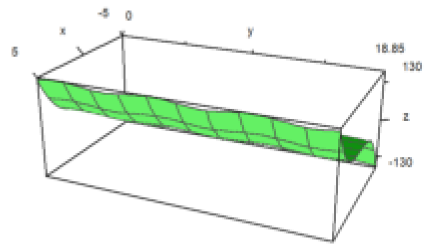
Contoh Latihan Soal

$$f(x,y) = x^3 + y^4$$

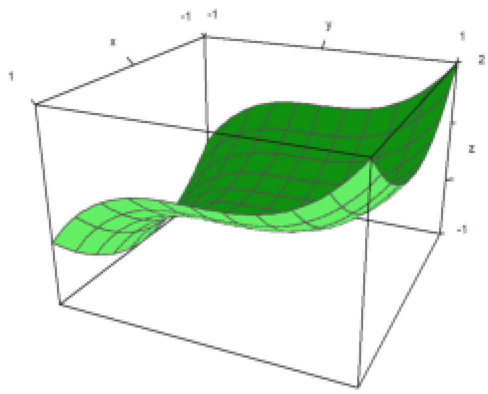
>function f(x,y):= x^{3+y}4

>plot3d(“f”):

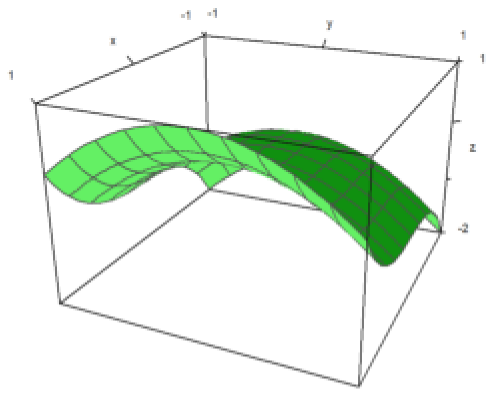
>plot3d(“a”,>user, . . .
> title=“Turn with the vector keys (press return to finish)”):



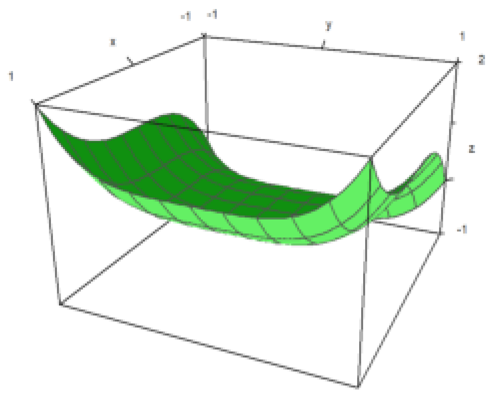
Gambar 4.28 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-060.png



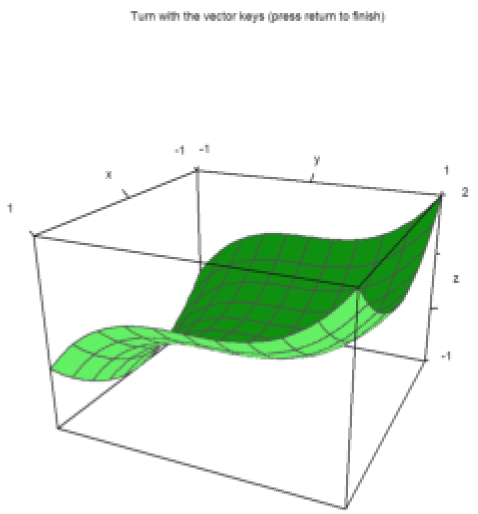
Gambar 4.29 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-061.png



Gambar 4.30 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-062.png



Gambar 4.31 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-064.png



Gambar 4.32 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-065.png

Perintah ini mengizinkan pengguna untuk menggambar grafik 3D dari fungsi yang mereka masukkan sendiri, serta memberikan petunjuk interaktif tentang cara berinteraksi dengan grafik. Pengguna dapat memutar tampilan grafik menggunakan tombol arah pada keyboard, dan menekan "return" untuk menyelesaikan interaksi.

>plot3d("a",r=5,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3):

perintah ini akan menggambar grafik tiga dimensi dari fungsi "a" dalam rentang x dan y dari -5 hingga 5, dengan 80 titik untuk detail yang lebih halus. Nilai fungsi akan diperbesar 4 kali, dan grafik akan ditampilkan dengan skala 1.2 untuk tampilan yang lebih jelas. Bingkai grafis akan ditentukan oleh parameter frame=3.

>view

```
[5,  2.6,  2,  0.4]
```

>plot3d("a",distance=3,zoom=2,angle=0,height=0):

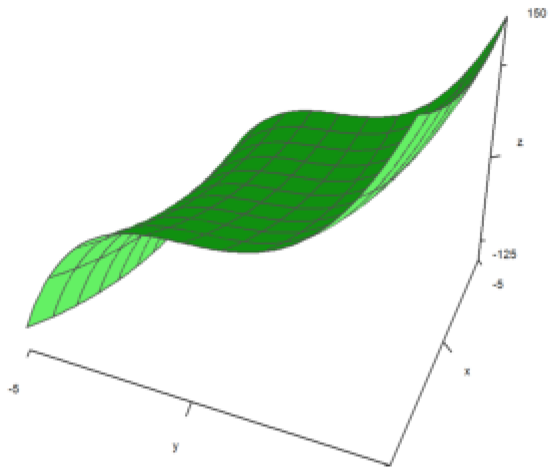
>plot3d("x^{4+y}2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
> center=[0.4,0,0],zoom=5):

>plot3d("a",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...
> center=[0,0,-2],frame=3):

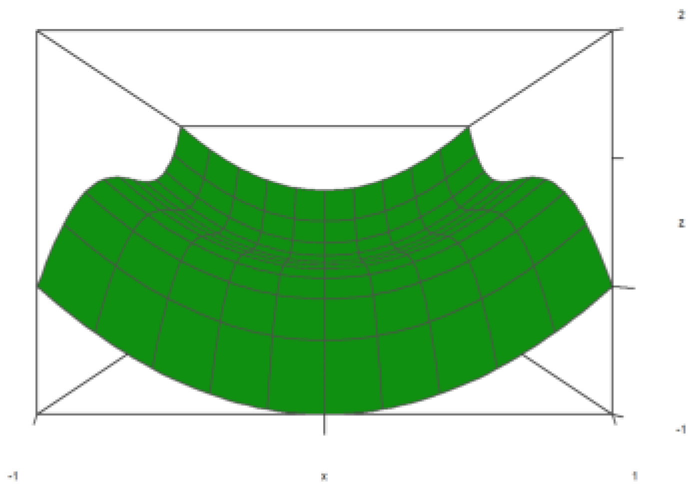
>plot3d("a",r=5,>polar, ...
> fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=blue):

>plot3d("x","a","y",r=2,zoom=3.5,frame=3):

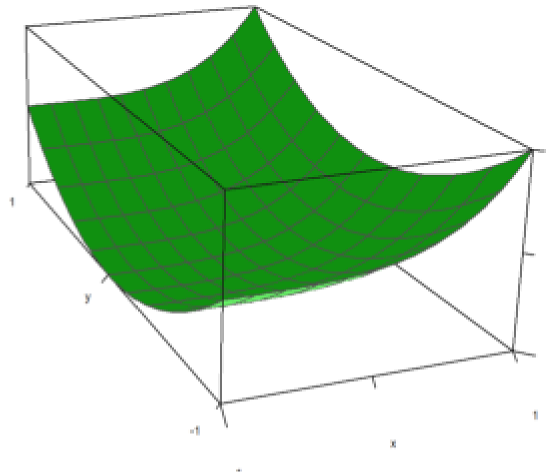
B. Fungsi Linear



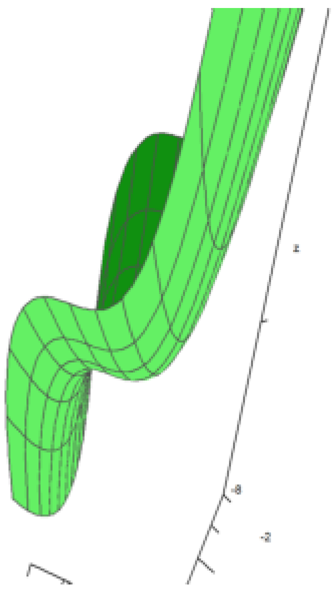
Gambar 4.33 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-066.png



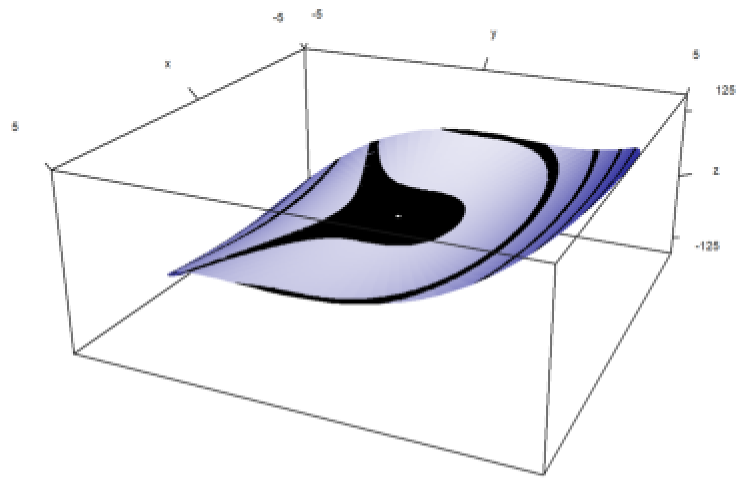
Gambar 4.34 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-067.png



Gambar 4.35 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-068.png

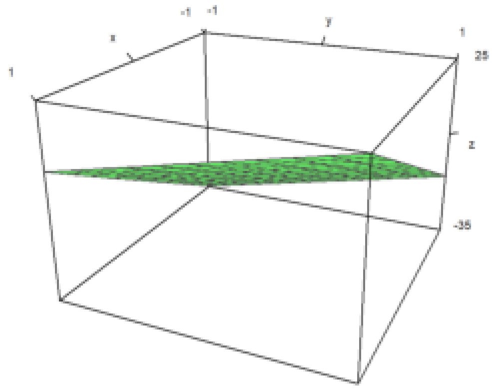


Gambar 4.36 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-069.png



Gambar 4.37 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-070.png

Gambar 4.38 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-071.png



Gambar 4.39 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-072.png

>function e(x,y):= 20x+10y-5

>plot3d("e"):

>plot3d("e",>user, ...
> title="Turn with the vector keys (press return to finish)"):

>plot3d("e",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3):

>view

```
[5,  2.6,  2,  0.4]
```

>plot3d("e",distance=3,zoom=2,angle=0,height=0):

>plot3d("e",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
> center=[0.4,0,0],zoom=5):

>plot3d("e",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...
> center=[0,0,-2],frame=3):

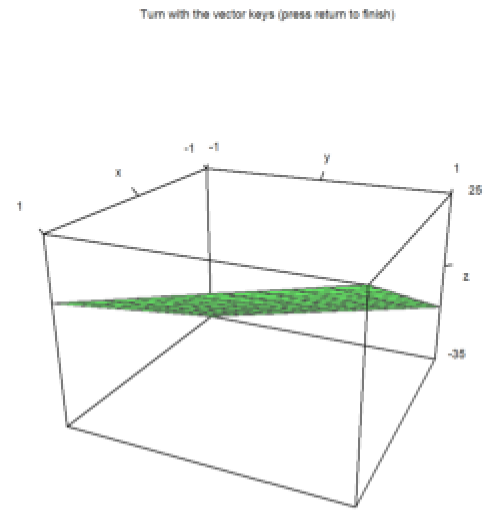
>plot3d("e",r=5,>polar, ...
> fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=gray):

>plot3d("x","e","y",r=2,zoom=3.5,frame=3):

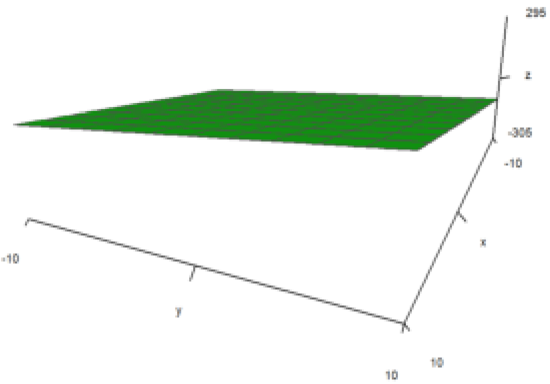
C. Fungsi Trigonometri

>function f(x,y):= sin(x+y)

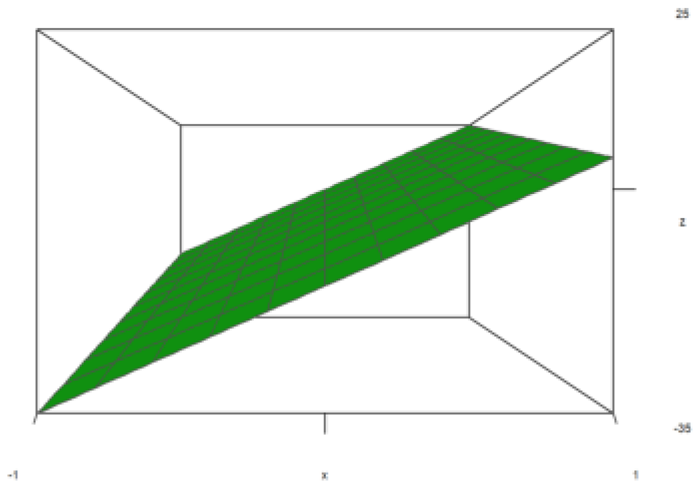
>plot3d("f")



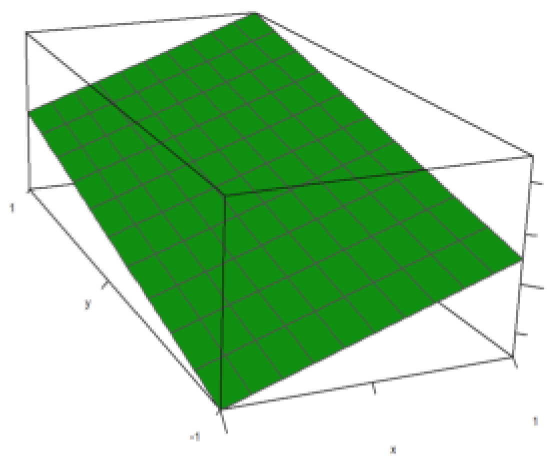
Gambar 4.40 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-073.png



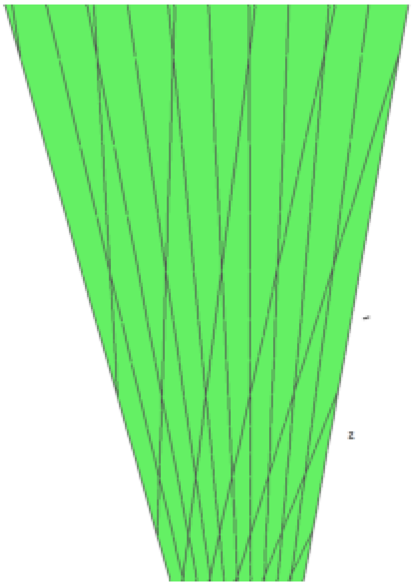
Gambar 4.41 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-074.png



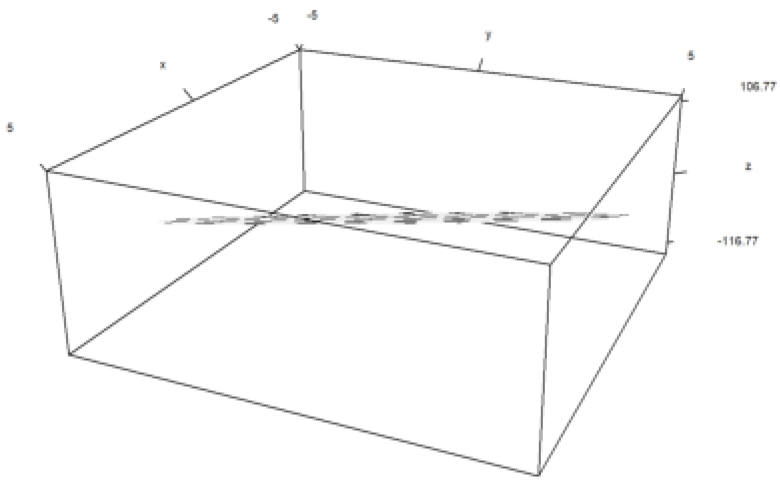
Gambar 4.42 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-075.png



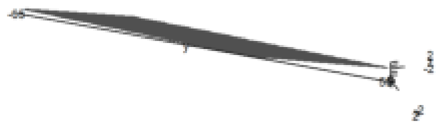
Gambar 4.43 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-076.png



Gambar 4.44 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-077.png



Gambar 4.45 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-078.png



Gambar 4.46 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-079.png

>plot3d("f",>user, ...
> title="Turn with the vector keys (press return to finish)"):

>plot3d("f",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3):

>view

```
[5,   2.6,   2,   0.4]
```

>plot3d("f",distance=3,zoom=2,angle=0,height=0):

>plot3d("f",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
> center=[0.4,0,0],zoom=5):

>plot3d("f",r=5,>polar, ...
> fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=gray):

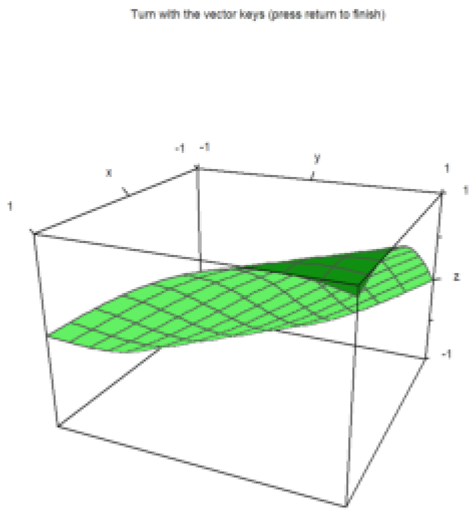
4.3 Menggambar Grafik Fungsi Dua Variabel yang Fungsinya

Didefinisikan sebagai Fungsi Numerik

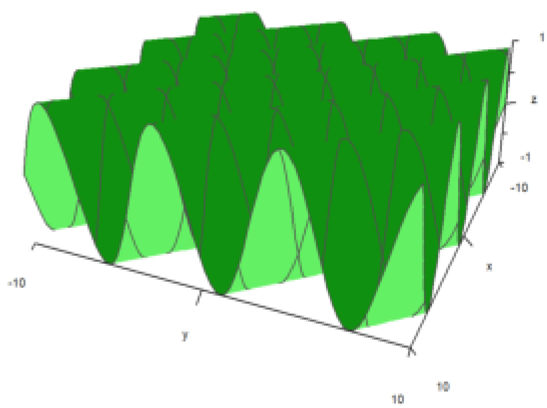
Sebelum masuk ke cara memvisualisasikan grafik, perlu diketahui apa itu fungsi dua variabel dan apa itu fungsi numerik.

1. Fungsi Dua Variabel

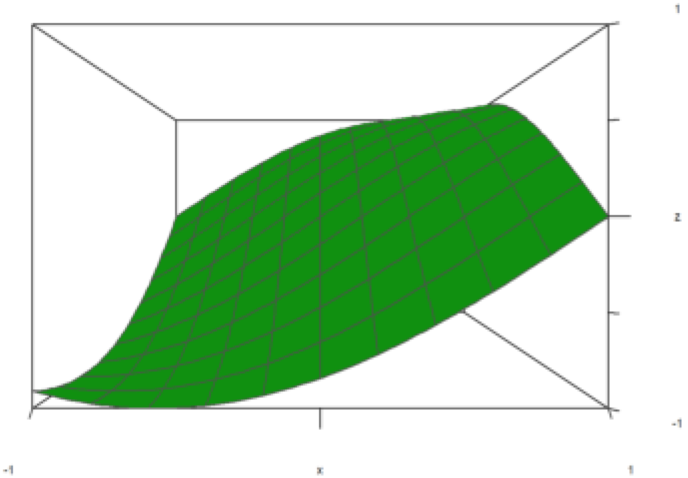
Fungsi dua variabel adalah jenis fungsi di mana ada dua variabel bebas (biasanya dinotasikan sebagai x dan y) yang menentukan nilai dari fungsi tersebut. Dengan kata lain, untuk setiap kombinasi nilai



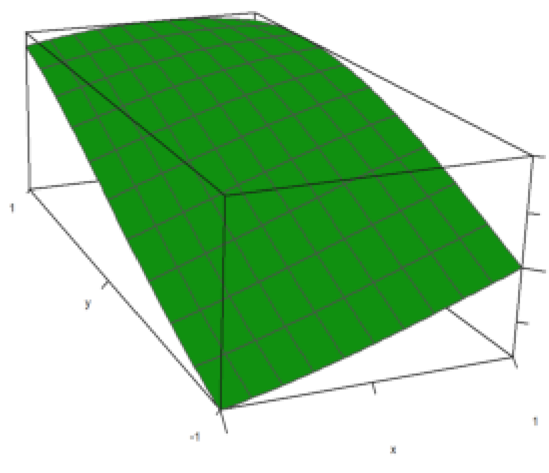
Gambar 4.47 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-080.png



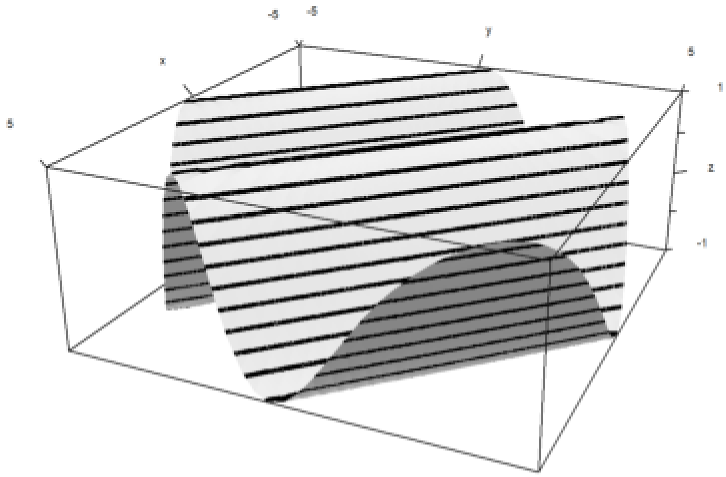
Gambar 4.48 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-081.png



Gambar 4.49 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-082.png



Gambar 4.50 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-083.png



Gambar 4.51 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-084.png

dari x dan y, fungsi ini akan menghasilkan satu nilai output tertentu. Fungsi dari dua variabel yang mana setiap kombinasi nilai dari kedua variabel tersebut menghasilkan sebuah nilai tunggal.

2. Fungsi Numerik

Fungsi dimana setiap pasangan variabel independen adalah angka atau bilangan nyata. Secara sederhana, ketika memasukkan angka atau bilangan nyata ke variabel-variabel dalam fungsi maka hasil akhir yang dihasilkan juga angka atau bilangan nyata, bukan simbol atau ekspresi yang belum dihitung.

Contoh:

ada fungsi

$$f(x, y) = 2x + y$$

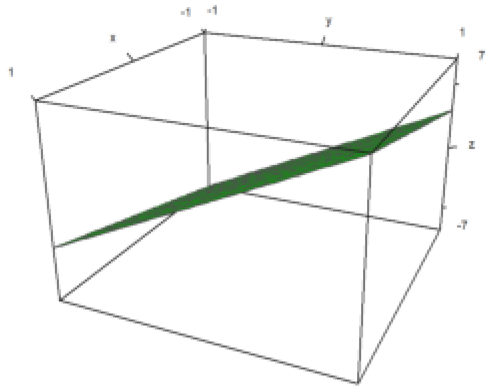
Ketika kita memasukkan bilangan nyata ke x dan y maka akan dihasilkan suatu bilangan nyata juga. Misal masukkan x=1 dan y=1. Akan diperoleh

$$2(1) + 1 = 3$$

Visualisasi Grafik

Untuk memvisualisaikan fungsi dua variabel dengan fungsinya didefinisikan sebagai fungsi numerik, akan dibuat grafik 3D dengan sintaks plot3d. Untuk membedakan fungsi numerik dengan simbolik, pada kali ini untuk setiap fungsi numerik dua variabel hanya akan memuat variabel x dan y. Namun, dalam pemakaian secara umum, bisa digunakan variabel apapun.

Penulisan Sintaks:



Gambar 4.52 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-088.png

1) definisikan fungsi numerik

function f(x,y):= ax+by dengan a dan b adalah suatu konstanta dan fungsi tidak selalu direpresentastikan dengan f tetapi bisa dengan huruf apapun. Contoh : g(x,y)

2) sintaks plot3d

plot3d("f"):

Contoh Visualisasi Grafik:

1. Visualisasi grafik fungsi linear dua variabel

$$f(x, y) = 3x + 7y$$

>function f(x,y):= 2*x+5*y

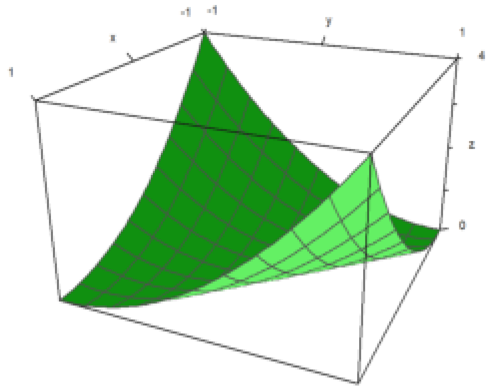
>plot3d("f"):

2. Visualisasi grafik fungsi kuadrat dua variabel

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$$

>function f(x,y):= $x^{2+2*x*y+y}2$

>plot3d("f"):



Gambar 4.53 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-090.png

3. Visualisasi Grafik Fungsi Eksponen Dua Variabel

$$g(x,y) = x^{2y+8}$$

>function g(x,y):= x^(2y+8)

>plot3d("g"):

4. Grafik Fungsi Logaritma Dua Variabel

$$f(x,y) = \log(xy)$$

>function f(x,y):= log(x*y)

>plot3d("f"):

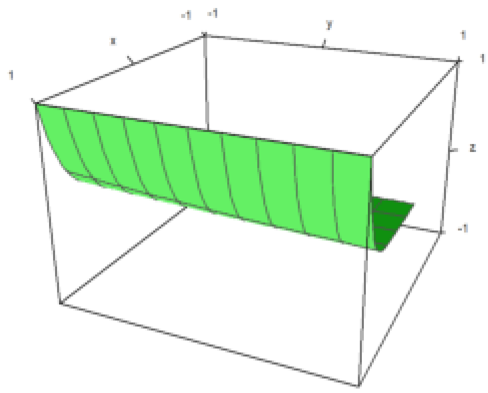
5. Grafik Fungsi Trigonometri Dua Variabel

$$h(x,y) = sin(xy)cos(y)$$

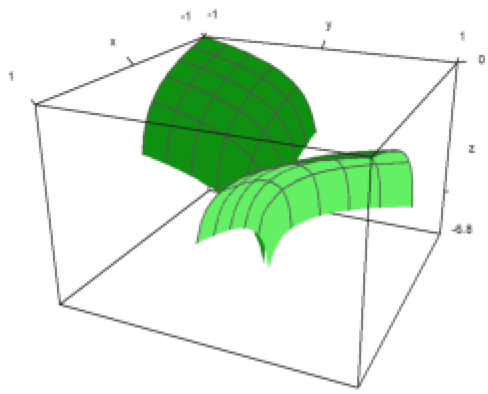
>function h(x,y):= sin(x*y)*cos(y)

>plot3d("h"):

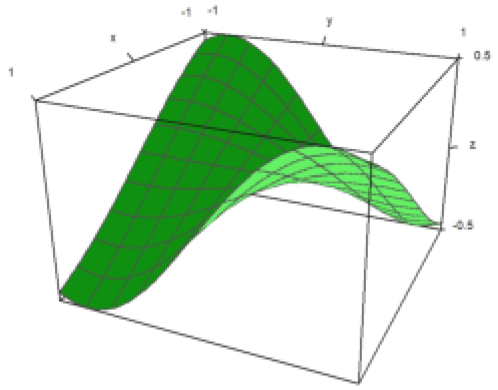
6. Grafik Fungsi Nilai Mutlak Dua Variabel



Gambar 4.54 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-092.png



Gambar 4.55 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-094.png



Gambar 4.56 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-096.png

$$i(x, y) = |(2x + y)|$$

>function i(x,y):= abs(2x+y)

>plot3d("i"):

Latihan Soal

Buatlah visualisasi grafik dari fungsi berikut ini!

1.

$$f(x, y) = 2^x + 3y$$

>function f(x,y):=2^x+3*y

>plot3d ("f"):

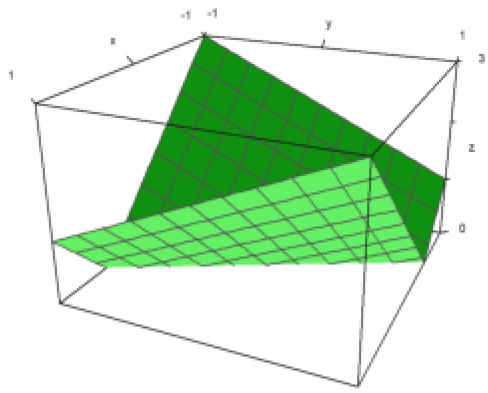
2.

$$g(x, y) = sin(x^2y + 1)$$

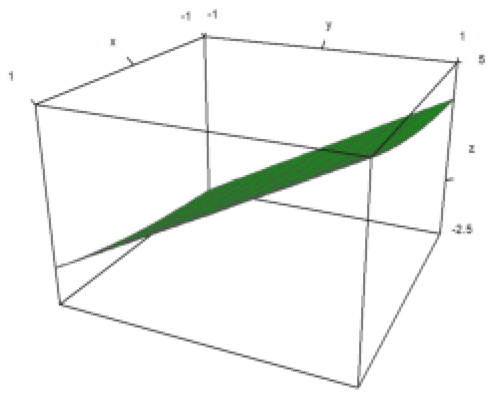
>function g(x,y):= sin(x^2*y+1)

>plot3d("g"):

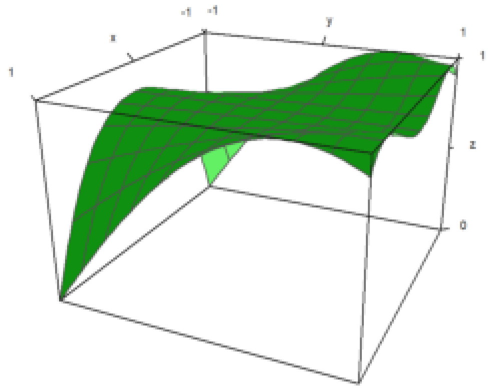
3.



Gambar 4.57 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-098.png



Gambar 4.58 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-100.png



Gambar 4.59 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-102.png

$$h(x, y) = |4x + sin(y^3 + 1)|$$

>function h(x,y):=abs(4*x + sin(y^3+1))

>plot3d("h"):

4.4 Menggambar Grafik Fungsi Dua Variabel yang Fungsinya

Didefinisikan sebagai Fungsi Simbolik

Grafik Fungsi dua variabel yang fungsinya didefinisikan sebagai fungsi simbolik adalah suatu grafik yang memvisualisasikan Persamaan Linear Dua Variabel (PLDV) dalam koordinat kartesius dengan fungsinya merupakan fungsi simbolik.

Proses visualisasi ini memungkinkan Kita untuk melihat dan memahami bagaimana fungsi tersebut berperilaku dalam tiga dimensi.

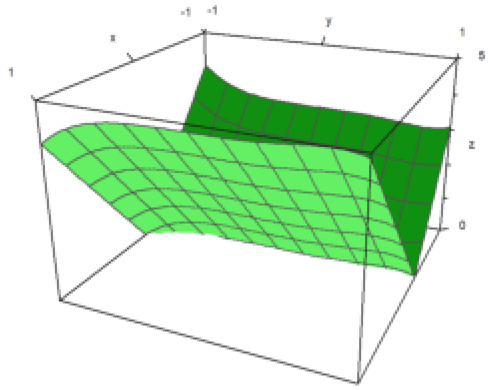
Sedangkan yang dimaksud dengan fungsi simbolik yaitu fungsi yang didefinisikan dalam bentuk matematika simbolik, artinya kita memiliki ekspresi matematika yang menggambarkan hubungan antara dua variabel. misalnya, jika kita memiliki fungsi

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

kita dapat menggambar grafiknya untuk melihat bentuk permukaan yang dihasilkan oleh fungsi ini dalam tiga dimensi. Grafik ini mungkin akan berupa tumpukan parabola yang membentuk kerucut.

Karakteristik fungsi simbolik adalah dengan mengganti tanda := menjadi &=

Perbedaan utama antara fungsi numerik dan fungsi simbolik adalah bahwa fungsi numerik



Gambar 4.60 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-104.png

memberikan hasil numerik secara langsung (menghasilkan angka), sementara fungsi simbolik memungkinkan kita untuk bekerja dengan simbol matematika sebelum menghitung nilai numeriknya. Pilihan antara keduanya tergantung pada kebutuhan analisis matematika yang kita lakukan.

Tujuan menggambar grafik fungsi dua variabel adalah untuk memahami pola, sifat, dan hubungan antara dua variabel tersebut secara visual, yang dapat membantu dalam analisis dan pemahaman masalah matematika atau ilmu pengetahuan yang melibatkan fungsi ini.

Langkah-langkah Membuat Grafik

1) Definisikan fungsinya terlebih dahulu. Tentukan fungsi dua variabel yang akan divisualisasikan dalam bentuk simbolik.

Misal diambil fungsi

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

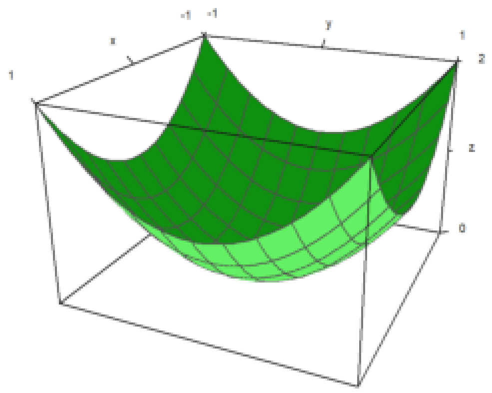
Maka perintah yang dapat dituliskan yaitu:

>function f(x,y)&= x^{2+y}2;

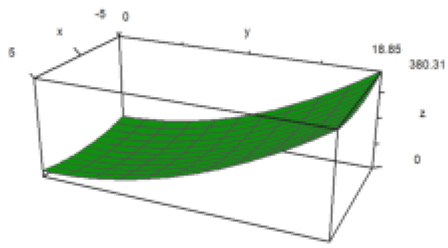
2) Panggil fungsinya

>plot3d("f(x,y)"):

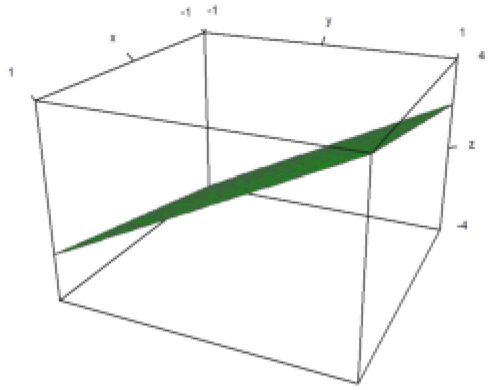
3) Tentukan rentang variabelnya



Gambar 4.61 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-107.png



Gambar 4.62 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-108.png



Gambar 4.63 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-110.png

>plot3d("f(x,y)",-5,5,0,6*pi):

Membuat Grafik Fungsi Linear

$$g(x, y) = x + 3y$$

>function g(x,y) &= x+3*y;

>plot3d("g(x,y)"):

$$M(x, y) = -2x - 4y$$

>function M(x,y) &= -2*x-4*y;

>plot3d("M(x,y)"):

Rentang variabel:

>plot3d("M(x,y)",-2,2,0,6*pi):

Membuat Grafik Fungsi Kuadrat

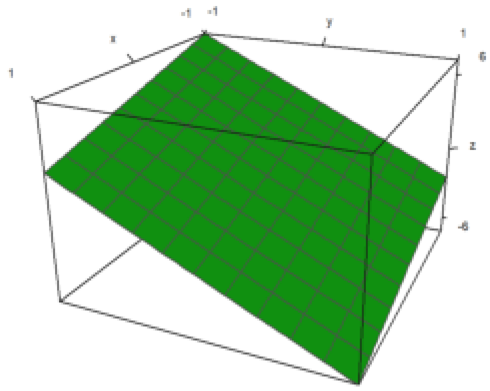
$$Q(x, y) = x^2 - y^2$$

>function Q(x,y) &= x^2 - y^2;

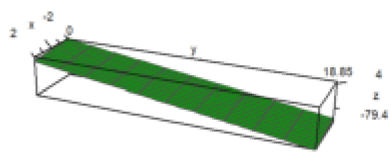
>plot3d("Q(x,y)"):

$$P(x, y) = 3x^2 - 4xy + 2y^2$$

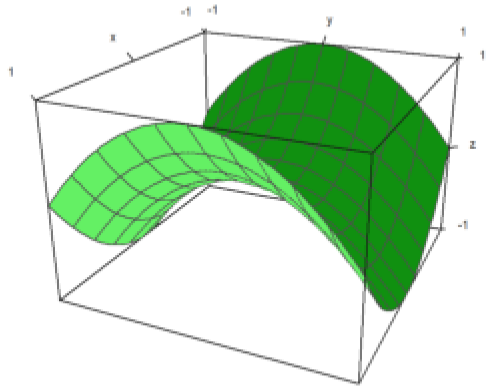
>function P(x,y) &= 3*x$^{2-4*x*y+2*y}$2;



Gambar 4.64 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-112.png



Gambar 4.65 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-113.png



Gambar 4.66 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-115.png

>plot3d("P(x,y)"):

Rentang variabel:

>plot3d("P(x,y)",-10,10,0,9*pi):

Membuat Grafik Fungsi Akar Kuadrat

$$A(x, y) = \sqrt{10x^2 + 2y^2}$$

>function A(x,y) &= sqrt(10*x^{2+2*y}2);

>plot3d("A"):

$$W(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$$

>function W(x,y) &= sqrt(x^{2+2*y}2);

>plot3d("W"):

Rentang Variabel:

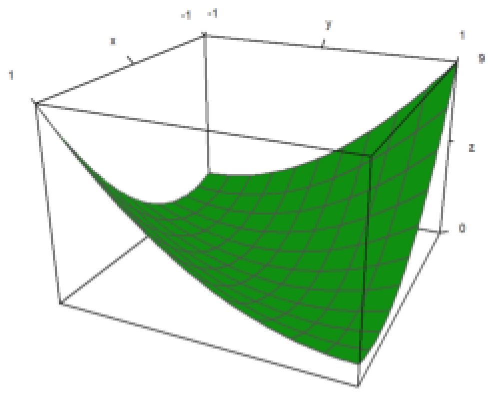
>plot3d("W(x,y)",-20,100,0,5*pi):

Membuat Grafik Fungsi Eksponensial

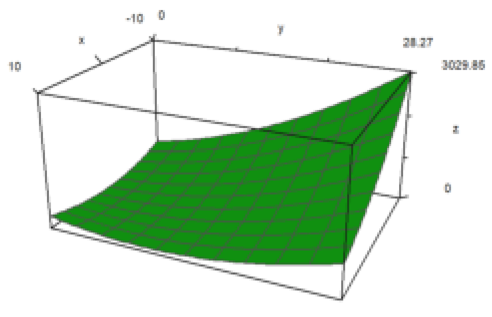
$$F(x, y) = 9.12^{xy}$$

>function F(x,y) &= 9*12^(x*y);

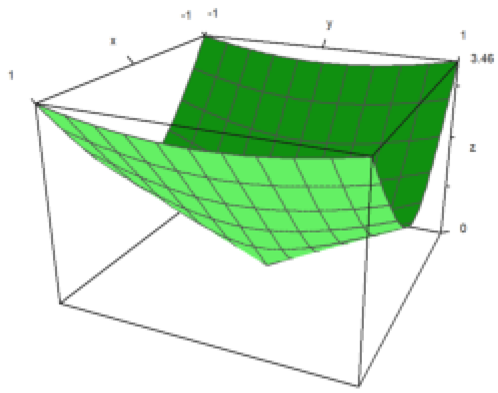
>plot3d("F"):



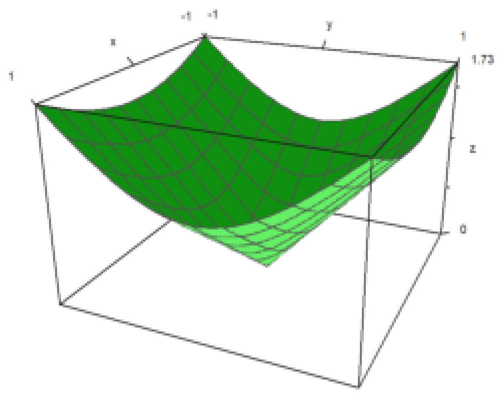
Gambar 4.67 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-117.png



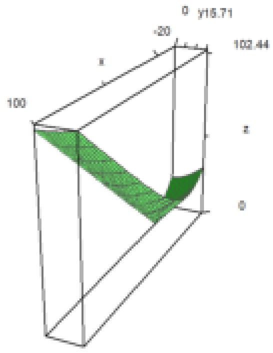
Gambar 4.68 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-118.png



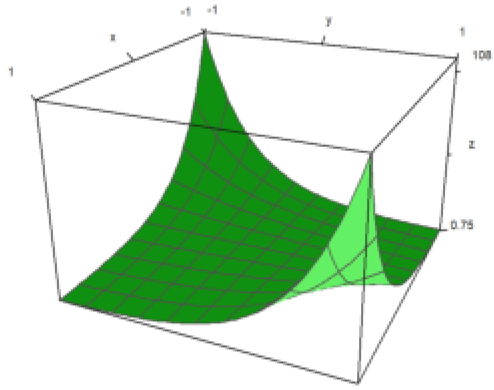
Gambar 4.69 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-120.png



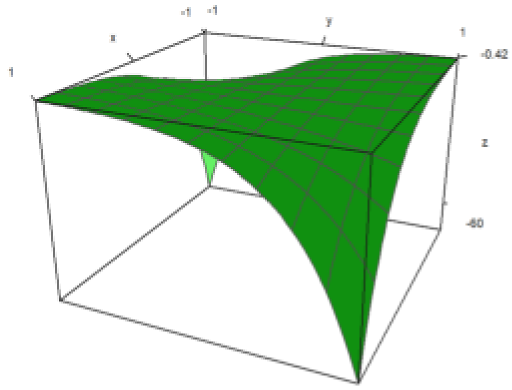
Gambar 4.70 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-122.png



Gambar 4.71 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-123.png



Gambar 4.72 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-125.png



Gambar 4.73 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-127.png

$$H(x, y) = 5.(-20)^{xy}$$

>function H(x,y) &= 5*-12^(x*y);

>plot3d("H"):

$$T(x, y) = (-21).5^{xy}$$

>function T(x,y) &= -21*-5^(x*y);

>plot3d("T"):

Membuat Grafik Fungsi Logaritma

$$B(x, y) = log(x.2y), Basis10$$

>function B(x,y) &= log(x*2*y);

>plot3d("B"):

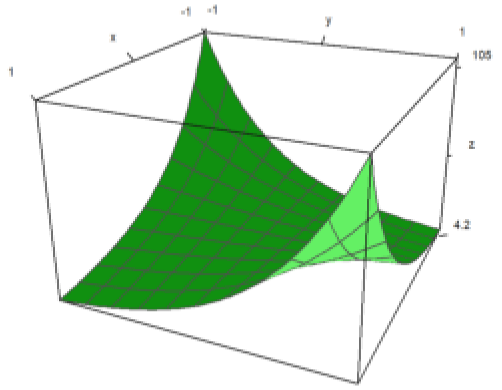
$$C(x, y) = log(30x.5y), basis10$$

>function C(x,y) &= log(30*x*5*y);

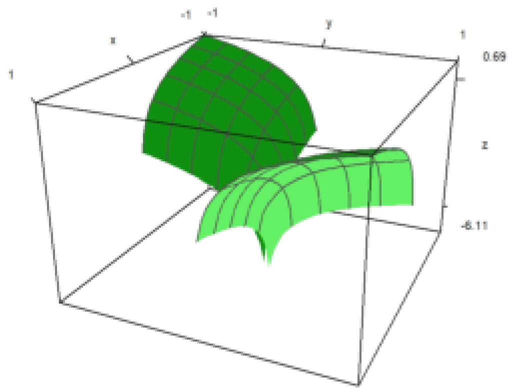
>plot3d("C"):

Membuat Grafik Fungsi Trigonometri

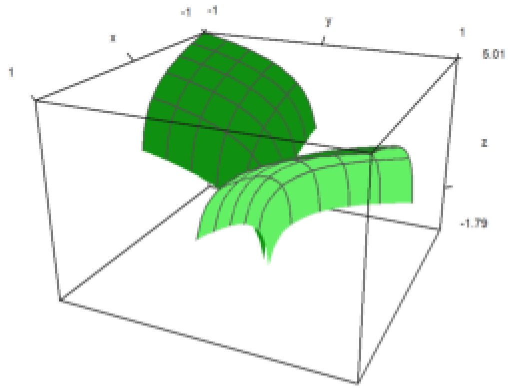
$$D(x, y) = sin(2x).cos(3y)$$



Gambar 4.74 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-129.png



Gambar 4.75 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-131.png



Gambar 4.76 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-133.png

>function D(x,y) &= sin(2*x)*cos(3*y);

>plot3d("D"):

$$J(x,y) = sin(2x).tan(y)$$

>function J(x,y) &= sin(2*x)*tan(y);

>plot3d("J"):

$$G(x,y) = sec(2x).cot(5y)$$

>function G(x,y) &= sec(2*x)*cot(y);

>plot3d("G"):

Membuat Grafik Fungsi Nilai Mutlak

$$T(x,y) = |2x^2 - y^2|$$

>function T(x,y) &= abs(2*x^2 - y^2);

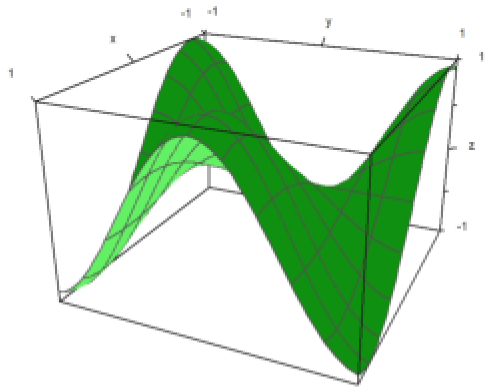
>plot3d("T"):

$$M(x,y) = |-10x^2 - 3y^2|$$

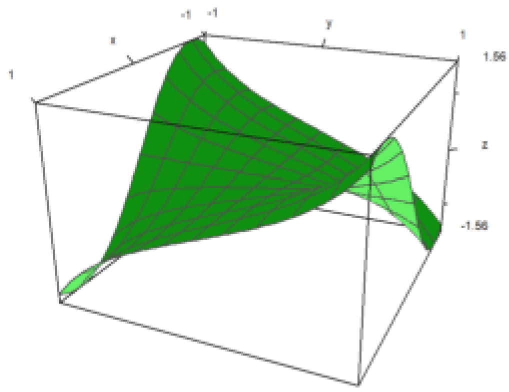
>function M(x,y) &= abs(-10*x^2 - 3*y^2);

>plot3d("M"):

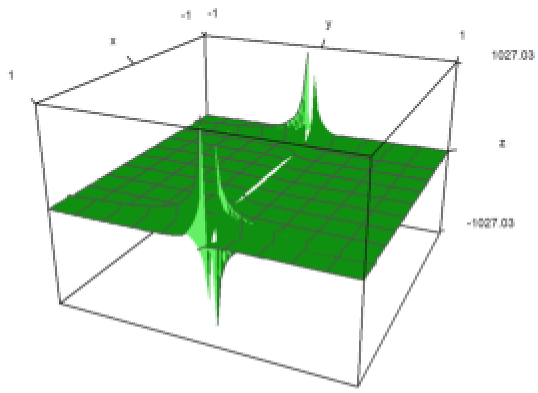
Rentang Variabel :



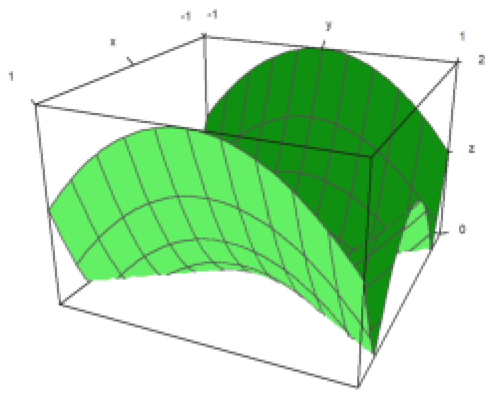
Gambar 4.77 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-135.png



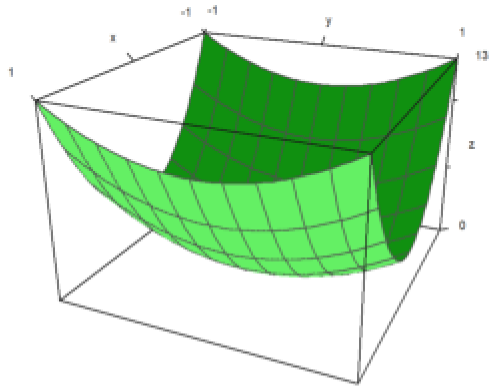
Gambar 4.78 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-137.png



Gambar 4.79 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-139.png



Gambar 4.80 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-141.png



Gambar 4.81 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-143.png

>plot3d("M(x,y)",-15,2,0,8*pi):

Latihan

Buatlah grafik dari fungsi berikut:

$$A(x, y) = x^2y + 3y^2$$

>function A(x,y) &= x$^{2*y+3*y}$2;

>plot3d ("A"):

$$B(x, y) = y^2 - 2x^2y + 4x^3 + 20x^2$$

>function B(x,y)&= y^{2-2*x}2*y+4*x^{3+20*x}2;

>plot3d("B"):

$$C(x, y) = cosec(9x) - tan(2y)$$

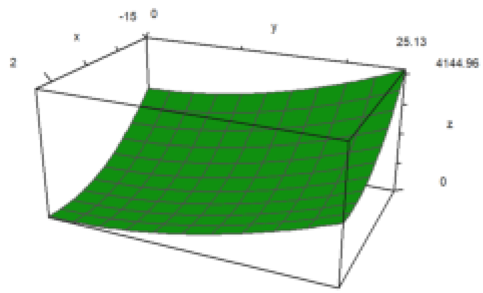
>function C(x,y)&= cosec(9*x)-tan(2*y);

>plot3d ("C"):

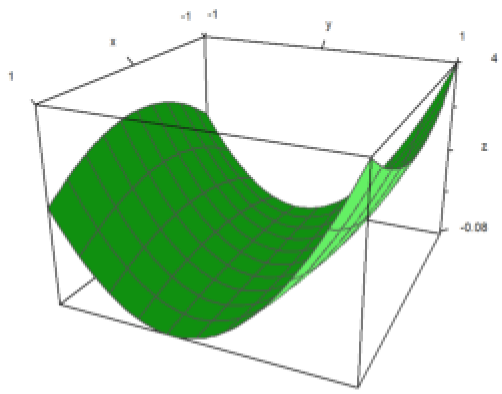
Beri rentang variabel untuk fungsi C(x,y):

-100,50,0,2*pi

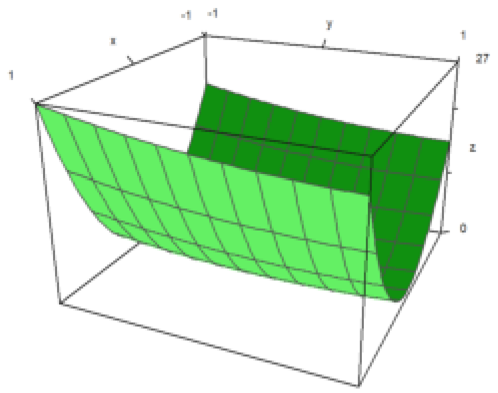
>plot3d("C(x,y)",-100,50,0,2*pi):



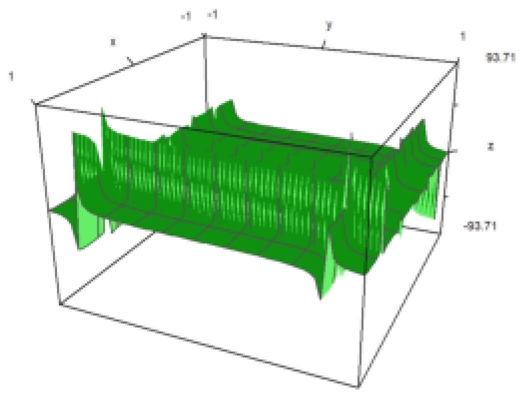
Gambar 4.82 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-144.png



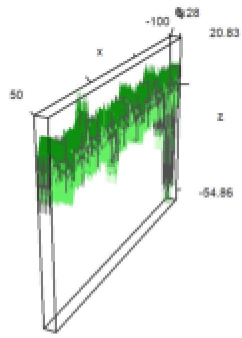
Gambar 4.83 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-146.png



Gambar 4.84 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-148.png



Gambar 4.85 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-150.png



Gambar 4.86 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-151.png

4.5 Menggambar Data x, y, z pada ruang Tiga Dimensi (3D)

Menggambar data pada ruang tiga dimensi (3D) adalah proses

visualisasi data yang mengubah informasi dalam tiga dimensi, yaitu panjang, lebar, dan tinggi, menjadi representasi visual yang dapat dipahami dan dianalisis.

Tujuan dari menggambar data 3D adalah untuk membantu pemahaman dan

interpretasi data yang lebih baik, terutama ketika data tersebut memiliki komponen yang tidak dapat direpresentasikan dengan baik dalam dua dimensi.

Sama seperti plot2d, plot3d menerima data. Untuk objek 3D, kita perlu menyediakan matriks nilai x-, y- dan z, atau tiga fungsi atau ekspresi fx(x,y), fy(x,y), fz(x,y).

$$\gamma(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s))$$

Karena x,y,z adalah matriks, kita asumsikan bahwa (t,s) melalui sebuah kotak persegi. Hasilnya, kita dapat memplot gambar persegi panjang di ruang angkasa.

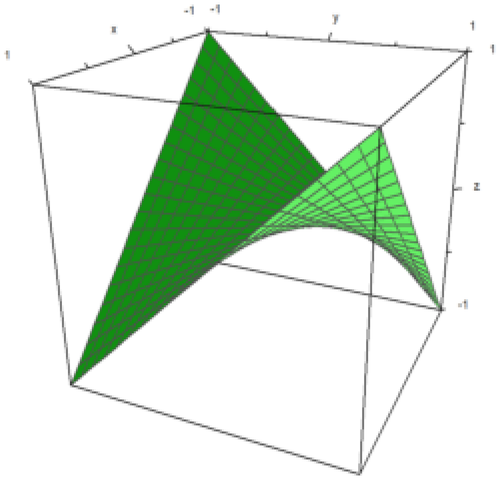
Kita dapat menggunakan bahasa matriks Euler untuk menghasilkan koordinat secara efektif.

Dalam contoh berikut, kami menggunakan vektor nilai t dan vektor kolom nilai s untuk membuat parameter permukaan bola. Dalam gambar kita dapat menandai daerah, dalam kasus kita daerah kutub.

Contoh 1 grafik fungsi

>t=-1:0.1:1; s=(-1:0.1:1)'; plot3d(t,s,t*s):

Penjelasan sintaks dari plot



Gambar 4.87 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-153.png

- plot3d = membawa euler untuk mengetahui perintah apa yang harus dilakukan
- (” . . . ”) = tempat kita untuk memasukkan perintah yang kita inginkan

Contoh 2

kita akan memebentuk plot dengan fungsi dibawah ini

$$x^2 + y^2$$

>plot3d(“x^{2+y}2”):

Selanjutnya kita akan menggambar garis pada plot dengan menggunakan grid

>plot3d(“x^{2+y}2”,grid=2):

Jika kita ingin memodifikasi plot dengan menambahkan warna pada plot, bisa menggunakan fillcolor.

Fillcolor dapat diisi dengan 1 warna yang sama atau 2 warna yang berbeda

>plot3d(“x^{2+y}2”,grid= 2,fillcolor=[blue,blue]):

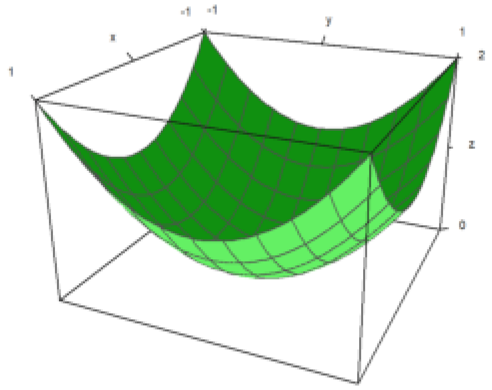
Contoh 3

Jika kita ingin membuat plot 3d pada fungsi

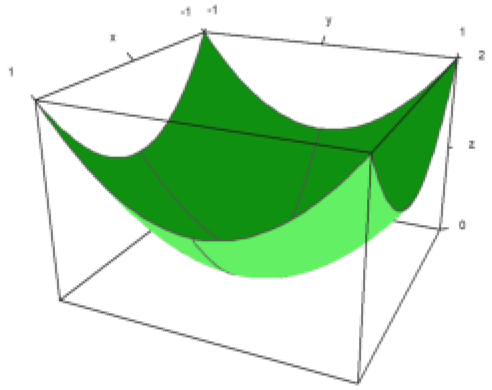
$$2x^2 + y^3$$

kita bisa menggunakan perintah seperti dibawah ini

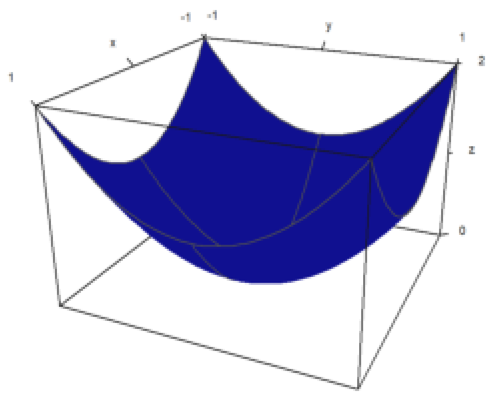
>plot3d(“2x^{2+y}3”,grid=10,>hue, color=red);



Gambar 4.88 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-155.png



Gambar 4.89 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-156.png



Gambar 4.90 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-157.png

>insimg()

Jika kita mau menebalkan warna pada gambar diatas makam bisa menggunakan perintah

>plot3d("2x^{2+y}3",grid=10,fillcolor=[red,red]);

>insimg()

Contoh 4

Tentu saja, titik cloud juga dimungkinkan. Untuk memplot data titik dalam ruang, kita membutuhkan tiga vektor untuk koordinat titik-titik tersebut.

Gayanya sama seperti di plot2d dengan points=true;

>n=500;...
> plot3d(normal(1,n),normal(1,n),normal(1,n),points=true,style="."):

Contoh Soal 5

Dalam contoh berikut, kita membuat tampilan bayangan dari bola yang

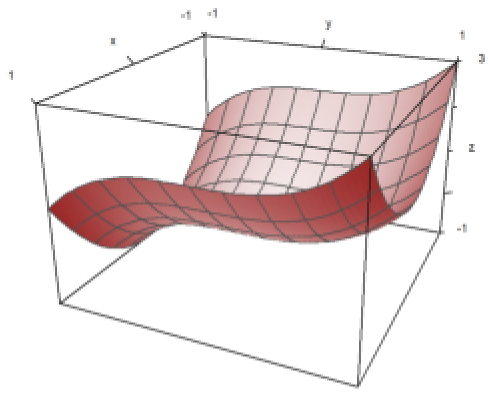
terdistorsi. Koordinat biasa untuk bola adalah

$$\gamma(t, s) = (\cos(t)\cos(s), \sin(t)\sin(s), \cos(s))$$

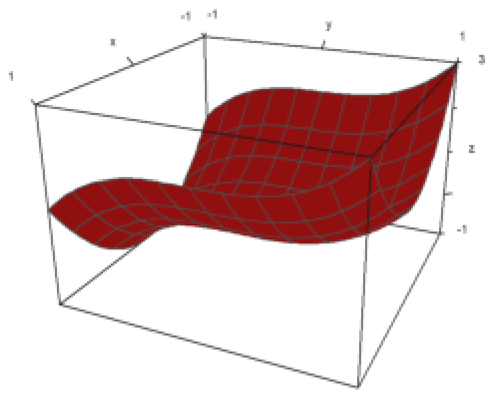
dengan

$$0 \le t \le 2\pi, \quad \frac{-\pi}{2} \le s \le \frac{\pi}{2}.$$

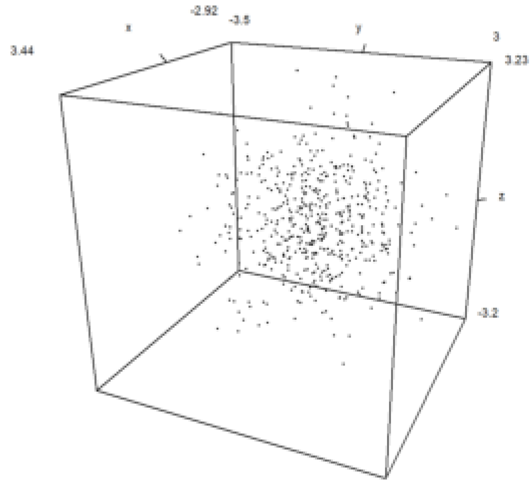
Kami mendistorsi ini dengan sebuah faktor



Gambar 4.91 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-159.png



Gambar 4.92 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-160.png



Gambar 4.93 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-161.png

$$d(t,s) = \frac{\cos(4t) + \cos(8s)}{4}$$

>t=linspace(0,2pi,320); s=linspace(-pi/2,pi/2,160)';...
> d=1+0.2*(cos(4*t)+cos(8*s));...
> plot3d(cos(t)*cos(s)*d,sin(t)*cos(s)*d,sin(s)*d,hue=1,...
> light=[1,0,1],frame=0,zoom=5):

4.6 Membuat Gambar Grafik Tiga Dimensi (3D) yang Bersifat Interaktif dan animasi grafik 3D

Membuat gambar grafik tiga dimensi (3D) yang bersifat interaktif adalah proses menciptakan visualisasi tiga dimensi yang memungkinkan pengguna berinteraksi dengan objek-objek 3D. Interaktivitas dalam gambar 3D memungkinkan pengguna untuk melakukan tindakan seperti mengubah sudut pandang, memindahkan objek, atau berinteraksi dengan elemen-elemen dalam adegan 3D. Sedangkan animasi grafik 3D dapat mencakup pergerakan, tetapi juga dapat berarti perubahan dalam tampilan atau atribut objek tanpa pergerakan fisik yang mencolok.

Interaksi user dimungkinkan dengan parameter >user. dengan perintah >user kita dapat menekan tombol berikut.

- kiri, kanan, atas, bawah: memutar sudut pandang
- +,-: memperbesar atau memperkecil
- a: menghasilkan anaglyph (lihat di bawah)
- l : tombol nyalakan sumber cahaya (lihat dibawah)
- spasi: reset ke default
- kembali: akhiri interaksi

Gambar 4.94 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-165.png

>plot3d(“exp(-x^{2+y}2)”,>user,...
> title=“Coba gerakkan”):

>plot3d(“exp(x^{2+y}2)”,>user,...
> title=“Coba gerakkan)”):

Animasi 3D

>function testplot () := plot3d(“x^{2+y}3”);...
> rotate(“testplot”); testplot():

Fungsi rotate yaitu untuk memutar plot.

Fungsi ini akan membuat animasi plot 3D dari fungsi

$$x^2 + y^3$$

yang berputar di sekitar sumbu z dari sudut 0 hingga 360 derajat

>plot3d(“exp(-(x^{2+y}2)/5)”,r=10,n=80,fscale=8,scale=1.2,frame=3,>user):

Ada beberapa parameter untuk menskalakan fungsi atau mengubah tampilan grafik.

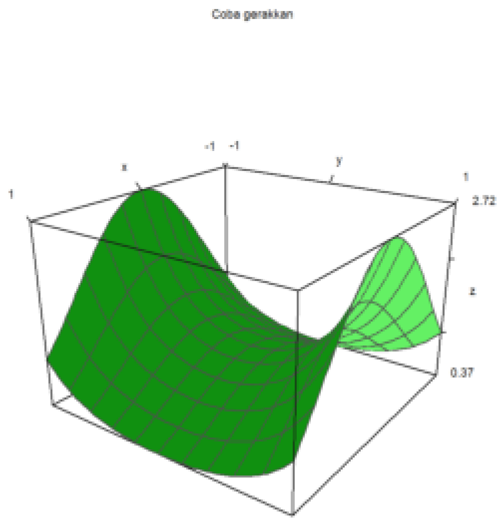
fscale: menskalakan ke nilai fungsi (defaultnya adalah <fscale).

scale: angka atau vektor 1x2 untuk diskalakan ke arah x dan y.

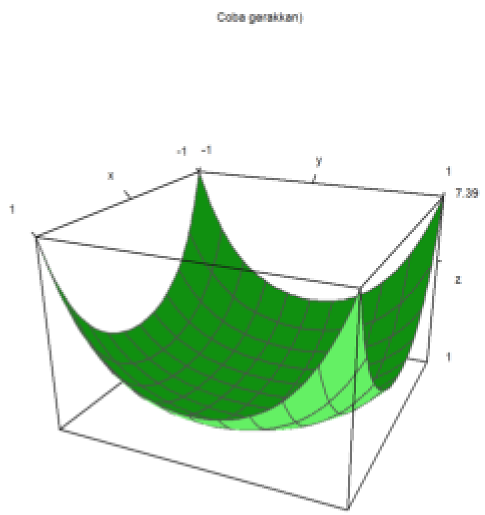
frame: jenis bingkai (default 1).

>plot3d(“x^2+y”,distance=10,zoom=5,angle=0,height=5):

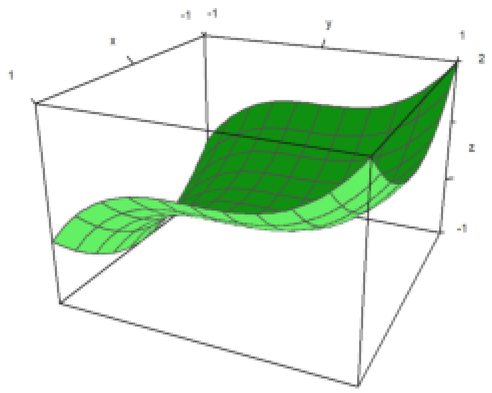
Tampilan dapat diubah dengan berbagai cara.



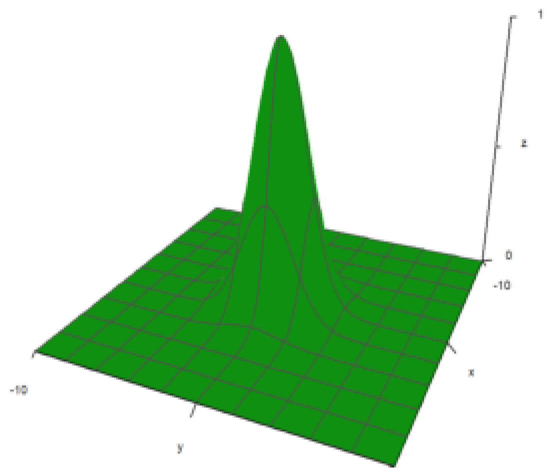
Gambar 4.95 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-166.png



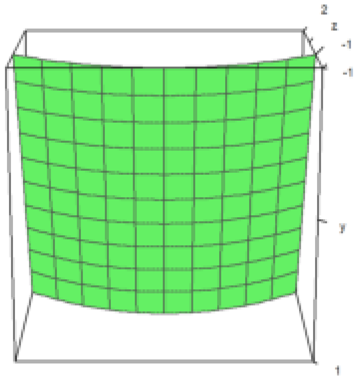
Gambar 4.96 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-167.png



Gambar 4.97 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-168.png



Gambar 4.98 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-170.png



Gambar 4.99 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-171.png

- distance: jarak pandang ke plot.
- zoom: nilai zoom.
- angle: sudut terhadap sumbu y negatif dalam radian.
- height: ketinggian tampilan dalam radian.

>plot3d(“x^{4+y}2”,a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°,...
> center=[0,0,1],zoom=3):

Plot selalu terlihat berada di tengah kubus plot. Kita dapat memindahkan bagian tengah dengan center parameter.

>plot3d(“x^2+1”,a=-1,b=1,rotate=true,grid=5):

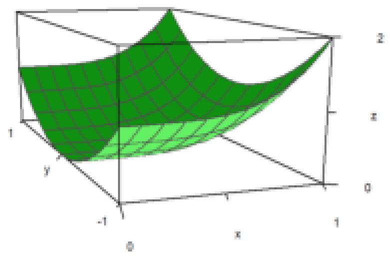
Parameter memutar memutar fungsi dalam x di sekitar sumbu x.

- rotate=1: Menggunakan sumbu x
- rotate=2: Menggunakan sumbu z

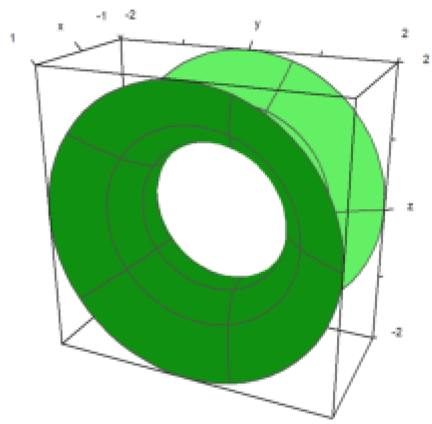
4.7 Menggambar Fungsi Parametrik Tiga Dimensi (3D)

Pengertian

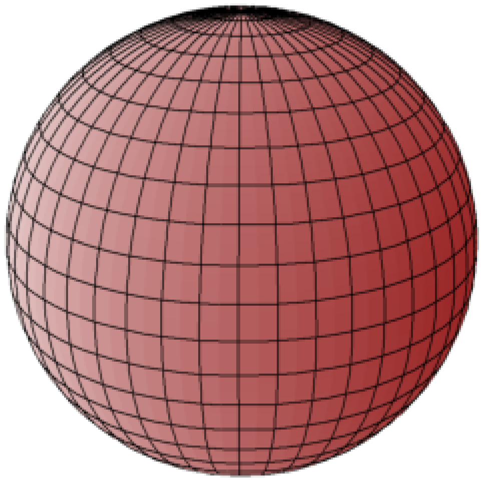
Fungsi parametrik adalah jenis fungsi matematika yang menggambarkan hubungan antara dua atau lebih variabel, di mana setiap variabel dinyatakan sebagai fungsi dari satu atau lebih parameter. Fungsi parametrik digunakan untuk menggambarkan kurva, lintasan, atau hubungan antara berbagai variabel yang bergantung pada parameter-parameter tertentu.



Gambar 4.100 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-172.png



Gambar 4.101 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-173.png



Gambar 4.102 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-174.png

Fungsi parametrik merupakan salah satu cara mendefinisikan kurva atau permukaan dalam ruang 2D atau 3D menggunakan satu atau lebih parameter independen.

- Dalam 2D, kurva dinyatakan sebagai x(t) dan y(t), di mana adalah t adalah parameter yang mengontrol posisi sepanjang kurva.
- Dalam 3D, kita menggunakan tiga persamaan parametrik untuk mendeskripsikan posisi x,y,z sebagai fungsi dari parameter t.Fungsi ini ditulis sebagai: x=f(t), y=g(t), z=h(t),

Contoh Soal

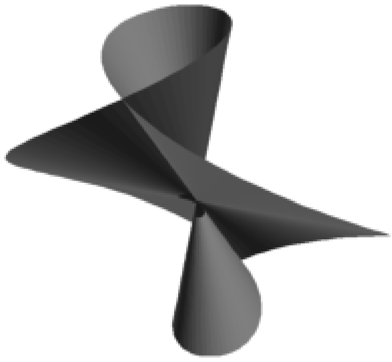
```
>plot3d("cos(x)*cos(y)","sin(x)*cos(y)","sin(y)", a=0,b=2*pi,c=pi/2,d=-pi/2,...
> >hue,color=red,light=[0,1,0],<frame,...
> n=90,grid=[25,50],wirecolor=black,zoom=4):
```

```
>aspect(16/9); allwindow; ...
> x:=linspace(0,2*pi,100); y:=(-1:0.1:1)'; ...
> plot3d(sin(x)*(y/2*sin(x/2)),cos(x)*(y/2*sin(x/2)),y/2*cos(x/2), ...
> <frame,hue=2,max=0.5,scale=1.5):
```

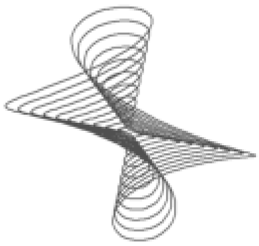
```
>aspect(16/9); allwindow;...
> x:=linspace(0,2*pi,100); y:=(-1:0.1:1)';...
> plot3d(sin(x)*(y/2*sin(x/2)),cos(x)*(y/2*sin(x/2)),y/2*cos(x/2),...
> >lines,<frame,xmin=0,xmax=10,n=10,>user):
```

```
>reset;...
> S:=normal(10,1250); plot3d(S[3],S[6],S[9],>points,style="."):
```

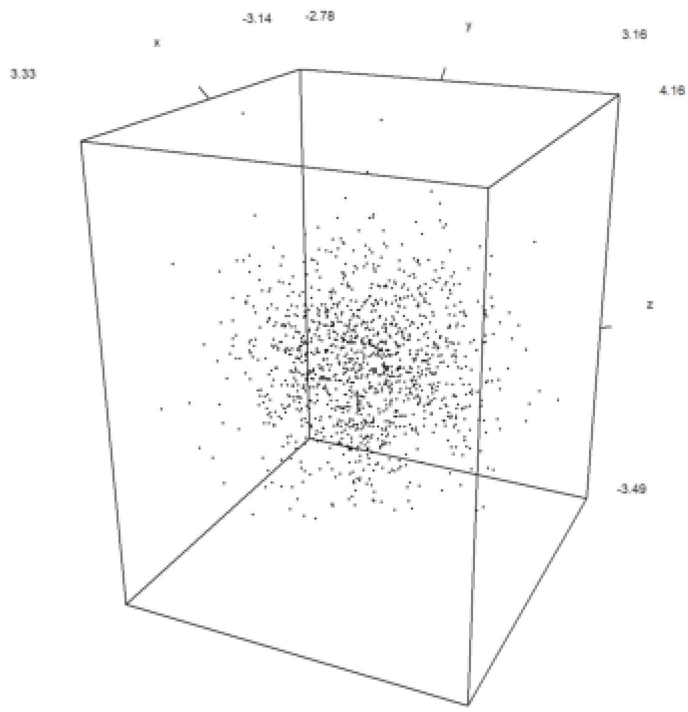
```
>S:=normal(10,1250); T:=cumsum(normal(10,1250));...
> plot3d(T[2],T[5],T[8],>wire,...
> linewidth=2,>anaglyph,zoom=3):
```



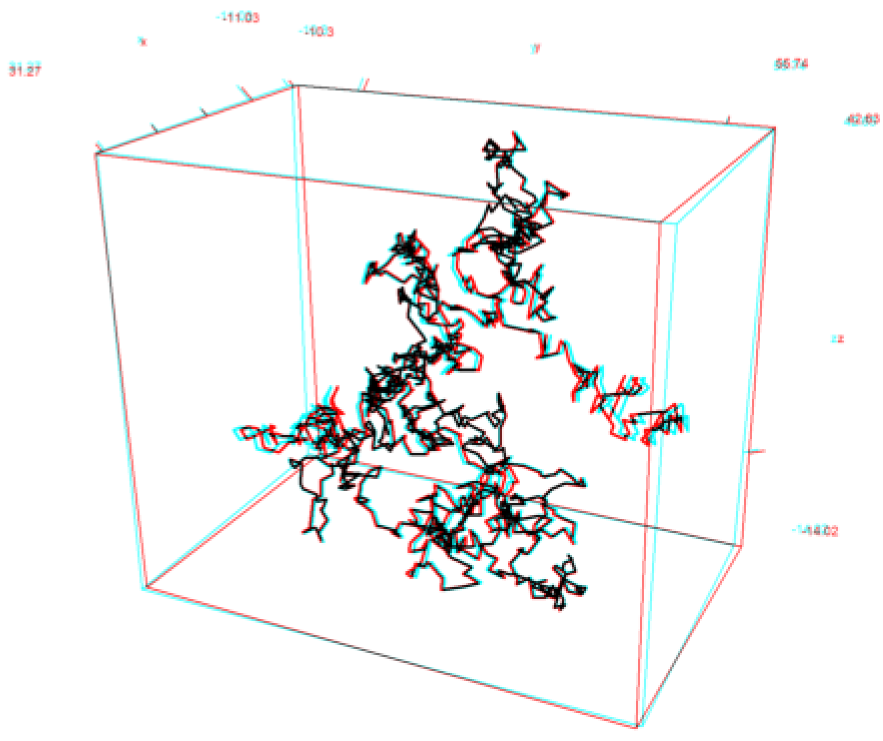
Gambar 4.103 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-175.png



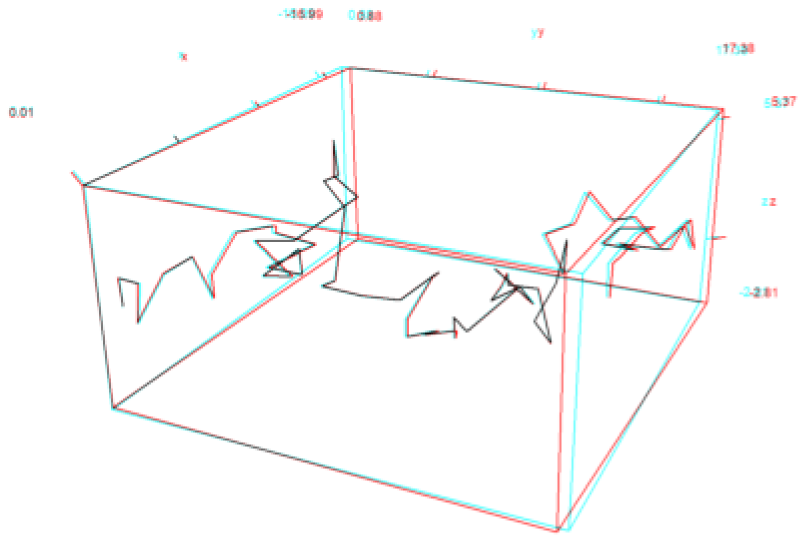
Gambar 4.104 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-176.png



Gambar 4.105 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-177.png



Gambar 4.106 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-178.png



Gambar 4.107 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-179.png

>P=cumsum(normal(5,75));. . .
> plot3d(P[3],P[4],P[5],>anaglyph,>wire):

4.8 Menggambar Fungsi Implisit Tiga Dimensi (3D)

Fungsi implisit (implicit function) adalah fungsi yang memuat lebih dari satu variabel, berjenis variabel bebas dan variabel terikat yang berada dalam satu ruas sehingga tidak bisa dipisahkan pada ruas yang berbeda.

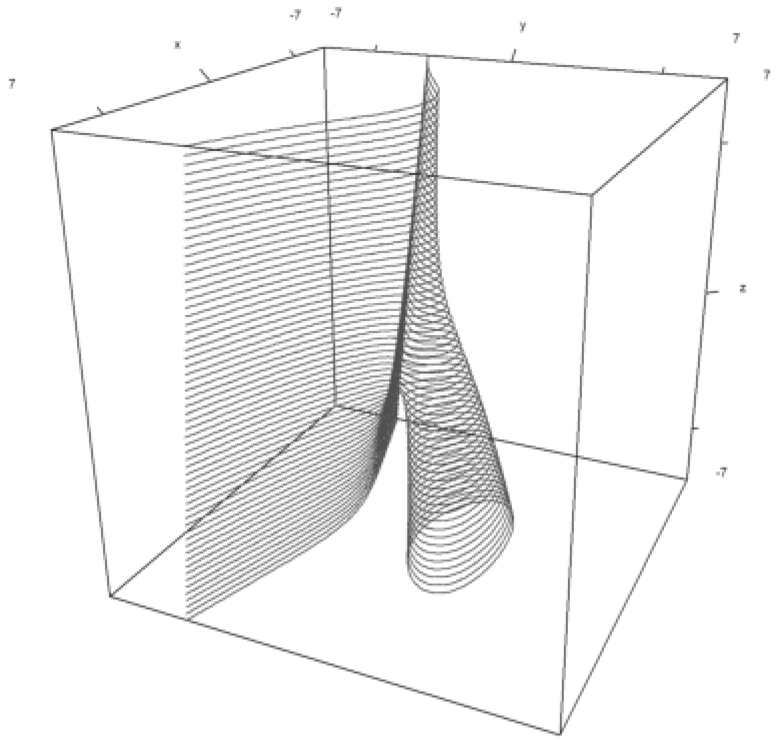
$$F(x, y, z) = 0$$

(1 persamaan dan 3 variabel), terdiri dari 2 variabel bebas dan 1 terikat

Misalnya, F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 adalah persamaan implisit yang menggambarkan bola dengan jari-jari 1 dan pusat di (0,0,0).

Plot Implisit

Ada juga plot implisit dalam tiga dimensi. Euler menghasilkan pemotongan melalui objek. Fitur plot3d mencakup plot implisit. Plot ini menunjukkan himpunan nol suatu fungsi dalam tiga variabel. Solusi dari



Gambar 4.108 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-183.png

$$f(x, y, z) = 0$$

dapat divisualisasikan dalam potongan yang sejajar dengan bidang x-y, x-z, z-x dan y-z.

- implisit=1: dipotong sejajar bidang y-z
- implisit=2: dipotong sejajar dengan bidang x-z
- implisit=3: dipotong sejajar dengan bidang z-x (yang berarti pemotongan dilakukan dengan mempertahankan nilai y konstan)
- implisit=4: dipotong sejajar bidang x-y

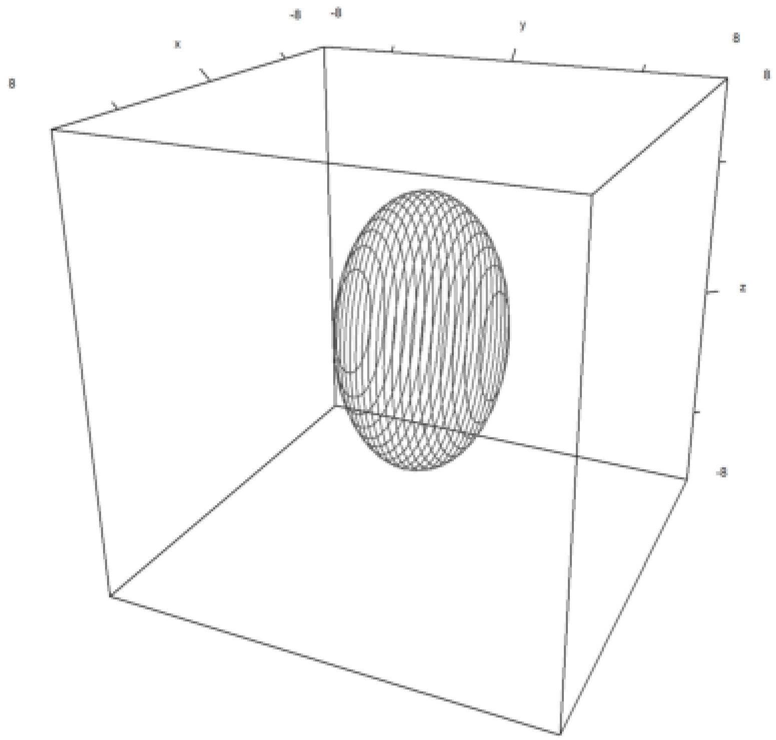
Tambahkan nilai-nilai ini, jika Anda mau. Dalam contoh kita memplot

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^3 + zy = 1\}$$

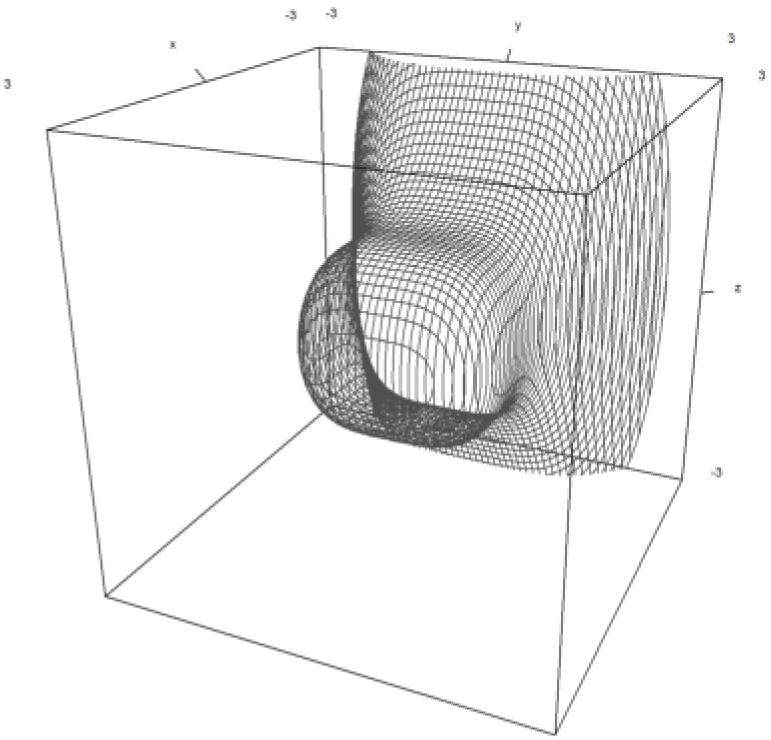
Contoh Fungsi Implisit

>plot3d(“x^{2+y}3+z*y-1”,r=7,implicit=4):

>plot3d(“2*x^2 + 3*y^2 + z^2 - 25”,r=8,implicit=2):



Gambar 4.109 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-184.png



Gambar 4.110 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-185.png

>plot3d(“4*x^3 + 3*y^4 + 6*z^2 - 10”,r=3,implicit=3):

>plot3d(“x^5 + 5*y^3 + 3*z^2 - 5*x - 7*y - 5*z + 10”,r=5,implicit=2):

>plot3d(“x^2 + y^2 - z^2”,r=5,implicit=3):

>plot3d(“x^3 + 2*y^2 +3*z^3-4”,r=5,implicit=3):

>plot3d(“x^{2+y}2+z^2+2*x*y+4*y*z+8*z*x-20”,r=5,implicit=3):

>c=1; d=1;

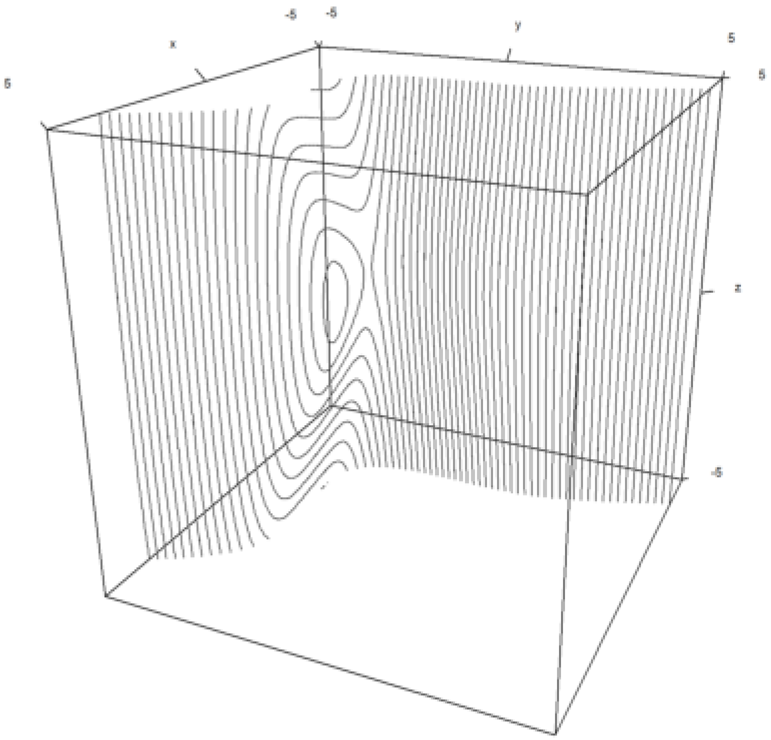
>plot3d(“((x^{2+y}2-c$^{2)}$2+(z$^{2-1)}$2)*((y^{2+z}2-c$^{2)}$2+(x$^{2-1)}$2)*((z^{2+x}2-c$^{2)}$2+(y$^{2-1)}$2)-d”,r=2,<frame,>implicit,>user):

>c=1; d=1;

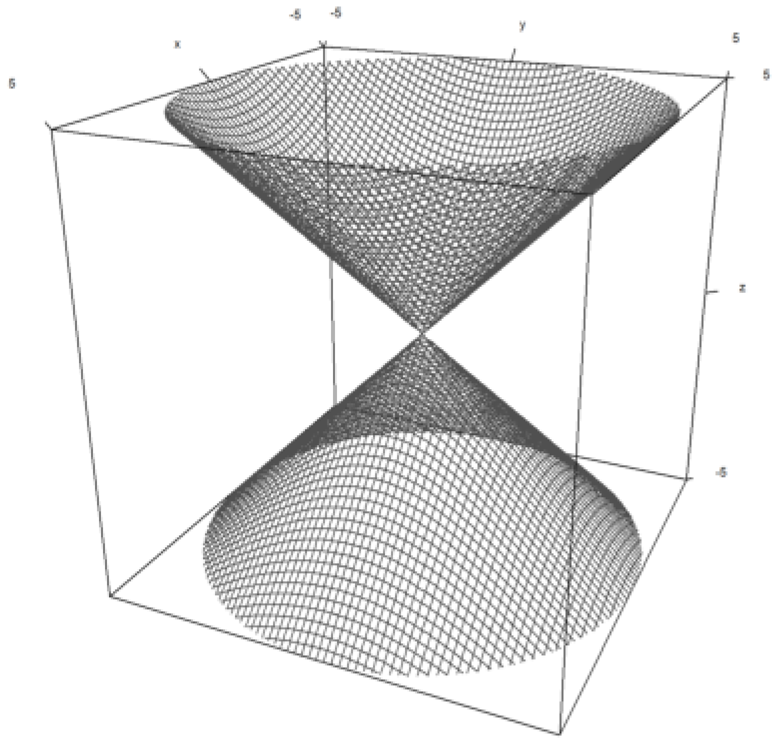
>plot3d(“((x^{2+y}2+c$^{2)}$2+(z$^{2-1)}$2)*((y^{2+z}2-c$^{2)}$2+(x$^{2-1)}$2)*((z^{2+x}2-c$^{2)}$2+(y$^{2-1)}$2)-d”,r=2,<frame,>implicit,>user):

>plot3d(“x^{3+y}5+5*x*z+z^3”,>implicit,r=3,zoom=2):

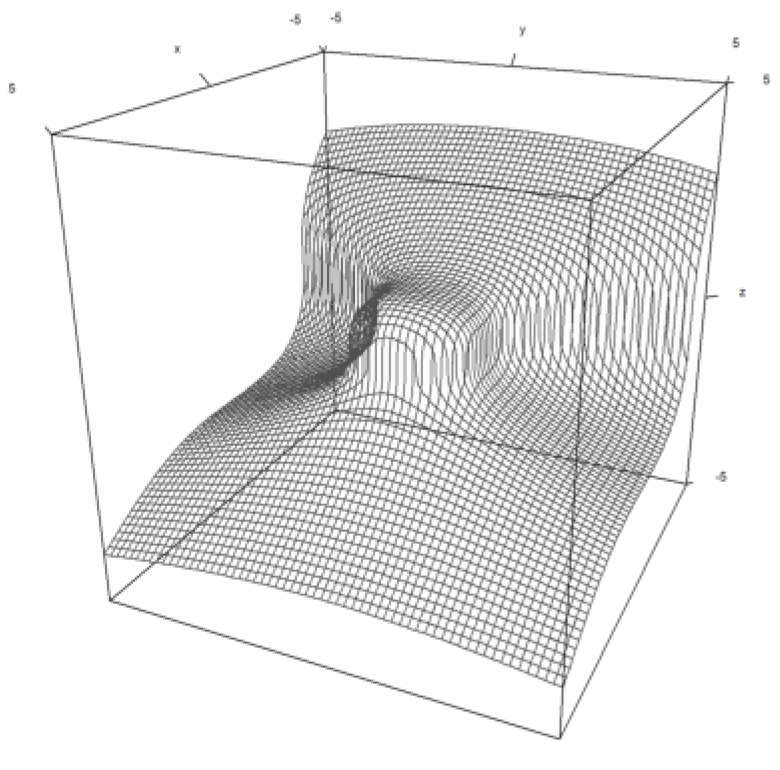
>plot3d(“x^{2+y}2+4*x*z+z^3-2”,>implicit,r=2,zoom=2.5):



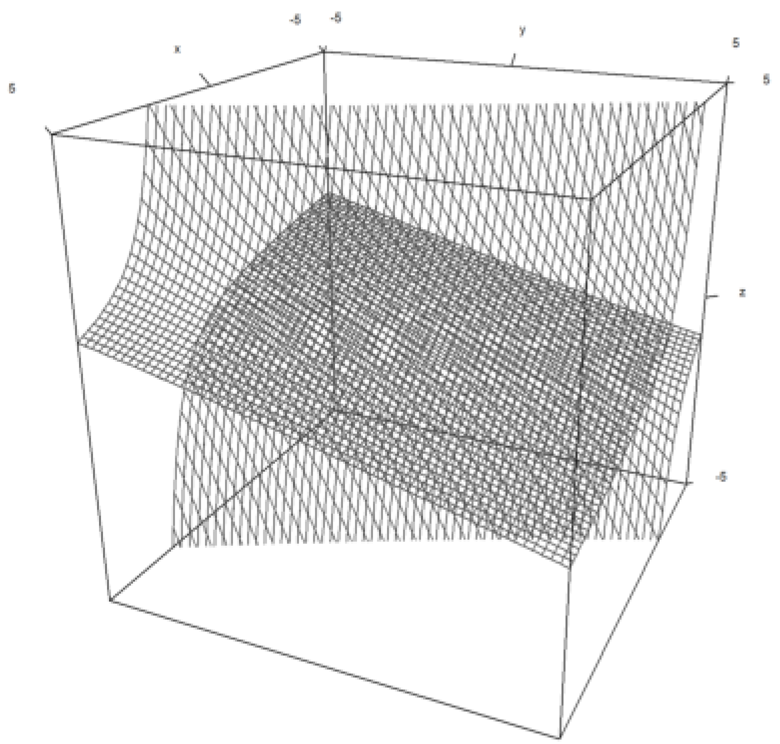
Gambar 4.111 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-186.png



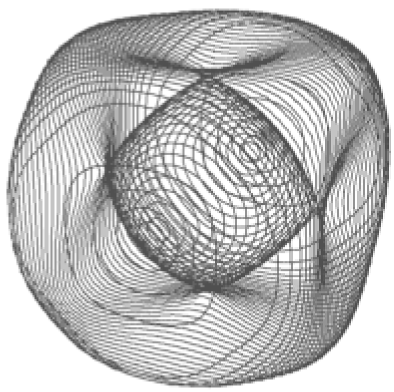
Gambar 4.112 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-187.png



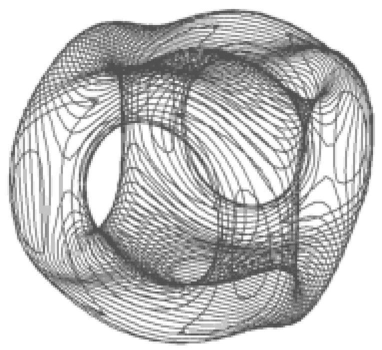
Gambar 4.113 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-188.png



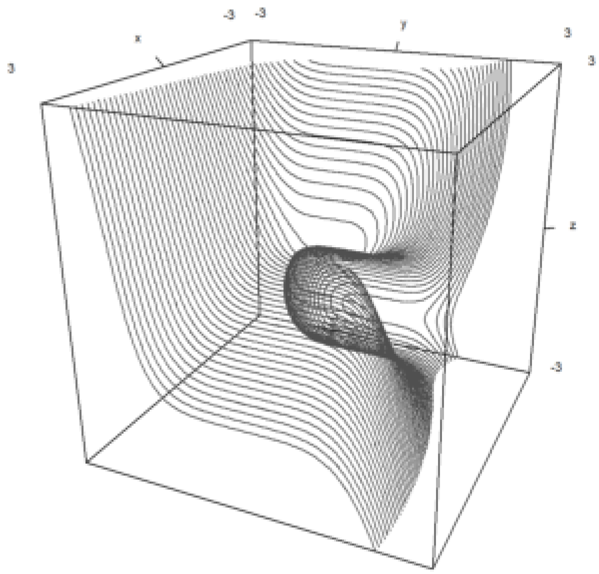
Gambar 4.114 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-189.png



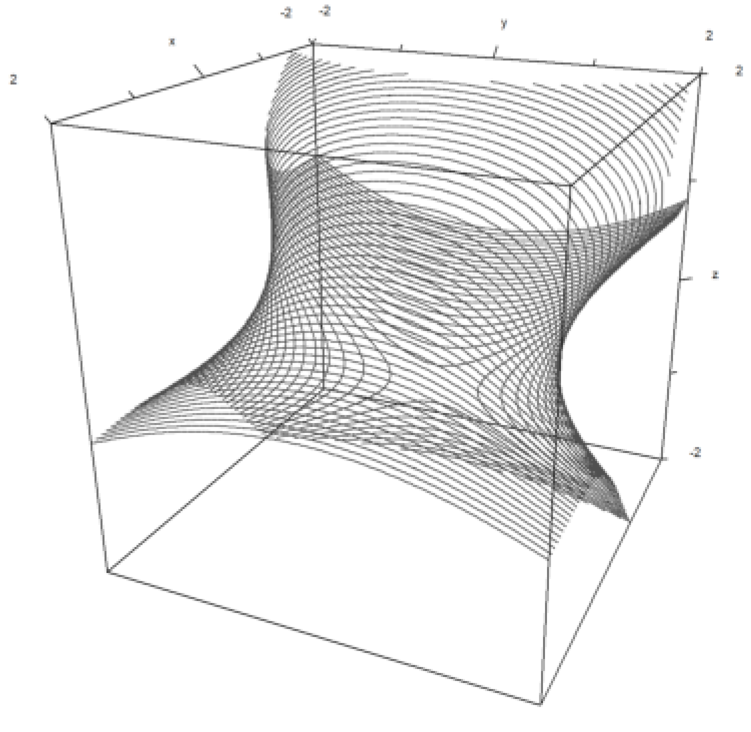
Gambar 4.115 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-190.png



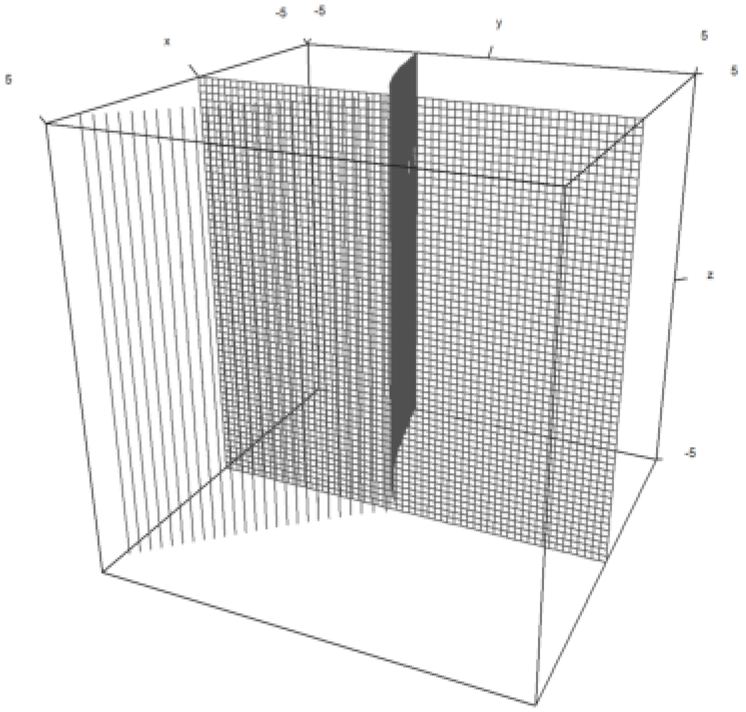
Gambar 4.116 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-191.png



Gambar 4.117 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-192.png



Gambar 4.118 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-193.png



Gambar 4.119 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-194.png

>plot3d(“x^{2*y}2+x^{3+y}3*x”,>implicit,r=5,zoom=2.5):

>plot3d(“x*y-z^2+2*x*y*z-0”,>implicit,r=5,zoom=2.5):

Latihan soal

1. Gambarlah Fungsi implisit berikut dalam 3D

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$$

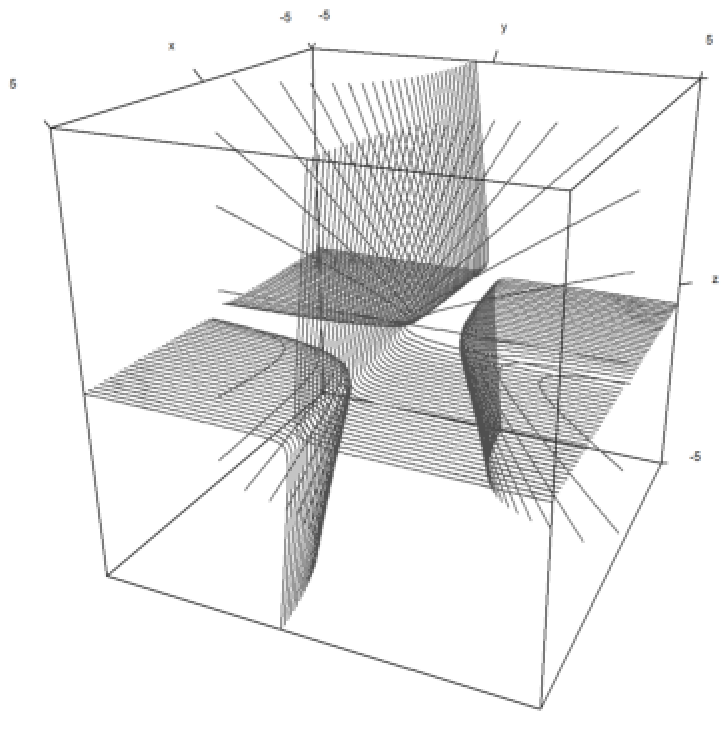
>plot3d(“x^{2+y}2-z^2-1”,r=8,implicit=3):

2. Gambarlah fungsi 3D dari fungsi implisit berikut ini

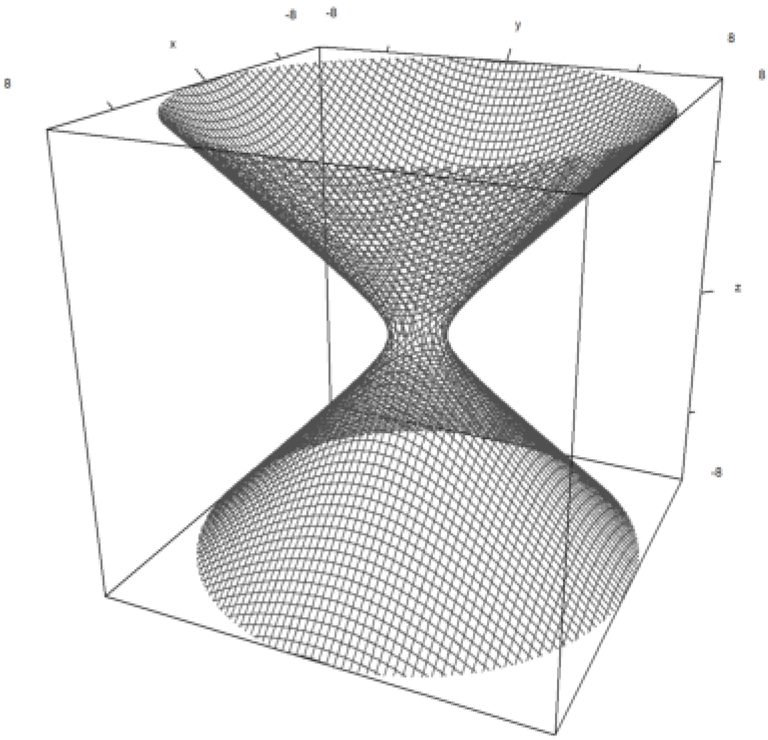
$$f(x, y, z) = xy + x^3y^2 + xz^3 - 9 = 0$$

dengan r=4

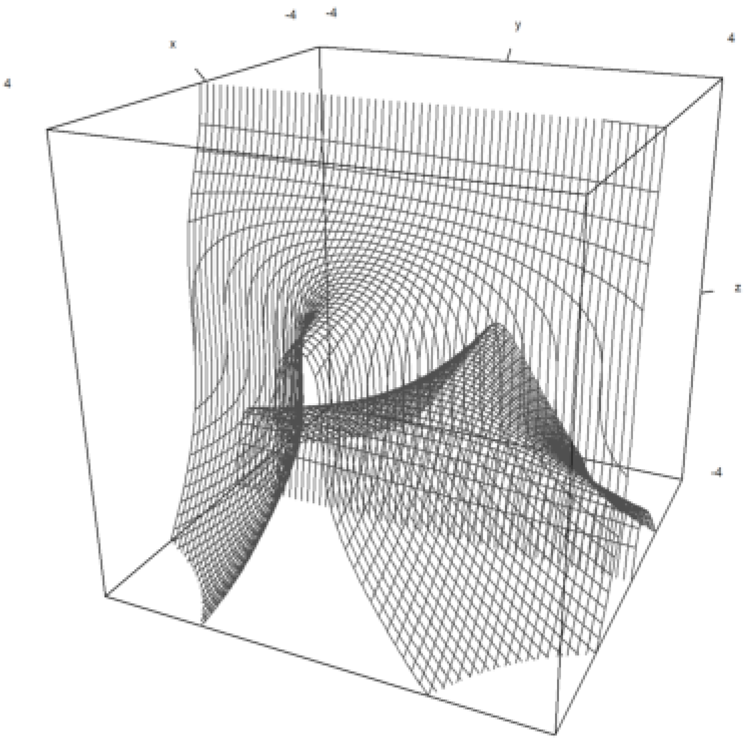
>plot3d(“x*y+x^{3*y}2+x*z^3-9”, r=4, implicit=3):



Gambar 4.120 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-195.png



Gambar 4.121 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-197.png



Gambar 4.122 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-199.png

4.9 Mengatur tampilan, warna dan sudut pandang gambar permukaan

Tiga Dimensi (3D) Dan Menampilkan kontur dan bidang kontur permukaan Tiga Dimensi(3D)

Untuk plot, Euler menambahkan garis grid. Sebagai gantinya dimungkinkan untuk menggunakan garis level dan rona satu warna atau rona berwarna spektral. Euler dapat menggambar tinggi fungsi pada plot dengan bayangan. Di semua plot 3D, Euler dapat menghasilkan anaglyph merah/sian.

- hue: Menyalakan bayangan cahaya alih-alih kabel.
- kontur: Memplot garis kontur otomatis pada plot.
- level=... (atau level): Sebuah vektor nilai untuk garis kontur.

Standarnya adalah level="auto", yang menghitung beberapa garis level secara otomatis. Seperti yang Anda lihat di plot, level sebenarnya adalah rentang level.

Gaya default dapat diubah. Untuk plot kontur berikut, kami menggunakan grid yang lebih halus untuk 100x100 poin, skala fungsi dan plot, dan menggunakan sudut pandang yang berbeda.

>plot3d("exp(-x^{2-y}2)",r=2,n=100,level="thin", ...
> >contour,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°):

>plot3d("exp(x*y)",angle=100°,>contour,color=green):

Bayangan default menggunakan warna abu-abu. Tetapi rentang warna spektral juga tersedia.

-> spektral: Menggunakan skema spektral default

- color=...: Menggunakan warna khusus atau skema spektral

Untuk plot berikut, kami menggunakan skema spektral default dan menambah jumlah titik untuk mendapatkan tampilan yang sangat halus.

>plot3d("x^{2+y}2",>spectral,>contour,n=100):

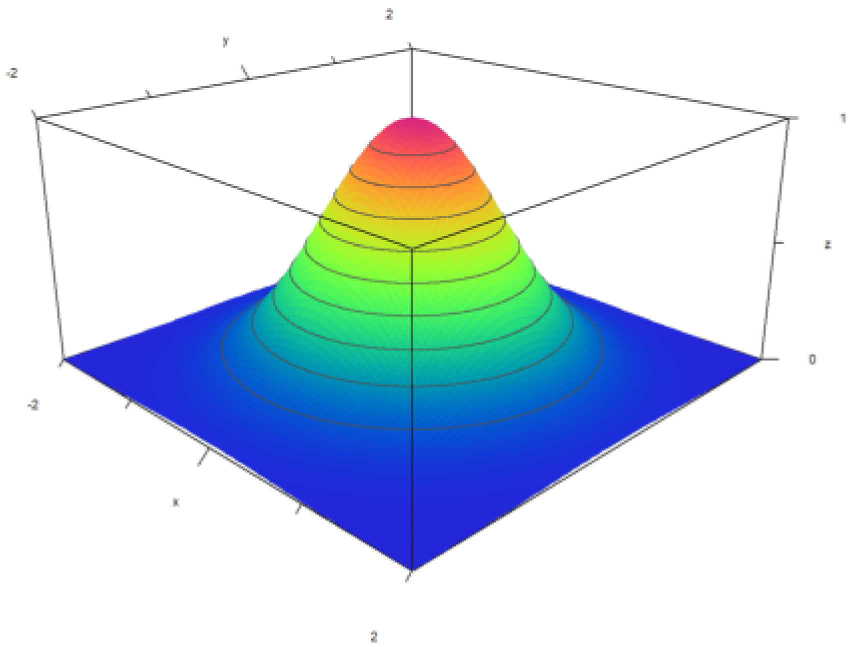
Alih-alih garis level otomatis, kita juga dapat mengatur nilai garis level. Ini akan menghasilkan garis level tipis alih-alih rentang level.

>plot3d("x^{2-y}2",0,1,0,1,angle=220°,level=-1:0.2:1,color=redgreen):

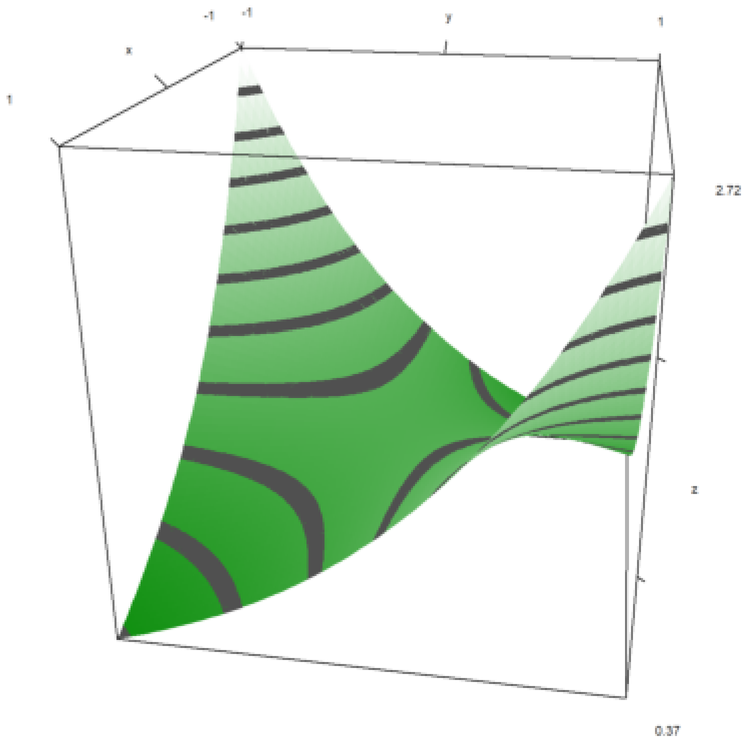
Dalam plot berikut, kami menggunakan dua pita level yang sangat luas dari -0,1 hingga 1, dan dari 0,9 hingga 1. Ini dimasukkan sebagai matriks dengan batas level sebagai kolom.

Selain itu, kami melapisi kisi dengan 10 interval di setiap arah.

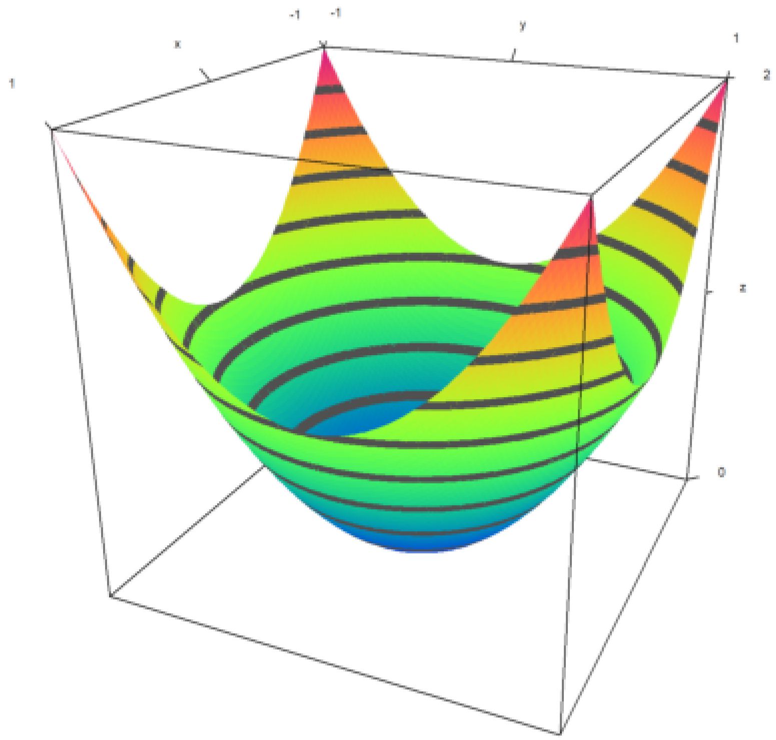
>plot3d("x^{2+y}3",level=[-0.1,0.9;0,1], ...
> >spectral,angle=30°,grid=10,contourcolor=gray):



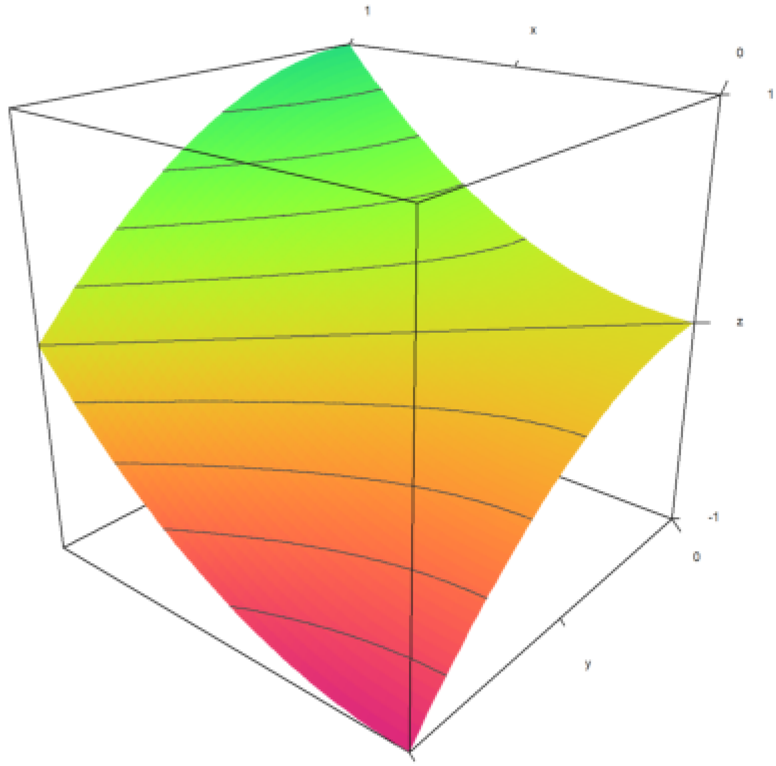
Gambar 4.123 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-200.png



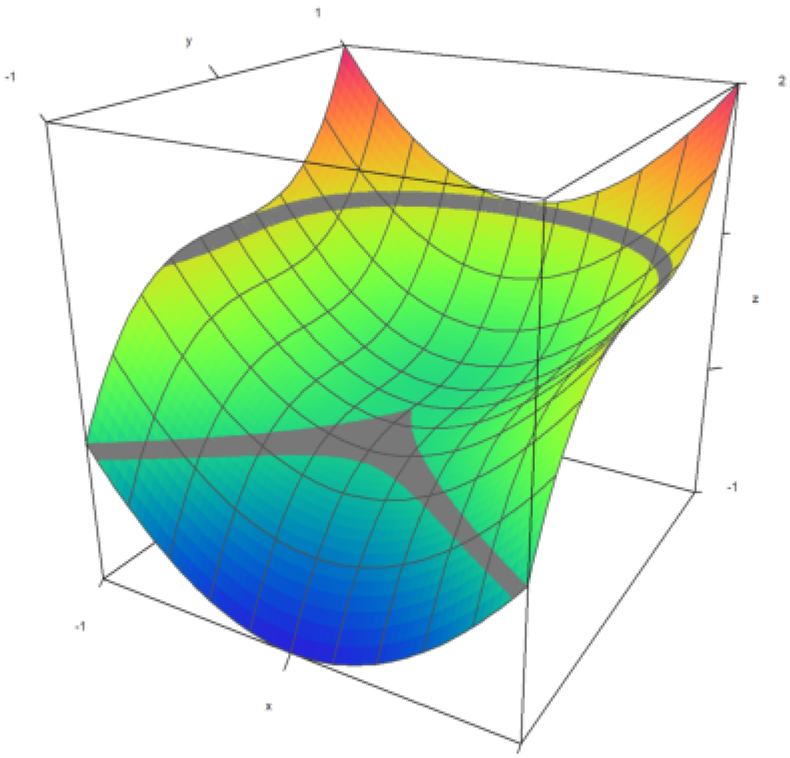
Gambar 4.124 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-201.png



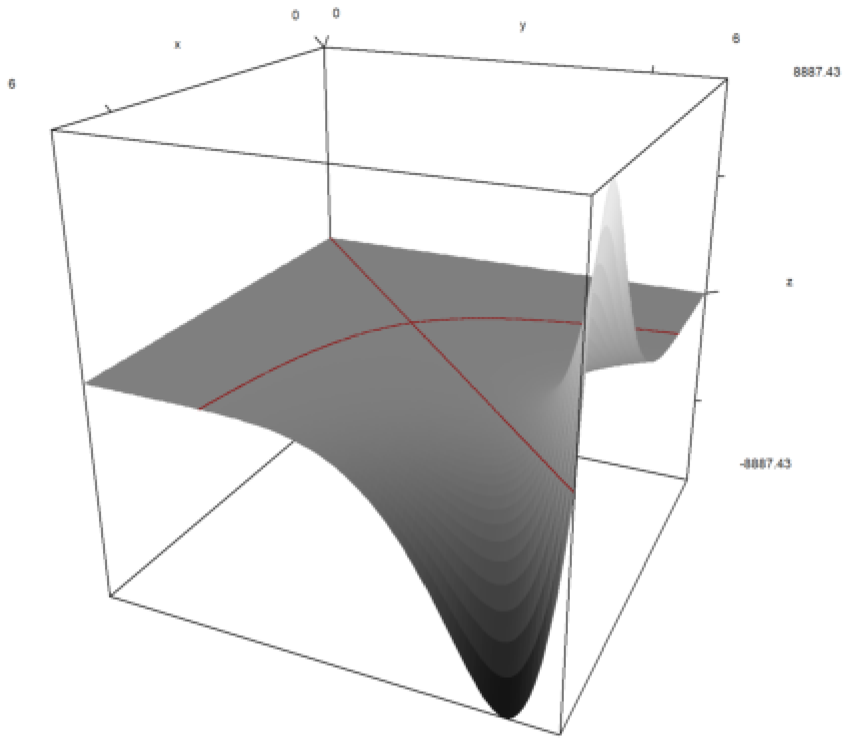
Gambar 4.125 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-202.png



Gambar 4.126 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-203.png



Gambar 4.127 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-204.png



Gambar 4.128 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-206.png

Dalam contoh berikut, kami memplot himpunan, di mana

$$f(x, y) = x^y - y^x = 0$$

Kami menggunakan satu garis tipis untuk garis level.

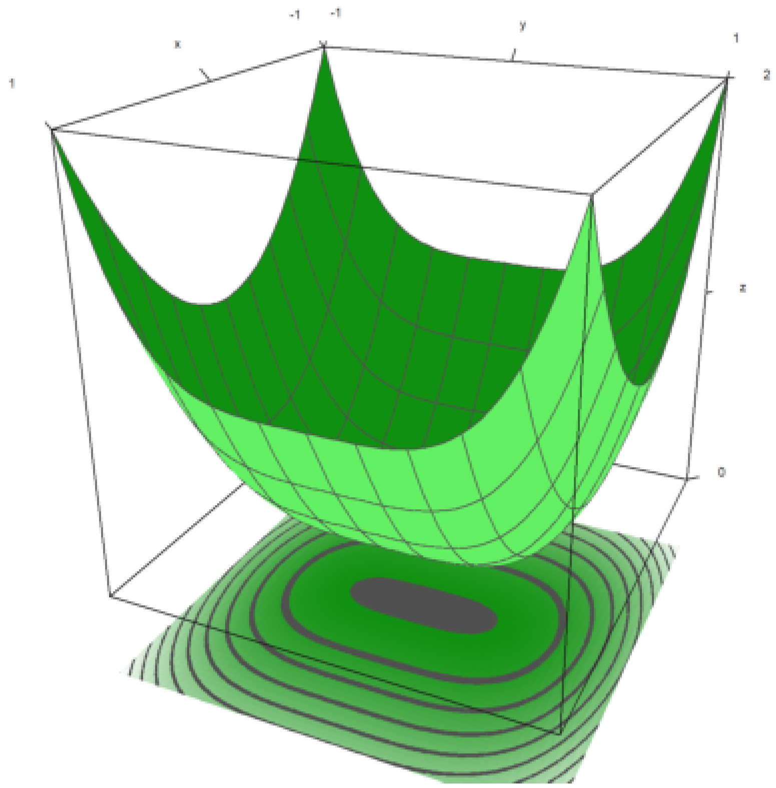
>plot3d(“x^{y-y}x”,level=0,a=0,b=6,c=0,d=6,contourcolor=red,n=100):

Dimungkinkan untuk menunjukkan bidang kontur di bawah plot. Warna dan jarak ke plot dapat ditentukan.

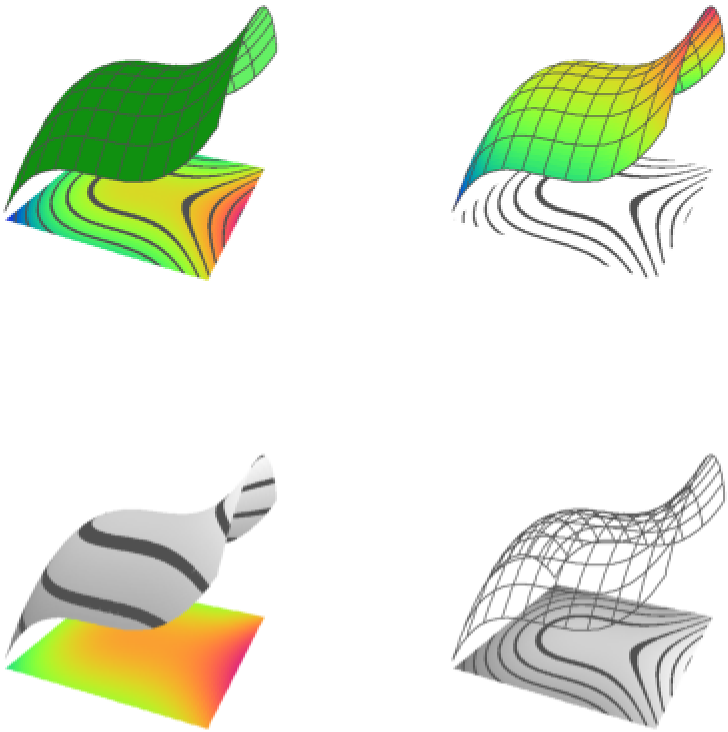
>plot3d(“x^{2+y}4”,>cp,cpcolor=green,cpdelta=0.2):

Berikut adalah beberapa gaya lagi. Kami selalu mematikan frame, dan menggunakan berbagai skema warna untuk plot dan grid.

>figure(2,2); ...
> expr=“y^{3-x}2”; ...
> figure(1); ...
> plot3d(expr,<frame,>cp,cpcolor=spectral); ...
> figure(2); ...
> plot3d(expr,<frame,>spectral,grid=10,cp=2); ...
> figure(3); ...



Gambar 4.129 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-207.png



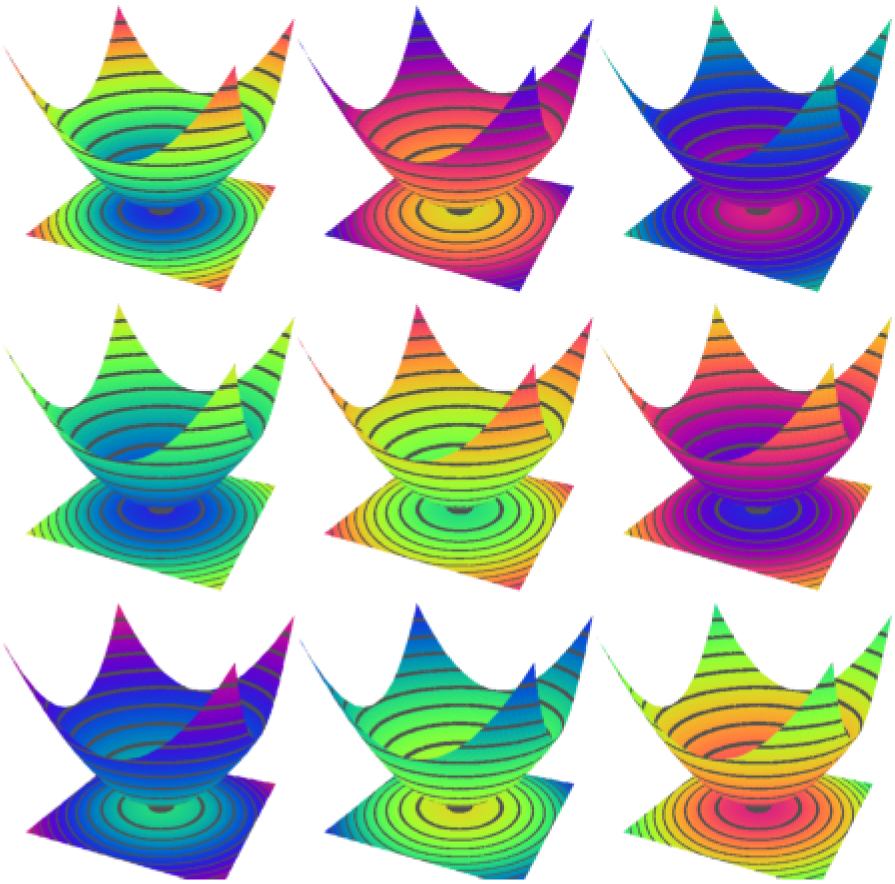
Gambar 4.130 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-208.png

```
> plot3d(expr,<frame,>contour,color=gray,nc=5,cp=3,cpcolor=greenred); ...
> figure(4); ...
> plot3d(expr,<frame,>hue,grid=10,>transparent,>cp,cpcolor=gray); ...
> figure(0):
```

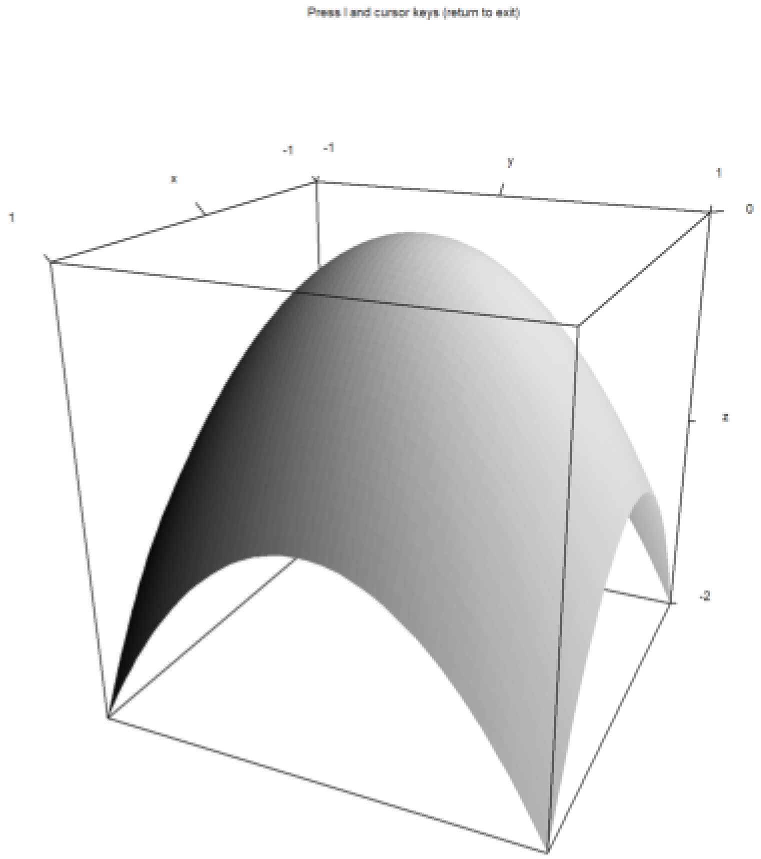
Ada beberapa skema spektral lainnya, bernomor dari 1 hingga 9. Tetapi Anda juga dapat menggunakan warna=nilai, di mana nilai

- spektral: untuk rentang dari biru ke merah
- putih: untuk rentang yang lebih redup
- kuningbiru,ungu hijau,birukuning,hijaumerah
- birukuning, hijau ungu, kuning biru, merah hijau

```
>figure(3,3); ...
> for i=1:9; ...
> figure(i); plot3d("x^2+y^2",spectral=i,>contour,>cp,<frame,zoom=4); ...
> end; ...
> figure(0):
```



Gambar 4.131 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-209.png



Gambar 4.132 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-210.png

Sumber cahaya dapat diubah dengan l dan tombol kursor selama interaksi pengguna. Itu juga dapat diatur dengan parameter.

- cahaya: arah untuk cahaya
- amb: cahaya sekitar antara 0 dan 1

Perhatikan bahwa program tidak membuat perbedaan antara sisi plot. Tidak ada bayangan. Untuk ini, Anda perlu Povray.

>plot3d(“-x$^{2\text{-}y}$2”, . . .
> hue=true,light=[0,1,1],amb=0,user=true, . . .
> title=“Press l and cursor keys (return to exit)”):

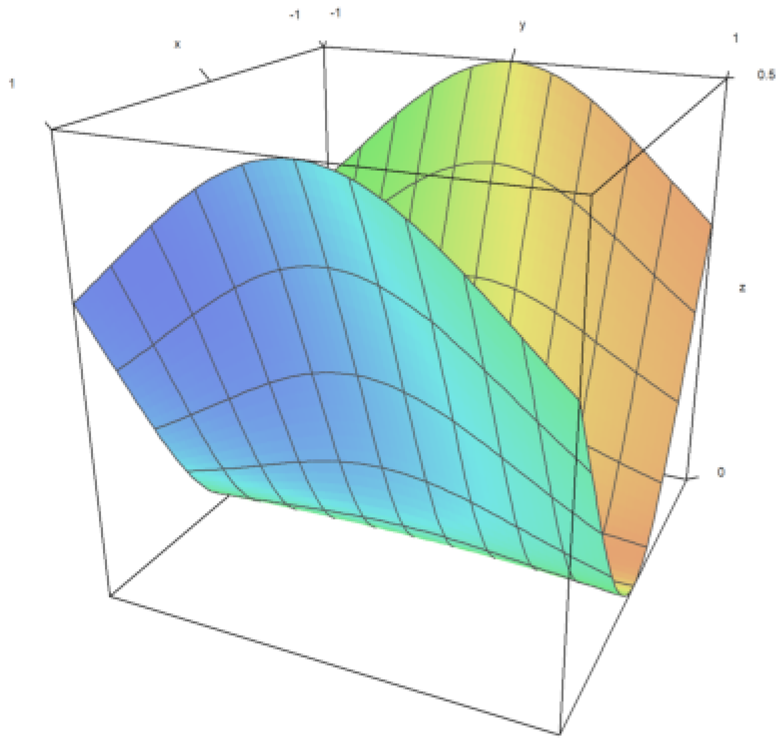
Parameter warna mengubah warna permukaan. Warna garis level juga dapat diubah.

>plot3d(“-x$^{2\text{-}y}$2”,color=rgb(0.2,0.2,0),hue=true,frame=false, . . .
> zoom=3,contourcolor=red,level=-2:0.1:1,dl=0.01):

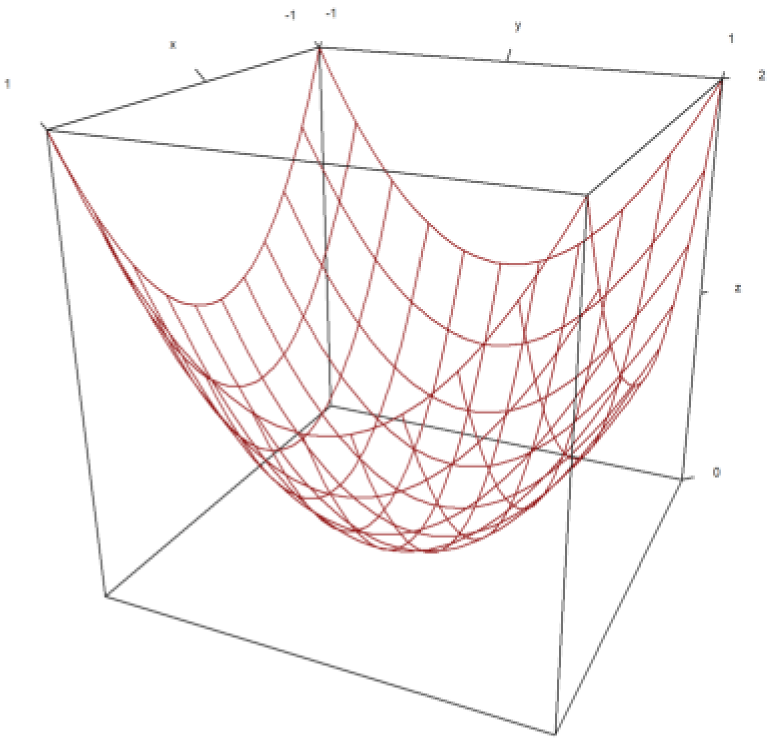
Warna 0 memberikan efek pelangi khusus.

>plot3d(“x$^{2/(x}$2+y^2+1)”,color=0,hue=true,grid=10):

Gambar 4.133 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-211.png



Gambar 4.134 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-212.png



Gambar 4.135 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-213.png

Permukaannya juga bisa transparan.

>plot3d(“x^{2+y}2”,>transparent,grid=10,wirecolor=red):

4.10 Menggambar Diagram Batang Tiga Dimensi

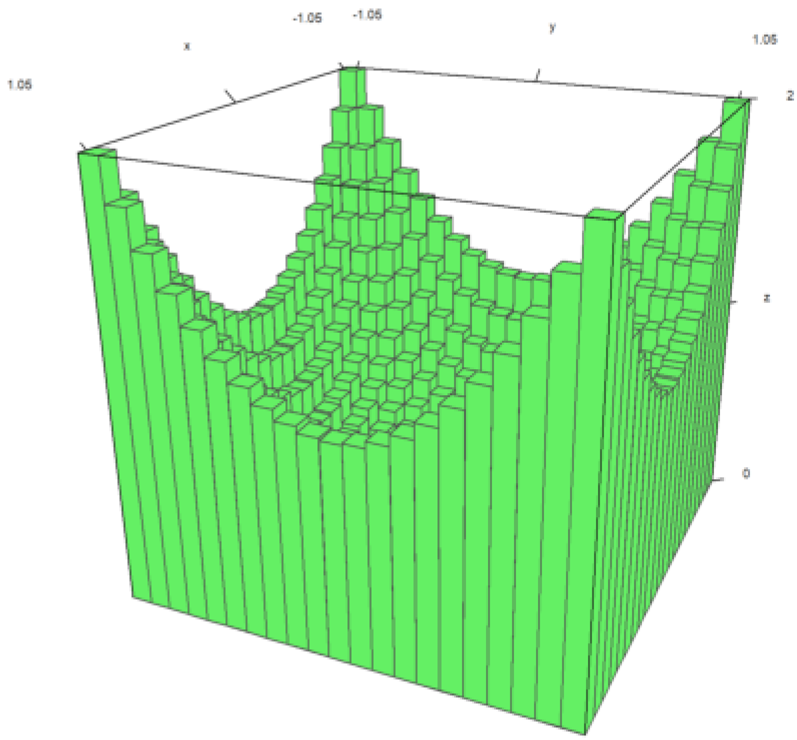
Bar plots/plot batang juga dimungkinkan. Untuk itu, kita harus menyediakannya

- x: vektor baris dengan n+1 elemen
- y: vektor kolom dengan n+1 elemen
- z: matriks nilai nxn.

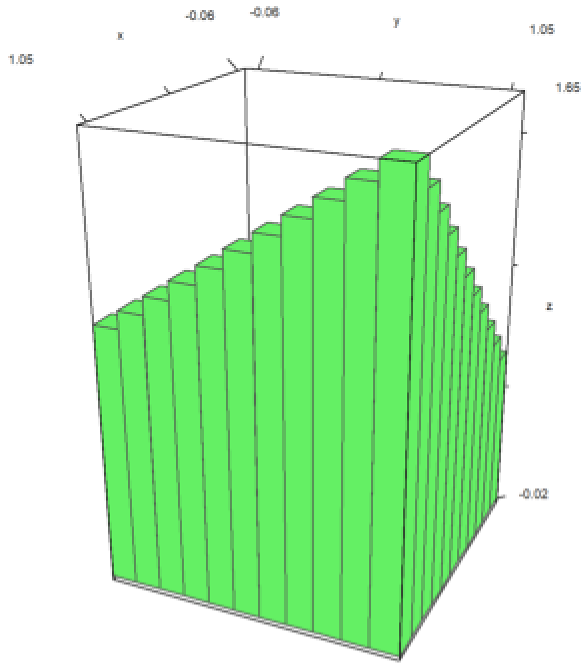
z bisa lebih besar, tetapi hanya nilai nxn yang akan digunakan.

Dalam contoh ini, pertama-tama kita menghitung nilainya. Kemudian kita sesuaikan x dan y, sehingga vektor-vektornya berpusat pada nilai yang digunakan.

>x=-1:0.1:1; y=x’; z=x^{2+y}2; . . .
> xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; . . .
> plot3d(xa,ya,z,bar=true):



Gambar 4.136 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-214.png



Gambar 4.137 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-215.png

>x=-0.01:0.1:1; y=x'; z=x+2/3*y; ...
> xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
> plot3d(xa,ya,z,bar=true):

>x=-0.01:0.1:1; y=x'; z=1/2*x+1/2*y; ...
> xa=(x|1.1); ya=(y_1.1); ...
> plot3d(xa,ya,z,bar=true):

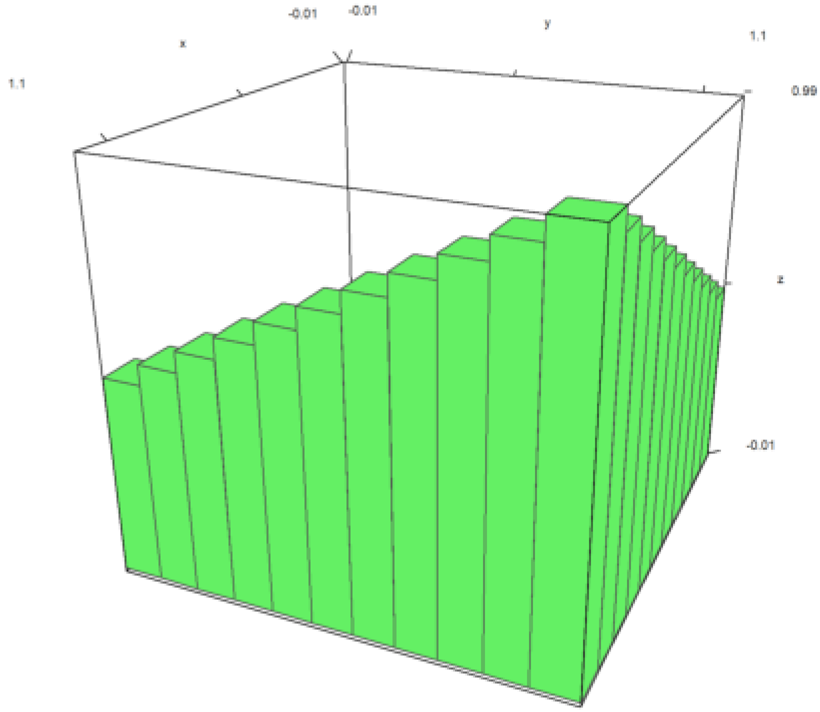
Dimungkinkan untuk membagi plot suatu permukaan menjadi dua bagian atau lebih.

>x=-1:0.1:1; y=x'; z=1/10*x+1/10*y; d=zeros(size(x)); ...
> plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:5):

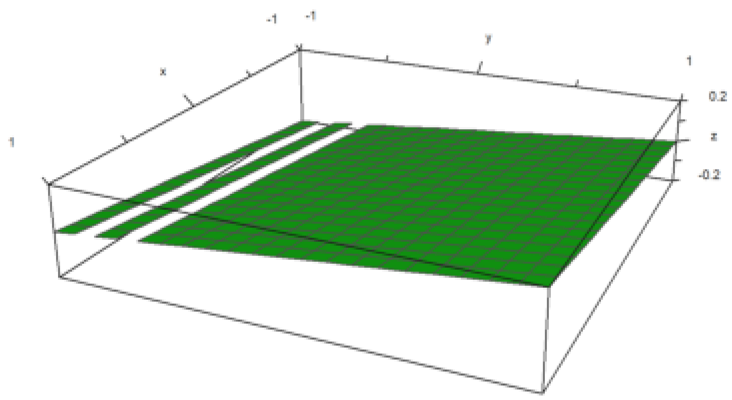
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x+y; d=zeros(size(x)); ...
> plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:20):

Jika memuat atau menghasilkan matriks data M dari file dan perlu memplotnya dalam 3D, Anda dapat menskalakan matriks ke [-1,1] dengan skala(M), atau menskalakan matriks dengan >zscale. Hal ini dapat dikombinasikan dengan faktor penskalaan individual yang diterapkan sebagai tambahan.

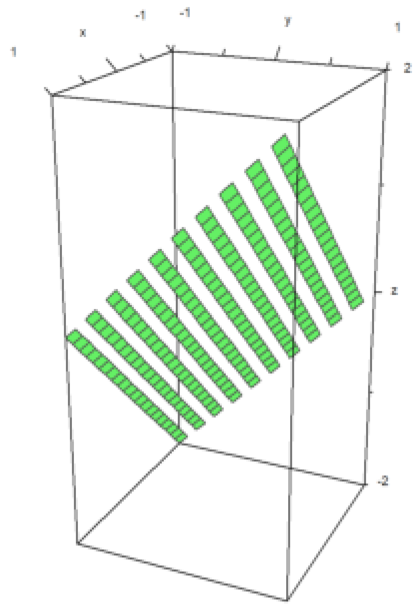
>i=1:20; j=i'; ...
> plot3d(i*j^2+100*normal(20,20),>zscale,scale=[1,1,1.5],angle=-40°,zoom=1.8):



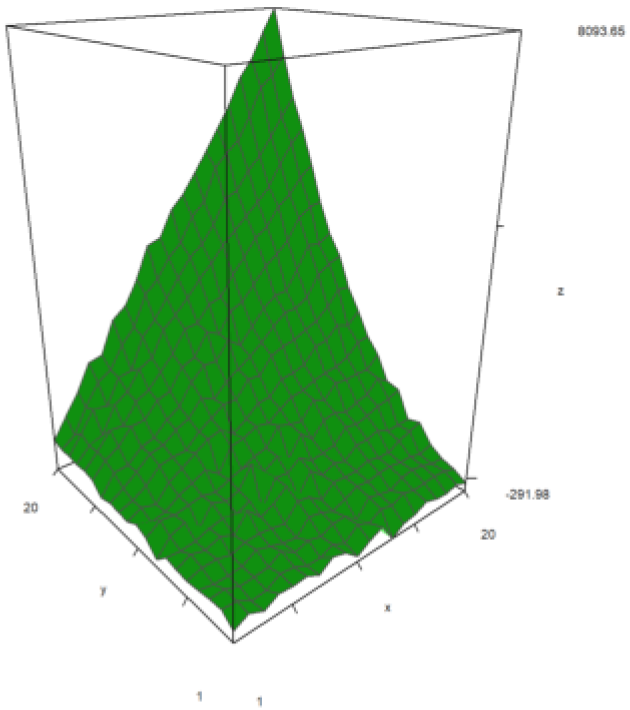
Gambar 4.138 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-216.png



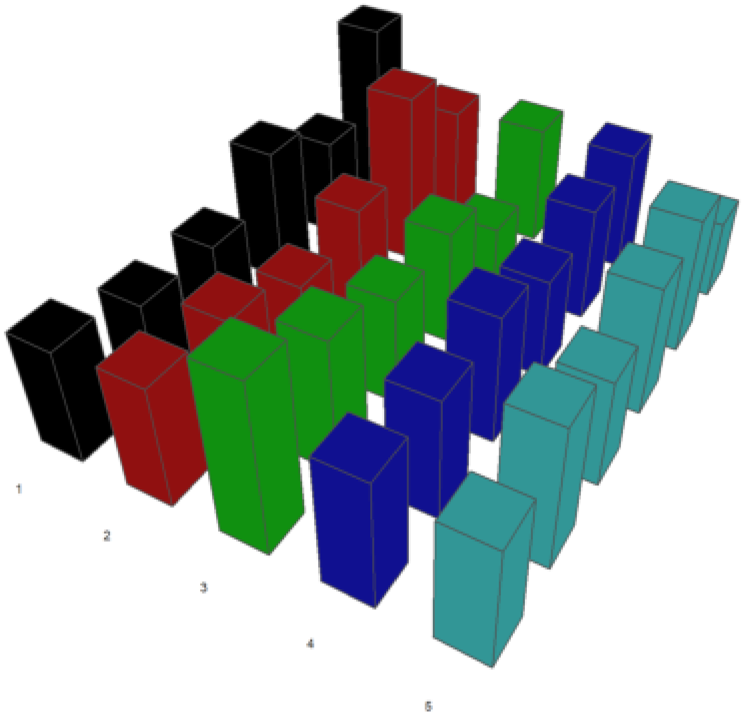
Gambar 4.139 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-217.png



Gambar 4.140 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-218.png



Gambar 4.141 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-219.png



Gambar 4.142 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-220.png

>Z=intrandom(5,100,6); v=zeros(5,6); ...
> loop 1 to 5; v[#]=getmultiplicities(1:6,Z[#]); end; ...
> columnsplot3d(v',scols=1:5,ccols=[1:5]):

>Z=intrandom(6,100,6); v=zeros(6,2); ...
> loop 1 to 6; v[#]=getmultiplicities(1:2,Z[#]); end; ...
> columnsplot3d(v',scols=1:6,ccols=[1:6]):

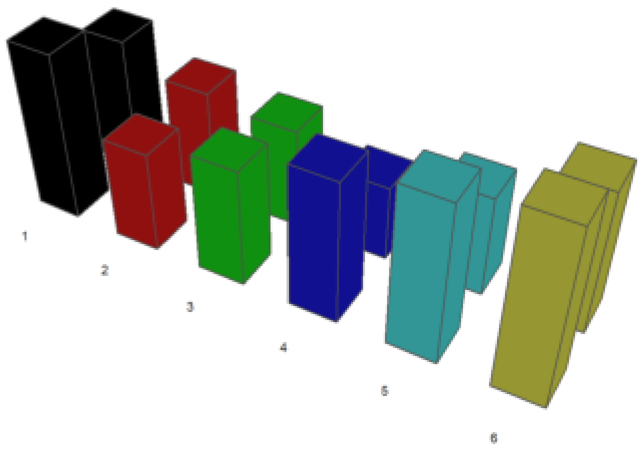
>Z=intrandom(7,1000,6); v=zeros(7,1); ...
> loop 1 to 7; v[#]=getmultiplicities(1:1,Z[#]); end; ...
> columnsplot3d(v',scols=1:7,ccols=[1:7]):

4.11 Menggambar Permukaan Benda Putar

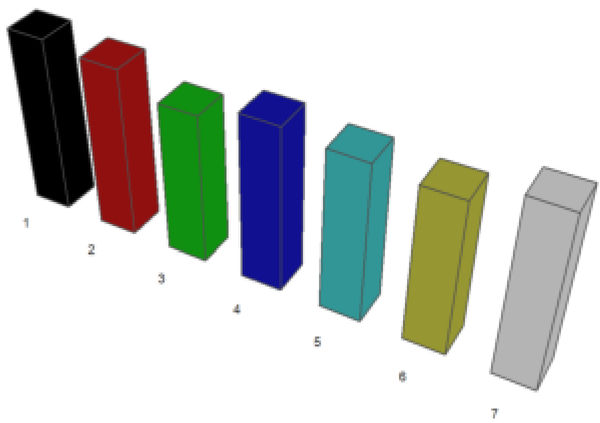
>plot2d("(x^{2+y}2-1)$^{3-x}$2*y^3",r=1.3, ...
> style="#",color=red,<outline, ...
> level=[-2;0],n=100):

>ekspresi &= (x^{2+y}2-1)$^{3-x}$2*y^3; $ekspresi

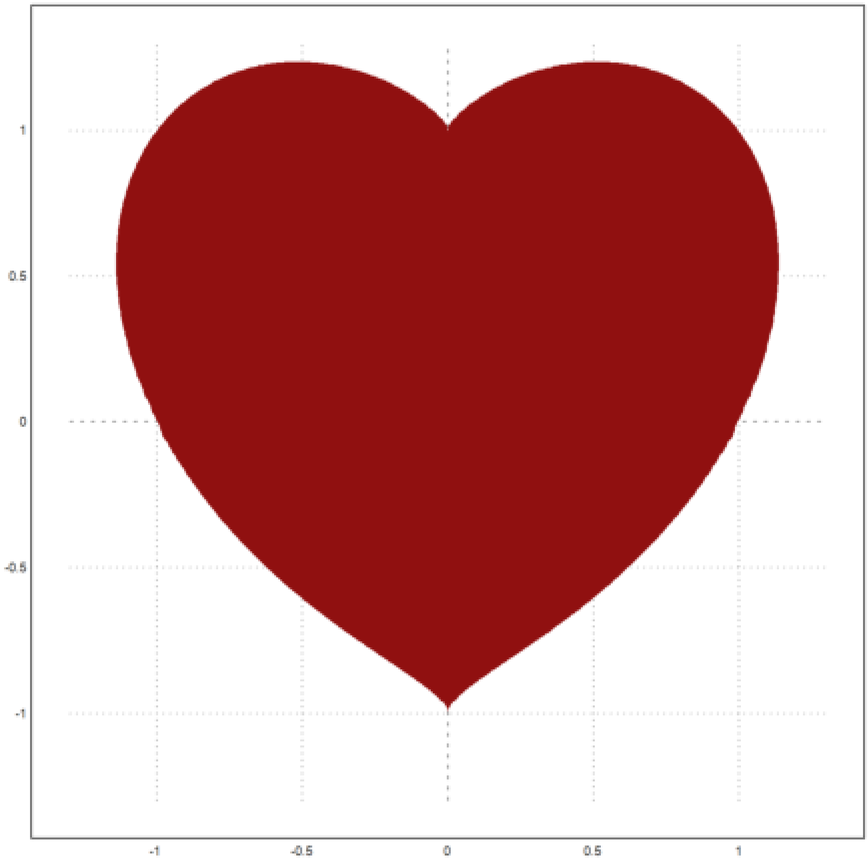
$$\left(y^2+x^2-1\right)^3-x^2\,y^3$$



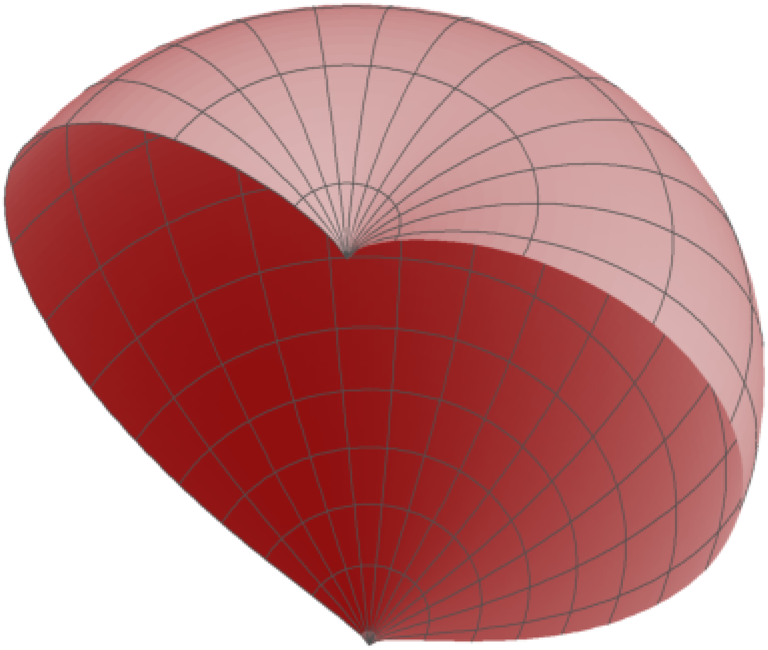
Gambar 4.143 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-221.png



Gambar 4.144 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-222.png



Gambar 4.145 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-223.png



Gambar 4.146 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-228.png

Kami ingin memutar kurva jantung di sekitar sumbu y. Berikut adalah ungkapan, yang mendefinisikan hati:

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2.y^3.$$

Selanjutnya kita atur

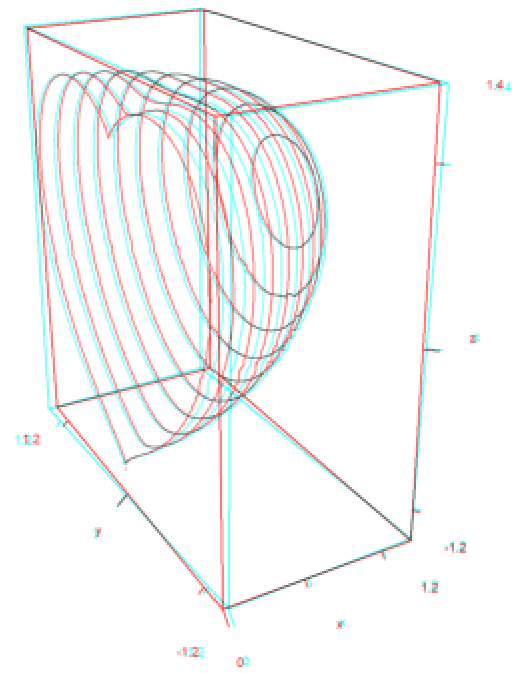
$$x = r.cos(a), \quad y = r.sin(a).$$

>function fr(r,a) &= ekspresi with [x=r*cos(a),y=r*sin(a)] | trigreduce; $fr(r,a)

$$\left(r^2-1\right)^3+\frac{\left(\sin\left(5\,a\right)-\sin\left(3\,a\right)-2\,\sin a\right)\,r^5}{16}$$

Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi numerik, yang memecahkan r, jika a diberikan. Dengan fungsi itu kita dapat memplot jantung yang diputar sebagai permukaan parametrik.

```
>function map f(a) := bisect("fr",0,2;a); ...
> t=linspace(-pi/2,pi/2,100); r=f(t); ...
> s=linspace(pi,2pi,100)'; ...
> plot3d(r*cos(t)*sin(s),r*cos(t)*cos(s),r*sin(t), ...
> >hue,<frame,color=red,zoom=4,amb=0,max=0.7,grid=12,height=50°):
```



Gambar 4.147 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-229.png

Berikut ini adalah plot 3D dari gambar di atas yang diputar di sekitar sumbu z. Kami mendefinisikan fungsi, yang menggambarkan objek.

>function f(x,y,z) ...

```
r=x^2+y^2;
return (r+z^2-1)^3-r*z^3;
 endfunction
```

>plot3d("f(x,y,z)", ...
> xmin=0,xmax=1.2,ymin=-1.2,ymax=1.2,zmin=-1.2,zmax=1.4, ...
> implicit=1,angle=-30°,zoom=2.5,n=[10,60,60],>anaglyph):

4.12 Menggambar Grafik 3D dengan Povray di EMT

Menggambar Povray Dengan bantuan file Euler povray.e, Euler dapat menghasilkan file Povray. Hasilnya sangat bagus untuk dilihat.

Untuk dapat menjalankan sintaks dalam povray perlu menginstal Povray (32bit atau 64bit) dari http://www.povray.org/, dan meletakkan sub-direktori "bin" dari Povray ke pathway, atau mengatur variabel "defaultpovray" dengan path lengkap yang menunjuk ke "pvengine.exe".

Interface Povray dari Euler menghasilkan file Povray di direktori home pengguna, dan memanggil Povray untuk mengurai file-file ini. Nama file default adalah current.pov, dan direktori default adalah eulerhome(), biasanya c:. Povray menghasilkan file PNG, yang dapat dimuat oleh Euler ke dalam buku catatan. Untuk membersihkan file-file ini, gunakan povclear().

Sintaks yang digunakan untuk menjalankan povray adalah pov3d. Fungsi pov3d memiliki komponen yang sama dengan plot3d. Ini dapat menghasilkan grafik fungsi f(x,y), atau permukaan dengan koordinat X,Y,Z dalam matriks, termasuk garis level opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat gambar ke dalam notebook Euler.

Selain pov3d(), ada banyak fungsi yang menghasilkan objek Povray. Fungsi-fungsi ini mengembalikan string, yang berisi kode Povray untuk objek. Untuk menggunakan fungsi ini, mulai file Povray dengan povstart(). Kemudian gunakan writeln(…) untuk menulis objek ke file gambar. Terakhir, akhiri file dengan povend(). Secara default, raytracer akan dimulai, dan PNG akan dimasukkan ke dalam notebook Euler.

Fungsi objek memiliki parameter yang disebut "look", yang membutuhkan string dengan kode Povray untuk tekstur dan hasil akhir objek. Fungsi povlook() dapat digunakan untuk menghasilkan string ini. Ini memiliki parameter untuk warna, transparansi, Phong Shading dll.

Lingkup Povray memiliki sistem koordinat lain. Interface ini menerjemahkan semua koordinat ke sistem Povray. Jadi Anda dapat terus berpikir dalam sistem koordinat Euler dengan z menunjuk vertikal ke atas, dan x,y,z sumbu dalam arti tangan kanan.

Anda perlu memuat file povray.

>load povray;

Pastikan, direktori bin Povray ada di path. Jika tidak, edit variabel berikut sehingga berisi path ke povray yang dapat dieksekusi.

>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Contoh Penggunaan

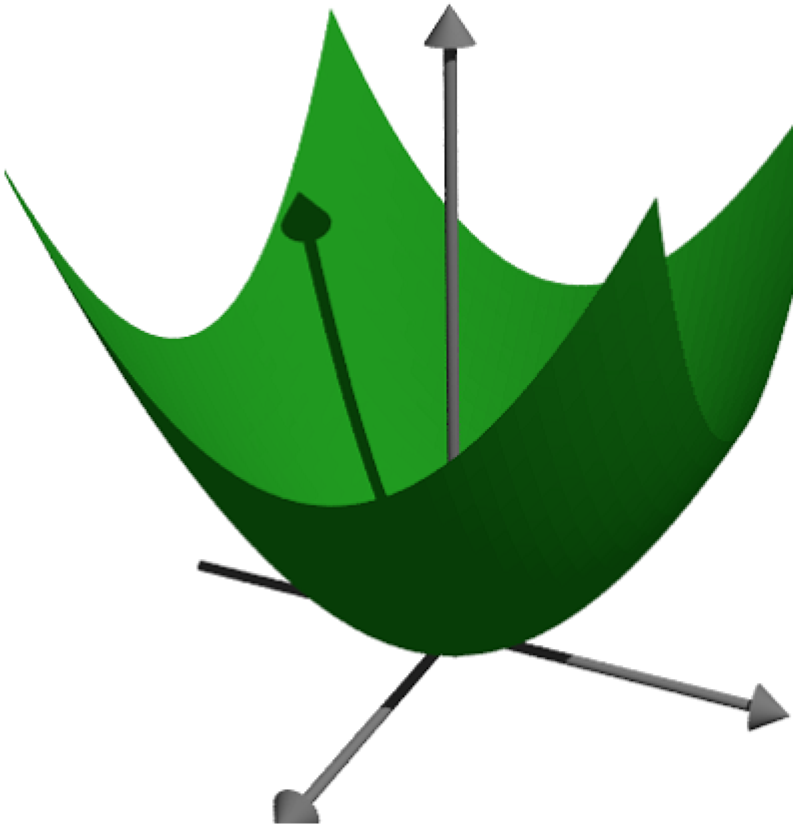
Akan diberikan contoh sederhana penggunaan povray pada EMT

Perintah berikut menghasilkan file povray di direktori pengguna dan menjalankan Povray untuk ray tracing file ini.

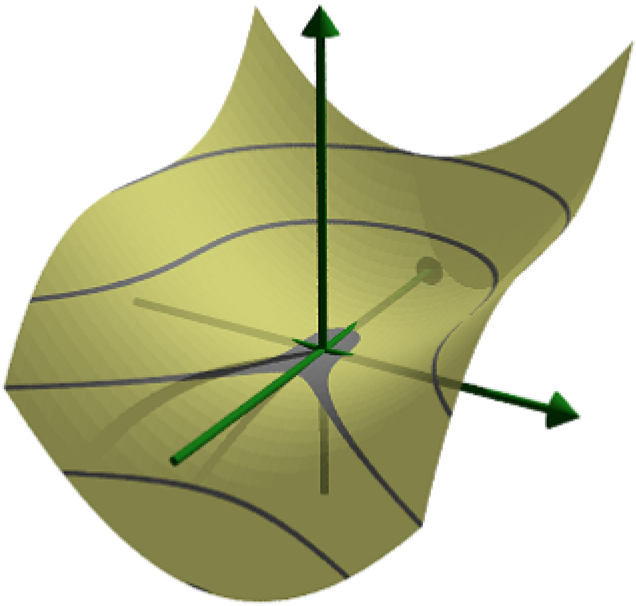
Jika memulai perintah berikut, GUI Povray akan terbuka, menjalankan file, dan menutup secara otomatis. Karena alasan keamanan, akan ditanya, apakah ingin mengizinkan file exe untuk dijalankan. Agar pertanyaan tersebut tidak muncul lagi bisa dipilih batal.

>pov3d("x^{2+y}2",zoom=4);

hasil visualisasi fungsi dapat dibuat menjadi transparan dan menambahkan hasil akhir lainnya.



Gambar 4.148 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-230.png



Gambar 4.149 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-231.png

> pov3d("($x^{2+y}3$)",axiscolor=green,angle=30°, . . .
> look=povlook(yellow,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=3);

>pov3d("((x-1)$^{2+(y+1)}$2)*((x+1)$^{2+y}$2)/40",r=1.5, . . .
> angle=120°,level=1/40,dlevel=0.005,light=[-1,1,1],height=45°,n=50, . . .
> <fscale,zoom=3.8);

Object Povray

Contoh-contoh di atas tadi merupakan visualisasi permukaan fungsi dengan menggunakan sintaks pov3d. Untuk menghasilkan objek dalam povray perlu ditulis menjadi file povray.

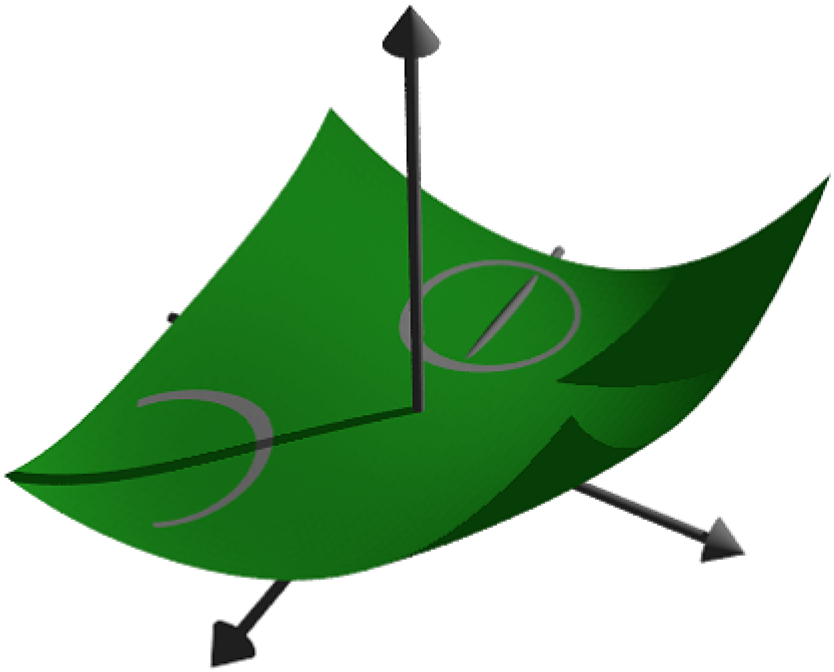
Untuk menghasilkan output dimulai dengan povstart()

>load povray; . . .
> defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

>povstart(zoom=3.5)

>c1=povcylinder(-povx,povx,1,povlook(orange)); . . .



Gambar 4.150 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-232.png

> c2=povcylinder(-povy,povy,1,povlook(yellow)); ...
> c3=povcylinder(-povz,povz,1,povlook(lightblue));

Di atas telah didefinisikan tiga silinder yang disimpan dalam string di Euler. Fungsi povx(), povy(), dll. hanya mengembalikan vektor [1,0,0] yang dapat digunakan sebagai gantinya.

>c1

```
cylinder { &lt;-1,0,0&gt;, &lt;1,0,0&gt;, 1
 texture { pigment { color rgb &lt;0.941176,0.509804,0.392157&gt; }  }
 finish { ambient 0.2 }
 }
```

Akan ditambahkan tekstur ke objek dengan tiga warna berbeda yaitu orange, yellow, dan lightblue.

Untuk menamahkan tekstur ini dapat digunakan sintaks povlook(), yang mengembalikan string dengan kode Povray yang relevan. Selain menambahkan warna, ditambahkan juga transparansi dan cahaya.

>povlook(rgb(0.1,0.2,0.3),0.1,0.5)

```
 texture { pigment { color rgbf &lt;0.101961,0.2,0.301961,0.1&gt; }  }
 finish { ambient 0.5 }
```

>writeln(povintersection([c1,c2,c3]));

>povend;

Contoh Lain

Akan ditampilkan fungsi untuk membuat sebuah donat

>povstart(angle=0,height=45°); //height untuk menampilkan fungsi dengan suatiu derajat tertentu

>function povdonat (r1,r2,look=“ “) :=”torus {“+r1+”,“+r2+look+”}“; //fungsi untuk menampilkan sebuah donat

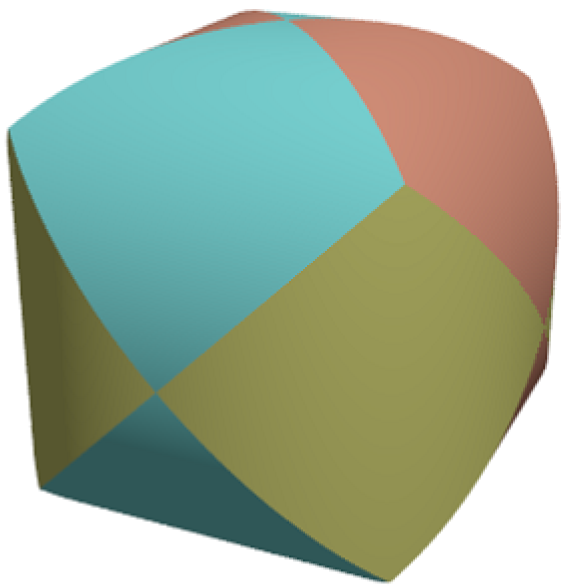
>writeln(povobject(povdonat(1,0.5),povlook(lightblue,>phong),xrotate(90°)));

>povend();

4.13 Menggambar Grafik Tiga Dimensi alam modus anaglif

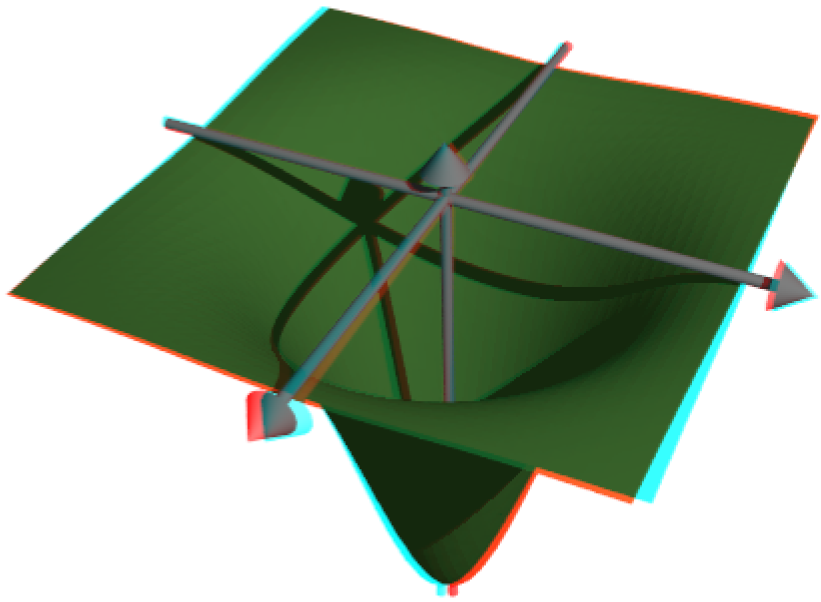
Untuk menghasilkan anaglyph untuk kacamata merah/sian, Povray harus berjalan dua kali dari posisi kamera yang berbeda. Ini menghasilkan dua file Povray dan dua file PNG, yang dimuat dengan fungsi loadanaglyph().

Tentu saja, Anda memerlukan kacamata merah/sian untuk melihat contoh berikut dengan benar.



Gambar 4.151 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-233.png

Gambar 4.152 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-234.png



Gambar 4.153 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-235.png

Fungsi pov3d() memiliki sakelar sederhana untuk menghasilkan anaglyphs.

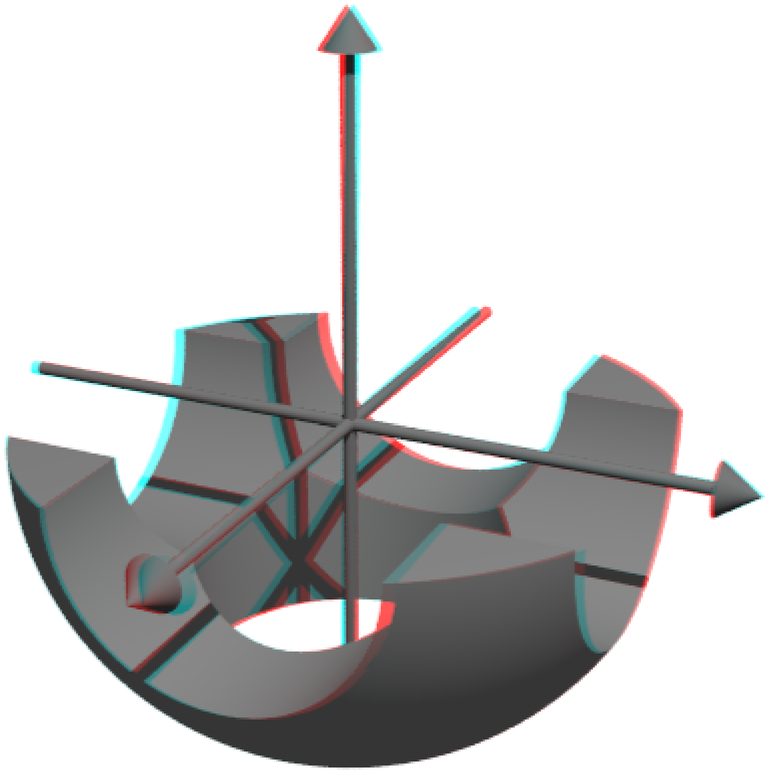
>pov3d("-exp(-x$^{2\text{-}y}$2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph, . . .
> center=[0,0,0.5],zoom=3.5);

Jika Anda membuat adegan dengan objek, Anda perlu menempatkan generasi adegan ke dalam fungsi, dan menjalankannya dua kali dengan nilai yang berbeda untuk parameter anaglyph.

>function myscene . . .

```
  s=povsphere(povc,1);
  cl=povcylinder(-povz,povz,0.5);
  clx=povobject(cl,rotate=xrotate(90°));
  cly=povobject(cl,rotate=yrotate(90°));
  c=povbox([-1,-1,0],1);
  un=povunion([cl,clx,cly,c]);
  obj=povdifference(s,un,povlook(red));
  writeln(obj);
  writeAxes();
endfunction
```

Fungsi povanaglyph() melakukan semua ini. Parameternya seperti di povstart() dan povend()



Gambar 4.154 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-236.png

digabungkan.

>povanaglyph("myscene",zoom=4.5);

4.14 Fungsi Implisit menggunakan Povray

Povray dapat memplot himpunan di mana f(x,y,z)=0, seperti parameter implisit di plot3d. Namun hasilnya terlihat jauh lebih baik.

Sintaks untuk fungsinya sedikit berbeda. Anda tidak dapat menggunakan keluaran ekspresi Maxima atau Euler.

>load povray;

>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

>povstart(angle=25°,height=10°);

>writeln(povsurface("pow(x,2)+pow(y,2)*pow(z,2)-1",povlook(blue),povbox(-2,2,"")));

Gambar 4.155 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-237.png

>povend();

>load povray;

>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);

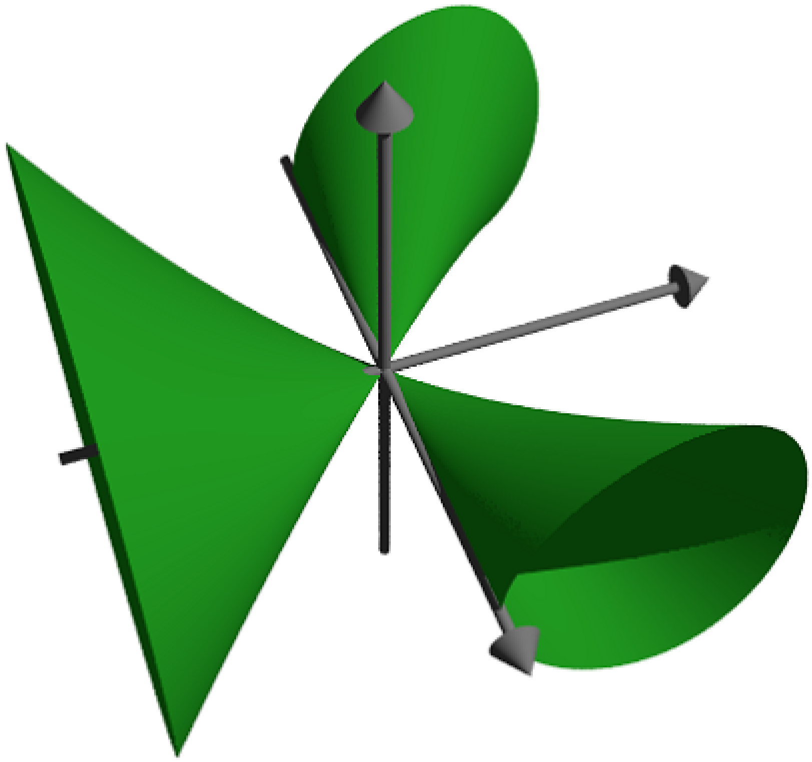
>writeln(povsurface("pow(x,2)*y-pow(y,3)-pow(z,2)",povlook(green))); ...
> writeAxes(); ...
> povend();

>load povray;

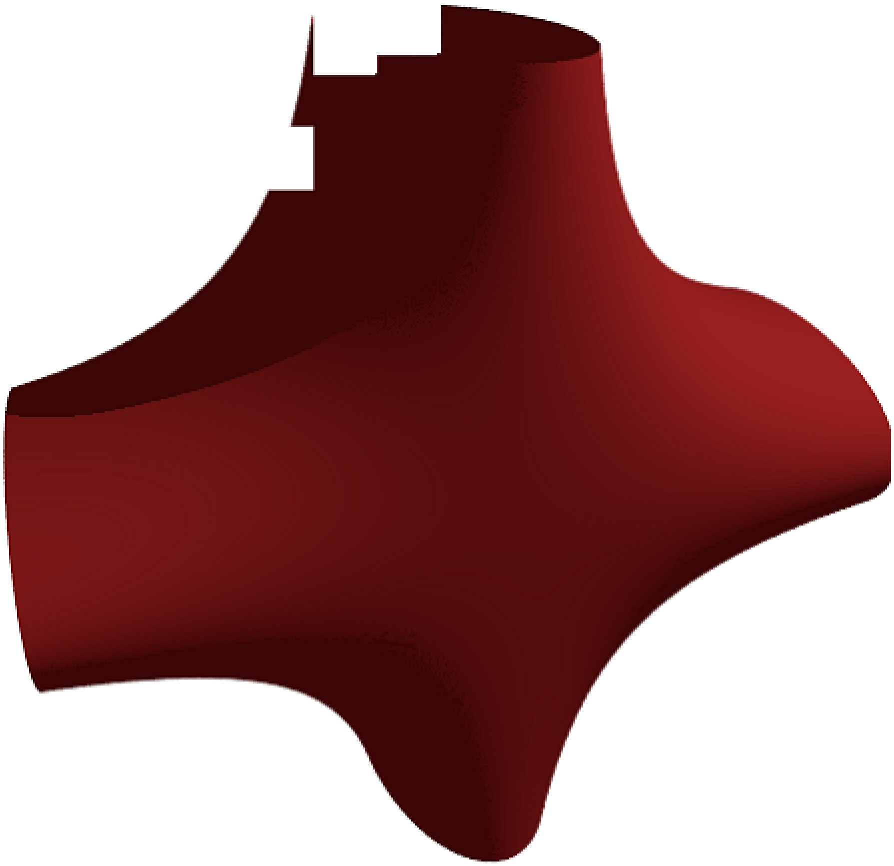
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

>povstart(angle=70°,height=30°);



Gambar 4.156 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-238.png



Gambar 4.157 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-239.png

>writeln(povsurface("pow(x,2)+pow(y,2)*pow(z,2)-1",povlook(red),povbox(-2,2,"")));

>povend();

4.15 Menggambar Titik pada ruang Tiga Dimensi (3D)

Alih-alih fungsi, kita dapat memplot dengan koordinat. Seperti pada plot3d, kita membutuhkan tiga matriks untuk mendefinisikan objek.

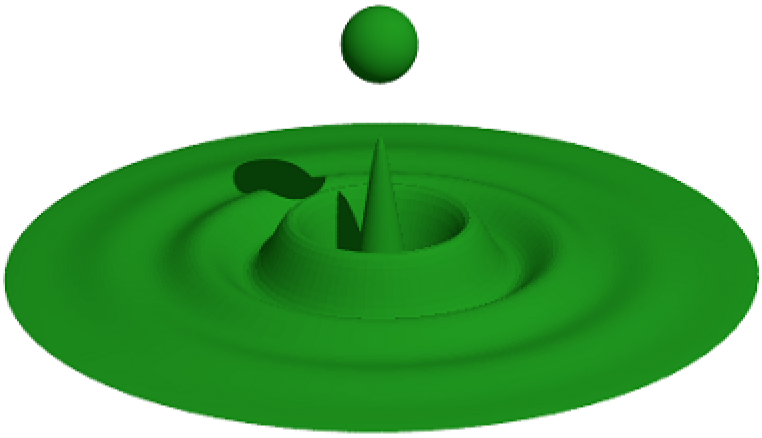
Dalam contoh kita memutar fungsi di sekitar sumbu z.

```
>function f(x) := x^3-x+1; ...
> x=-1:0.01:1; t=linspace(0,2pi,8)'; ...
> Z=x; X=cos(t)*f(x); Y=sin(t)*f(x); ...
> pov3d(X,Y,Z,angle=40°,height=20°,axis=0,zoom=4,light=[10,-5,5]);
```

Dalam contoh berikut, kami memplot gelombang teredam. Kami menghasilkan gelombang dengan bahasa matriks Euler.

Kami juga menunjukkan, bagaimana objek tambahan dapat ditambahkan ke adegan pov3d. Untuk pembuatan objek, lihat contoh berikut. Perhatikan bahwa plot3d menskalakan plot, sehingga cocok dengan kubus satuan.

Gambar 4.158 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-240.png



Gambar 4.159 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-241.png

>r=linspace(0,1,80); phi=linspace(0,2pi,80)'; ...
> x=r*cos(phi); y=r*sin(phi); z=exp(-5*r)*cos(8*pi*r)/3; ...
> pov3d(x,y,z,zoom=5,axis=0,add=povsphere([0,0,0.5],0.1,povlook(green)), ...
> w=500,h=300);

Dengan metode bayangan canggih dari Povray, sangat sedikit titik yang dapat menghasilkan permukaan yang sangat halus. Hanya di perbatasan dan dalam bayang-bayang triknya mungkin menjadi jelas.

Untuk ini, kita perlu menambahkan vektor normal di setiap titik matriks.

>Z &= x^{2*y}3

```
  2  3
 x  y
```

Persamaan permukaannya adalah [x,y,Z]. Kami menghitung dua turunan ke x dan y ini dan mengambil produk silang sebagai normal.

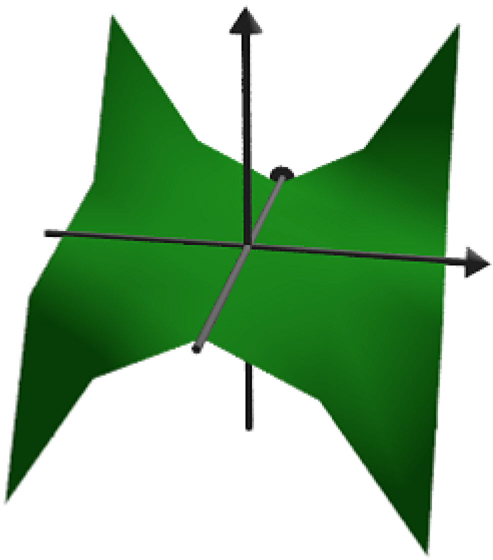
>dx &= diff([x,y,Z],x); dy &= diff([x,y,Z],y);

Kami mendefinisikan normal sebagai produk silang dari turunan ini, dan mendefinisikan fungsi koordinat.

>N &= crossproduct(dx,dy); NX &= N[1]; NY &= N[2]; NZ &= N[3]; N,

```
           3          2  2
[- 2 x y , - 3 x  y , 1]
```

Kami hanya menggunakan 25 poin.



Gambar 4.160 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-242.png

>x=-1:0.5:1; y=x';

>pov3d(x,y,Z(x,y),angle=10°, ...
> xv=NX(x,y),yv=NY(x,y),zv=NZ(x,y),<shadow);

Berikut ini adalah simpul Trefoil yang dilakukan oleh A. Busser di Povray. Ada versi yang ditingkatkan dari ini dalam contoh.

Simpul trefoil

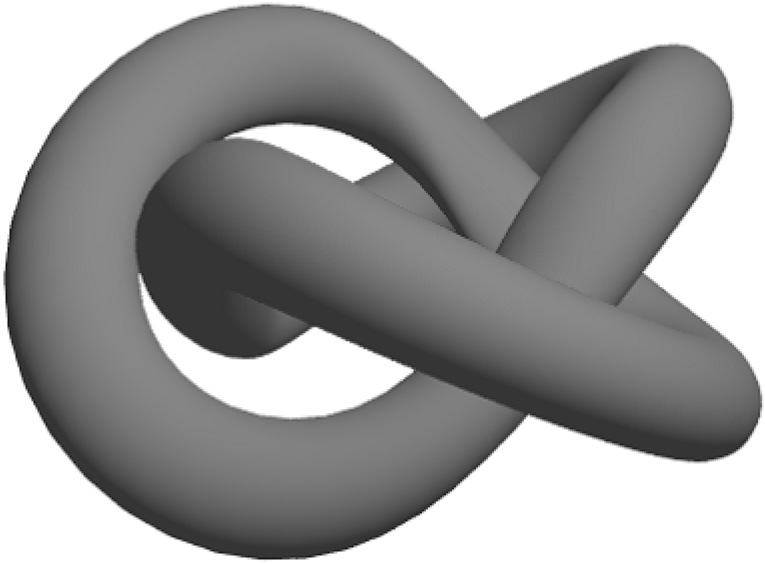
Untuk tampilan yang bagus dengan tidak terlalu banyak titik, kami menambahkan vektor normal di sini. Kami menggunakan Maxima untuk menghitung normal bagi kami. Pertama, ketiga fungsi koordinat sebagai ekspresi simbolik.

>X &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*cos(2*y); ...
> Y &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*sin(2*y); ...
> Z &= sin(x)+2*cos(3*y);

Kemudian kedua vektor turunan ke x dan y.

>dx &= diff([X,Y,Z],x); dy &= diff([X,Y,Z],y);

Sekarang normal, yang merupakan produk silang dari dua turunan.



Gambar 4.161 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-243.png

```
>dn &= crossproduct(dx,dy);
```

Kami sekarang mengevaluasi semua ini secara numerik.

```
>x:=linspace(-%pi,%pi,40); y:=linspace(-%pi,%pi,100)';
```

Vektor normal adalah evaluasi dari ekspresi simbolik dn[i] untuk i=1,2,3. Sintaks untuk ini adalah &"expression"(parameters). Ini adalah alternatif dari metode pada contoh sebelumnya, di mana kita mendefinisikan ekspresi simbolik NX, NY, NZ terlebih dahulu.

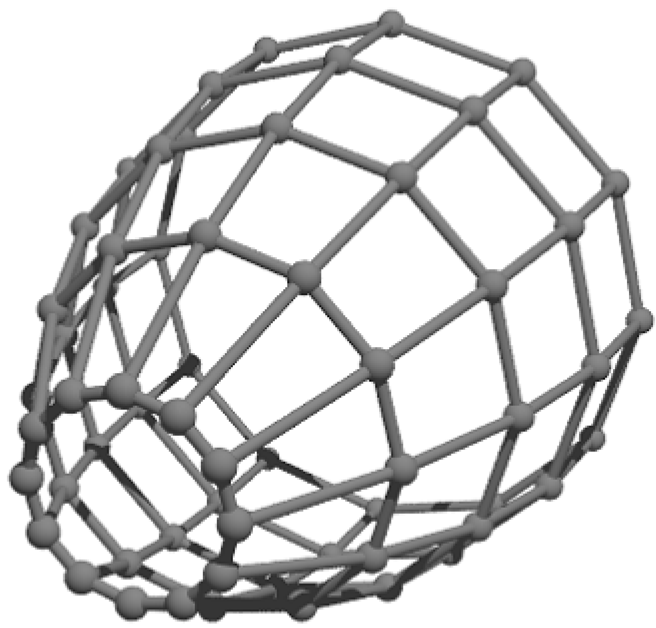
```
>pov3d(X(x,y),Y(x,y),Z(x,y),axis=0,zoom=5,w=450,h=350, ...
> <shadow,look=povlook(gray), ...
> xv=&"dn[1]"(x,y), yv=&"dn[2]"(x,y), zv=&"dn[3]"(x,y));
```

Kami juga dapat menghasilkan grid dalam 3D.

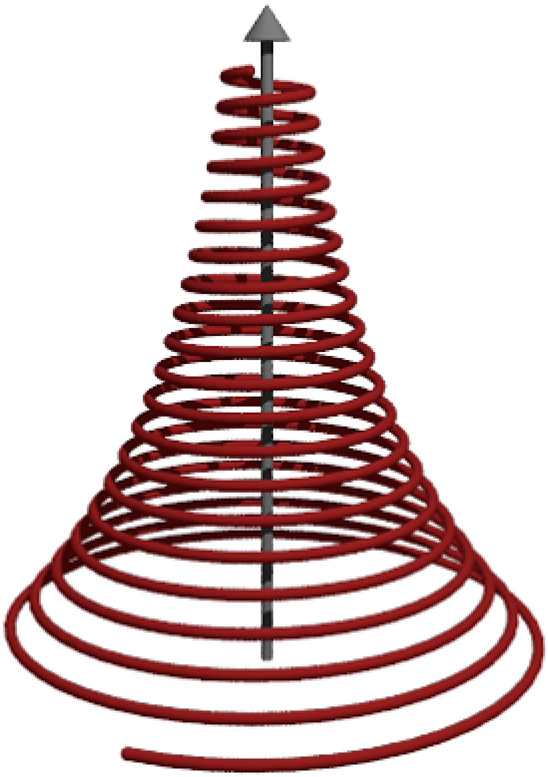
```
>povstart(zoom=4); ...
> x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^2/6; ...
> t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...
> writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...
> povend();
```

With povgrid(), curves are possible.

```
>povstart(center=[0,0,1],zoom=3.6); ...
> t=linspace(0,2,1000); r=exp(-t); ...
> x=cos(2*pi*10*t)*r; y=sin(2*pi*10*t)*r; z=t; ...
> writeln(povgrid(x,y,z,povlook(red))); ...
> writeAxis(0,2,axis=3); ...
```



Gambar 4.162 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-244.png



Gambar 4.163 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-245.png

> povend();

Latihan Soal

1. Buatlah plot 3D dari fungsi

$$f(x, y) = x^3 + 3y^2$$

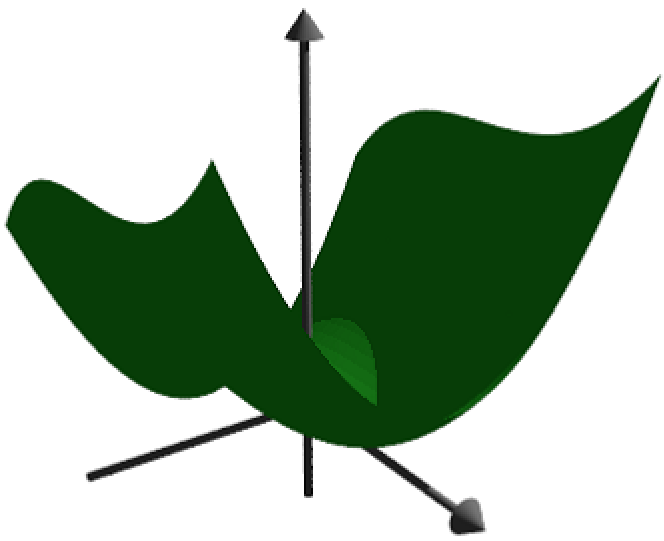
dengan zoom 3 dan angle 55 derajat menggunakan povray

>pov3d(“x^{3+3*y}2”,zoom=3,angle=55°);

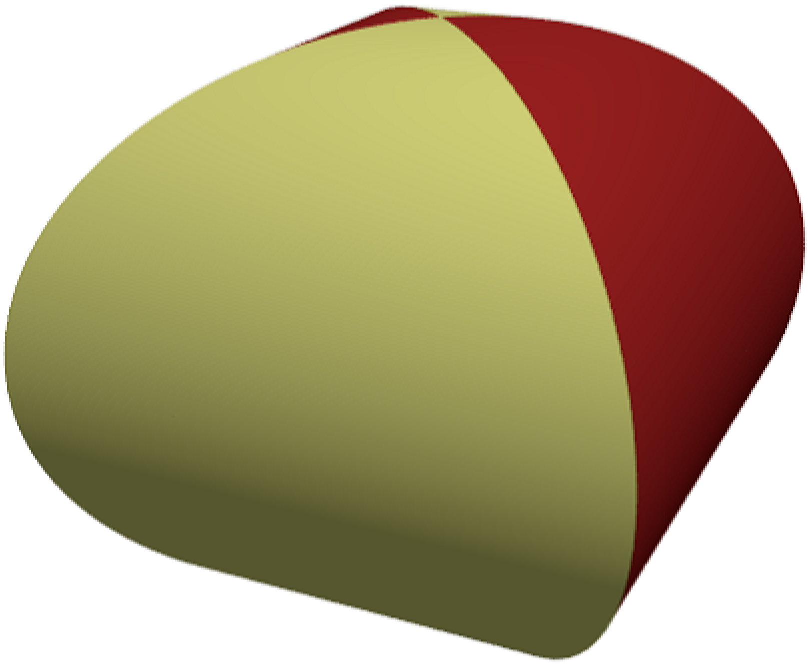
2. Buatlah gabungan 2 silinder dengan fungsi povx() berwarna merah dan povz() berwarna kuning dan zoom 4

>povstart(zoom=4)

>c1 = povcylinder (-povx,povx,1,povlook(red));



Gambar 4.164 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-247.png



Gambar 4.165 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-248.png

>c2 = povcylinder (-povz,povz,1,povlook(yellow));

>writeln(povintersection([c1,c2]));

>povend();

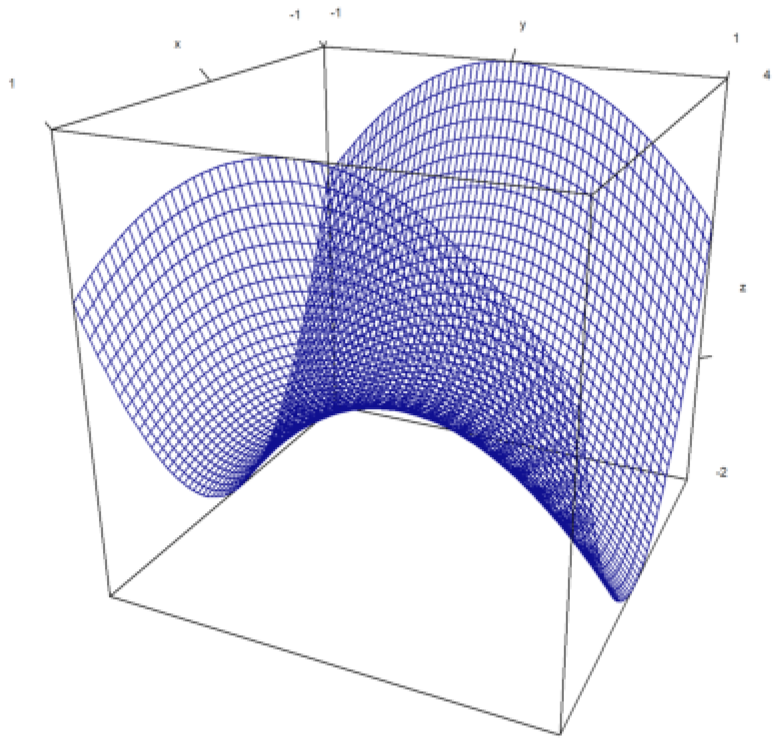
>

3. Buatlah grafik 3D dari fungsi kuadrat berikut ini dengan parameter tambahan:

$$z = 4x^2 - 2y^2$$

Tampilkan grafik tersebut dengan transparent, dan menggunakan grid dengan resolusi 50, dengan warna biru pada garis di plot tersebut

>plot3d("4*x^{2-2*y}2",>transparent,grid=50,wirecolor=blue):



Gambar 4.166 images/EMT_Grafik3D_Alfi%20Nur%20Azumah-250.png

BAB V

KALKULUS DENGAN EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

1. Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
2. Limit Fungsi,
3. Turunan Fungsi,
4. Integral Tak Tentu,
5. Integral Tentu dan Aplikasinya,
6. Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

5.1 Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

1. Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (untuk fungsi numerik),
2. Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
3. Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
4. Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi:

$$f(x) = 2x^2 + e^{\sin(x)}.$$

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
```

```
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
1
4.31977682472
20.7392088022
```

>f(a) // tidak dapat dihitung nilainya

```
Variable or function a not found.
Error in:
f(a) // tidak dapat dihitung nilainya ...
   ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

Berikutnya kita definisikan fungsi: $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x}}{x+1}$.

>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)

>g(3)

```
0
```

>g(0)

```
0
```

>g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik

```
Floating point error!
Error in sqrt
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
g:
    useglobal; return sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
Error in:
g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik ...
    ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

>f(g(5)) // komposisi fungsi

```
2.20920171961
```

>g(f(5))

```
0.950898070639
```

>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi

>h(5) // sama dengan f(g(5))

```
2.20920171961
```

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

$$h(x) = f(g(x))$$

dan

$$u(x) = g(f(x))$$

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

>f(0:10) // nilai-nilai f(0), f(1), f(2), . . . , f(10)

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

>gmap(200:210)

```
[0.987534,  0.987596,  0.987657,  0.987718,  0.987778,  0.987837,
0.987896,  0.987954,  0.988012,  0.988069,  0.988126]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

>function map f(x) . . .

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \le 0. \end{cases}$$

Gambar 5.1 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-005.png

```
  if x>0 then return x^3
  else return x^2
  endif;
endfunction
```

>f(1)

```
1
```

>f(-2)

```
4
```

>f(-5:5)

```
[25,  16,  9,  4,  1,  0,  1,  8,  27,  64,  125]
```

>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):

>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik

```
                                 x
                              2 E
```

>$f(a)//nilaifungsisecarasimbolik2\, e^{a}$ $>f(E) // nilai fungsi berupa bilangan desimal

```
30.308524483
```

>$f(E), $float(30.30852448295852$ $2\, e^{e}$

>function g(x) &= 3*x+1

```
                             3 x + 1
```

>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi

```
     3 x + 1
 2 E
```

>plot2d("h(x)",-1,1): 30.30852448295852

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan fungsi-fungsi tersebut dan komposisinya di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik fungsi-fungsi tersebut dan komposisi-komposisi 2 fungsi.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

1. Tentukan nilai F(0) dan f(7) dari

$$f(x) = x^2 - 2x - 24$$

   > function f(x) := (x^2-2*x-24)

> f(0), f(7)

```
-24
11
```

2. Tentukan nilai z(8,3) dan gambarkan plot 3D dari fungsi

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

   > function f(x,y) &= (x$^{2+x*y+y}$2)/(x^2)

```
  2           2
 y  + x y + x
 -------------
       2
      x
```

> f(8,3)

```
1.515625
```

>plot3d("f(x,y)",-2,2):

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

Gambar 5.2 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-012.png

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & x > 3 \\ x + 3 & x \le 3. \end{cases}$$

Gambar 5.3 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-016.png

3. Diketahui fungsi

$$g(x) = 2x^2 + 4$$
$$h(x) = 7x - 2$$

tentukan nilai p(5) jika p(x)=g(h(x))

>function g(x)&=2*x^2+4; function h(x)&=7*x-2;

>function p(x):= g(h(x))

>p(5)

```
2182
```

4. Gambarkan grafik dari

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & x > 3 \\ x + 3 & x \le 3. \end{cases}$$

>function map f(x) ...

```
  if x>3 then return x^2-9
  else return x+3
  endif;
endfunction
```

>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):

5. Tentukan nilai f(6), f(-2), dan gambarkan grafik dari fungsi

$$f(x) = x^2 e^{-2x} + 12$$

>function f(x)&=x^2*exp(-2*x)+12

$$f(x) = x^2 e^{-2x} + 12$$

Gambar 5.4 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-018.png

```
 2   - 2 x
x  E        + 12
```

>f(6), f(-2)

```
12.0002211916
230.392600133
```

>plot2d("f(x)",-2,2):

5.2 Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und" (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga).

Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

>$showev('limit(sqrt(x^2-3*x)/(x+1),x,inf))

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3\,x}}{x+1} = 1$$

>$limit((x^{3-13*x}2+51*x-63)/(x^{3-4*x}2-3*x+18),x,3)

$$-\frac{4}{5}$$

$$\lim_{r\,(t-\sin t)\to 3} \frac{51\,r\,\left(t-\sin t\right) + r^3\,\left(t-\sin t\right)^3 - 13\,r^2\,\left(t-\sin t\right)^2 - 63}{-3\,r\,\left(t-\sin t\right) + r^3\,\left(t-\sin t\right)^3 - 4\,r^2\,\left(t-\sin t\right)^2 + 18}$$
$$= \lim_{r\,(t-\sin t)\to 3} \frac{51\,r\,\left(t-\sin t\right) + r^3\,\left(t-\sin t\right)^3 - 13\,r^2\,\left(t-\sin t\right)^2 - 63}{-3\,r\,\left(t-\sin t\right) + r^3\,\left(t-\sin t\right)^3 - 4\,r^2\,\left(t-\sin t\right)^2 + 18}$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=3. Berikut adalah grafik fungsinya.

>aspect(1.5); plot2d("(x^{3-13*x}2+51*x-63)/(x^{3-4*x}2-3*x+18)",0,4); plot2d(3,-4/5,>points,style="ow",>add):

$$\lim_{r\,(t-\sin t)\to 3}\frac{51\,r\,(t-\sin t)+r^3\,(t-\sin t)^3-13\,r^2\,(t-\sin t)^2-63}{-3\,r\,(t-\sin t)+r^3\,(t-\sin t)^3-4\,r^2\,(t-\sin t)^2+18}=\lim_{r\,(t-\sin t)\to 3}\frac{51\,r\,(t-\sin t)+r^3\,(t-\sin t)^3-13\,r^2\,(t-\sin t)^2-63}{-3\,r\,(t-\sin t)+r^3\,(t-\sin t)^3-4\,r^2\,(t-\sin t)^2+18}$$

Gambar 5.5 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-022.png

$$2\left(\lim_{r\,(t-\sin t)\to 0}\frac{r\,(t-\sin t)\,\sin\left(r\,(t-\sin t)\right)}{1-\cos\left(r\,(t-\sin t)\right)}\right)=2\left(\lim_{r\,(t-\sin t)\to 0}\frac{r\,(t-\sin t)\,\sin\left(r\,(t-\sin t)\right)}{1-\cos\left(r\,(t-\sin t)\right)}\right)$$

Gambar 5.6 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-025.png

>$limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)

$$4$$

$$2\left(\lim_{r\,(t-\sin t)\to 0}\frac{r\,(t-\sin t)\,\sin\left(r\,(t-\sin t)\right)}{1-\cos\left(r\,(t-\sin t)\right)}\right)$$
$$=2\left(\lim_{r\,(t-\sin t)\to 0}\frac{r\,(t-\sin)\,\sin\left(r\,(t-\sin t)\right)}{1-\cos\left(r\,(t-\sin t)\right)}\right)$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=0. Berikut adalah grafik fungsinya.

>plot2d("2*x*sin(x)/(1-cos(x))",-pi,pi); plot2d(0,4,>points,style="ow",>add):

>$limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0)

$$\frac{5}{7}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cot(7\,h)}{\cot(5\,h)}=\frac{5}{7}$$

Fungsi tersebut juga diskontinu (karena tidak terdefinisi) di x=0. Berikut adalah grafiknya.

>plot2d("cot(7*x)/cot(5*x)",-0.001,0.001); plot2d(0,5/7,>points,style="ow",>add):

>$showev('limit(((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8))

$$\lim_{x\to 8}\frac{\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}-1}{x-8}=\frac{1}{24}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\,x-1}=-1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cot(7\,h)}{\cot(5\,h)}=\frac{5}{7}$$

Gambar 5.7 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-028.png

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Gambar 5.8 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-035.png

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3\,x-10}{x-5}=7$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

>$showev('limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf))

$$\lim_{x\to \infty}\sqrt{x^2+x}-x=\frac{1}{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1,minus))

$$\lim_{x\uparrow 1}\frac{|x-1|}{x-1}=-1$$

Hitung limit di atas untuk x menuju 1 dari kanan.

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):

>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

>$showev('limit(log(x), x, minf))

$$\lim_{x\to -\infty}\log x=\mathit{infinity}$$

>$showev('limit((-2)^x,x, inf))

$$\lim_{t\downarrow 5} t-\sqrt{2-t}=5-\sqrt{3}\,i$$

Gambar 5.9 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-042.png

$$\lim_{x\to\infty}\left(-2\right)^{x}=\mathit{infinity}$$

>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))

$$\lim_{t\uparrow 2} t-\sqrt{2-t}=2$$

>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,plus))

$$\lim_{t\downarrow 2} t-\sqrt{2-t}=2$$

>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya

$$\lim_{t\downarrow 5} t-\sqrt{2-t}=5-\sqrt{3}\,i$$

>plot2d("x-sqrt(2-x)",0,2):

>$showev('limit((x$^{\text{2-9)/(2*x}}$2-5*x-3),x,3))

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2\,x^2-5\,x-3}=\frac{6}{7}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

>$showev('limit((x$^{\text{2+abs(x))/(x}}$2-abs(x)),x,0))

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|+x^2}{x^2-|x|}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}=e$$

>plot2d("(1+1/x)^x",0,1000):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}=e$$

Gambar 5.10 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-047.png

$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

Gambar 5.11 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-055.png

>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{k}{x}+1\right)^{x}=e^{k}$$

>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))

$$\lim_{x\to 0}\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}=e$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+k}\right)^{x}=e^{-k}$$

>$showev('limit((exp(x)-exp(2))/(x-2),x,2))

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x}-e^{2}}{x-2}=e^{2}$$

>$showev('limit((E^{x-E}2)/(x-2),x,2))

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x}-e^{2}}{x-2}=e^{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

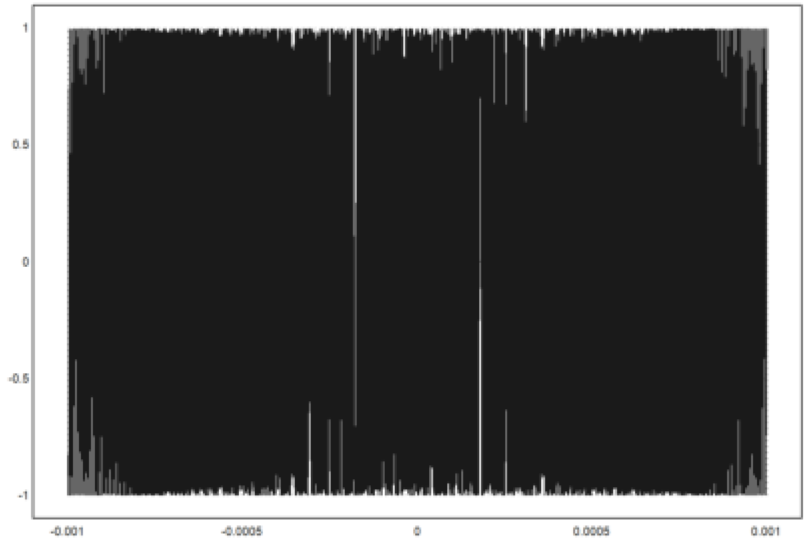
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=ind$$

>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))

$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

>plot2d("sin(1/x)",-0.001,0.001):



Gambar 5.12 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-056.png

>plot3d("sin(1/x)",-0.001,0.001, zoom=5):

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

1. Tentukan hasil limit dari

$$\lim_{y\to x/5} \frac{x^2-25y^2}{x-5y}$$

> &showev('limit((x^{2-25*y}2)/(x-5*y),y,x/5))

```
             2        2
            x  - 25 y
limit   ---------- = 2 x
        x   x - 5 y
y -&gt; -
        5
```

2. Tentukan hasil limit dari

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$$

>&showev('limit((sqrt(x^2+9))/x,x,4))

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} x^3+3\,x+7=\frac{69}{8}$$

Gambar 5.13 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-065.png

```
                     2
              sqrt(x   + 9)    5
limit  ------------ = -
x -&gt; 4        x          4
```

3. Tentukan hasil limit dibawah ini menggunakan maxima

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(2x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(2\,x\right)}{x^2}=infinity$$

4. tentukan hasil dari

$$\lim_{x\to inf} \frac{x^2}{cos(x)+1}$$

>$showev('limit((x^2)/(1+cos(x)),x,inf))

$$\lim_{x\to \infty } \frac{x^2}{\cos x+1}=und$$

5. Tentukan hasil dari limit dibawah ini dan gambarkan plotnya

$$\lim_{x\to 1/2} x^3+3x+7$$

>$showev('limit(x^3+3*x+7,x,1/2))

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} x^3+3\,x+7=\frac{69}{8}$$

>plot2d("(x^3+3*x+7)",-1,1); plot2d(1/2,69/8,>points,style="ow",>add):

5.3 Turunan Fungsi

Definisi turunan:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

>$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0)) // turunan x^2

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\left(x+h\right)^2-x^2}{h}}=2\,x$$

$$f\left(r\,\left(t-\sin t\right)\right)=\lim_{h\to 0}{\frac{f\left(r\,\left(t-\sin t\right)+h\right)-f\left(r\,\left(t-\sin t\right)\right)}{h}}$$

>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan

$$2\,h\,x+h^2$$

>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan

$$2\,x+h$$

>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan

$$2\,x$$

>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\left(x+h\right)^{n}-x^{n}}{h}}=n\,x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan (x+h)^n dengan menggunakan teorema binomial.

>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\sin \left(x+h\right)-\sin x}{h}}=\cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebutbenar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan sin(x+h) dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\log \left(x+h\right)-\log x}{h}}=\frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebutbenar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=-\frac{1}{x^2}$$

>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
Is x an integer?

Use assume!
Error in:
 $showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...
                                     ^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

>$showev('factor(E^(x+h)-E^x))

$$\mathit{factor}\left(e^{x+h}-e^x\right)=\left(e^h-1\right)\,e^x$$

>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\right)\,e^x=e^x$$

>function f(x) &= x^x

```
                                   x
                                  x
```

```
>$showev('limit(f(x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{x^{x}}=1$$

Silakan Anda gambar kurva

```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\left(x+h\right)^{x+h}-x^{x}}{h}}={\it infinity}$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\left(x+h\right)^{x+h}-x^{x}}{h}}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\left(x+h\right)^{x+h}-x^{x}}{h}}=x^{x}\,\left(\log x+1\right)$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

```
[x &gt; 0]
```

```
>&forget(x<0)
```

```
[x &lt; 0]
```

```
>&facts()
```

```
[]
```

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\arcsin \left(x+h\right)-\arcsin x}{h}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

Gambar 5.14 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-088.png

>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tan (x+h) - \tan x}{h} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)

```
sinh(x)
```

>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)

$$\frac{e^{-x}\,\left(e^{2\,x}+1\right)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):

>function f(x) &= sin(3*x$^{5+7)}$2

```
   2      5
sin  (3 x  + 7)
```

>diff(f,3), diffc(f,3)

```
1198.32948904
1198.72863721
```

Apakah perbedaan diff dan diffc?

>$showev('diff(f(x),x))

$$\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right) = 30\,x^4\,\cos\left(3\,x^5+7\right)\,\sin\left(3\,x^5+7\right)$$

>$% with x=3

$$\%at\left(\frac{d^{1.0}}{d\,x^{1.0}}\,\sin^2\left(3.0\,x^5+7.0\right),x=3.0\right)=1198.728637211748$$

Gambar 5.15 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-092.png

$$-3.899329036387075$$

Gambar 5.16 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-095.png

$$\%at\left(\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right),x=3\right)=2430\,\cos 736\,\sin 736$$

>$float(%)

$$\%at\left(\frac{d^{1.0}}{d\,x^{1.0}}\,\sin^2\left(3.0\,x^5+7.0\right),x=3.0\right)=1198.728637211748$$

>plot2d(f,0,3.1):

>function f(x) &=5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x) // mendifinisikan fungsi f

```
5 cos(2 x) - 2 x sin(2 x)
```

>function df(x) &=diff(f(x),x) // fd(x) = f'(x)

```
- 12 sin(2 x) - 4 x cos(2 x)
```

>$'f(1)=f(1), $float(f(1)), $'f(2)=f(2), $float(f(2)) // nilai f(1) dan f(2)

$$-0.2410081230863468$$

$f\left(1\right)=5\,\cos 2-2\,\sin 2$

>xp=solve("df(x)",1,2,0) // solusi f'(x)=0 pada interval [1, 2]

```
1.35822987384
```

>df(xp), f(xp) // cek bahwa f'(xp)=0 dan nilai ekstrim di titik tersebut

```
0
-5.67530133759
```

$$f\left(2\right)=5\,\cos 4-4\,\sin 4$$

Gambar 5.17 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-096.png

$$-0.2410081230863468$$

Gambar 5.18 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-097.png

>plot2d([“f(x)”,“df(x)”],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya

Perhatikan titik-titik “puncak” grafik y=f(x) dan nilai turunan pada saat grafik fungsinya mencapai titik “puncak” tersebut.

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), menggunakan perintah diff, dan secara manual (langkah demi langkah yang dihitung dengan Maxima) seperti contoh-contoh di atas. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

1. Tentukan turunan dari

$$f(x) = x^3 + 7x$$

Menghitung turunan menggunakan definisi turunan

>$showev('limit(((((x+h)^{3+7*(x+h))-(x}3+7*x))/h,h,0))

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\left(x+h\right)^3-x^3+7\,\left(x+h\right)-7\,x}{h}} = 3\,x^2+7$$

>function f(x) &= x^3+7*x;

Menghitung turunan menggunakan perintah diff

>function df(x) &=diff(f(x),x)

```
        2
   3 x   + 7
```

2. Tentukan turunan dari

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Menghitung turunan menggunakan definisi turunan

>$showev('limit((sqrt(x+h)-sqrt(x))/h,h,0))

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}}=\frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

>function h(x) &= sqrt(x);

Menghitung turunan menggunakan perintah diff

>function df(x) &= diff(h(x),x)

```
    1
---------
2 sqrt(x)
```

3. Tentukan turunan dari

$$g(x)=\frac{2}{x+3}$$

Menghitung turunan menggunakan definisi turunan

>$showev('limit(((2/(x+h+3))-(2/(x+3)))/h,h,0))

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\frac{2}{x+h+3}-\frac{2}{x+3}}{h}}=-\frac{2}{x^2+6\,x+9}$$

>function g(x) &= 2/(x+3);

Menghitung menggunakan perintah diff

>function df(x) &= diff(g(x),x)

```
     2
- --------
         2
  (x + 3)
```

4. Tentukan turunan dari

$$c(x)=x^2+2x-15$$

Menghitung menggunakan definisi turunan

>$showev('limit(((((x+h)$^{2+2*(x+h)-15)-(x}$2+2*x-15))/h,h,0))

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(x+h\right)^2-x^2+2\,\left(x+h\right)-2\,x}{h}}=2\,x+2$$

>function c(x) &= x^2+2*x-15;

Menghitung menggunakan perintah diff

>function df(x) &= diff(c(x),x)

```
2 x + 2
```

5. Tentukan turunan dari

$$H(x) = sin(x) - cos(x)$$

Menghitung turunan menggunakan definisi turunan

>$showev('limit(((sin(x+h)-cos(x+h))-(sin(x)-cos(x)))/h,h,0))

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+h\right)-\cos\left(x+h\right)-\sin x+\cos x}{h}=\sin x+\cos x$$

>function H(x) &= sin(x)-cos(x);

Menghitung menggunakan perintah diff

>function df(x) &= diff(H(x),x)

```
sin(x) + cos(x)
```

5.4 Integral

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi integrate menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

>$showev('integrate(x^n,x))

$$\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=2$$

Gambar 5.19 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-114.png

```
Answering "Is n equal to -1?" with "no"
```

$$\int x^{n}\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

>$showev('integrate(1/(1+x),x))

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx=\log\left(x+1\right)$$

>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))

$$\int \frac{1}{x^{2}+1}\,dx=\arctan x$$

>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx=\arcsin x$$

>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))

$$\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=2$$

>plot2d("sin(x)",0,2*pi):

>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))

$$\int_{a}^{b}\sin x\,dx=\cos a-\cos b$$

>$showev('integrate(x^n,x,a,b))

```
Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"
```

$$\int_{a}^{b}x^{n}\,dx=\frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))

$$\int x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx=\frac{(2\,x+1)^{\frac{7}{2}}}{28}-\frac{(2\,x+1)^{\frac{5}{2}}}{10}+\frac{(2\,x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))

$$\int_0^2 x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx=\frac{2\,5^{\frac{5}{2}}}{21}-\frac{2}{105}$$

>$ratsimp(%)

$$\int_0^2 x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx=\frac{2\,5^{\frac{7}{2}}-2}{105}$$

>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^{sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi}2))

$$\int_0^{\pi^2}\frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\;dx=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\sin a+\left(e^{\pi}+1\right)\,\cos a$$

>$factor(%)

$$\int_0^{\pi^2}\frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\;dx=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\left(\sin a-\cos a\right)$$

>function map f(x) &= E^(-x^2)

```
                                        2
                                     - x
                                   E
```

>$showev('integrate(f(x),x))

$$\int e^{-x^2}\;dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(x\right)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

$$erf(x)=\int\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

$$\int_0^{\pi} f\left(r\ \left(t-\sin t\right)\right)\ dr\ \left(t-\sin t\right)$$

$$\int_{0}^{\pi}f\left(r\,\left(t-\sin t\right)\right)\;dr\,\left(t-\sin t\right)$$

Gambar 5.20 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-125.png

>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):

Integral tentu

$$\int_{0}^{\pi}f\left(r\,\left(t-\sin t\right)\right)\;dr\,\left(t-\sin t\right)$$

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva y=f(x) tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x

>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)

>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!

Hasilnya adalah:

maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi) = 0.1*sum(fx[i],i,1,length(fx))

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai f(x) untuk x = 0.1, 0.2, 0.3, . . . , 3.2.

>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT

```
0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)

Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))

$$\int_{0}^{\infty }{e^ {- x^2 }\;dx}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Tunjukkan kebenaran hasil di atas!

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

$$\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}=\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}$$

Gambar 5.21 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-129.png

>function f(x) &= x^x

```
 x
x
```

>$showev('integrate(f(x),x,0,1))

$$\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}=\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}$$

>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):

Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);

>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));

$$\int_{0}^{1}{\sin ^2\left(3\,x^5+7\right)\;dx}=0.7834935879025506$$

Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2

```
   2     5
sin  (3 x  + 7)
```

>integrate(f,0,1)

```
0.542581176074
```

>$showev('integrate(f(x),x,0,1))

$$\int_{0}^{1}{\sin ^2\left(3\,x^5+7\right)\;dx}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\,\sin 14\,\sin \left(\frac{\pi}{10}\right)}{10\,6^{\frac{1}{5}}}-\frac{\left(\left(6^{\frac{4}{5}}\,gamma\_incomplete\left(\frac{1}{5},6\,i\right)+6^{\frac{4}{5}}\,gamma\_incomplete\left(\right.\right.\right.}{}$$

$$\int_{0}^{1}x\,e^{-x}\,dx=1-2\,e^{-1}$$

Gambar 5.22 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-134.png

>$float(%)

$$\int_{0.0}^{1.0}\sin^2\left(3.0\,x^5+7.0\right)\,dx=0.09820784258795788-0.008333333333333333\,(0.3090169943749474\,(0.13673$$

>$showev('integrate(x*exp(-x),x,0,1)) // Integral tentu (eksak)

$$\int_{0}^{1}x\,e^{-x}\,dx=1-2\,e^{-1}$$

5.5 Aplikasi Integral Tentu

>plot2d("x^3-x",-0.1,1.1); plot2d("-x^2",>add); ...
> b=solve("x^3-x+x^2",0.5); x=linspace(0,b,200); xi=flipx(x); ...
> plot2d(x|xi,x^3-x|-xi^2,>filled,style="|",fillcolor=1,>add): // Plot daerah antara 2 kurva

>a=solve("x^3-x+x^2",0), b=solve("x^3-x+x^2",1) // absis titik-titik potong kedua kurva

```
0
0.61803398875
```

>integrate("(-x^2)-(x^3-x)",a,b) // luas daerah yang diarsir

```
0.0758191713542
```

Hasil tersebut akan kita bandingkan dengan perhitungan secara analitik.

>a &= solve((-x^2)-(x^3-x),x); $a // menentukan absis titik potong kedua kurva secara eksak

$$\left[x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2},x=\frac{\sqrt{5}-1}{2},x=0\right]$$

>$showev('integrate(-x^2-x^3+x,x,0,(sqrt(5)-1)/2)) // Nilai integral secara eksak

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-x^3-x^2+x\,dx=\frac{13-5^{\frac{3}{2}}}{24}$$

$$r(t)=1+\frac{\sin(3t)}{2},\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Gambar 5.23 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-140.png

>$float(%)

$$\int_{0.0}^{0.6180339887498949}-1.0\,x^3-1.0\,x^2+x\;dx=0.07581917135421037$$

5.6 Panjang Kurva

Hitunglah panjang kurva berikut ini dan luas daerah di dalam kurva tersebut.

$$\gamma(t)=(r(t)\cos(t),r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t)=1+\frac{\sin(3t)}{2},\quad 0\le t\le 2\pi.$$

>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
> plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5): // Kita gambar kurvanya terlebih dahulu

>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; $'r(t)=r(t)

$$r\left(t\right)=\frac{\sin\left(3\,t\right)}{2}+1$$

>function fx(t) &= r(t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)

$$fx\left(t\right)=\cos t\,\left(\frac{\sin\left(3\,t\right)}{2}+1\right)$$

>function fy(t) &= r(t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)

$$fy\left(t\right)=\sin t\,\left(\frac{\sin\left(3\,t\right)}{2}+1\right)$$

>function ds(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)$^{2+\mathrm{diff(fy(t),t)}}$2))): $'ds(t)=ds(t)

```
ds(t) = ds(t)
```

>$integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva

```
Maxima said:
Maxima encountered a Lisp error:

 Control stack exhausted (no more space for function call frames).
This is probably due to heavily nested or infinitely recursive function
calls, or a tail call that SBCL cannot or has not optimized away.

PROCEED WITH CAUTION.

Automatically continuing.
To enable the Lisp debugger set *debugger-hook* to nil.

Error in:
 $integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva ...
                           ^
```

Maxima gagal melakukan perhitungan eksak integral tersebut.

Berikut kita hitung integralnya secara umerik dengan perintah EMT.

>integrate("ds(x)",0,2*pi)

```
Syntax error in expression, or unfinished expression!
ds:
    useglobal; return 'ds(t) = ds(t)
Error in expression: ds(x)
 %mapexpression1:
    return expr(x,args());
Error in map.
 %evalexpression:
    if maps then return %mapexpression1(x,f$;args());
gauss:
    if maps then y=%evalexpression(f$,a+h-(h*xn)',maps;args());
adaptivegauss:
    t1=gauss(f$,c,c+h;args(),=maps);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
integrate:
    return adaptivegauss(f$,a,b,eps*1000;args(),=maps);
```

Spiral Logaritmik

$$x = e^{ax} \cos x, \; y = e^{ax} \sin x.$$

>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi):

>&kill(a) // hapus expresi a

$$x = e^{ax}\cos x,\ y = e^{ax}\sin x.$$

Gambar 5.24 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-145.png

$$\sqrt{a^2+1}\left(\frac{e^{2\pi a}}{a}-\frac{1}{a}\right)$$

Gambar 5.25 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-150.png

```
done
```

>function fx(t) &= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)

$$fx\left(t\right)=e^{a\,t}\,\cos t$$

>function fy(t) &= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)

$$fy\left(t\right)=e^{a\,t}\,\sin t$$

>function df(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)$^{2+\text{diff(fy(t),t)}}$2))); $'df(t)=df(t)

$$df\left(t\right)=\sqrt{a^2+1}\,e^{a\,t}$$

>S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral)

$$\sqrt{a^2+1}\,\left(\frac{e^{2\,\pi\,a}}{a}-\frac{1}{a}\right)$$

>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1

```
8.78817491636
```

Soal:

Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah K=2.pi.r.

Berikut adalah contoh menghitung panjang parabola.

>plot2d("x^2",xmin=-1,xmax=1):

>$showev('integrate(sqrt(1+diff(x$^{2,x)}$2),x,-1,1))

$$\int_{-1}^{1}{\sqrt{4\,x^2+1}\;dx}=\frac{\mathrm{asinh}\;2+2\,\sqrt{5}}{2}$$

>$float(%)

$$\int_{-1.0}^{1.0}\sqrt{4.0\,x^2+1.0}\,dx=2.957885715089195$$

Gambar 5.26 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-153.png

$$y^3-3\,x\,y+x^3$$

Gambar 5.27 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-156.png

$$\int_{-1.0}^{1.0}\sqrt{4.0\,x^2+1.0}\,dx=2.957885715089195$$

>x=-1:0.2:1; y=x^2; plot2d(x,y); ...
> plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):

Panjang tersebut dapat dihampiri dengan menggunakan jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola tersebut.

>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))

```
2.95191957027
```

Hasilnya mendekati panjang yang dihitung secara eksak. Untuk mendapatkan hampiran yang cukup akurat, jarak antar titik dapat diperkecil, misalnya 0.1, 0.05, 0.01, dan seterusnya. Cobalah Anda ulangi perhitungannya dengan nilai-nilai tersebut.

5.7 Koordinat Kartesius

Berikut diberikan contoh perhitungan panjang kurva menggunakan koordinat Kartesius. Kita akan hitung panjang kurva dengan persamaan implisit:

$$x^3+y^3-3xy=0.$$

>z &= x^3+y^3-3*x*y; $z

$$y^3-3\,x\,y+x^3$$

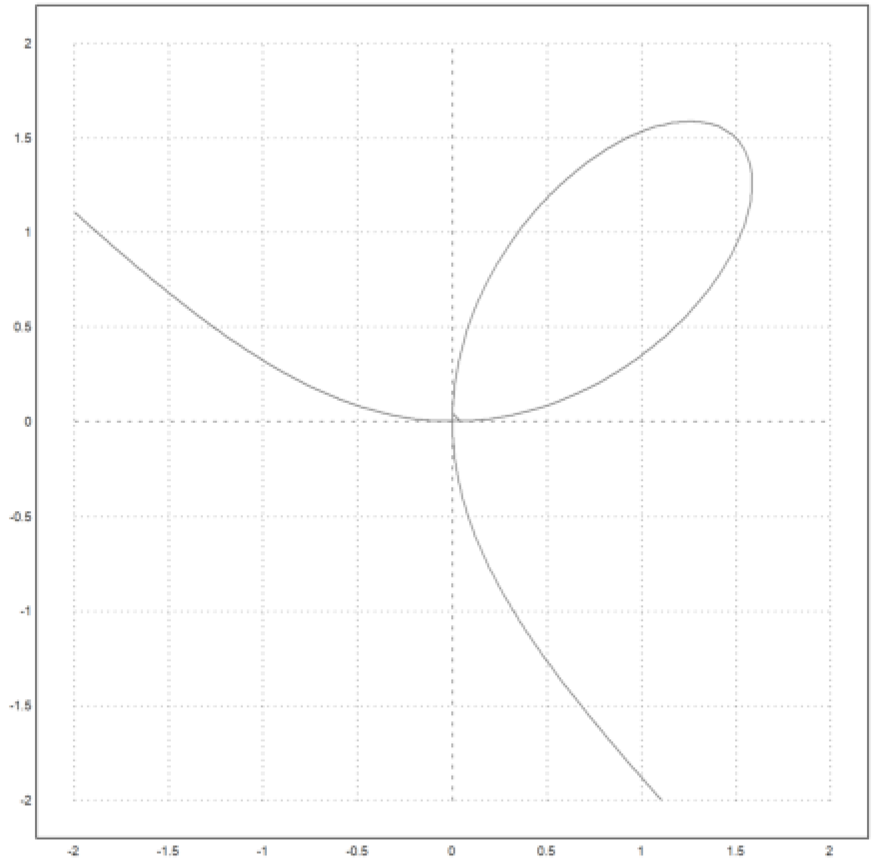
>plot2d(z,r=2,level=0,n=100):

Kita tertarik pada kurva di kuadran pertama.

>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):

Kita selesaikan persamaannya untuk x.

>$z with y=l*x, sol &= solve(%,x); $sol



Gambar 5.28 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-157.png

$$f(l)=\frac{3\,l}{l^3+1}$$

Gambar 5.29 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-161.png

$$\left[x=\frac{3\,l}{l^3+1},x=0\right]$$

$l^3\,x^3+x^3-3\,l\,x^2$

Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

>function f(l) &= rhs(sol[1]); $'f(l)=f(l)

$$f(l)=\frac{3\,l}{l^3+1}$$

Fungsi tersebut juga dapat digunaka untuk menggambar kurvanya. Ingat, bahwa fungsi tersebut adalah nilai x dan nilai y=l*x, yakni x=f(l) dan y=l*f(l).

>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5):

Elemen panjang kurva adalah:

$$ds=\sqrt{f'(l)^2+(lf'(l)+f(l))^2}.$$

>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)^2+diff(l*f(l),l)^2)); $'ds(l)=ds(l)

$$ds(l)=\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}$$

>$integrate(ds(l),l,0,1)

$$\int_{0}^{1}{\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}\;dl}$$

Integral tersebut tidak dapat dihitung secara eksak menggunakan Maxima. Kita hitung integral etrsebut secara numerik dengan Euler. Karena kurva simetris, kita hitung untuk nilai variabel integrasi dari 0 sampai 1, kemudian hasilnya dikalikan 2.

>2*integrate("ds(x)",0,1)

```
4.91748872168
```

>2*romberg(&ds(x),0,1)// perintah Euler lain untuk menghitung nilai hampiran integral yang sama

```
4.91748872168
```

$$\int_{0}^{1}{\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}\;dl}$$

Gambar 5.30 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-165.png

Perhitungan di datas dapat dilakukan untuk sebarang fungsi x dan y dengan mendefinisikan fungsi EMT, misalnya kita beri nama panjangkurva. Fungsi ini selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...

```
ds=mxm("sqrt(diff(@fx,x)^2+diff(@fy,x)^2)");
return romberg(ds,a,b);
endfunction
```

>panjangkurva("x","x^2",-1,1) // cek untuk menghitung panjang kurva parabola sebelumnya

```
2.95788571509
```

Bandingkan dengan nilai eksak di atas.

>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)"),0,1) // cek contoh terakhir, bandingkan hasilnya!

```
4.91748872168
```

Kita hitung panjang spiral Archimides berikut ini dengan fungsi tersebut.

>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):

>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)

```
21.2562941482
```

Berikut kita definisikan fungsi yang sama namun dengan Maxima, untuk perhitungan eksak.

>&kill(ds,x,fx,fy)

```
                              done
```

>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)$^{2+diff(fy,x)}$2)

```
                  2              2
       sqrt(diff  (fy, x) + diff  (fx, x))
```

$$\frac{\operatorname{asinh}\,(2\,\pi)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

Gambar 5.31 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-169.png

>sol &= ds(x*cos(x),x*sin(x)); $sol // Kita gunakan untuk menghitung panjang kurva terakhir di atas

$$\sqrt{\left(\cos x-x\,\sin x\right)^2+\left(\sin x+x\,\cos x\right)^2}$$

>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()

$$\frac{\operatorname{asinh}\,(2\,\pi)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

$\sqrt{x^2+1}$

```
21.2562941482
```

Hasilnya sama dengan perhitungan menggunakan fungsi EMT.

Berikut adalah contoh lain penggunaan fungsi Maxima tersebut.

>plot2d("3*x^2-1","3*x^3-1",xmin=-1/sqrt(3),xmax=1/sqrt(3),square=1):

>sol &= radcan(ds(3*x^2-1,3*x^3-1)); $sol

$$3\,x\,\sqrt{9\,x^2+4}$$

>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%) // panjang kurva di atas

$$6.0\,\int_{0.0}^{0.5773502691896258}{x\,\sqrt{9.0\,x^2+4.0}\;dx}=2.337835372767141$$

$3\,\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}{x\,\sqrt{9\,x^2+4}\;dx}=3\,\left(\frac{7^{\frac{3}{2}}}{27}-\frac{8}{27}\right)$

5.8 Sikloid

Berikut kita akan menghitung panjang kurva lintasan (sikloid) suatu titik pada lingkaran yang berputar ke kanan pada permukaan datar. Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah r. Posisi titik pusat lingkaran pada saat t adalah:

$$(rt, r).$$

Misalkan posisi titik pada lingkaran tersebut mula-mula (0,0) dan posisinya pada saat t adalah:

$$(r(t-\sin(t)), r(1-\cos(t))).$$

Berikut kita plot lintasan tersebut dan beberapa posisi lingkaran ketika t=0, t=pi/2, t=r*pi.

>x &= r*(t-sin(t))

```
r (t - sin(t))
```

>y &= r*(1-cos(t))

```
r (1 - cos(t))
```

Berikut kita gambar sikloid untuk r=1.

>ex &= x-sin(x); ey &= 1-cos(x); aspect(1);

>plot2d(ex,ey,xmin=0,xmax=4pi,square=1); ...
> plot2d("2+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
> plot2d([2,ex(2)],[1,ey(2)],color=red,>add); ...
> plot2d(ex(2),ey(2),>points,>add,color=red); ...
> plot2d("2pi+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
> plot2d([2pi,ex(2pi)],[1,ey(2pi)],color=red,>add); ...
> plot2d(ex(2pi),ey(2pi),>points,>add,color=red):

```
Variable or function t not found.
Error in expression: r*(t-sin(t))-sin(r*(t-sin(t)))
adaptiveeval:
    sx=f$(t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n;args());
```

Berikut dihitung panjang lintasan untuk 1 putaran penuh. (Jangan salah menduga bahwa panjang lintasan 1 putaran penuh sama dengan keliling lingkaran!)

>ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds) // elemen panjang kurva sikloid

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found r*(t-sin(t))
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
ds &amp;= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds ...
                                            ^
```

>ds &= trigsimp(ds); $ds

$$ds$$

>$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid satu putaran penuh

```
Maxima said:
defint: variable of integration must be a simple or subscripted variable.
defint: found r*(t-sin(t))
#0: showev(f='integrate(ds,r*(t-sin(t)),0,2*pi))
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid sat ...
                                  ^
```

>integrate(mxm("ds"),0,2*pi) // hitung secara numerik

```
Illegal function result in map.
 %evalexpression:
    if maps then return %mapexpression1(x,f$;args());
gauss:
    if maps then y=%evalexpression(f$,a+h-(h*xn)',maps;args());
adaptivegauss:
    t1=gauss(f$,c,c+h;args(),=maps);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
integrate:
    return adaptivegauss(f$,a,b,eps*1000;args(),=maps);
```

>romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik

```
Wrong argument!

Cannot combine a symbolic expression here.
Did you want to create a symbolic expression?
Then start with &amp;.

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
romberg:
    if cols(y)==1 then return y*(b-a); endif;
Error in:
romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik ...
                          ^
```

Perhatikan, seperti terlihat pada gambar, panjang sikloid lebih besar daripada keliling lingkarannya, yakni:

$$2\pi.$$

5.9 Kurvatur (Kelengkungan) Kurva

image: Osculating.png

Aslinya, kelengkungan kurva diferensiabel (yakni, kurva mulus yang tidak lancip) di titik P didefinisikan melalui lingkaran oskulasi (yaitu, lingkaran yang melalui titik P dan terbaik memperkirakan, paling banyak menyinggung kurva di sekitar P). Pusat dan radius kelengkungan kurva di P adalah pusat dan radius lingkaran oskulasi. Kelengkungan adalah kebalikan dari radius kelengkungan:

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

dengan R adalah radius kelengkungan. (Setiap lingkaran memiliki kelengkungan ini pada setiap titiknya, dapat diartikan, setiap lingkaran berputar 2pi sejauh 2piR.)

Definisi ini sulit dimanipulasi dan dinyatakan ke dalam rumus untuk kurva umum. Oleh karena itu digunakan definisi lain yang ekivalen.

5.10 Definisi Kurvatur dengan Fungsi Parametrik Panjang Kurva

Setiap kurva diferensiabel dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik terhadap panjang kurva s:

$$\gamma(s) = (x(s),\ y(s)),$$

dengan x dan y adalah fungsi riil yang diferensiabel, yang memenuhi:

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 1.$$

Ini berarti bahwa vektor singgung

$$\mathbf{T}(s) = (x'(s),\ y'(s))$$

memiliki norm 1 dan merupakan vektor singgung satuan.

Apabila kurvanya memiliki turunan kedua, artinya turunan kedua x dan y ada, maka T'(s) ada. Vektor ini merupakan normal kurva yang arahnya menuju pusat kurvatur, norm-nya merupakan nilai kurvatur (kelengkungan):

$$\mathbf{T}(s) = \gamma'(s),$$
$$\mathbf{T}^2(s) = 1$$
$$text(konstanta) \Rightarrow \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0$$
$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\gamma''(s)\| = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}.$$

Nilai

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

disebut jari-jari (radius) kelengkungan kurva.

Bilangan riil

$$k(s) = \pm\kappa(s)$$

disebut nilai kelengkungan bertanda.

Contoh:

Akan ditentukan kurvatur lingkaran

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t.$$

>fx &= r*cos(t); fy &=r*sin(t);

>&assume(t>0,r>0); s &=integrate(sqrt(diff(fx,t)$^{2+\text{diff(fy,t)}}$2),t,0,t); s // elemen panjang kurva, panjang busur lingkaran (s)

```
r t
```

>&kill(s); fx &= r*cos(s/r); fy &=r*sin(s/r); // definisi ulang persamaan parametrik terhadap s dengan substitusi t=s/r

>k &= trigsimp(sqrt(diff(fx,s,2)$^{2+\text{diff(fy,s,2)}}$2)); $k // nilai kurvatur lingkaran dengan menggunakan definisi di atas

$$\frac{1}{r}$$

Untuk representasi parametrik umum, misalkan

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

merupakan persamaan parametrik untuk kurva bidang yang terdiferensialkan dua kali. Kurvatur untuk kurva tersebut didefinisikan sebagai

$$
\begin{aligned}
\kappa = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad & (\phi \text{ adalah sudut kemiringan garis singgung dan } s \text{ adalah panjang kurva}) \\
= \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}. &
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, pembilang pada persamaan di atas dapat dicari sebagai berikut.

$$
\sec^2\phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan\phi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2}.
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{\sec^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\
&= \frac{1}{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\
&= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.
\end{aligned}
$$

Jadi, rumus kurvatur untuk kurva parametrik

$$
x = x(t),\ y = y(t)
$$

adalah

$$
\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}.
$$

Jika kurvanya dinyatakan dengan persamaan parametrik pada koordinat kutub

$$
x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta,
$$

maka rumus kurvaturnya adalah

$$
\kappa(\theta) = \frac{r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)}{\left(r'(\theta)^2 + r'(\theta)^2\right)^{3/2}}.
$$

(Silakan Anda turunkan rumus tersebut!)

Contoh:

Lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari r dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik

$$
x = r\cos t,\ y = r\sin t.
$$

Nilai kelengkungan lingkaran tersebut adalah

$$\kappa(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{3/2}}=\frac{r^2}{r^3}=\frac{1}{r}.$$

Hasil cocok dengan definisi kurvatur suatu kelengkungan.

Kurva

$$y=f(x)$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan parametrik

$$x=t,\ y=f(t),\ \text{ dengan } x'(t)=1,\ x''(t)=0,$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa(t)=\frac{y''(t)}{(1+y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Contoh:

Akan ditentukan kurvatur parabola

$$y=ax^2+bx+c.$$

>function f(x) &= a*x^2+b*x+c; $y=f(x)

$$y=a\,x^2+b\,x+c$$

>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan parabola

$$k\left(x\right)=\frac{2\,a}{\left(\left(2\,a\,x+b\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

>function f(x) &= x^2+x+1; $y=f(x) // akan kita plot kelengkungan parabola untuk a=b=c=1

$$y=x^2+x+1$$

>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan parabola

$$k\left(x\right)=\frac{2}{\left(\left(2\,x+1\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Berikut kita gambar parabola tersebut beserta kurva kelengkungan, kurva jari-jari kelengkungan dan salah satu lingkaran oskulasi di titik puncak parabola. Perhatikan, puncak parabola dan jari-jari lingkaran oskulasi di puncak parabola adalah

$$(-1/2, 3/4),\ 1/k(2) = 1/2,$$

Gambar 5.32 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-204.png

$$(-1/2, 3/4),\ 1/k(2) = 1/2,$$

sehingga pusat lingkaran oskulasi adalah (-1/2, 5/4).

>plot2d(["f(x)", "k(x)"],-2,1, color=[blue,red]); plot2d("1/k(x)",-1.5,1,color=green,>add); ...
> plot2d("-1/2+1/k(-1/2)*cos(x)","5/4+1/k(-1/2)*sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue):

Untuk kurva yang dinyatakan dengan fungsi implisit

$$F(x, y) = 0$$

dengan turunan-turunan parsial

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial F}{\partial y},\ F_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

berlaku

$$F_x dx + F_y dy = 0 \text{ atau } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y},$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan sendiri!)

Contoh 1:

Parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan implisit

$$ax^2 + bx + c - y = 0.$$

>function F(x,y) &=a*x^2+b*x+c-y; $F(x,y)

$$-y + a\,x^2 + b\,x + c$$

>Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y),y), Fxy &=diff(diff(F(x,y),x),y), Fyy &=diff(F(x,y),y,2)

```
2 a x + b

2 a

- 1

0

0
```

>function k(x) &= (Fy$^{2*Fxx-2*Fx*Fy*Fxy+Fx}$2*Fyy)/(Fx^{2+Fy}2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kurvatur parabola tersebut

$$k\left(x\right)=\frac{2\,a}{\left(\left(2\,a\,x+b\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Hasilnya sama dengan sebelumnya yang menggunakan persamaan parabola biasa.

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva y= f(x) yang diputar mengelilingi sumbu x dari x=a sampai x=b, yakni

$$V=\int_a^b \pi(f(x)^2\,dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)

- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva y=f(x) dari x=a sampai x=b dengan menggunakan rumus:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)

- Apabila fungsi dinyatakan dalam koordinat kutub x=f(r,t), y=g(r,t), r=h(t), x=a bersesuaian dengan t=t0 dan x=b bersesuaian dengan t=t1, maka rumus di atas akan menjadi:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

- Pilih beberapa kurva menarik (selain lingkaran dan parabola) dari buku kalkulus. Nyatakan setiap kurva tersebut dalam bentuk: * a. koordinat Kartesius (persamaan y=f(x)) * b. koordinat kutub (r=r(theta)) * c. persamaan parametrik x=x(t), y=y(t) * d. persamaan implit F(x,y)=0

- Tentukan kurvatur masing-masing kurva dengan menggunakan keempat representasi tersebut (hasilnya harus sama).
- Gambarlah kurva asli, kurva kurvatur, kurva jari-jari lingkaran oskulasi, dan salah satu lingkaran oskulasinya.

1. Daerah yang dibatasi oleh kurva

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

sumbu x, garis x=1 dan garis x=4 diputar mengelilingi sumbu y. Tentukan volume benda yang terbentuk dan gambarkan grafiknya

>function f(x) &= 1/sqrt(x); $f(x)

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Volume benda yang terbentuk adalah

>$showev('integrate(2*pi*(f(x))^2,x,1,4))

$$2\,\pi\,\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx = 2\,\pi\,\log 4$$

Gambar ilustrasi dari benda yang terbentuk

>plot3d("f(x)",2,0,2,rotate=2):

$$2\,\pi\,\int_{1}^{4}{\frac{1}{x}\;dx}=2\,\pi\,\log 4$$

Gambar 5.33 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-219.png

2. Hitunglah panjang kurva

$$y=\sqrt{4-x^2}$$

untuk x=0 sampai x=2

>function f(x)&= \sqrt(4-x^2); $f(x)

$$\sqrt{4-x^2}$$

>function df(x) &= diff(f(x),x);$df(x)

$$-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

>$showev('integrate(sqrt((1+df(x)^2)),x,0,2))

$$\int_{0}^{2}{\sqrt{\frac{x^2}{4-x^2}+1}\;dx}=\pi$$

>$float(%)

$$\int_{0.0}^{2.0}{\sqrt{\frac{x^2}{4.0-1.0\,x^2}+1.0}\;dx}=3.141592653589793$$

3. Tentukan integral tentu dengan batas [-1,3] dari fungsi berikut

$$f(x)=\frac{x}{10-x^2}$$

>function map f(x) &= (x)/(10-x^2); $f(x)

$$\frac{x}{10-x^2}$$

>$showev('integrate(f(x),x,-1,3)), $float(%)

$$\int_{-1.0}^{3.0}{\frac{x}{10.0-1.0\,x^2}\;dx}=1.09861228866811$$

$\int_{-1}^{3}{\frac{x}{10-x^2}\;dx}=\frac{\log 9}{2}$

4. Tentukan turunan fungsi dibawah ini terhadap x dan hitung integral dengan batas x=0 sampai x=1

$$y = \frac{1 - x^2}{(x+1)^{2/3}}$$

>function map f(x) &= (1-x$^{2)/(x+1)}$(2/3); $f(x)

$$\frac{1 - x^2}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

Turunan fungsi terhadap x

>function df(x) &= diff(f(x),x); $df(x)

$$-\frac{2\,x}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2\,(1 - x^2)}{3\,(x+1)^{\frac{5}{3}}}$$

Integral dengan batas x=0 sampai x=1

>$showev('integrate(f(x),x,0,1))

$$\int_0^1 \frac{1 - x^2}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \frac{9\,2^{\frac{1}{3}}}{7} - \frac{15}{14}$$

5. Tentukan volume benda putar yang terbentuk apabila y diputar mengelilingi sumbu x

$$y = x^{3/2}$$

antara x=1 dan x=3

>function f(x)&=x^(3/2); $f(x)

$$x^{\frac{3}{2}}$$

Volume benda putarnya adalah

>$showev('integrate(pi*(f(x))^2,x,1,3))

$$\pi \int_1^3 x^3\,dx = 20\,\pi$$

Gambar grafik

>plot3d("f(x)",2,0,2,rotate=2):

$$\pi \int_{1}^{3} x^3 \, dx = 20\,\pi$$

Gambar 5.34 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-236.png

5.11 Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh pengguanaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua “:”);
- menggunakan perintah “sequence” dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah “iterate” atau “niterate”;
- menggunakan fungsi Maxima “create_list” atau “makelist” untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni: - sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan - cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan - differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) “sum”. Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

>1:10 // barisan sederhana

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

>1:2:30

```
[1,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29]
```

$$x_{k+1} = g(x_k),\ x_0 = x_0, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

Gambar 5.35 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-238.png

5.12 Iterasi dan Barisan

EMT menyediakan fungsi iterate("g(x)", x0, n) untuk melakukan iterasi

$$x_{k+1} = g(x_k),\ x_0 = x_0, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

Berikut ini disajikan contoh-contoh penggunaan iterasi dan rekursi dengan EMT. Contoh pertama menunjukkan pertumbuhan dari nilai awal 1000 dengan laju pertambahan 5%, selama 10 periode.

>q=1.05; iterate("x*q",1000,n=10)'

```
    1000
    1050
  1102.5
 1157.63
 1215.51
 1276.28
  1340.1
  1407.1
 1477.46
 1551.33
 1628.89
```

Contoh berikutnya memperlihatkan bahaya menabung di bank pada masa sekarang! Dengan bunga tabungan sebesar 6% per tahun atau 0.5% per bulan dipotong pajak 20%, dan biaya administrasi 10000 per bulan, tabungan sebesar 1 juta tanpa diambil selama sekitar 10 tahunan akan habis diambil oleh bank!

>r=0.005; plot2d(iterate("(1+0.8*r)*x-10000",1000000,n=130)):

Silakan Anda coba-coba, dengan tabungan minimal berapa agar tidak akan habis diambil oleh bank dengan ketentuan bunga dan biaya administrasi seperti di atas.

Berikut adalah perhitungan minimal tabungan agar aman di bank dengan bunga sebesar r dan biaya administrasi a, pajak bunga 20%.

>$solve(0.8*r*A-a,A), $% with [r=0.005, a=10]

$$[A = 2500.0]$$

Berikut didefinisikan fungsi untuk menghitung saldo tabungan, kemudian dilakukan iterasi.

>function saldo(x,r,a) := round((1+0.8*r)*x-a,2);

$$\left[A=\frac{5\,a}{4\,r}\right]$$

Gambar 5.36 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-240.png

>iterate({{"saldo",0.005,10}},1000,n=6)

```
[1000,  994,  987.98,  981.93,  975.86,  969.76,  963.64]
```

>iterate({{"saldo",0.005,10}},2000,n=6)

```
[2000,  1998,  1995.99,  1993.97,  1991.95,  1989.92,  1987.88]
```

>iterate({{"saldo",0.005,10}},2500,n=6)

```
[2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500]
```

Tabungan senilai 2,5 juta akan aman dan tidak akan berubah nilai (jika tidak ada penarikan), sedangkan jika tabungan awal kurang dari 2,5 juta, lama kelamaan akan berkurang meskipun tidak pernah dilakukan penarikan uang tabungan.

>iterate({{"saldo",0.005,10}},3000,n=6)

```
[3000,  3002,  3004.01,  3006.03,  3008.05,  3010.08,  3012.12]
```

Tabungan yang lebih dari 2,5 juta baru akan bertambah jika tidak ada penarikan.

Untuk barisan yang lebih kompleks dapat digunakan fungsi "sequence()". Fungsi ini menghitung nilai-nilai x[n] dari semua nilai sebelumnya, x[1],...,x[n-1] yang diketahui.

Berikut adalah contoh barisan Fibonacci.

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1$$

>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15)

```
[1,  1,  2,  3,  5,  8,  13,  21,  34,  55,  89,  144,  233,  377,  610]
```

Barisan Fibonacci memiliki banyak sifat menarik, salah satunya adalah akar pangkat ke-n suku ke-n akan konvergen ke pecahan emas:

>$'(1+sqrt(5))/2=float((1+sqrt(5))/2)

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033988749895$$

Gambar 5.37 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-243.png

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033988749895$$

>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],250)^(1/(1:250))):

Barisan yang sama juga dapat dihasilkan dengan menggunakan loop.

>x=ones(500); for k=3 to 500; x[k]=x[k-1]+x[k-2]; end;

Rekursi dapat dilakukan dengan menggunakan rumus yang tergantung pada semua elemen sebelumnya. Pada contoh berikut, elemen ke-n merupakan jumlah (n-1) elemen sebelumnya, dimulai dengan 1 (elemen ke-1). Jelas, nilai elemen ke-n adalah 2^(n-2), untuk n=2, 4, 5, ...

>sequence("sum(x)",1,10)

```
[1,  1,  2,  4,  8,  16,  32,  64,  128,  256]
```

Selain menggunakan ekspresi dalam x dan n, kita juga dapat menggunakan fungsi.

Pada contoh berikut, digunakan iterasi

$$x_n = A \cdot x_{n-1},$$

dengan A suatu matriks 2x2, dan setiap x[n] merupakan matriks/vektor 2x1.

>A=[1,1;1,2]; function suku(x,n) := A.x[,n-1]

>sequence("suku",[1;1],6)

```
Real 2 x 6 matrix

            1             2             5            13       ...
            1             3             8            21       ...
```

Hasil yang sama juga dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi perpangkatan matriks "matrixpower()". Cara ini lebih cepat, karena hanya menggunakan perkalian matriks sebanyak log_2(n).

$$x_n = A.x_{n-1} = A^2.x_{n-2} = A^3.x_{n-3} = ... = A^{n-1}.x_1.$$

>sequence("matrixpower(A,n).[1;1]",1,6)

$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

Gambar 5.38 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-247.png

```
Real 2 x 6 matrix

            1             5             13             34      ...
            1             8             21             55      ...
```

5.13 Spiral Theodorus

image: Spiral_of_Theodorus.png

Spiral Theodorus (spiral segitiga siku-siku) dapat digambar secara rekursif. Rumus rekursifnya adalah:

$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

yang menghasilkan barisan bilangan kompleks.

>function g(n) := 1+I/sqrt(n)

Rekursinya dapat dijalankan sebanyak 17 untuk menghasilkan barisan 17 bilangan kompleks, kemudian digambar bilangan-bilangan kompleksnya.

>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,17); plot2d(x,r=3.5); textbox(latex("Spiral\ Theodorus"),0.4):

Selanjutnya dihubungan titik 0 dengan titik-titik kompleks tersebut menggunakan loop.

>for i=1:cols(x); plot2d([0,x[i]],>add); end:

>

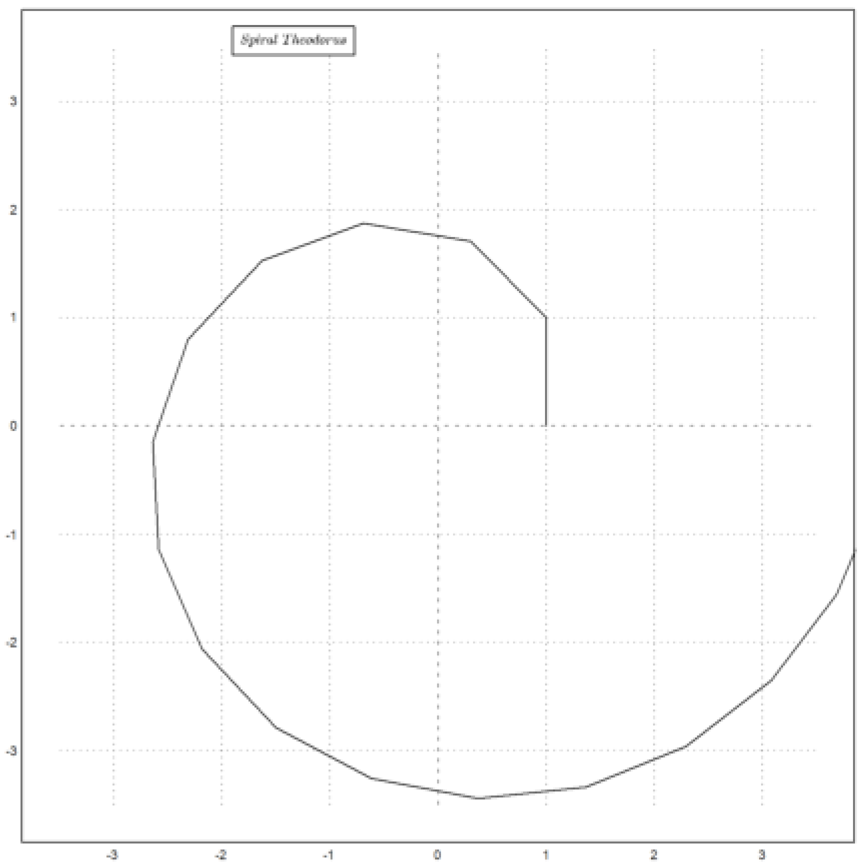
Spiral tersebut juga dapat didefinisikan menggunakan fungsi rekursif, yang tidak memmerlukan indeks dan bilangan kompleks. Dalam hal ini diigunakan vektor kolom pada bidang.

>function gstep (v) ...

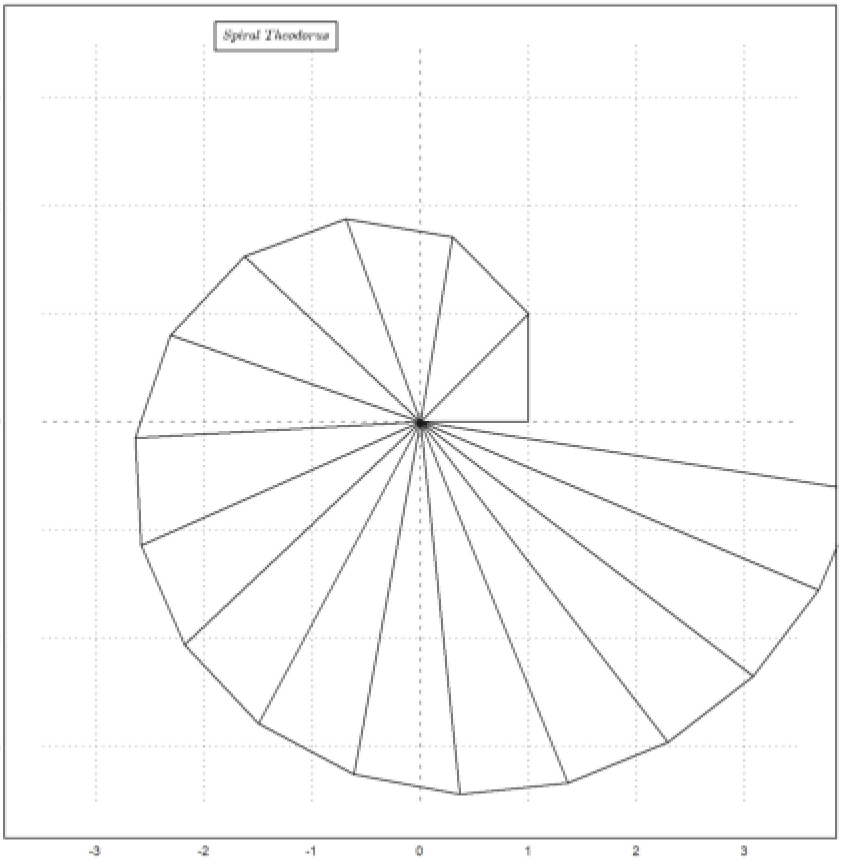
```
w=[-v[2];v[1]];
return v+w/norm(w);
endfunction
```

Jika dilakukan iterasi 16 kali dimulai dari [1;0] akan didapatkan matriks yang memuat vektor-vektor dari setiap iterasi.

>x=iterate("gstep",[1;0],16); plot2d(x[1],x[2],r=3.5,>points):



Gambar 5.39 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-248.png



Gambar 5.40 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-249.png

5.14 Kekonvergenan

Terkadang kita ingin melakukan iterasi sampai konvergen. Apabila iterasinya tidak konvergen setelah ditunggu lama, Anda dapat menghentikannya dengan menekan tombol [ESC].

>iterate("cos(x)",1) // iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan x(0)=1.

```
0.739085133216
```

Iterasi tersebut konvergen ke penyelesaian persamaan

$$x = \cos(x).$$

Iterasi ini juga dapat dilakukan pada interval, hasilnya adalah barisan interval yang memuat akar tersebut.

>hasil := iterate("cos(x)",$_{1,2}$) //iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan interval awal (1, 2)

```
~0.739085133211,0.7390851332133~
```

Jika interval hasil tersebut sedikit diperlebar, akan terlihat bahwa interval tersebut memuat akar persamaan x=cos(x).

>h=expand(hasil,100), cos(h) << h

```
~0.73908513309,0.73908513333~
1
```

Iterasi juga dapat digunakan pada fungsi yang didefinisikan.

>function f(x) := (x+2/x)/2

Iterasi x(n+1)=f(x(n)) akan konvergen ke akar kuadrat 2.

>iterate("f",2), sqrt(2)

```
1.41421356237
1.41421356237
```

Jika pada perintah iterate diberikan tambahan parameter n, maka hasil iterasinya akan ditampilkan mulai dari iterasi pertama sampai ke-n.

>iterate("f",2,5)

```
[2,  1.5,  1.41667,  1.41422,  1.41421,  1.41421]
```

Untuk iterasi ini tidak dapat dilakukan terhadap interval.

>niterate("f",$_{1,2}$,5)

```
[ ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~ ]
```

Perhatikan, hasil iterasinya sama dengan interval awal. Alasannya adalah perhitungan dengan interval bersifat terlalu longgar. Untuk meingkatkan perhitungan pada ekspresi dapat digunakan pembagian intervalnya, menggunakan fungsi ieval().

>function s(x) := ieval("(x+2/x)/2",x,10)

Selanjutnya dapat dilakukan iterasi hingga diperoleh hasil optimal, dan intervalnya tidak semakin mengecil. Hasilnya berupa interval yang memuat akar persamaan:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Satu-satunya solusi adalah

$$x = \sqrt{2}.$$

>iterate("s",$_{1,2}$)

```
~1.41421356236,1.41421356239~
```

Fungsi "iterate()" juga dapat bekerja pada vektor. Berikut adalah contoh fungsi vektor, yang menghasilkan rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri.

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right)$$

Iterasi ke-n disimpan pada vektor kolom x[n].

>function g(x) := [(x[1]+x[2])/2;sqrt(x[1]*x[2])]

Iterasi dengan menggunakan fungsi tersebut akan konvergen ke rata-rata aritmetika dan geometri dari nilai-nilai awal.

>iterate("g",[1;5])

```
      2.60401
      2.60401
```

Hasil tersebut konvergen agak cepat, seperti kita cek sebagai berikut.

>iterate(“g”,[1;5],4)

```
            1            3      2.61803      2.60403      2.60401
            5      2.23607      2.59002      2.60399      2.60401
```

Iterasi pada interval dapat dilakukan dan stabil, namun tidak menunjukkan bahwa limitnya pada batas-batas yang dihitung.

>iterate(“g”,[1;5],4)

```
Interval 2 x 5 matrix

~0.99999999999999778,1.00000000000000022~     ...
~4.99999999999999911,5.00000000000000089~     ...
```

Iterasi berikut konvergen sangat lambat.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

>iterate(“sqrt(x)”,2,10)

```
[2,  1.41421,  1.18921,  1.09051,  1.04427,  1.0219,  1.01089,
1.00543,  1.00271,  1.00135,  1.00068]
```

Kekonvergenan iterasi tersebut dapat dipercepatdengan percepatan Steffenson:

>steffenson(“sqrt(x)”,2,10)

```
[1.04888,  1.00028,  1,  1]
```

5.15 Iterasi menggunakan Loop yang ditulis Langsung

Berikut adalah beberapa contoh penggunaan loop untuk melakukan iterasi yang ditulis langsung pada baris perintah.

>x=2; repeat x=(x+2/x)/2; until x^2~=2; end; x,

```
1.41421356237
```

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

Gambar 5.41 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-255.png

Penggabungan matriks menggunakan tanda "|" dapat digunakan untuk menyimpan semua hasil iterasi.

>v=[1]; for i=2 to 8; v=v|(v[i-1]*i); end; v,

```
[1,  2,  6,  24,  120,  720,  5040,  40320]
```

hasil iterasi juga dapat disimpan pada vektor yang sudah ada.

>v=ones(1,100); for i=2 to cols(v); v[i]=v[i-1]*i; end; ...
> plot2d(v,logplot=1); textbox(latex(&log(n)),x=0.5):

>A =[0.5,0.2;0.7,0.1]; b=[2;2]; ...
> x=[1;1]; repeat xnew=A.x-b; until all(xnew~=x); x=xnew; end; ...
> x,

```
     -7.09677
     -7.74194
```

5.16 Iterasi di dalam Fungsi

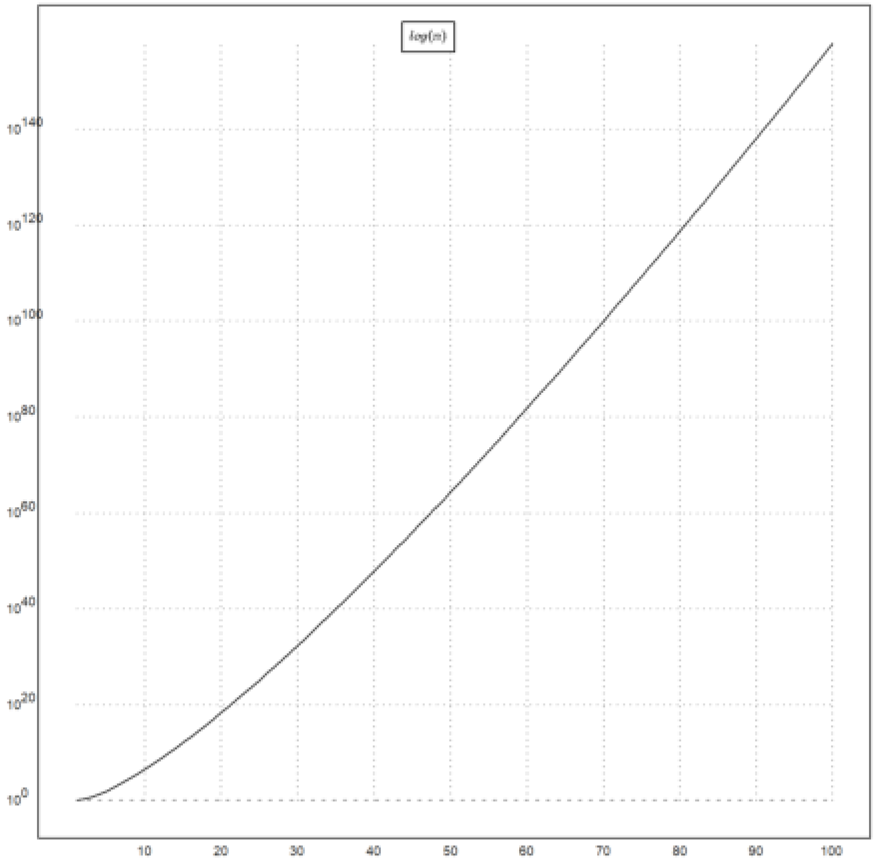
Fungsi atau program juga dapat menggunakan iterasi dan dapat digunakan untuk melakukan iterasi. Berikut adalah beberapa contoh iterasi di dalam fungsi.

Contoh berikut adalah suatu fungsi untuk menghitung berapa lama suatu iterasi konvergen. Nilai fungsi tersebut adalah hasil akhir iterasi dan banyak iterasi sampai konvergen.

>function map hiter(f$,x0) ...

```
x=x0;
maxiter=0;
repeat
  xnew=f$(x);
  maxiter=maxiter+1;
  until xnew~=x;
  x=xnew;
end;
return maxiter;
endfunction
```

Misalnya, berikut adalah iterasi untuk mendapatkan hampiran akar kuadrat 2, cukup cepat, konvergen pada iterasi ke-5, jika dimulai dari hampiran awal 2.



Gambar 5.42 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-256.png

>hiter("(x+2/x)/2",2)

```
5
```

Karena fungsinya didefinisikan menggunakan "map". maka nilai awalnya dapat berupa vektor.

>x=1.5:0.1:10; hasil=hiter("(x+2/x)/2",x); ...
> plot2d(x,hasil):

Dari gambar di atas terlihat bahwa kekonvergenan iterasinya semakin lambat, untuk nilai awal semakin besar, namun penambahnnya tidak kontinu. Kita dapat menemukan kapan maksimum iterasinya bertambah.

>hasil[1:10]

```
[4,  5,  5,  5,  5,  5,  6,  6,  6,  6]
```

>x[nonzeros(differences(hasil))]

```
[1.5,  2,  3.4,  6.6]
```

$$x - \frac{x^3 - 1}{3\,x^2}$$

Gambar 5.43 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-258.png

maksimum iterasi sampai konvergen meningkat pada saat nilai awalnya 1.5, 2, 3.4, dan 6.6.

Contoh berikutnya adalah metode Newton pada polinomial kompleks berderajat 3.

>p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton

$$x - \frac{x^3 - 1}{3\,x^2}$$

Selanjutnya didefinisikan fungsi untuk melakukan iterasi (aslinya 10 kali).

>function iterasi(f$,x,n=10) ...

```
loop 1 to n; x=f$(x); end;
return x;
endfunction
```

Kita mulai dengan menentukan titik-titik grid pada bidang kompleksnya.

>r=1.5; x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z);

Berikut adalah akar-akar polinomial di atas.

>z=&solve(p)()

```
[ -0.5+0.866025i,  -0.5-0.866025i,  1+0i  ]
```

Untuk menggambar hasil iterasinya, dihitung jarak dari hasil iterasi ke-10 ke masing-masing akar, kemudian digunakan untuk menghitung warna yang akan digambar, yang menunjukkan limit untuk masing-masing nilai awal.

Fungsi plotrgb() menggunakan jendela gambar terkini untuk menggambar warna RGB sebagai matriks.

>C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1)); ...
> plot2d(none,-r,r,-r,r); plotrgb(C):

5.17 Iterasi Simbolik

Seperti sudah dibahas sebelumnya, untuk menghasilkan barisan ekspresi simbolik dengan Maxima dapat digunakan fungsi makelist().

>&powerdisp:true // untuk menampilkan deret pangkat mulai dari suku berpangkat terkecil

$$\left[1+x,1+x+\frac{x^2}{2},1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]$$

Gambar 5.44 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-260.png

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

Gambar 5.45 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-262.png

```
true
```

>deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // barisan deret Taylor untuk e^x

$$\left[1+x,1+x+\frac{x^2}{2},1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]$$

Untuk mengubah barisan deret tersebut menjadi vektor string di EMT digunakan fungsi mxm2str(). Selanjutnya, vektor string/ekspresi hasilnya dapat digambar seperti menggambar vektor eskpresi pada EMT.

>plot2d("exp(x)",0,3); // plot fungsi aslinya, e^x

>plot2d(mxm2str("deret"),>add,color=4:6): // plot ketiga deret taylor hampiran fungsi tersebut

Selain cara di atas dapat juga dengan cara menggunakan indeks pada vektor/list yang dihasilkan.

>$deret[3]

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

>plot2d(["exp(x)",&deret[1],&deret[2],&deret[3]],0,3,color=1:4):

>$sum(sin(k*x)/k,k,1,5)

$$\sin x+\frac{\sin\left(2\,x\right)}{2}+\frac{\sin\left(3\,x\right)}{3}+\frac{\sin\left(4\,x\right)}{4}+\frac{\sin\left(5\,x\right)}{5}$$

Berikut adalah cara menggambar kurva

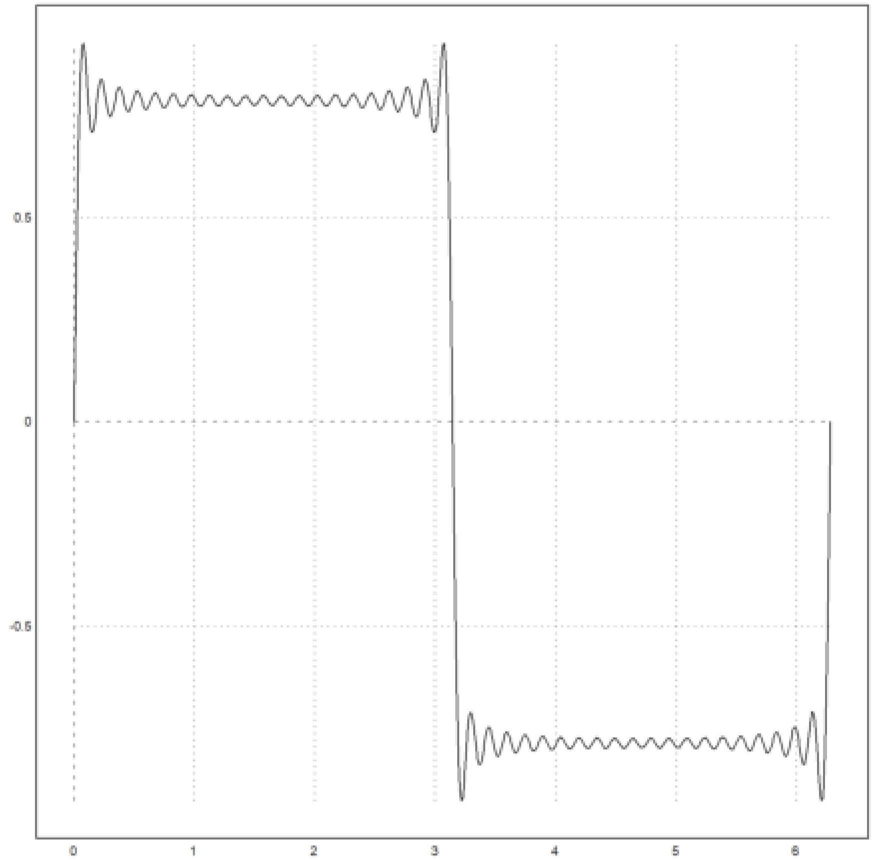
>plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi):

Hal serupa juga dapat dilakukan dengan menggunakan matriks, misalkan kita akan menggambar kurva

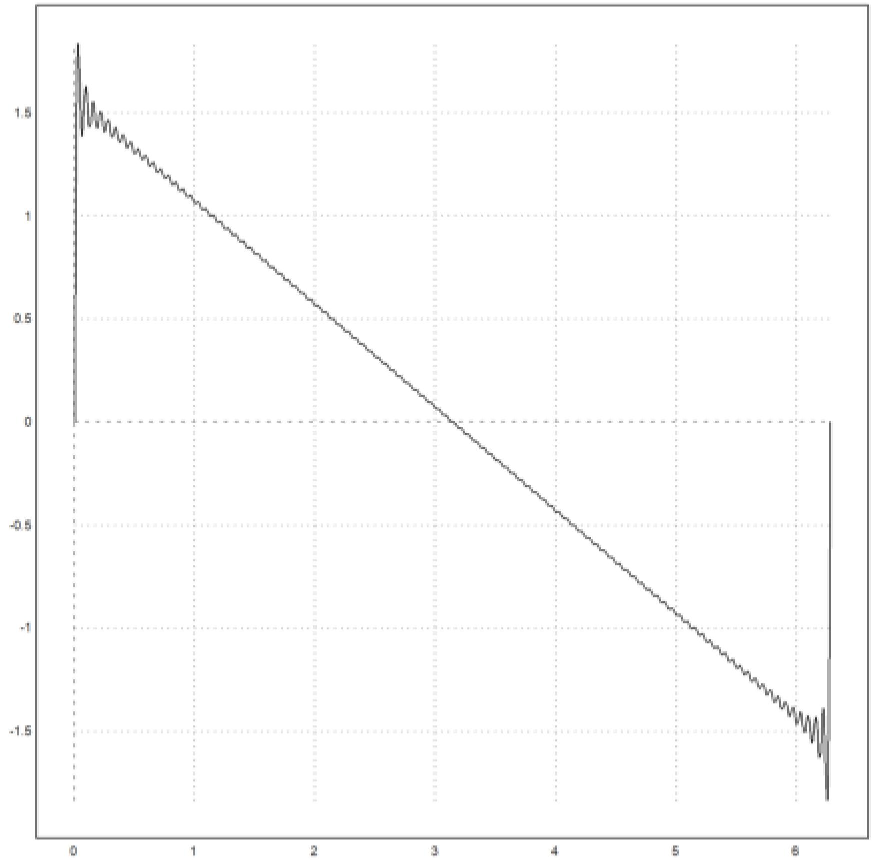
>x=linspace(0,2pi,1000); k=1:100; y=sum(sin(k*x')/k)'; plot2d(x,y):

$$\sin x+\frac{\sin\left(2\,x\right)}{2}+\frac{\sin\left(3\,x\right)}{3}+\frac{\sin\left(4\,x\right)}{4}+\frac{\sin\left(5\,x\right)}{5}$$

Gambar 5.46 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-264.png



Gambar 5.47 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-265.png



Gambar 5.48 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Kalkulus-266.png

5.18 Tabel Fungsi

Terdapat cara menarik untuk menghasilkan barisan dengan ekspresi Maxima. Perintah mxmtable() berguna untuk menampilkan dan menggambar barisan dan menghasilkan barisan sebagai vektor kolom.

Sebagai contoh berikut adalah barisan turunan ke-n x^x di x=1.

>mxmtable("diffat(x^x,x=1,n)","n",1,8,frac=1);

```
   1
   2
   3
   8
  10
  54
 -42
 944
```

>$'sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret secara simbolik

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n\,\left(1+n\right)}{2}$$

>$'sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf),simpsum=true))

$$\sum_{k=0}^{\infty }{\frac{1}{k+3^{k}}}=\sum_{k=0}^{\infty }{\frac{1}{k+3^{k}}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

>$'sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai ekspresi

$$\sum_{x=1}^{\infty }{\frac{1}{x^2}}=\frac{\pi^2}{6}$$

>$'sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),simpsum=true))

$$\sum_{k=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{-1+k}}{k}}=-\sum_{x=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{x}}{x}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

>$'sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf),simpsum=true))

$$\sum_{k=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{k}}{-1+2\,k}}=\sum_{k=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{k}}{-1+2\,k}}$$

>$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)

$$\sum_{n=0}^{\infty }{\frac{1}{n!}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

>&assume(abs(x)<1); $'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forget(abs(x)<1);

$$a\,\sum_{k=0}^{\infty }{x^{k}}=\frac{a}{1-x}$$

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1.

>$'sum(x$^{k/k!,k,0,inf)=ev(sum(x}$k/k!,k,0,inf),simpsum=true)

$$\sum_{k=0}^{\infty }{\frac{x^{k}}{k!}}=\sum_{k=0}^{\infty }{\frac{x^{k}}{k!}}$$

>$limit(sum(x^k/k!,k,0,n),n,inf)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

>function d(n) &= sum(1/(k^2-k),k,2,n); $'d(n)=d(n)

$$d\left(n\right)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{-k+k^2}$$

>$d(10)=ev(d(10),simpsum=true)

$$\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{-k+k^2}=\frac{9}{10}$$

>$d(100)=ev(d(100),simpsum=true)

$$\sum_{k=2}^{100}\frac{1}{-k+k^2}=\frac{99}{100}$$

5.19 Deret Taylor

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar x=a adalah:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

>$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai suku ke-11

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^9}{362880}+\frac{x^{10}}{3628800}$$

>$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1

$$\log x=-1-\frac{\left(-1+x\right)^2}{2}+\frac{\left(-1+x\right)^3}{3}-\frac{\left(-1+x\right)^4}{4}+\frac{\left(-1+x\right)^5}{5}-\frac{\left(-1+x\right)^6}{6}+\frac{\left(-1+x\right)^7}{7}-\frac{\left(-1+x\right)^8}{8}+\frac{\left(-1+x\right.}{9}$$

BAB VI

VISUALISASI DAN PERHITUNGAN GEOMETRI DENGAN EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometeri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

>load geometry

```
Numerical and symbolic geometry.
```

6.1 Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri: - defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
- setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang koordinat
- setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan y adalah -r sd r
- plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
- plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label "AB" sejauh d - plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d - plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c" - plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

- turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
- turnLeft(v): memutar vektor v ke kiri
- turnRight(v): memutar vektor v ke kanan
- normalize(v): normal vektor v
- crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.
- lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh. ax+by=c.
- lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
- getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
- getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g

- getPointOnLine(g): titik pada garis g
- perpendicular(A, g): garis melalui A tegak lurus garis g
- parallel (A, g): garis melalui A sejajar garis g
- lineIntersection(g, h): titik potong garis g dan h
- projectToLine(A, g): proyeksi titik A pada garis g
- distance(A, B): jarak titik A dan B
- distanceSquared(A, B): kuadrat jarak A dan B
- quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
- areaTriangle(A, B, C): luas segitiga ABC
- computeAngle(A, B, C): besar sudut <ABC
- angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
- circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
- getCircleCenter(c): pusat lingkaran c
- getCircleRadius(c): jari-jari lingkaran c
- circleThrough(A,B,C): lingkaran melalui A, B, C
- middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
- lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c
- circleCircleIntersections (c1, c2): titik potong lingkaran c1 dan c2
- planeThrough(A, B, C): bidang melalui titik A, B, C

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

- getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
- getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan y dengan titik A pada
- sisi positif (kanan/atas) garis
- quad(A,B): kuadrat jarak AB
- spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni sin(alpha)^2 dengan
- alpha sudut yang menghadap sisi a.
- crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dengan panjang sisi a, b, c.
- triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk suatu segitiga

- doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan sa=sin(phi)^2 spread a.

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru

Sekarang tetapkan tiga titik dan plotlah.

>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik

>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");

>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");

Lalu tiga segmen.

>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB

>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC

>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC

Fungsi geometri mencakup fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format untuk garis adalah [a,b,c], yang merepresentasikan garis dengan persamaan ax+by=c.

>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C

```
[-1,  2,  2]
```

Hitunglah garis tegak lurus melalui A pada BC.

>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A

Dan persimpangannya dengan BC.

>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC

Plotkan.

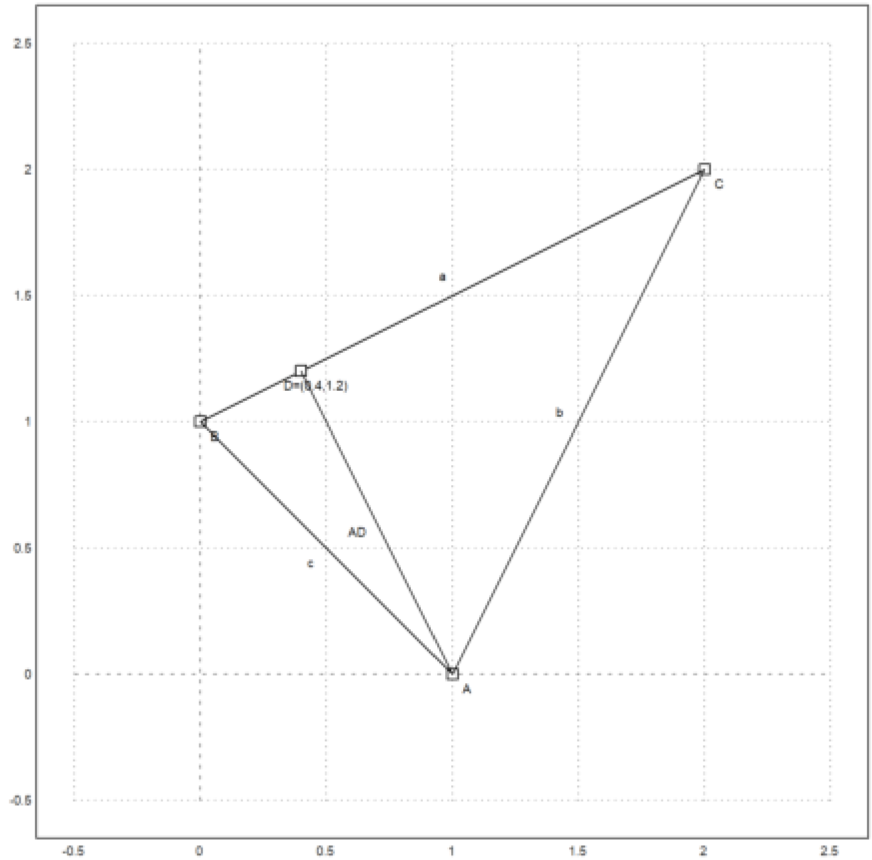
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan

>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()

Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AD.BC.$$

>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)



Gambar 6.1 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-001.png

```
1.5
```

Bandingkan dengan rumus determinan.

>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi

```
1.5
```

Cara lain menghitung luas segitigas ABC:

>distance(A,D)*distance(B,C)/2

```
1.5
```

Sudut di C.

>degprint(computeAngle(B,C,A))

```
36°52’11.63’’
```

Sekarang lingkaran luar segitiga.

>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC

>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar

>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c

>plotPoint(O,“O”); // gambar titik “O”

>plotCircle(c,“Lingkaran luar segitiga ABC”):

Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

>O, R

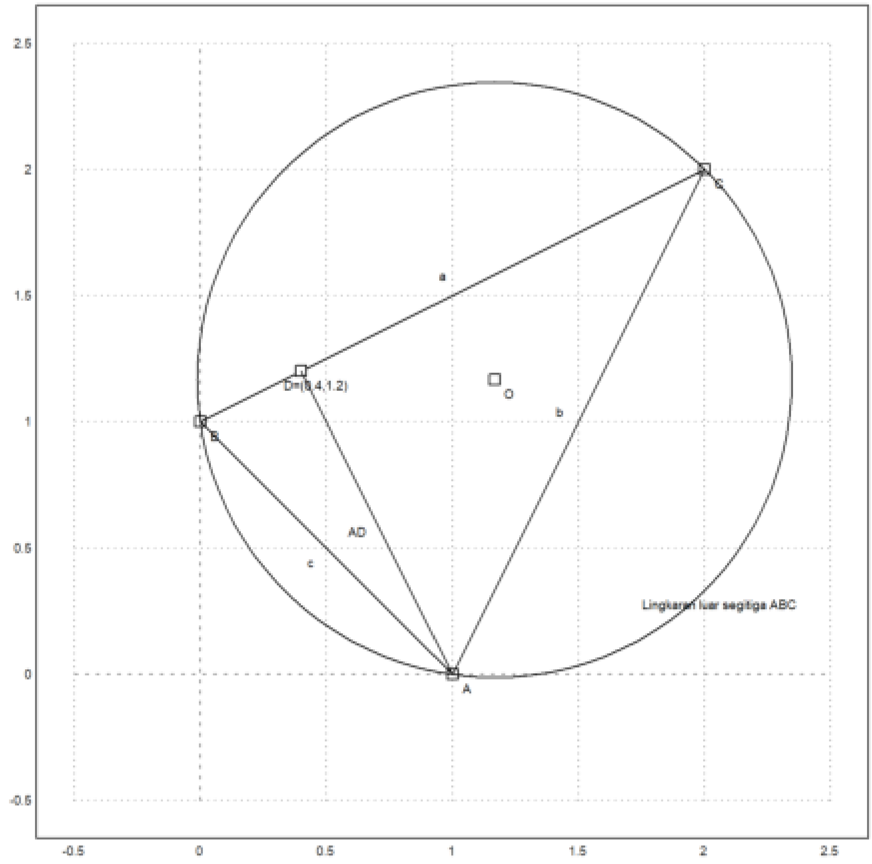
```
[1.16667,  1.16667]
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

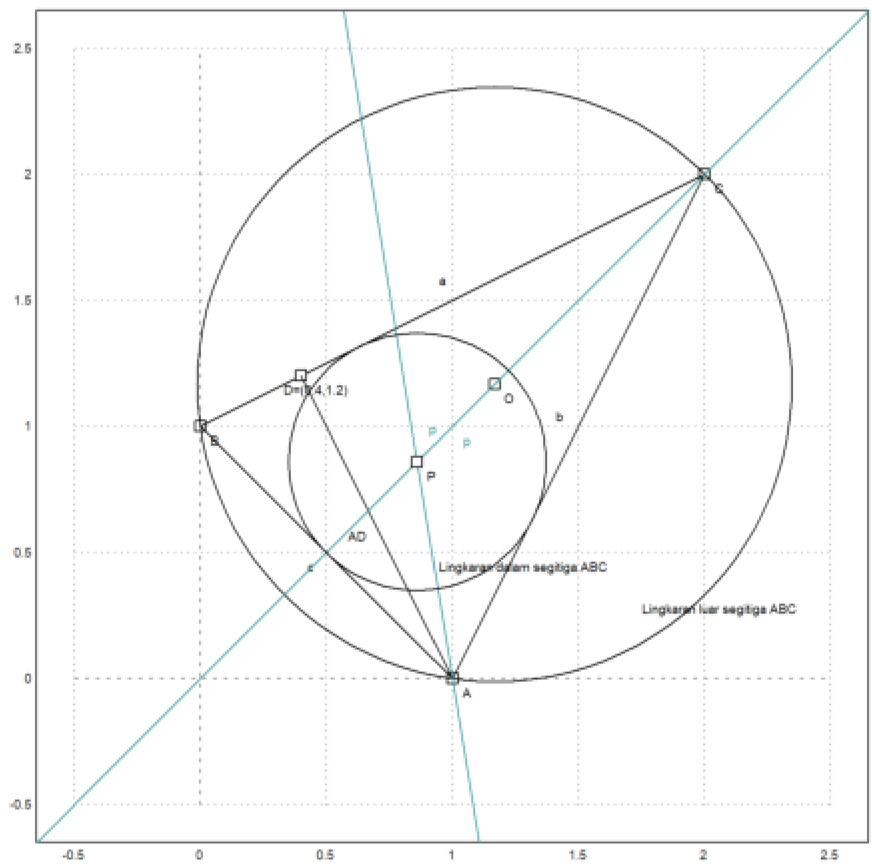
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB

>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB

>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut



Gambar 6.2 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-003.png



Gambar 6.3 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-004.png

```
[0.86038,  0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke dalam plot.

>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut

>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya

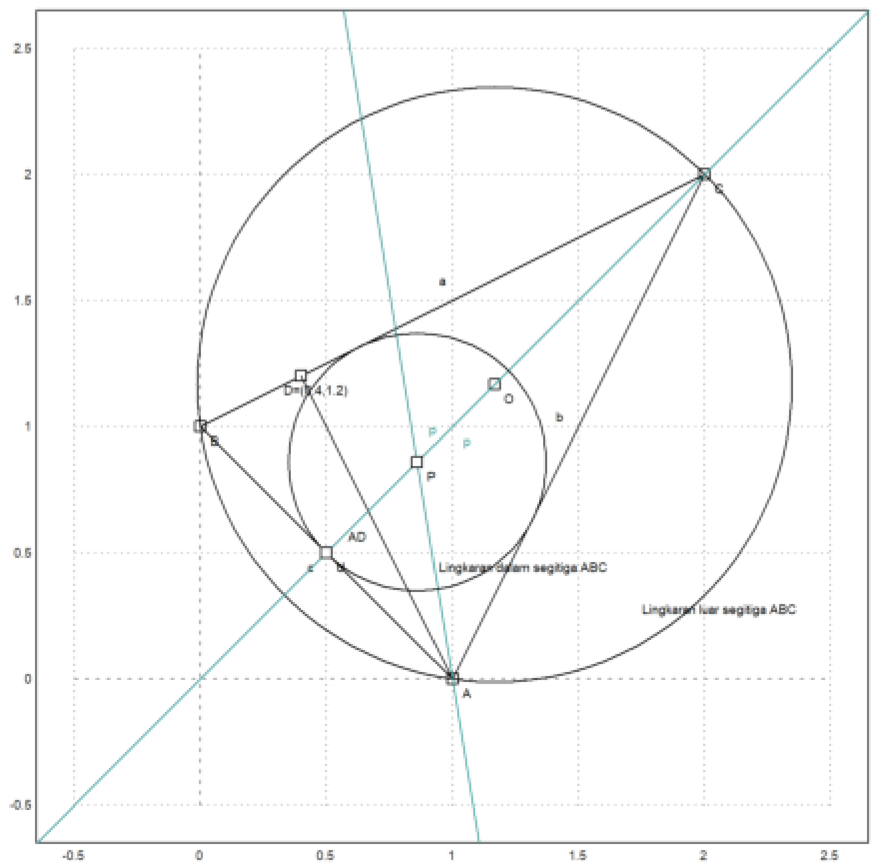
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam

```
0.509653732104
```

>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dalam

Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?



Gambar 6.4 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-005.png

3. Hitung luas segitiga tersebut.
4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.
6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

Jawab

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

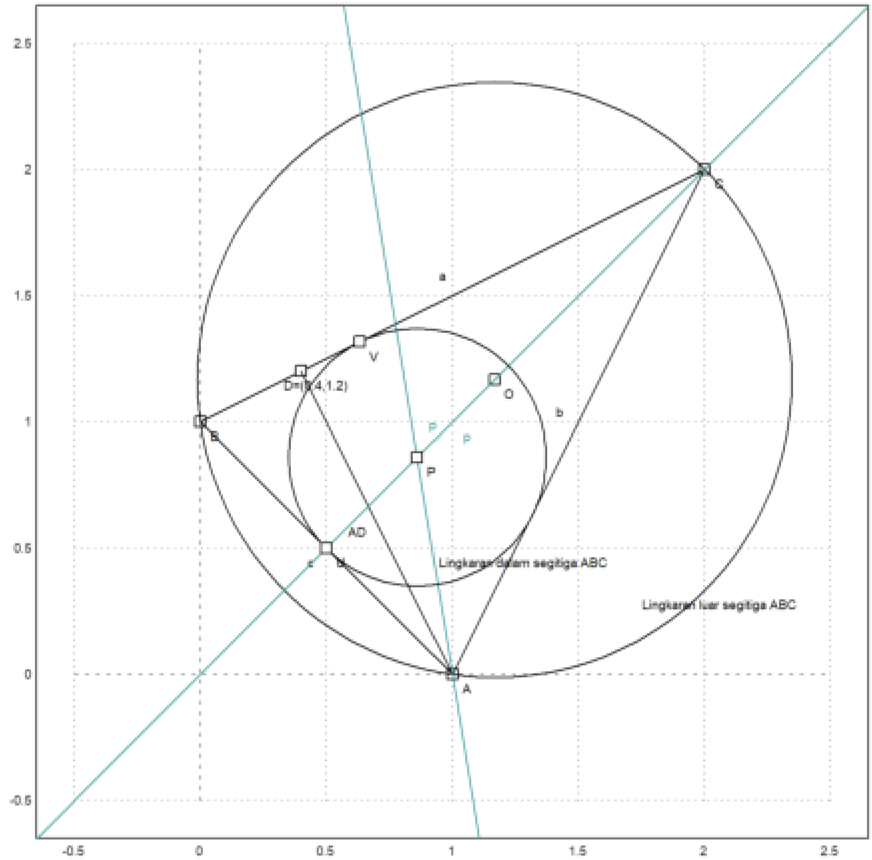
Titik singgung pada sisi AB

>tangentAB = projectToLine(P, lineThrough(A,B));

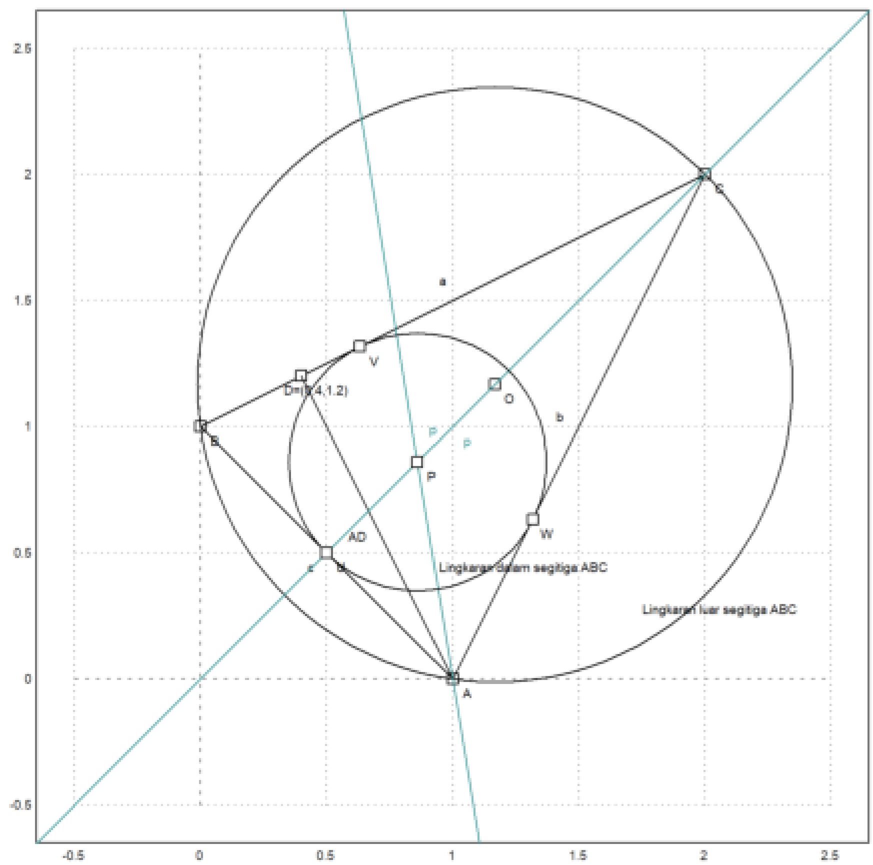
>plotPoint(tangentAB, “U”):

Titik singgung pada sisi BC

>tangentBC = projectToLine(P, lineThrough(B,C));



Gambar 6.5 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-006.png



Gambar 6.6 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-007.png

>plotPoint(tangentBC, “V”):

Titik singgung pada sisi AC

>tangentAC = projectToLine(P, lineThrough(A,C));

>plotPoint(tangentAC, “W”):

Koordinat titik singgung

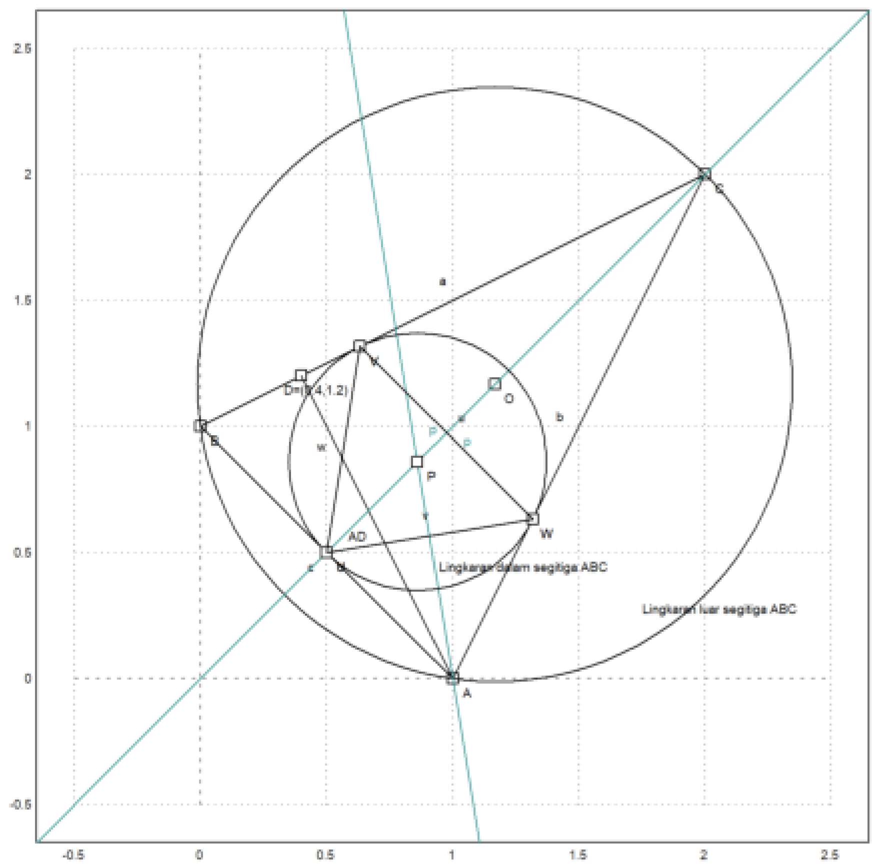
>tangentAB, tangentBC, tangentAC

```
[0.5,  0.5]
[0.632456,  1.31623]
[1.31623,  0.632456]
```

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?

>U=tangentAB; plotPoint(U,“U”);

>V=tangentBC; plotPoint(V,“V”);



Gambar 6.7 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-008.png

>W=tangentAC; plotPoint(W,“W”);

>plotSegment(U,V,“w”);

>plotSegment(V,W,“u”);

>plotSegment(U,W,“v”):

3. Hitung luas segitiga tersebut.

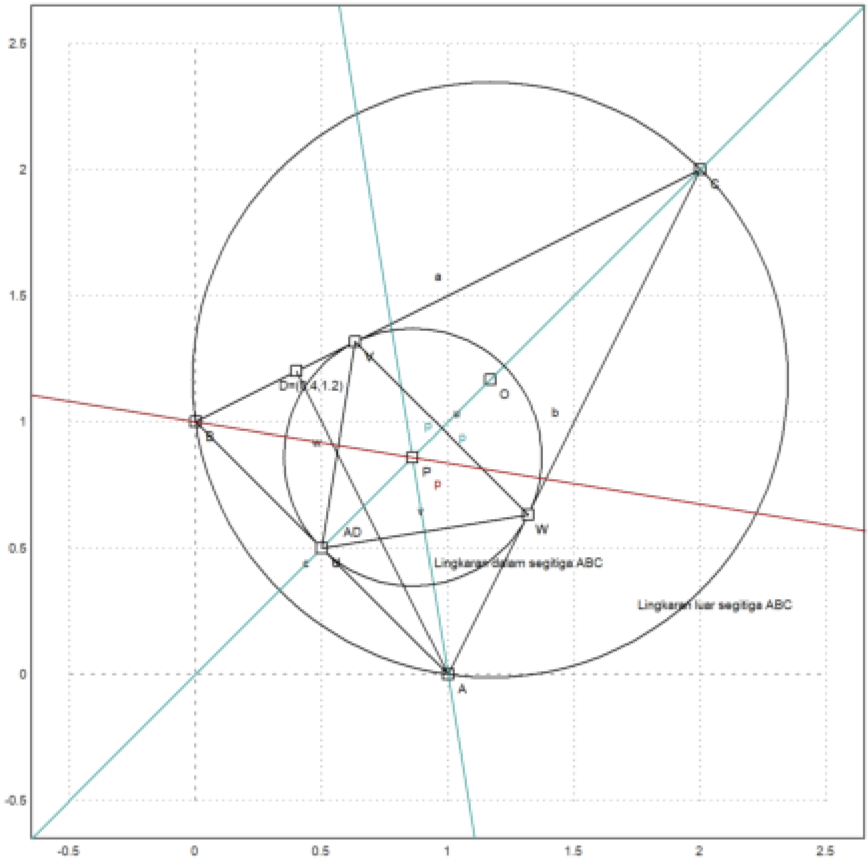
>areaTriangle(U,V,W)

```
0.324341649025
```

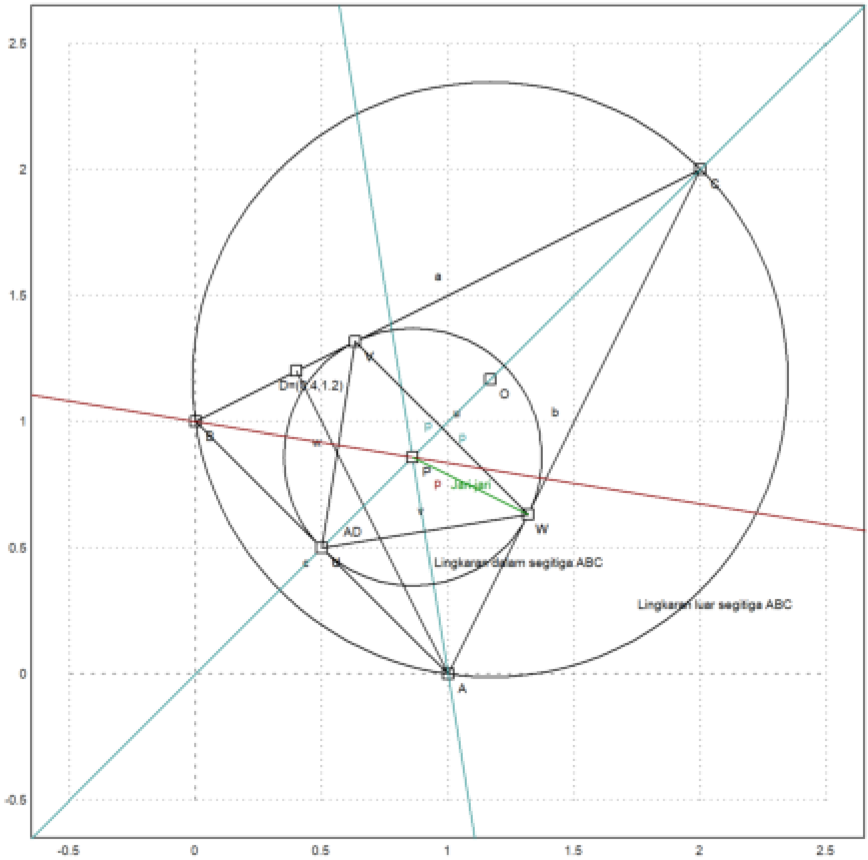
4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

>k=angleBisector(A,B,C); // garis bagi <ABC

>color(2); plotLine(k); color(1):



Gambar 6.8 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-009.png



Gambar 6.9 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-010.png

5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

>plotSegment(P, tangentAC, “Jari-jari”,color(3)):

>color(1);

6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC.

Luas lingkaran luar

>R=getCircleRadius(c) // jari2 lingkaran luar

```
1.17851130198
```

>LuasLingLuar=pi*R^2

```
4.36332312999
```

$$\left[y = \frac{x}{2} + 1\right]$$

Gambar 6.10 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-012.png

Luas Lingkaran Dalam

>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam

```
0.509653732104
```

>LuasLingDalam=pi*r^2

```
0.81601903655
```

6.2 Contoh 2: Geometri Smbolik

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.

File geometry.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Akan tetapi, kita sekarang dapat menggunakan perhitungan simbolik.

>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi menyediakan perhitungan simbolis.

>c &= lineThrough(B,C) // c=BC

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita dapat memperoleh persamaan garis dengan mudah.

>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c

$$\left[y = \frac{x}{2} + 1\right]$$

>$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), $solve(%,y) // persamaan garis melalui(x1, y1) dan (x2, y2)

$$\left[y = \frac{-\left(x_1 - x\right)\,y_2 - \left(x - x_2\right)\,y_1}{x_2 - x_1}\right]$$

$$\left[y = \frac{-\left(x_1 - x\right)\,y_2 - \left(x - x_2\right)\,y_1}{x_2 - x_1}\right]$$

$>getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y)//persamaangarismelaluiAdan(x1,y1)(x_1-1)\ y-x\ y_1=-y_1$\$>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC

```
[2, 1, 2]
```

>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h

```
 2   6
[-, -]
 5   5
```

>\$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC

$$\left[\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right]$$

$>distance(A,Q)//jarakAQ\frac{3}{\sqrt{5}}$\$>cc &= circleThrough(A,B,C); \$cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C

$$\left[\frac{7}{6},\frac{7}{6},\frac{5}{3\sqrt{2}}\right]$$

>r&=getCircleRadius(cc); \$r , $float(r)//tampilkannilaijari-jari1.178511301977579$\$1.178511301977579

$>computeAngle(A,C,B)//nilai < ACB\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB

$$y=x$$

>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P//titikpotong2garisbagisudut\left[\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6},\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6}\right]$\$>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya

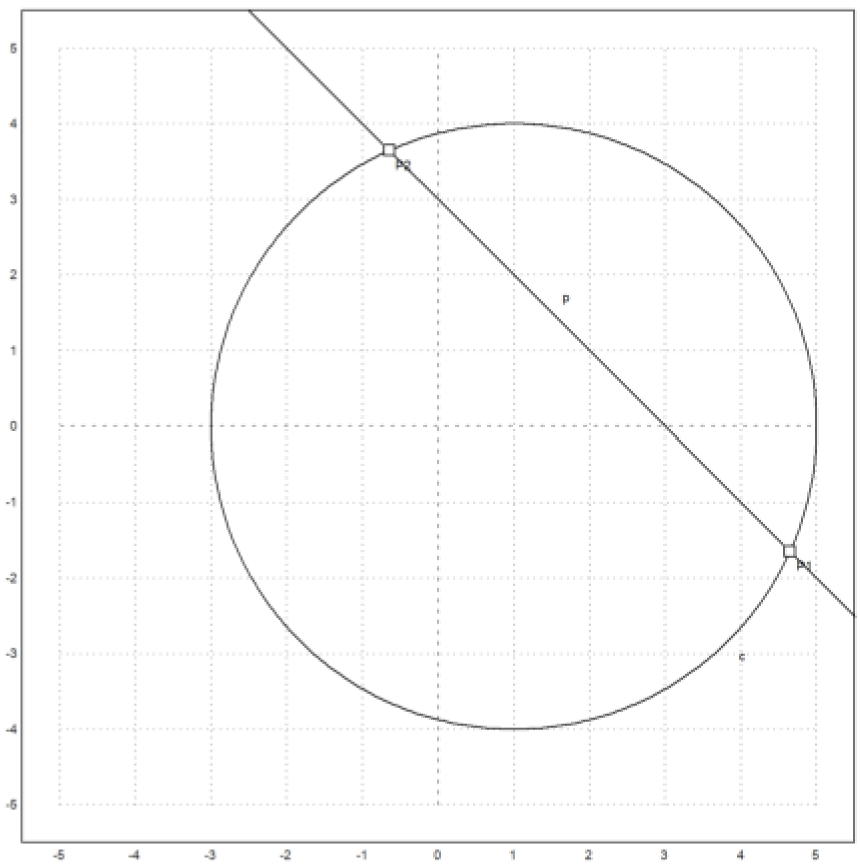
```
[0.86038,  0.86038]
```

6.3 Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga dapat membuat garis berpotongan dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);

>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);



Gambar 6.11 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-024.png

>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);

>P1, P2, f

```
[4.64575,  -1.64575]
[-0.645751,  3.64575]
2
```

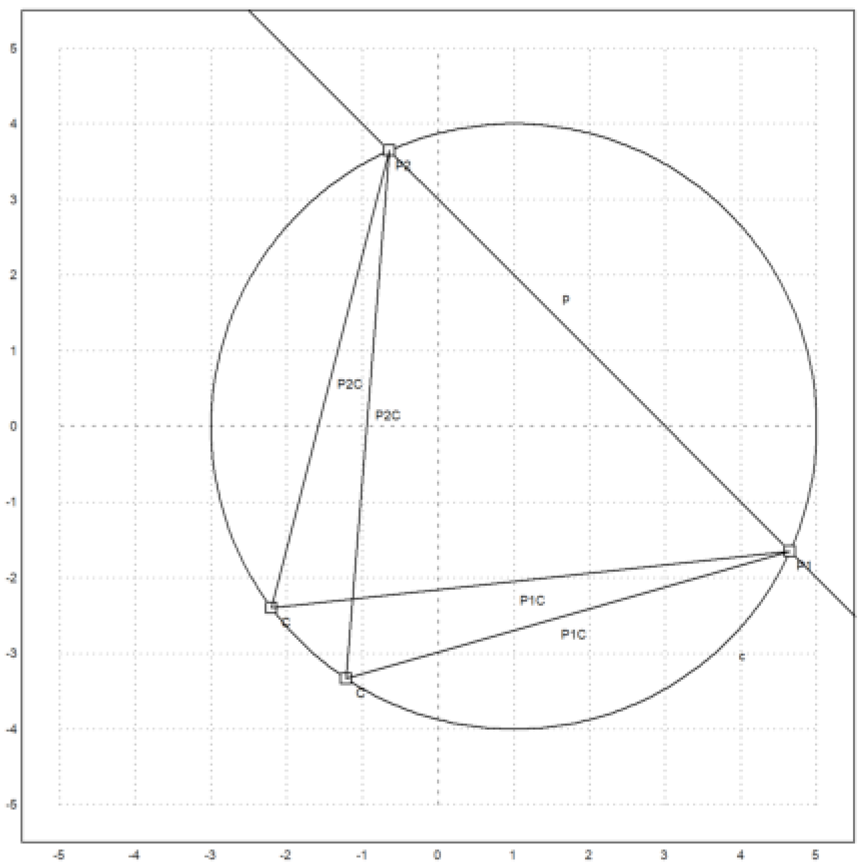
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):

Sama halnya di Maxima.

>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4

```
[1, 0, 4]
```

>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C



Gambar 6.12 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-026.png

[1, 1, 3]

>$lineCircleIntersections(l, c)|radcan, //titikpotonglingkarancdangarisl\left[\left[\sqrt{7}+2, 1-\sqrt{7}\right], \left[2-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right.\right.$
ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);

>degprint(computeAngle(P1,C,P2))

```
69°17'42.68''
```

>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);

>degprint(computeAngle(P1,C,P2))

```
69°17'42.68''
```

>insimg;

6.4 Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

>A=[2,2]; B=[-1,-2];

>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));

>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));

>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);

>l=lineThrough(P1,P2);

>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);

>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):

Selanjutnya, kita melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];

>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));

>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));

>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];

Persamaan untuk perpotongan cukup rumit. Namun, kita dapat menyederhanakannya, jika kita mencari nilai y.

>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);

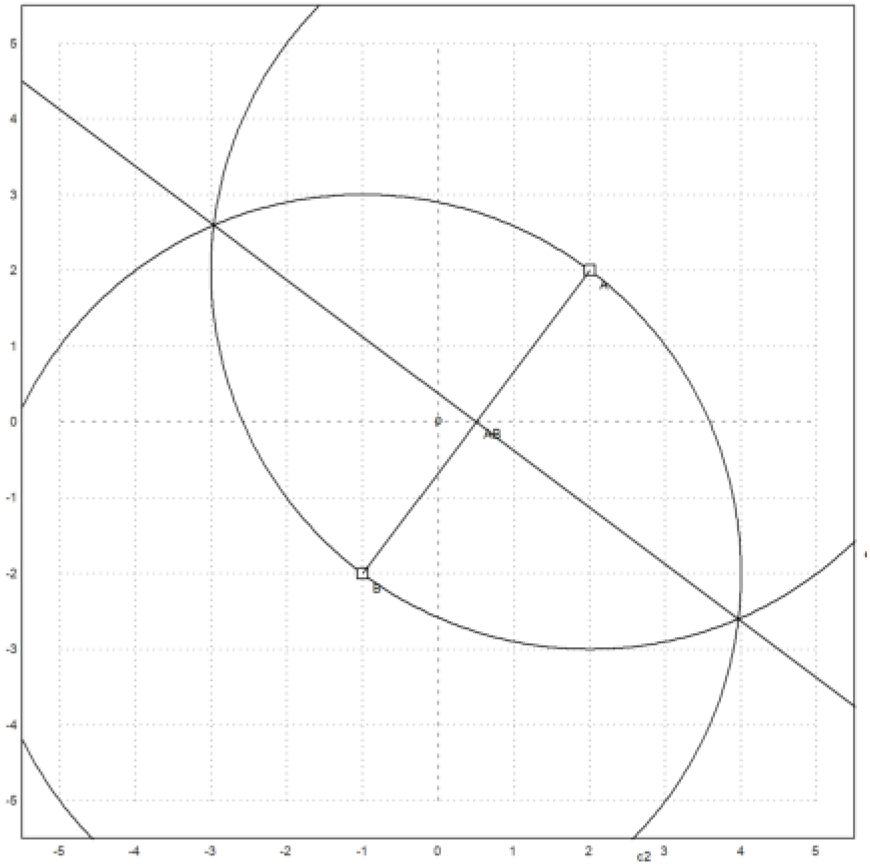
>$solve(g,y)

$$\left[y = \frac{-\left(2\,b_1 - 2\,a_1\right)\,x + {b_2}^2 + {b_1}^2 - {a_2}^2 - {a_1}^2}{2\,b_2 - 2\,a_2}\right]$$

Ini memang sama dengan tegak lurus tengah, yang dihitung dengan cara yang sepenuhnya berbeda.

>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)

$$\left[y = \frac{-\left(2\,b_1 - 2\,a_1\right)\,x + {b_2}^2 + {b_1}^2 - {a_2}^2 - {a_1}^2}{2\,b_2 - 2\,a_2}\right]$$



Gambar 6.13 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-027.png

>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);

>$solve(h,y)\left[y=\frac{(b_2-a_2)\,x-a_1\,b_2+a_2\,b_1}{b_1-a_1}\right]$ $Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)}\times\frac{(b_2-a_2)}{(b_1-a_1)}=-1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

6.5 Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad \text{dengan } s=(a+b+c)/2,$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$L=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2+y^2=b^2,\quad (x-a)^2+y^2=c^2.$$

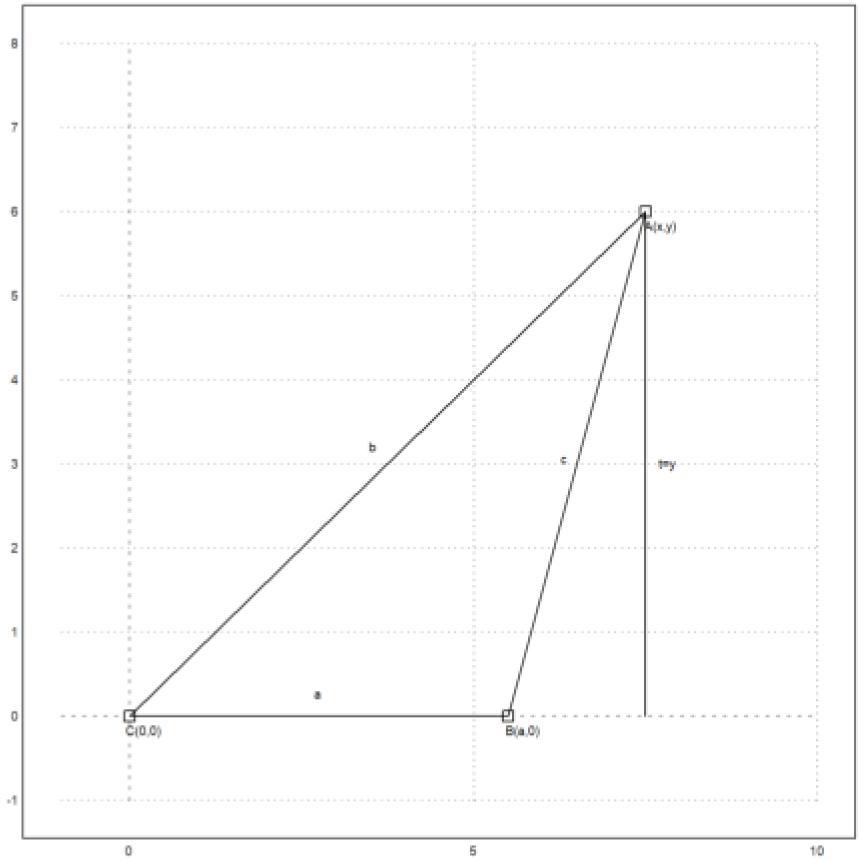
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)"); ...
> plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");

>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15); ...
> plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);

>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):

>&assume(a>0); sol &= solve([x^{2+y}2=b$^{2,(x-a)}$2+y$^{2=c}$2],[x,y])

```
                 2     2     2
              - c   + b   + a
        [[x = --------------, y =
                    2 a
         4       2  2       2  2     4       2  2     4
   sqrt(- c   + 2 b   c  + 2 a   c  - b   + 2 a   b   - a )
- --------------------------------------------------------],
                                2 a
         2     2     2
      - c   + b   + a
[x = --------------, y =
           2 a
```



Gambar 6.14 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-036.png

```
        4       2   2       2   2     4       2   2     4
sqrt(- c   + 2 b   c   + 2 a   c   - b   + 2 a   b   - a )
--------------------------------------------------]]
                       2 a
```

Ekstrak solusi y.

>ysol &= y with sol[2][2] $'y=sqrt(factor(ysol^2))

```
         sqrt((- c + b + a) (c - b + a) (c + b - a) (c + b + a))
     y = -------------------------------------------------------
                                  2 a
```

Kita mendapatkan rumus Heron.

>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c) = H(a,b,c)H\left(a , b , c\right)=\frac{\sqrt{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}}{4}$ 'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6

$$Luas=\frac{3\,\sqrt{39}}{4}$$

Tentu saja, setiap segitiga siku-siku adalah kasus yang terkenal.

>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5

```
6
```

Dan jelas pula, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan dua sisinya 3 dan 4.

>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x <=7)

Kasus umum juga berfungsi.

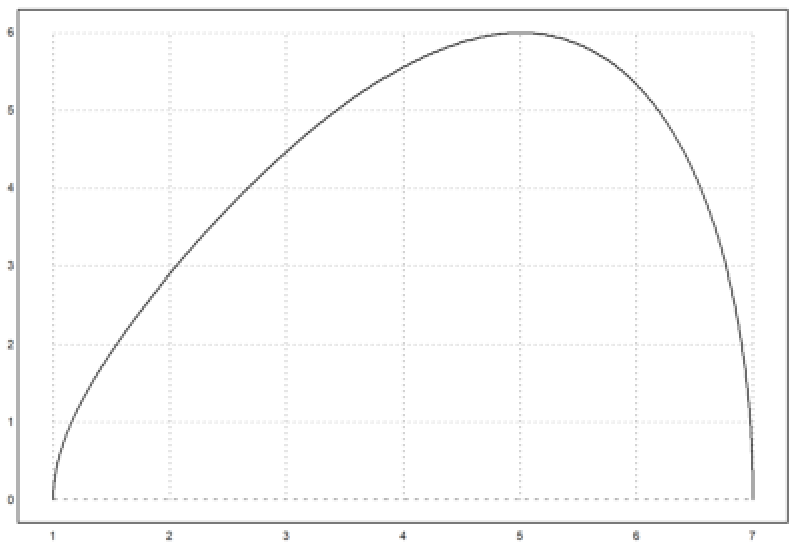
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)

$$\left[c=-\sqrt{b^2+a^2} , c=\sqrt{b^2+a^2} , c=0 \right]$$

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk suatu konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah elips.

>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1

$$\left[x=\frac{\left(d-c\right)^2-c^2+a^2}{2\,a} , y=\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a} \right]$$



Gambar 6.15 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-039.png

Dan buat fungsi ini.

>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)\frac{(d-c)^2-c^2+a^2}{2\,a}$ $

$$\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2\,c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

Sekarang kita dapat menggambar himpunannya. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Diketahui bahwa kita mendapatkan elips.

>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):

Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu:

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

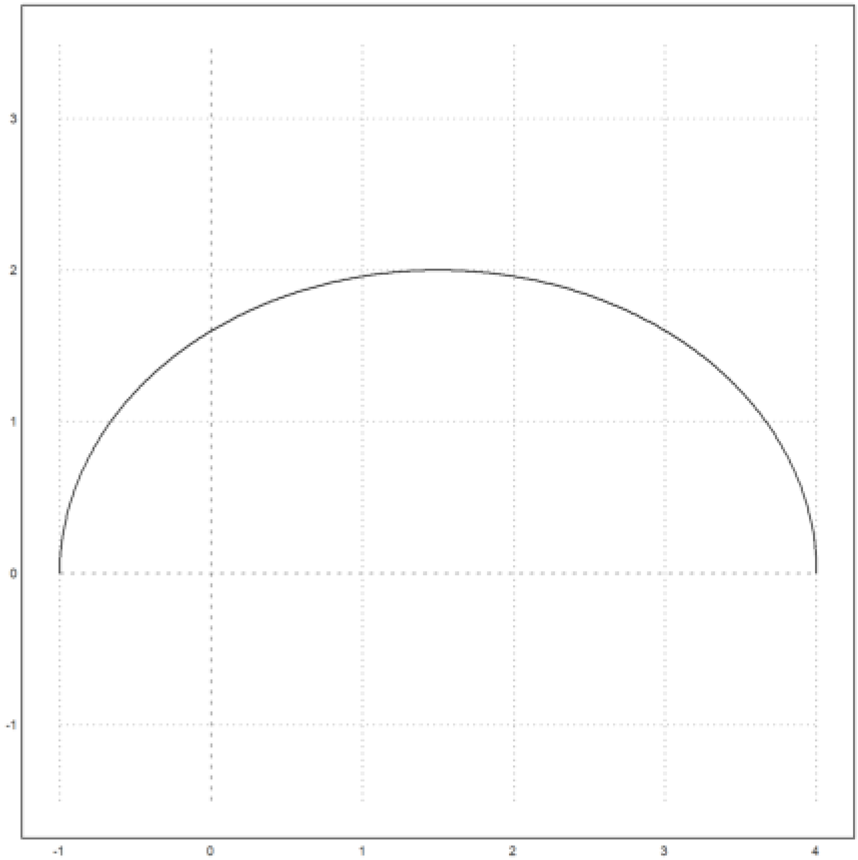
di mana (xm,ym) merupakan pusat, dan u dan v merupakan sumbu setengah.

>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with[u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])1Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga tersebut adalah maksimum untuk x=0. Jadi luas segitiga dengan a+b+c=d adalah maksimum, jika segitiga tersebut sama sisi. Kita ingin memperolehnya secara analitis.

>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))$^{2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))}$2,b)=0]; $eqns

$$\left[\frac{d\,\left(d-2\,a\right)\,\left(d-2\,b\right)}{8}-\frac{\left(-d+2\,b+2\,a\right)\,d\,\left(d-2\,b\right)}{8}=0,\frac{d\,\left(d-2\,a\right)\,\left(d-2\,b\right)}{8}-\frac{\left(-d+2\,b+2\,a\right)\,d\,\left(d-2\,\right.}{8}\right.$$

Kita memperoleh beberapa nilai minimum, yang dimiliki oleh segitiga dengan satu sisi 0, dan solusinya a=b=c=d/3.



Gambar 6.16 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-044.png

>$solve(eqns,[a,b])

$$\left[\left[a=\frac{d}{3},b=\frac{d}{3}\right],\left[a=0,b=\frac{d}{2}\right],\left[a=\frac{d}{2},b=0\right],\left[a=\frac{d}{2},b=\frac{d}{2}\right]\right]$$

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan H(a,b,c)^2 terhadap a+b+d=d.

>&solve([diff(H(a,b,c)$^{2,a)=la,diff(H(a,b,c)}$2,b)=la, . . .
> diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])

```
                     d      d
        [[a = 0, b = -, c = -, la = 0],
                     2      2
     d             d                 d      d
[a = -, b = 0, c = -, la = 0], [a = -, b = -, c = 0, la = 0],
     2             2                 2      2
                            3
     d      d      d       d
[a = -, b = -, c = -, la = ---]]
     3      3      3       108
```

Kita bisa membuat plot dari situasinya

Pertama-tama atur titik di Maxima.

>A &= at([x,y],sol[2]); $A

$$\left[\frac{-c^2+b^2+a^2}{2\,a},\frac{\sqrt{-c^4+2\,b^2\,c^2+2\,a^2\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C

$$[0,0]$$

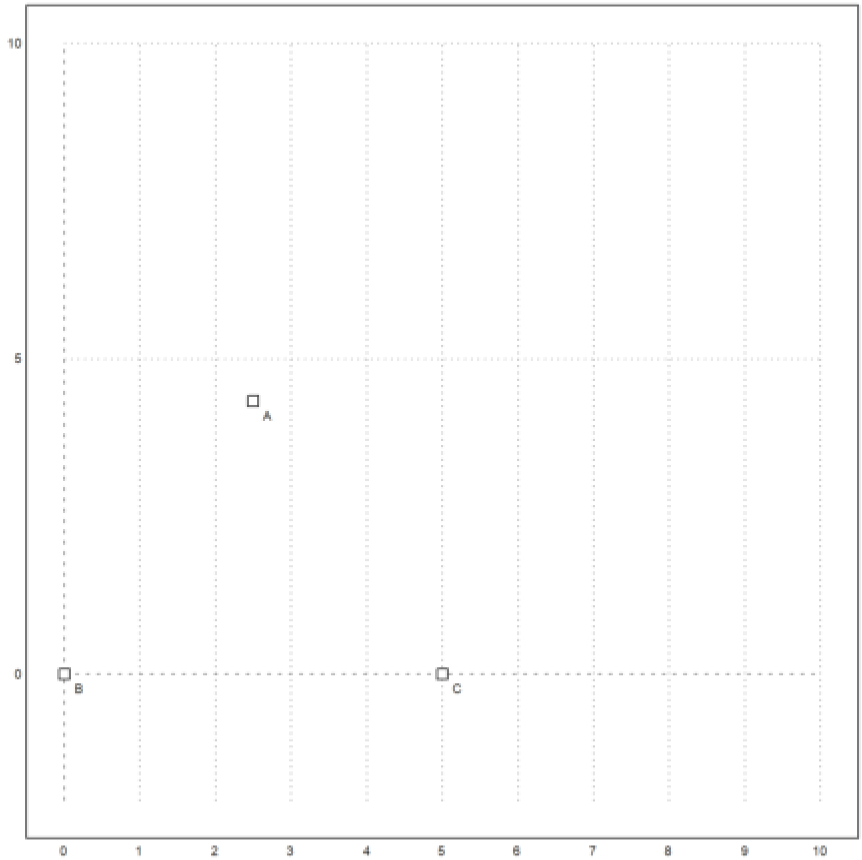
$$[a,0]$$

Kemudian atur rentang plot dan plot titik-titiknya.

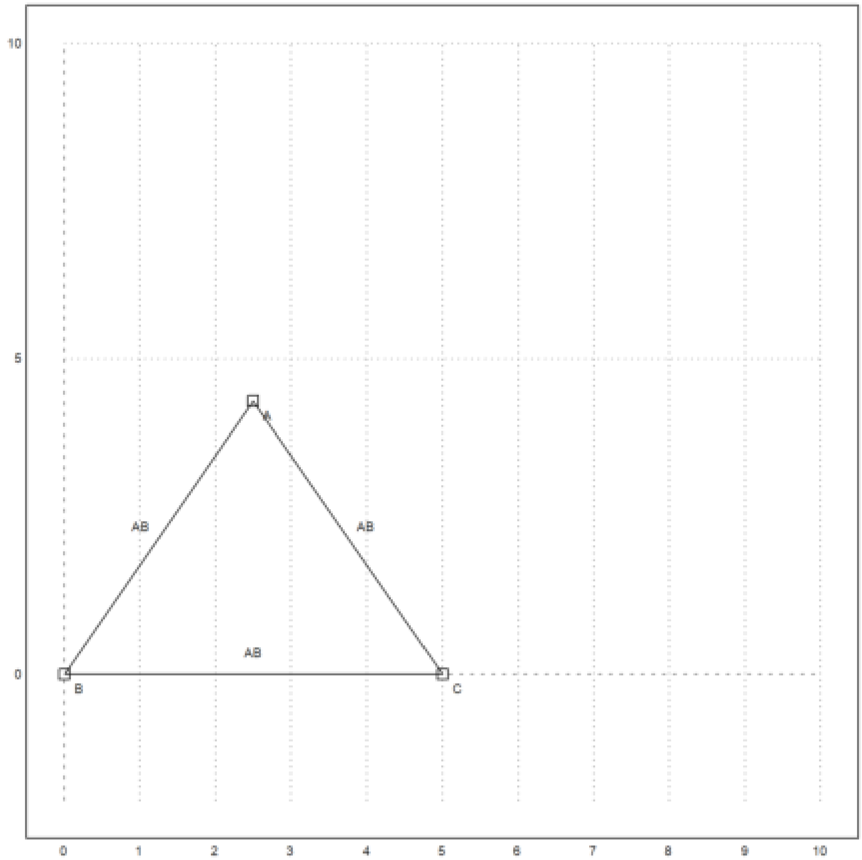
>setPlotRange(0,10,-2,10); . . .
> a=5; b=5; c=5; . . .
> plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); . . .
> plotPoint(mxmeval("A"),"A"):

Gambarkan segmen-segmennya.

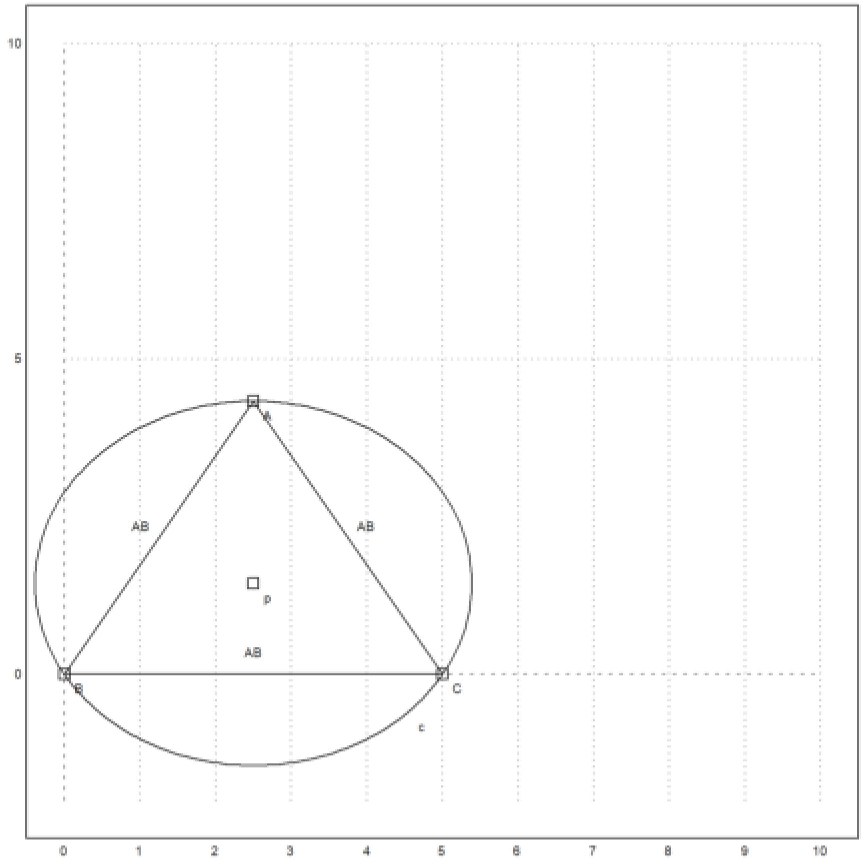
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); . . .
> plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); . . .
> plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):



Gambar 6.17 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-052.png



Gambar 6.18 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-053.png



Gambar 6.19 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-055.png

Hitunglah garis tegak lurus tengah di Maxima.

>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);

Dan pusat kelilingnya.

>U &= lineIntersection(h,g);

Kita mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran luar.

>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan

$$\frac{i\,a\,b\,c}{\sqrt{c-b-a}\,\sqrt{c-b+a}\,\sqrt{c+b-a}\,\sqrt{c+b+a}}$$

Mari kita tambahkan ini ke dalam alur cerita.

>plotPoint(U()); ...
> plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):

Dengan menggunakan geometri, kita memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radius. Kita dapat memeriksa apakah ini benar dengan Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita mengkuadratkannya.

>$c^{2/sin(computeAngle(A,B,C))}2 | factor

$$-\frac{4\,a^2\,b^2\,c^2}{(c-b-a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}$$

6.6 Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari setiap segitiga yang tidak sama sisi. Garis ini merupakan garis pusat segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga tersebut, termasuk orthocenter, circumcenter, centroid, titik Exeter, dan pusat lingkaran sembilan titik pada segitiga tersebut.

Sebagai contoh, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kami mendefinisikan sudut-sudut segitiga dalam Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolik.

>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik-titik ke dalamnya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

>setPlotRange(3); plotPoint(A,“A”); plotPoint(B,“B”); plotPoint(C,“C”);

Kita juga dapat menambahkan sisi-sisi segitiga.

>plotSegment(A,B,“ “); plotSegment(B,C,”“); plotSegment(C,A,” “):

Berikut adalah luas segitiga, menggunakan rumus determinan. Tentu saja, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

>$areaTriangle(A,B,C) - \frac{7}{2}$$Kita dapat menghitung koefisien sisi c.

>c &= lineThrough(A,B)

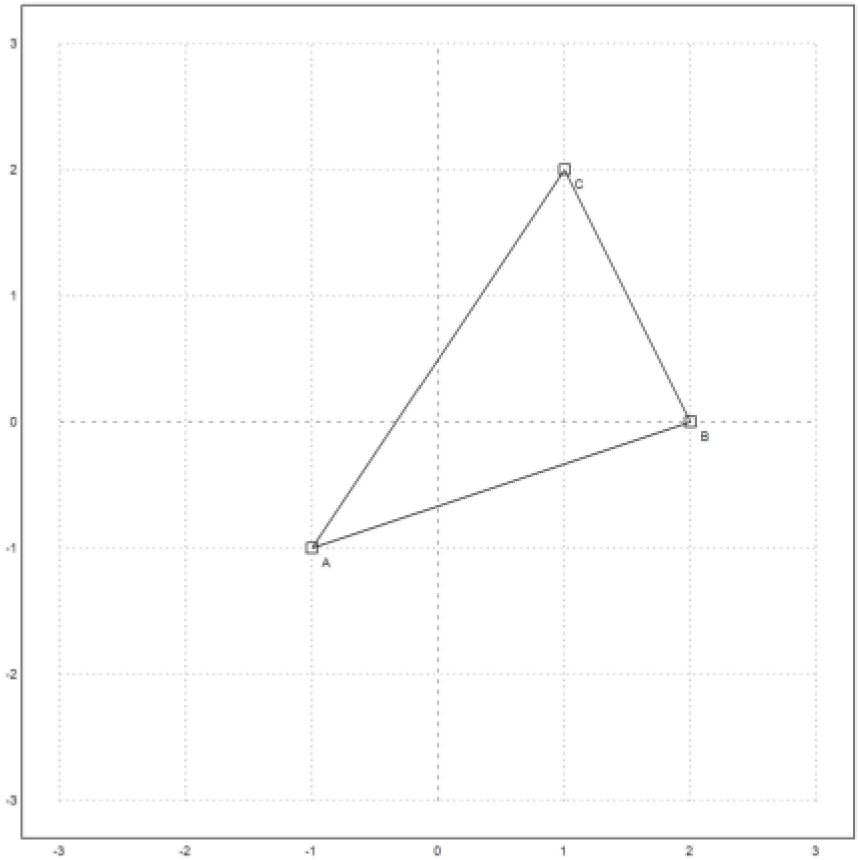
```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan dapatkan juga rumus untuk garis ini.

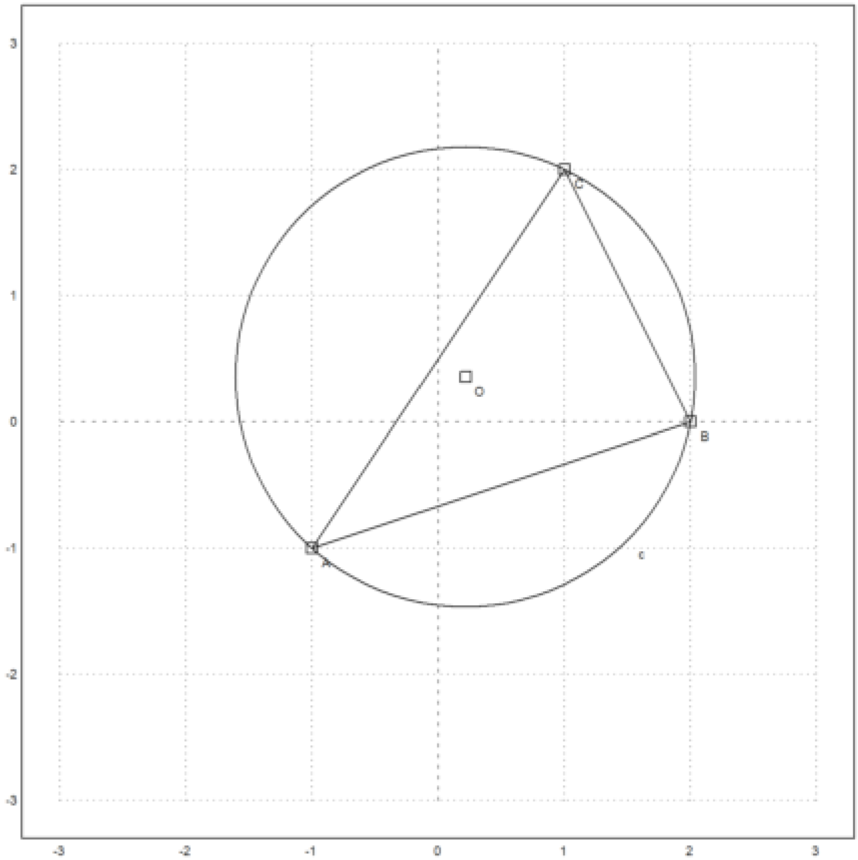
>$getLineEquation(c,x,y) 3\,y-x=-2$$Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan suatu titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif bentuk Hesse. Memasukkan titik akan menghasilkan jarak positif ke garis.

>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$



Gambar 6.20 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-058.png



Gambar 6.21 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-065.png

Sekarang kita hitung lingkaran luar ABC.

>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)

$$\left(y-\frac{5}{14}\right)^2+\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{325}{98}$$

>O &= getCircleCenter(LL); $O

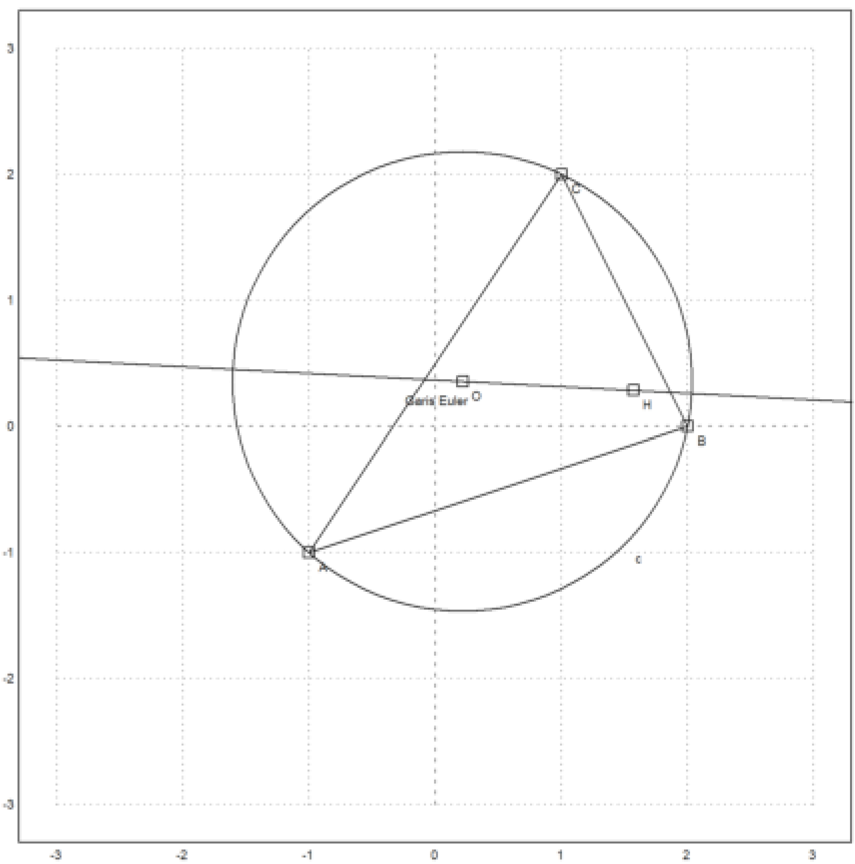
$$\left[\frac{3}{14},\frac{5}{14}\right]$$

Gambarkan lingkaran dan titik pusatnya. Cu dan U adalah simbol. Kita evaluasi ekspresi ini untuk Euler.

>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),“O”):

Kita dapat menghitung perpotongan tinggi di ABC (orthocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
> perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H



Gambar 6.22 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-068.png

$$\left[\frac{11}{7}, \frac{2}{7}\right]$$

Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)

$$-\frac{19\,y}{14} - \frac{x}{14} = -\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kita.

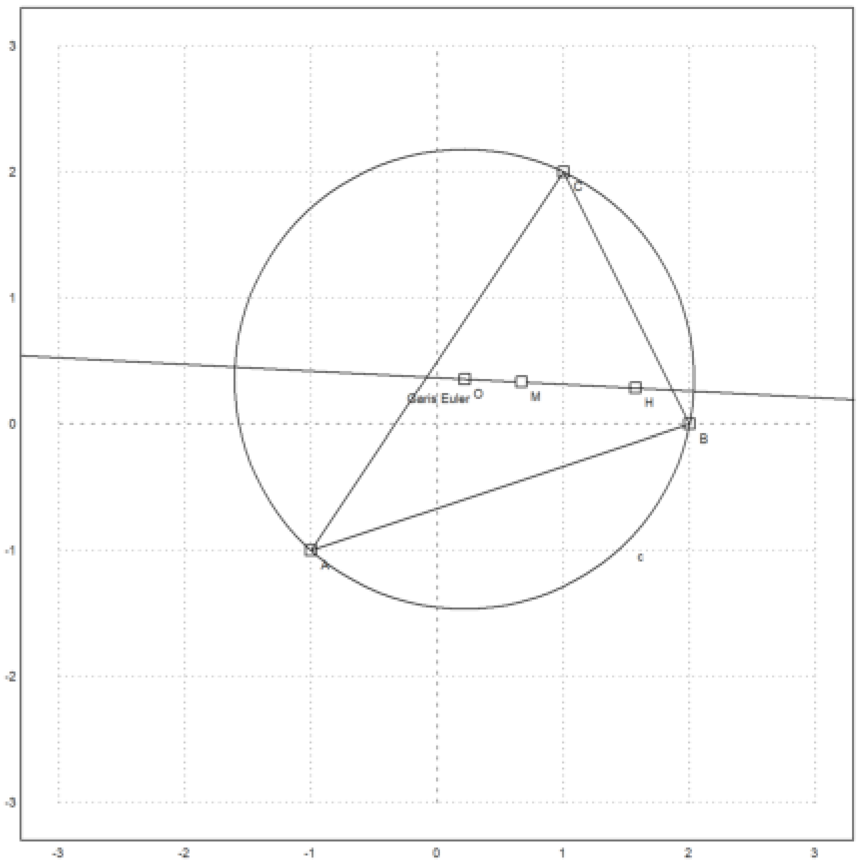
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):

Pusat gravitasi seharusnya berada pada garis ini.

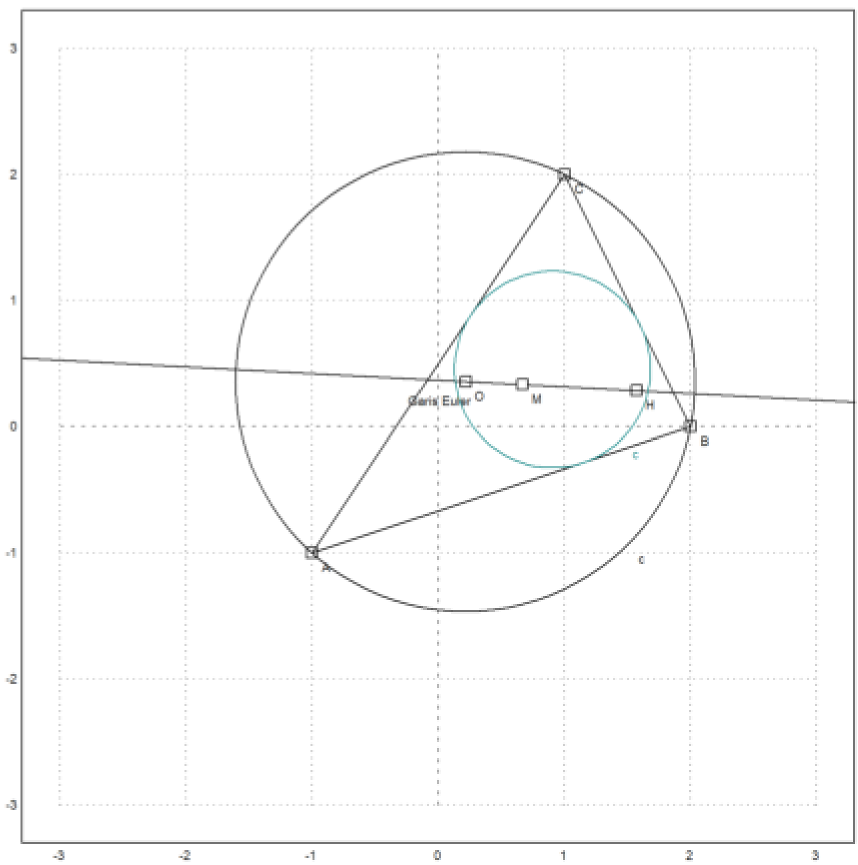
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]] - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$>plotPoint(M(),"M"): // titik berat

Teori ini memberi tahu kita MH=2*MO. Kita perlu menyederhanakannya dengan radcan untuk mencapainya.

$>distance(M,H)/distance(M,O)|radcan 2$$Fungsinya termasuk fungsi untuk sudut juga.



Gambar 6.23 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-070.png



Gambar 6.24 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-075.png

$>computeAngle(A,C,B),degprint(\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right)$ 60°15’18.43’ ’

Persamaan untuk pusat lingkaran dalam tidak terlalu bagus.

>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-15\,\sqrt{2}+3}{14},\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+5\,2^{\frac{3}{2}}+5}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi untuk jari-jari lingkaran dalam.

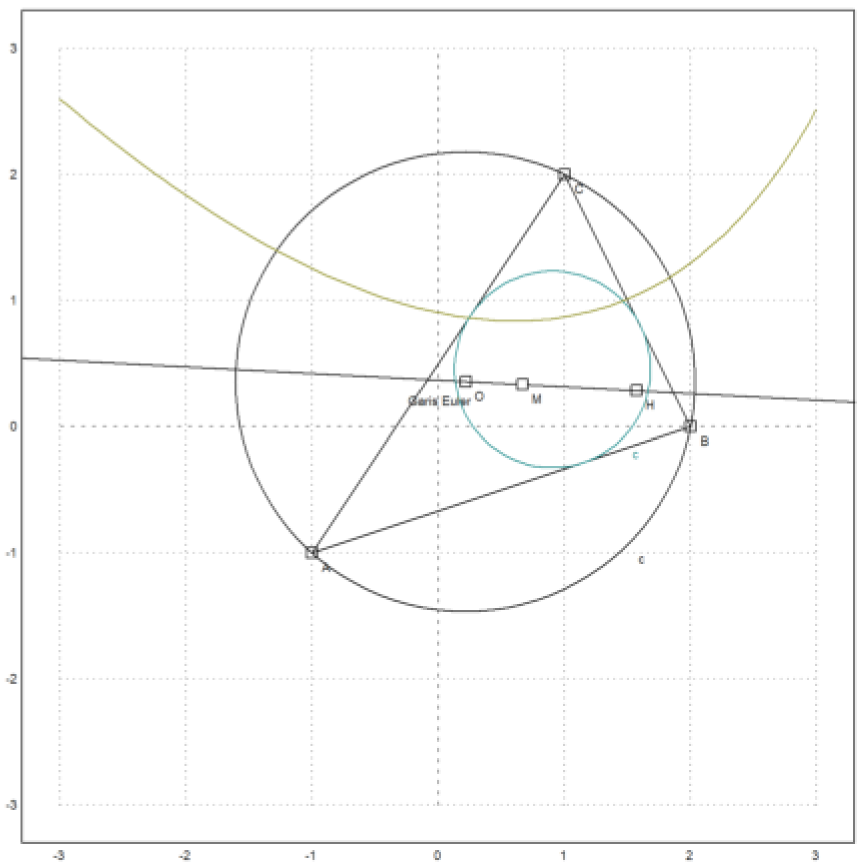
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r

$$\frac{\sqrt{\left(-41\,\sqrt{2}-31\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+115\,\sqrt{2}+614}}{7\,\sqrt{2}}$$

>LD &= circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

>color(5); plotCircle(LD()):



Gambar 6.25 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-077.png

6.7 Parabola

Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}-\sqrt{(2-y)^2+(1-x)^2}=0$$

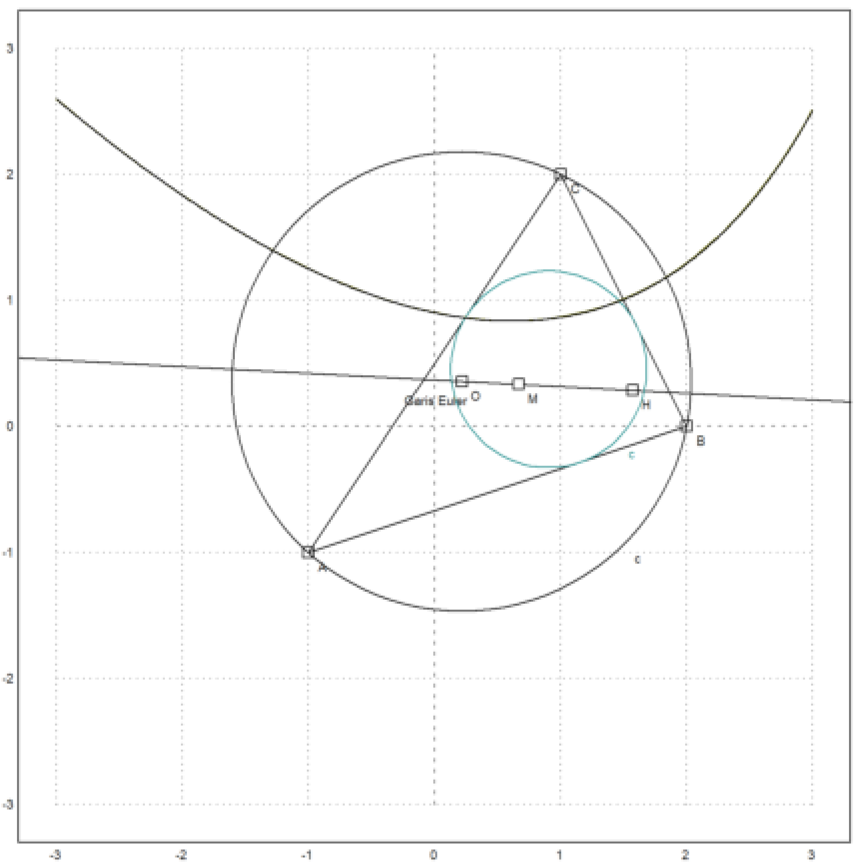
Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):

Ini seharusnya merupakan suatu fungsi, tetapi penyelesai default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kita mendapatkan solusi palsu.

>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)$^{\text{2-distance([x,y],C)}}$2,y)

```
[y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
                              y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```



Gambar 6.26 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-078.png

Solusi pertamanya adalah

maxima: akar[1]

Menambahkan solusi pertama ke dalam plot menunjukkan bahwa itu memang jalur yang kita cari. Teorinya memberi tahu kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):

>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x) = g(x) // fungsi yang mendefinisikan kurva di atas g\left(x\right)=-3\,x-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}+26$>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut

>dTC &= distance(T,C); \$fullratsimp(dTC), $float(\sqrt{1503-54\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}$\$

$$2.135605779339061$$

>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); \$U // proyeksi T pada garis AB

$$\left[\frac{80-3\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10} , \frac{20-\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10} \right]$$

>dU2AB &= distance(T,U); \$fullratsimp(dU2AB), $float(\sqrt{1503-54\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}$\$

$$2.135605779339061$$

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

6.8 Contoh 5: Trigonometri Rasional

Hal ini terinspirasi dari ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya "Divine Proportions", Wildberger mengusulkan untuk mengganti konsep klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadran dan sebaran. Dengan menggunakan konsep-konsep ini, memang memungkinkan untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

Berikut ini, saya memperkenalkan konsep-konsep tersebut, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama trigonometri rasional bahwa perhitungan dapat dilakukan hanya dengan kertas dan pensil. Anda diundang untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa perhitungan rasional simbolik sering kali menghasilkan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang hanya mengevaluasi perkiraan numerik.

>load geometry;

Untuk pengenalan pertama, kami menggunakan segitiga siku-siku dengan proporsi Mesir yang terkenal yaitu 3, 4, dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
> setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
> insimg(30);

Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana wa adalah sudut di A. Cara umum untuk menghitung sudut ini adalah dengan mengambil kebalikan dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak secara perkiraan. >wa := arcsin(3/5); degprint(wa)

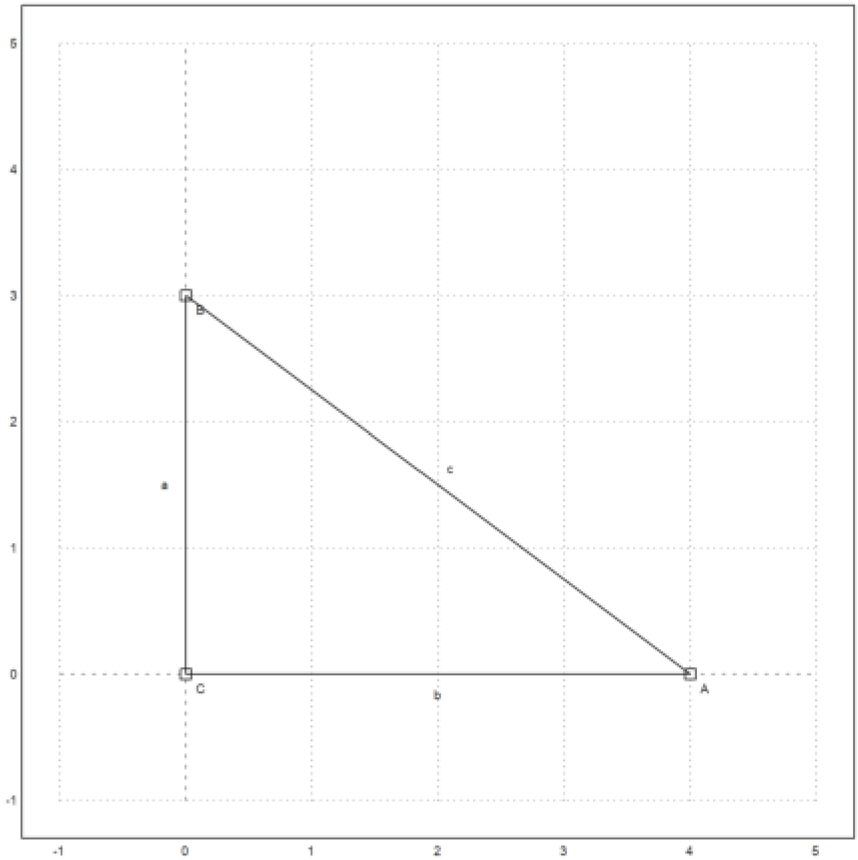
```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Faktanya, itu hanyalah kuadrat jarak. Dalam persamaan berikut, a, b, dan c menunjukkan kuadran sisi-sisi.

Teorema Pythogoras menjadi a+b=c.

>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c



Gambar 6.27 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-085.png

```
25 = 25
```

Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah sebaran. Sebaran mengukur celah antara garis. Nilainya 0, jika garisnya sejajar, dan 1, jika garisnya persegi panjang. Nilainya adalah kuadrat sinus sudut antara kedua garis.

Sebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana a dan c adalah kuadran dari sembarang segitiga siku-siku dengan salah satu sudut di A.

>sa &= a/c; $sa\frac{9}{25}$\$Tentu saja, ini lebih mudah dihitung daripada sudut. Namun, Anda kehilangan sifat bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita dapat mengubah nilai perkiraan untuk sudut wa menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

>fracprint(sin(wa)^2)

```
9/25
```

Hukum kosinus trgonometri klasik diterjemahkan menjadi "hukum silang" berikut.

$$(c + b - a)^2 = 4bc\,(1 - s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadran sisi-sisi segitiga, dan sa adalah sebaran di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berseberangan dengan sudut A.

Hukum-hukum ini diimplementasikan dalam berkas geometry.e yang kami muat ke Euler.

>$crosslaw(aa, bb, cc, saa)(cc + bb - aa)^2 = 4\,bb\,cc\,(1 - saa)$\$Dalam kasus kami, kami mendapatkan

>$crosslaw(a, b, c, sa)1024 = 1024$\$Mari kita gunakan hukum silang ini untuk menemukan sebaran di A. Untuk melakukannya, kita buat hukum silang untuk kuadran a, b, dan c, dan selesaikan untuk sebaran yang tidak diketahui sa.

Anda dapat melakukannya dengan mudah secara manual, tetapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kita mendapatkan hasil yang sudah kita miliki.

>\$crosslaw(a,b,c,x), $solve(1024 = 1600\,(1 - x)$\$

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

Kita sudah tahu ini. Definisi sebaran adalah kasus khusus dari hukum silang.

Kita juga dapat memecahkan ini untuk a,b,c umum. Hasilnya adalah rumus yang menghitung sebaran sudut segitiga yang diberikan kuadran ketiga sisinya.

>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)

$$\left[x=\frac{-cc^2-(-2\,bb-2\,aa)\;cc-bb^2+2\,aa\,bb-aa^2}{4\,bb\,cc}\right]$$

Kita dapat membuat fungsi dari hasil tersebut. Fungsi tersebut telah didefinisikan dalam berkas geometry.e milik Euler.

$>spread(a,b,c)\frac{9}{25}Sebagaicontoh, kitadapatmenggunakannyauntukmenghitungsudutsegitigadengansisi\text{-}sisia, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$Hasilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

$>spread(a,a,4a/7)\frac{6}{7}$$Ini adalah sudut dalam derajat.

>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))

```
67°47′32.44′′
```

Contoh Lain Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih maju.

Kita tentukan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
> setPlotRange(-1,5,1,7); ...
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
> insimg;

Dengan menggunakan Pythagoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Pertama-tama saya menggunakan fungsi distance dari file Euler untuk geometri. Fungsi distance menggunakan geometri klasik.

$>distance(A,B)\sqrt{10}$$Euler juga memuat fungsi untuk kuadran antara dua titik.

Dalam contoh berikut, karena c+b bukan a, segitiga tersebut bukan persegi panjang.

>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); a,10$

$$5$$

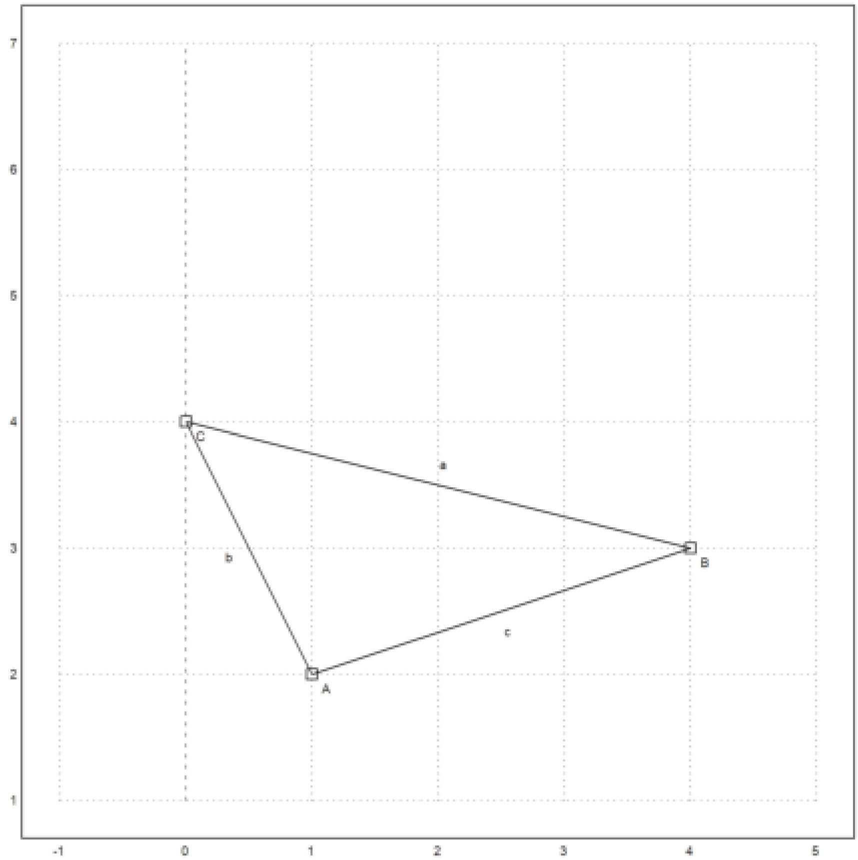
$$17$$

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan perkalian titik dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan floating point.

$$A=<1,2> \quad B=<4,3>, \quad C=<0,4>$$

$$\mathbf{a}=C-B=<-4,1>, \quad \mathbf{c}=A-B=<-3,-1>, \quad \beta=\angle ABC$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{c}=|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|\cos\beta$$



Gambar 6.28 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-098.png

$$\cos \angle ABC = \cos \beta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12-1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\,\sqrt{17}}\right)$$

32.4711922908

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kita masukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan selesaikan untuk x.

>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(4 = 200\ (1-x)$$

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

Yaitu, apa yang dilakukan fungsi sebaran yang didefinisikan dalam "geometry.e".

>sb &= spread(b,a,c); $sb\frac{49}{170}$$Maxima memperoleh hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Maxima memang menyelesaikan suku sin(arccos(...)) menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

>$sin(computeAngle(A,B,C))^2\frac{49}{170}Setelahkitamemilikisebarandi B, kitadapatmenghitungtinggihapadasi$
$\frac{h_a}{c}$$menurut definisi.

>ha &= c*sb; $ha\frac{49}{17}$$Gambar berikut ini dibuat dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan sebaran.

gambar: (20) Rational_Geometry_CaR.png

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

>$sqrt(ha)\frac{7}{\sqrt{17}}$$Sekarang kita bisa menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita sedang membahas tentang kuadran!

>$sqrt(ha)sqrt(a)/2\frac{7}{2}$$Rumus determinan yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

>$areaTriangle(B,A,C)

$$\frac{7}{2}$$

6.9 Rumus Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

>&remvalue(a,b,c,sb,ha);

Pertama-tama kita hitung sebaran di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita hitung luas kuadrat (yang disebut “quadrea”?), faktorkan dengan Maxima, dan kita dapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

>$spread(b^{2,c}2,a^2), $factor(%*c^{2*a}2/4)

$$\frac{-c^4-\left(-2\,b^2-2\,a^2\right)\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}{4\,a^2\,c^2}$$
$$\frac{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}{16}$$

6.10 Aturan Triple Spread

Kerugian spread adalah tidak lagi sekadar menambahkan sudut yang sama.

Namun, tiga spread segitiga memenuhi aturan “triple spread” berikut.

>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)

$$\left(sc+sb+sa\right)^2=2\,\left(sc^2+sb^2+sa^2\right)+4\,sa\,sb\,sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang jumlahnya mencapai 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Karena sebaran

$$\alpha, \pi-\alpha$$

sama, aturan sebaran rangkap tiga juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta=\gamma$$

Karena sebaran sudut negatif sama, aturan sebaran rangkap tiga juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

Misalnya, kita dapat menghitung sebaran sudut 60°. Yaitu 3/4. Persamaan tersebut memiliki solusi kedua, di mana semua sebarannya adalah 0.

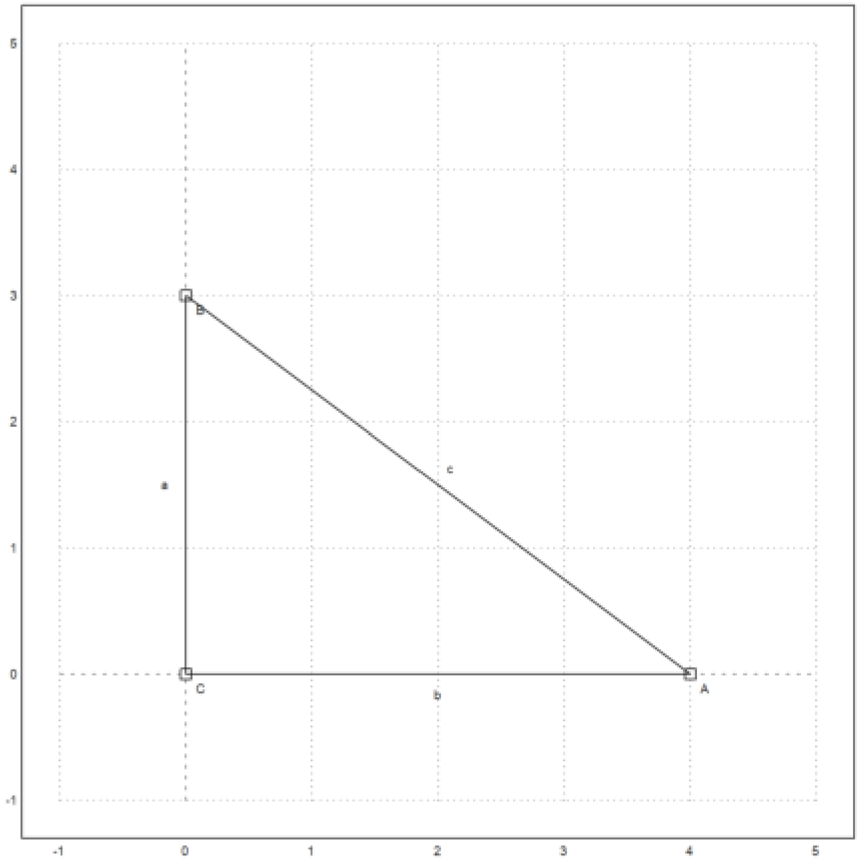
>$solve(triplespread(x,x,x),x)

$$\left[x=\frac{3}{4},x=0\right]$$

Sebaran 90° jelas adalah 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi 90°, sebarannya memecahkan persamaan sebaran rangkap tiga dengan a,b,1. Dengan perhitungan berikut kita memperoleh a+b=1.

>$triplespread(x,y,1), $solve((y+x+1)^2=2\,(y^2+x^2+1)+4\,x\,y$$

$$\left[x=1-y\right]$$



Gambar 6.29 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-128.png

Karena sebaran 180°-t sama dengan sebaran t, rumus sebaran rangkap tiga juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau selisih dari dua sudut lainnya.

Jadi kita dapat menemukan sebaran sudut yang digandakan. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kita buat ini menjadi fungsi.

>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))

$$\left[x=4\,a-4\,a^2 , x=0\right]$$

- 4 (a - 1) a

6.11 Garis Bagi Sudut

Kita sudah tahu situasinya seperti ini.

>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
> setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
> insimg;

Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Namun, kita ingin menyelesaikannya untuk a,b,c umum.

>&remvalue(a,b,c);

Jadi pertama-tama kita hitung sebaran sudut yang dibagi dua di A, menggunakan rumus sebaran rangkap tiga.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Rumus ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut yang dibagi dua 180°-wa.

>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2

$$\left(2\,x+\frac{a}{b+a}\right)^2=2\,\left(2\,x^2+\frac{a^2}{\left(b+a\right)^2}\right)+\frac{4\,a\,x^2}{b+a}$$

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a},x=\frac{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}\right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]$ $\frac{1}{10}$ $Kita dapat mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer sebaran ke radian.

>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)

```
18°26'5.82''
```

Titik P merupakan perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

>P := [0,tan(wa2)*4]

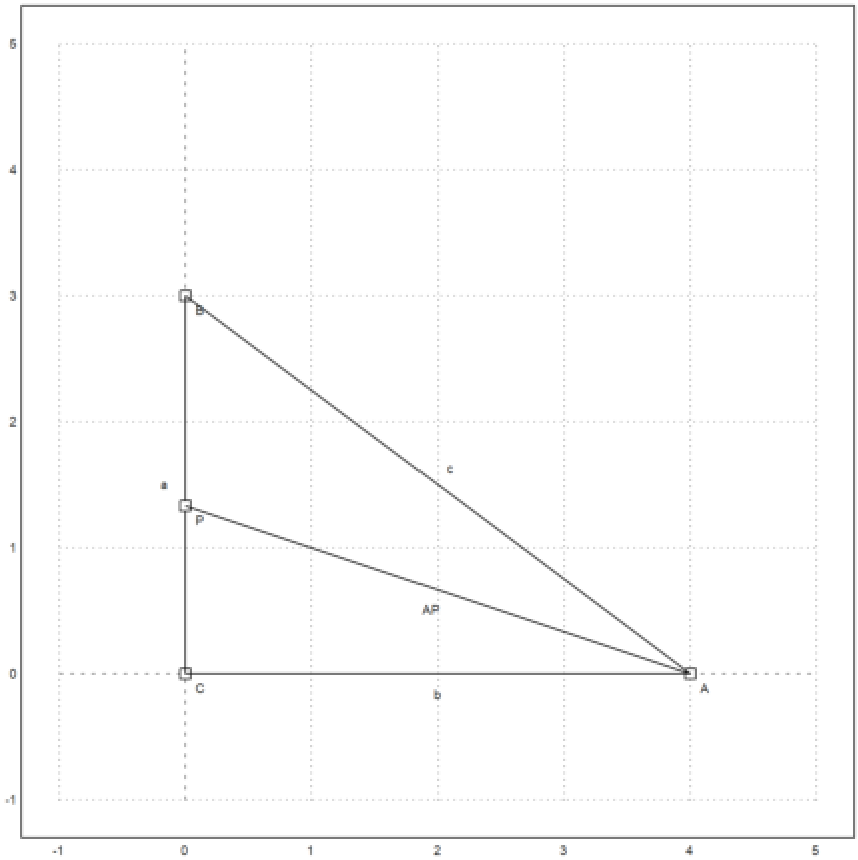
```
[0,  1.33333]
```

>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):

Mari kita periksa sudut-sudut pada contoh spesifik kita.

>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)

```
0.321750554397
0.321750554397
```



Gambar 6.30 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-133.png

Sekarang kita hitung panjang garis bagi AP.

Kita gunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku di sembarang segitiga. Kuadratkan, maka akan menghasilkan apa yang disebut "hukum sebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

di mana a,b,c menunjukkan kuadran.

Karena CPA sebaran adalah 1-sa2, kita peroleh darinya bisa/1=b/(1-sa2) dan dapat menghitung bisa (kuadran garis bagi sudut).

>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa\frac{2\,b\,(b+a)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Egyptian kita.

>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3$^{2,b=4}$2])")), distance(A,P)

```
4.21637021356
4.21637021356
```

Kita juga dapat menghitung P menggunakan rumus spread.

>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py

$$-\frac{b\left(\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}-b-a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

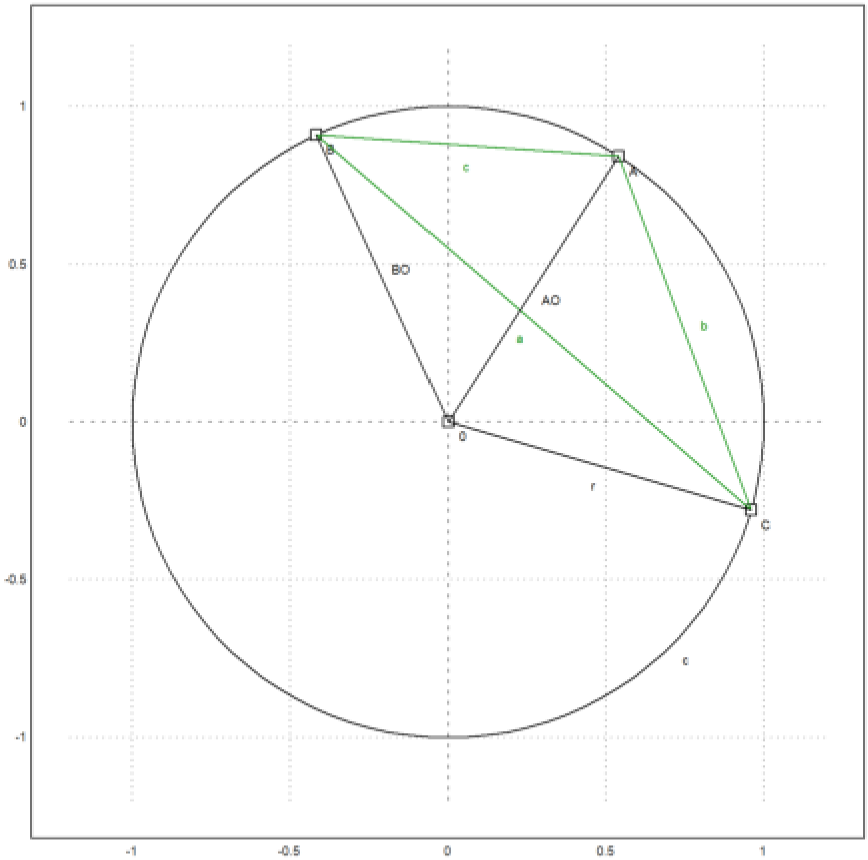
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3$^{2,b=4}$2])"))

```
1.33333333333
```

6.12 Sudut Tali Busur

Perhatikan situasi berikut.

>setPlotRange(1.2); ...
> color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
> A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
> color(1); O:=[0,0]; plotPoint(O,"0"); ...



Gambar 6.31 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-138.png

> plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
> insimg;

Kita dapat menggunakan Maxima untuk memecahkan rumus penyebaran rangkap tiga untuk sudut-sudut di pusat O untuk r. Dengan demikian, kita memperoleh rumus untuk jari-jari kuadrat pericircle dalam bentuk kuadran sisi-sisinya.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa nol kompleks, yang kita abaikan.

>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru

>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

Kita dapat menjadikannya fungsi Euler.

>function periradius(a,b,c) &= rabc;

Mari kita periksa hasilnya untuk titik A, B, C.

>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);

Radiusnya memang 1.

>periradius(a,b,c)

```
1
```

Faktanya, sebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut tali busur.

>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp

$$\frac{b}{4}$$

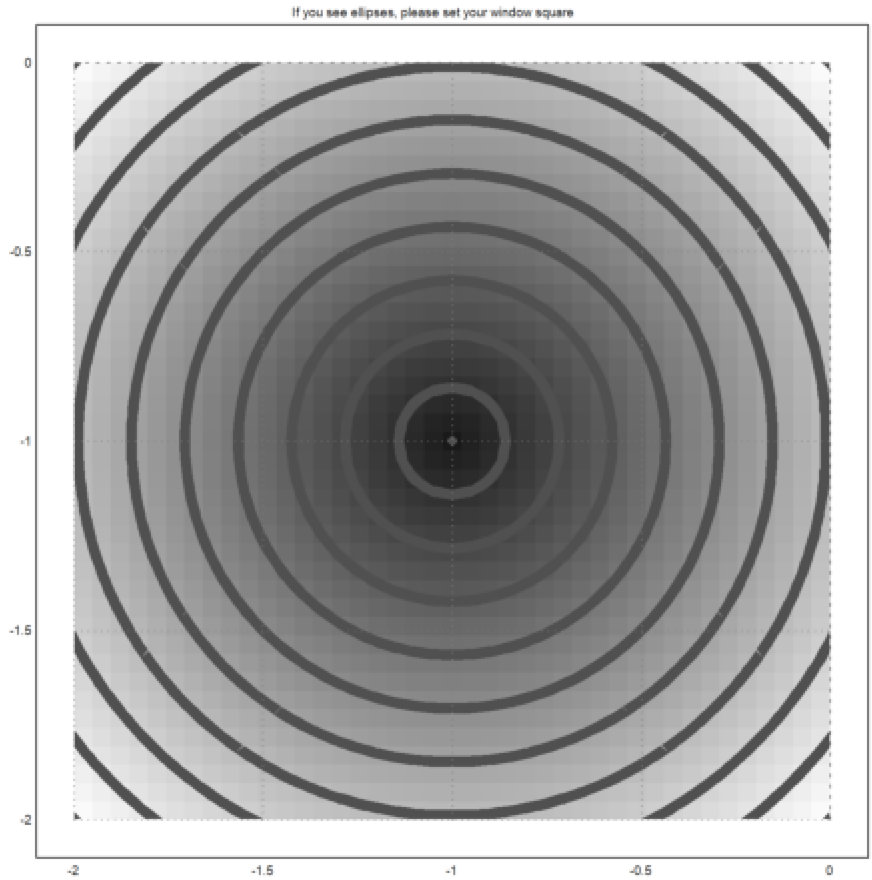
Faktanya, sebarannya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut tali busur b adalah setengah sudut pusat.

>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp

$$0$$

6.13 Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Catatan awal Fungsi yang, pada titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis datar yang cukup sederhana: lingkaran yang berpusat di A.



Gambar 6.32 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-142.png

>&remvalue();

>A=[-1,-1];

>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])$^{2+(y-A[2])}$2)

>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
> title="If you see ellipses, please set your window square"):

dan grafiknya cukup sederhana: bagian atas kerucut:

>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):

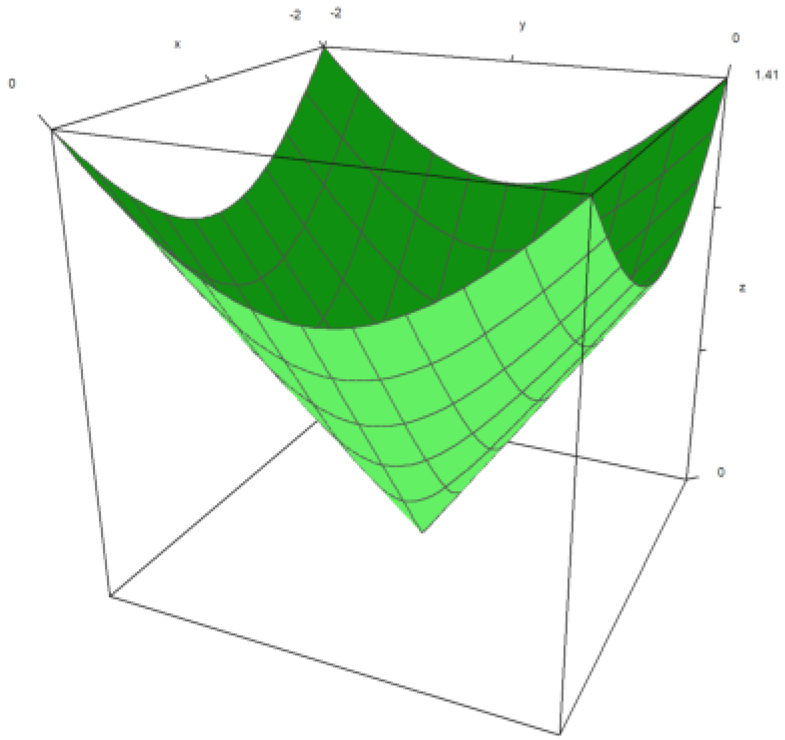
Tentu saja minimum 0 dicapai di A.

Dua titik

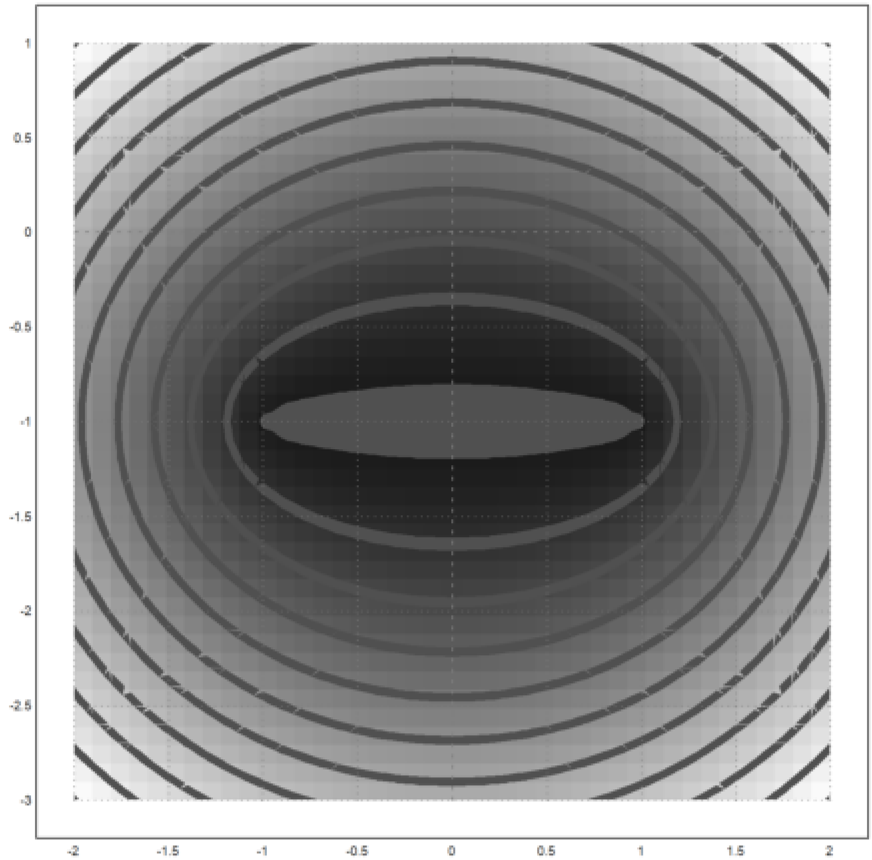
Sekarang kita lihat fungsi MA+MB di mana A dan B adalah dua titik (tetap). Merupakan "fakta yang diketahui" bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali untuk minimum AB yang konstan pada segmen [AB]:

>B=[1,-1];

>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])$^{2+(y-B[2])}$2)



Gambar 6.33 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-143.png



Gambar 6.34 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-144.png

>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):

Grafiknya lebih menarik:

>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):

Pembatasan pada garis (AB) lebih terkenal:

>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):

Tiga poin

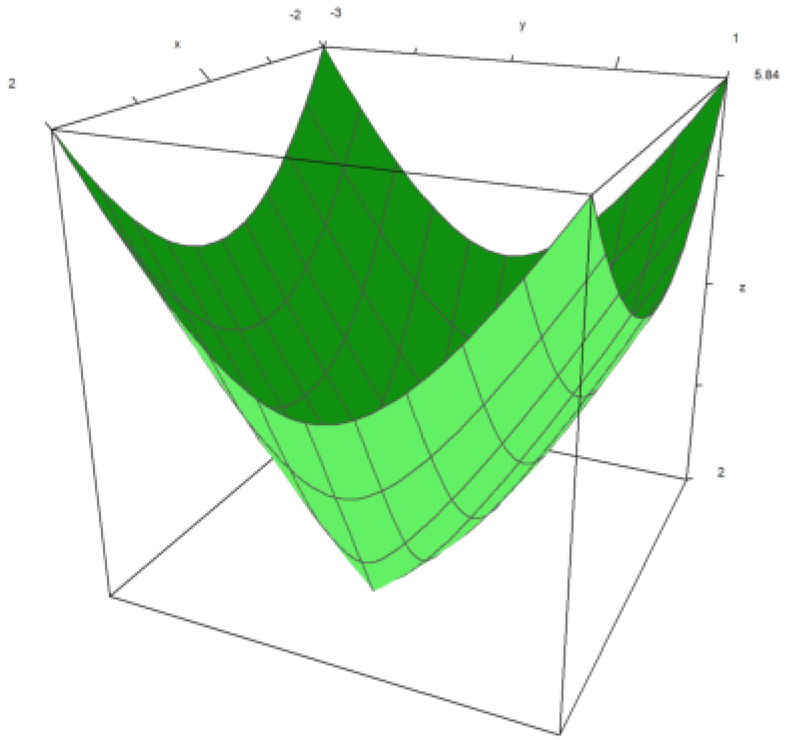
Sekarang semuanya menjadi kurang sederhana: Tidak banyak yang tahu bahwa MA+MB+MC mencapai nilai minimumnya di satu titik bidang, tetapi menentukannya tidaklah sesederhana itu:

1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (misalkan di A), maka nilai minimumnya tercapai di titik ini (misalkan AB+AC).

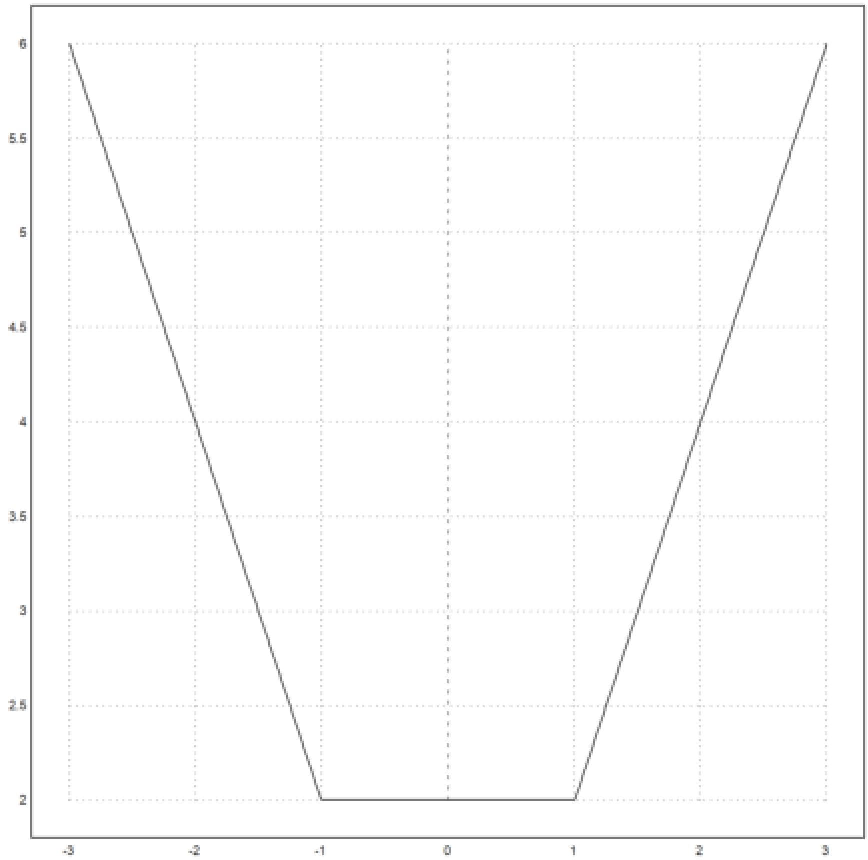
Contoh:

>C=[-4,1];

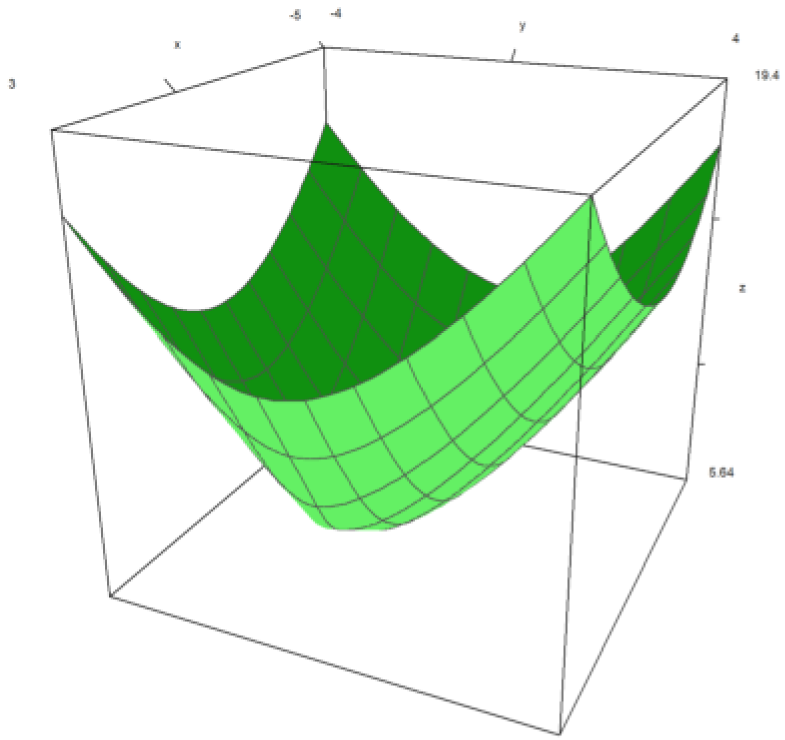
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])$^{2+(y-C[2])}$2)



Gambar 6.35 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-145.png



Gambar 6.36 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-146.png



Gambar 6.37 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-147.png

>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);

>insimg;

>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");

>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);

>insimg;

2) Namun jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120°, maka nilai minimumnya berada di titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang sudut-sudut sisi ABC-nya sama (masing-masing sudutnya 120°):

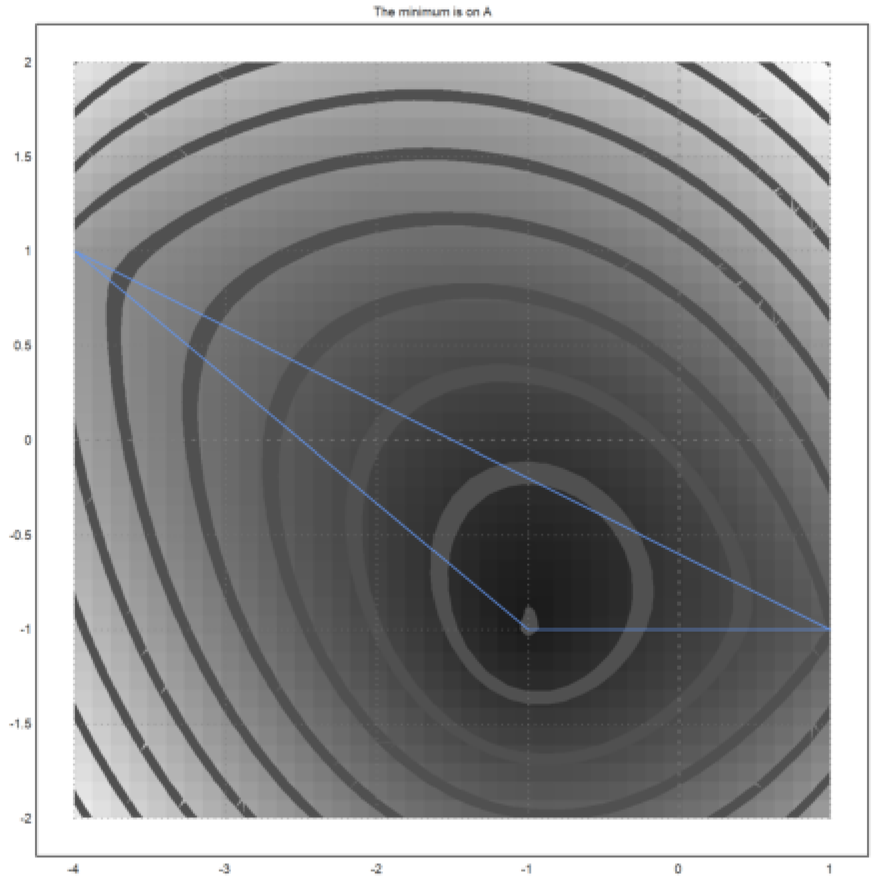
>C=[-0.5,1];

>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):

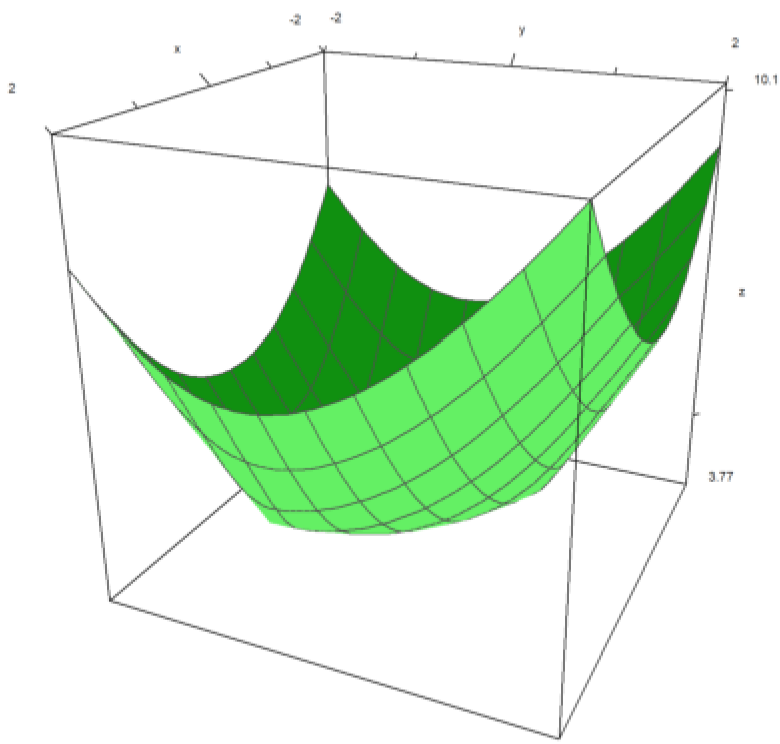
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");

>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);

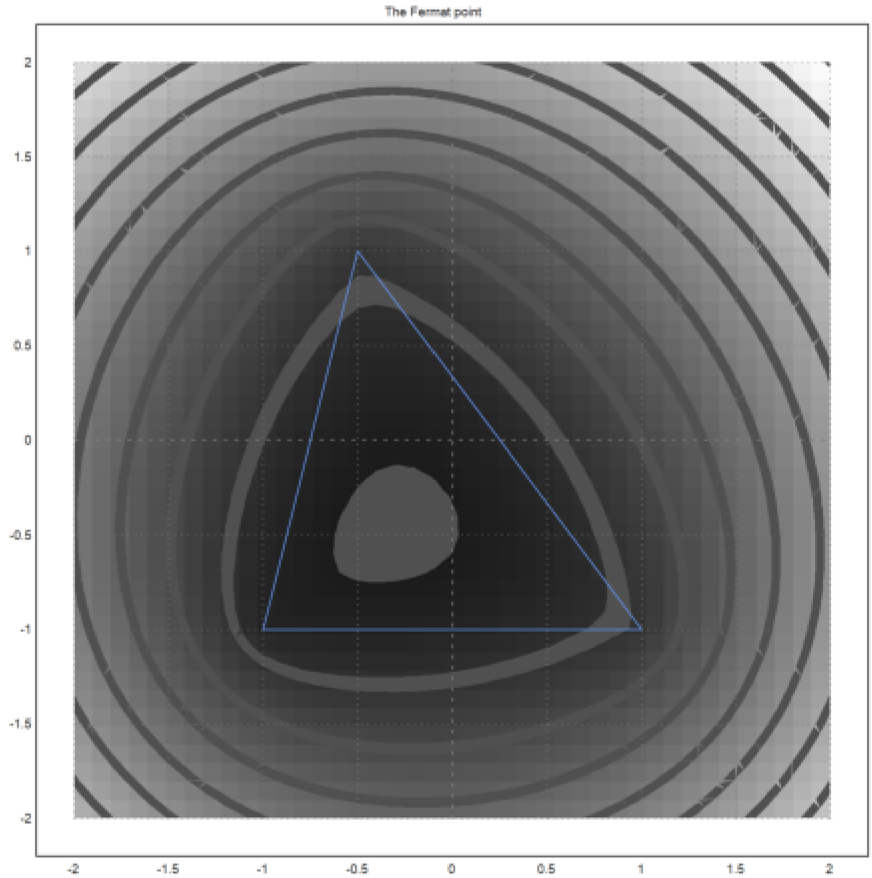
>insimg;



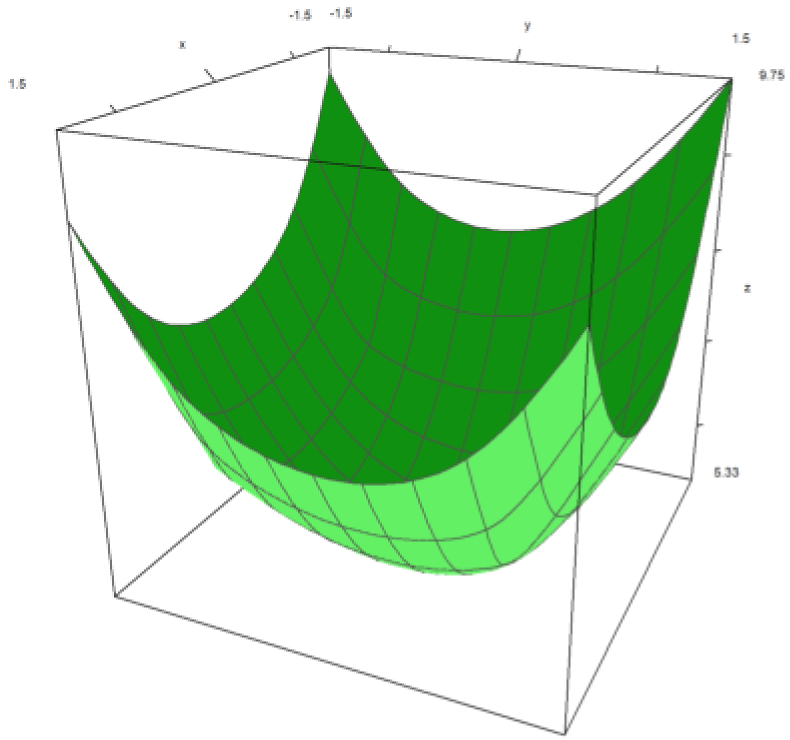
Gambar 6.38 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-148.png



Gambar 6.39 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-149.png



Gambar 6.40 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-150.png



Gambar 6.41 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-151.png

Merupakan aktivitas yang menarik untuk mewujudkan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; misalnya, saya mengetahui perangkat lunak yang ditulis dalam Java yang memiliki instruksi "garis kontur"...

Semua ini ditemukan oleh seorang hakim Prancis bernama Pierre de Fermat; ia menulis surat kepada para dilettan lain seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di pajak penghasilan. Jadi titik unik F sehingga FA+FB+FC minimal, disebut titik Fermat dari segitiga tersebut. Namun tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Bagaimanapun tradisinya adalah mencatat titik F ini...

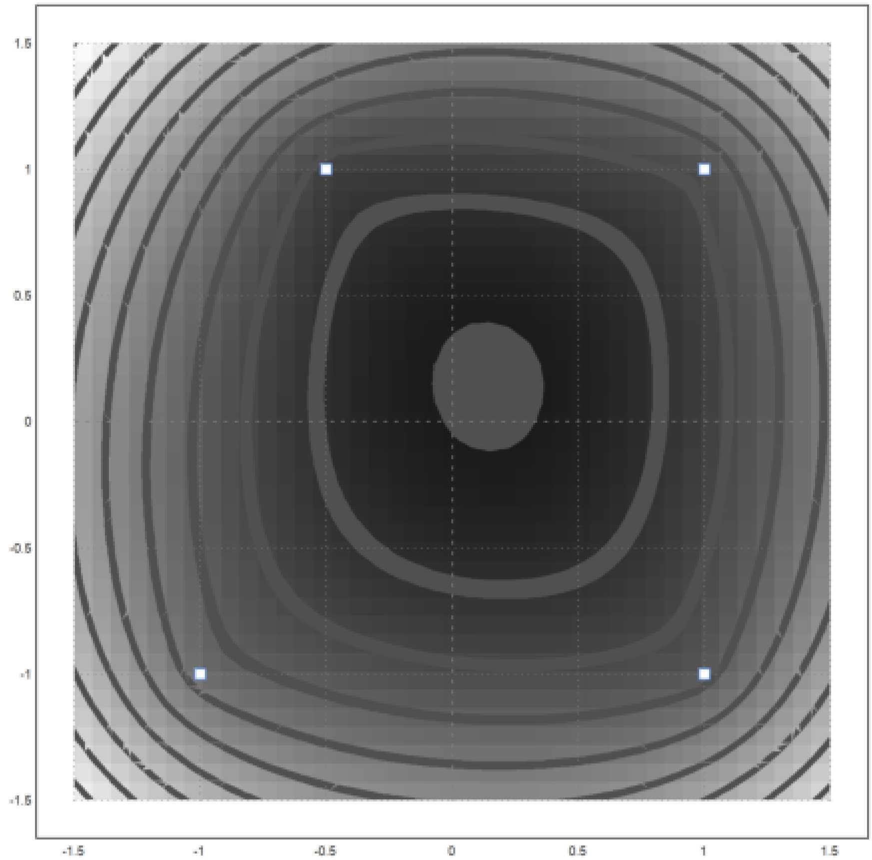
Empat titik Langkah berikutnya adalah menambahkan titik ke-4 D dan mencoba meminimalkan MA+MB+MC+MD; katakanlah Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antena Anda sehingga Anda dapat menyalurkan sinyal ke empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

>D=[1,1];

>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])$^{2+(y-D[2])}$2)

>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):

>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);



Gambar 6.42 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-152.png

>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);

>insimg;

Masih terdapat nilai minimum dan tidak tercapai di titik A, B, C, maupun D:

>function f(x):=d4(x[1],x[2])

>neldermin("f",[0.2,0.2])

```
[0.142858,  0.142857]
```

Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal bersifat rasional atau mendekati rasional…

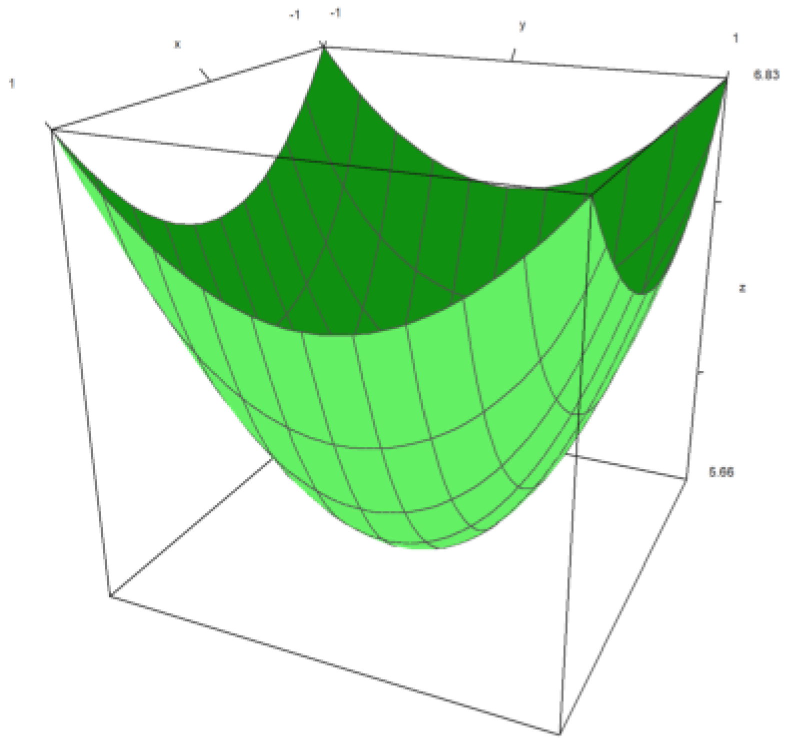
Sekarang ABCD adalah persegi, kita mengharapkan bahwa titik optimal akan menjadi pusat ABCD:

>C=[-1,1];

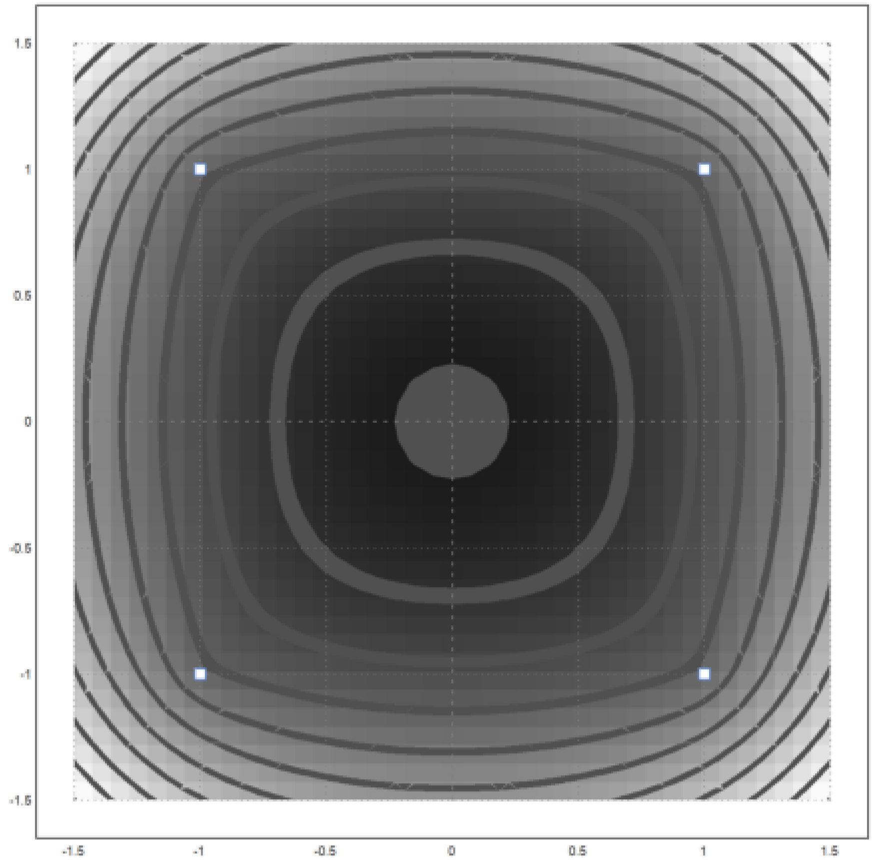
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):

>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);

>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);



Gambar 6.43 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-153.png



Gambar 6.44 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-154.png

>insimg;

6.14 Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe di jalur program.

Pertama, kita hitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah, Anda melihat bahwa kita memerlukan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

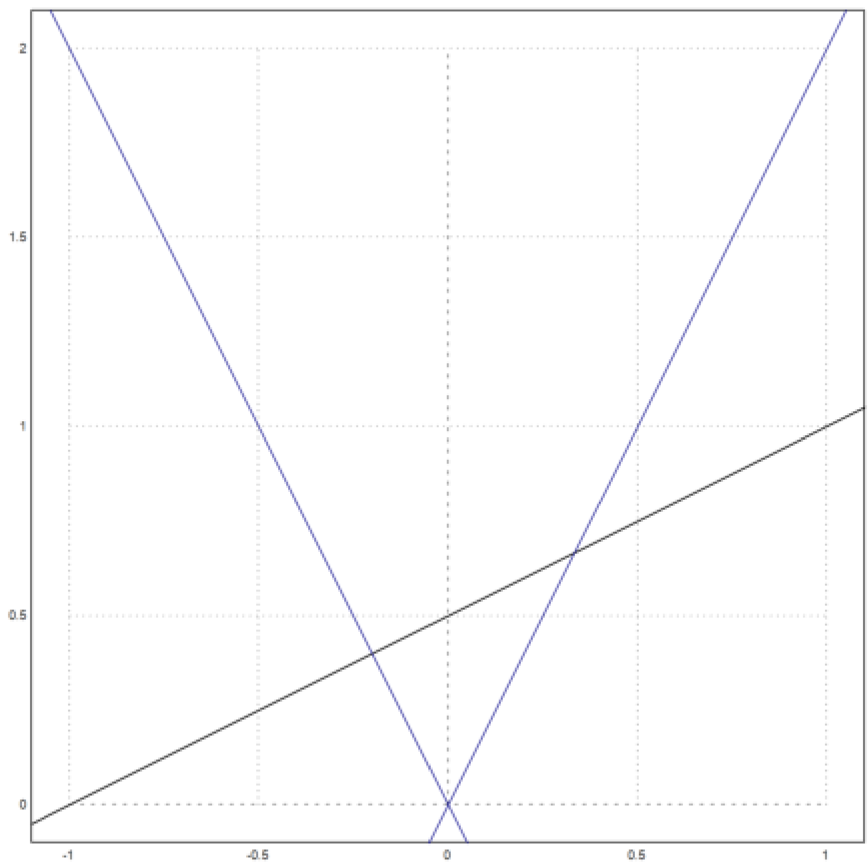
Kami menggunakan file geometry.e milik Euler untuk ini.

>load geometry;

Pertama dua garis membentuk kerucut.

>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])

```
[- a, 1, 0]
```



Gambar 6.45 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-155.png

>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])

$$[-a, -1, 0]$$

Lalu baris ketiga.

>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])

$$[-1, 2, 1]$$

Kita merencanakan segalanya sejauh ini.

>setPlotRange(-1,1,0,2);

>color(black); plotLine(g(),"“)

>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),"“), plotLine(g2(),"“):

Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

>P &= [0,u]

```
[0, u]
```

Hitunglah jarak ke g1.

>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Hitunglah jarak ke g.

>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-1\right)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran, yang jaraknya sama.

>sol &= solve(d1$^{2=d}$2,u); $sol

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1},u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.

Kita mengevaluasi solusi simbolik, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

>u := sol()

```
[0.333333,  1]
```

>dd := d()

```
[0.149071,  0.447214]
```

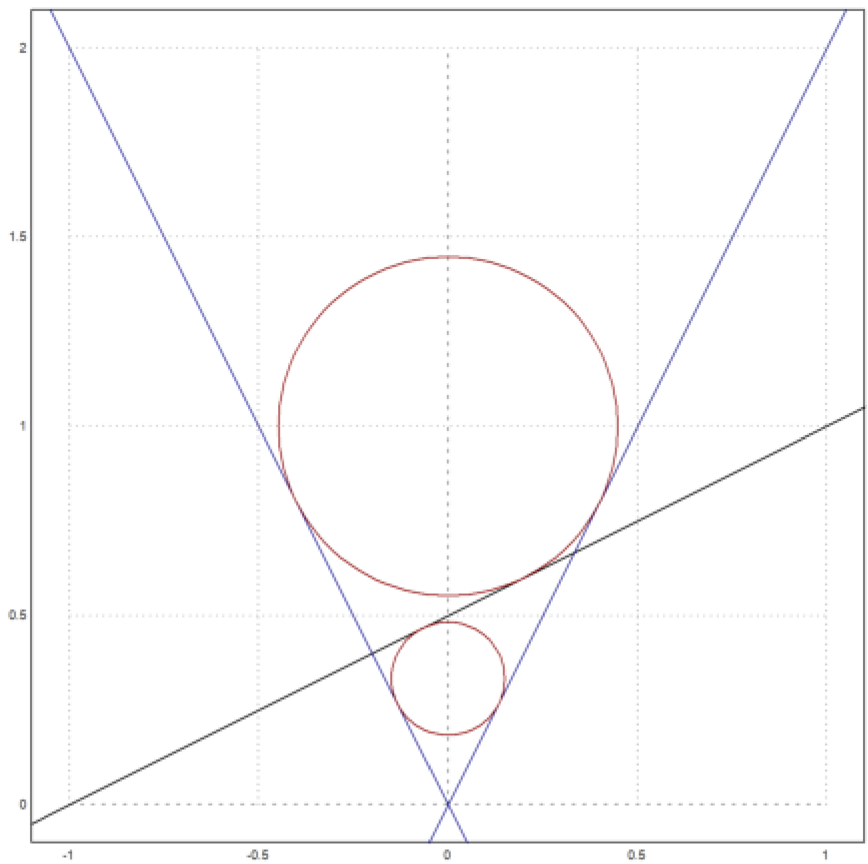
Gambarkan lingkaran-lingkaran tersebut ke dalam gambar.

>color(red);

>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");

>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");

>insimg;



Gambar 6.46 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-159.png

6.15 Plot dengan Povray

Selanjutnya kita plot semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama-tama kita memuat fungsi povray.

>load povray;

>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kami menyiapkan suasananya dengan tepat.

>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);

Berikutnya kita menulis kedua bola itu ke dalam file Povray.

>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));

>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));

Dan kerucutnya, transparan.

>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));

Kita buat bidang yang dibatasi pada kerucut.

>gp=g();

>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");

>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];

>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));

Sekarang kita buat dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

>function turnz(v) := return

>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);

>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));

>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);

>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));

Kemudian kita buat dua titik tempat bola-bola tersebut menyentuh bidang. Titik-titik ini adalah fokus elips.

>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];

>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));

>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];

>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));

Berikutnya kita hitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);

>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));

Kita menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));

>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));

>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));

Sekarang kita buat pita abu-abu, tempat bola-bola menyentuh kerucut.

>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);

>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);

>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));

>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);

>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));

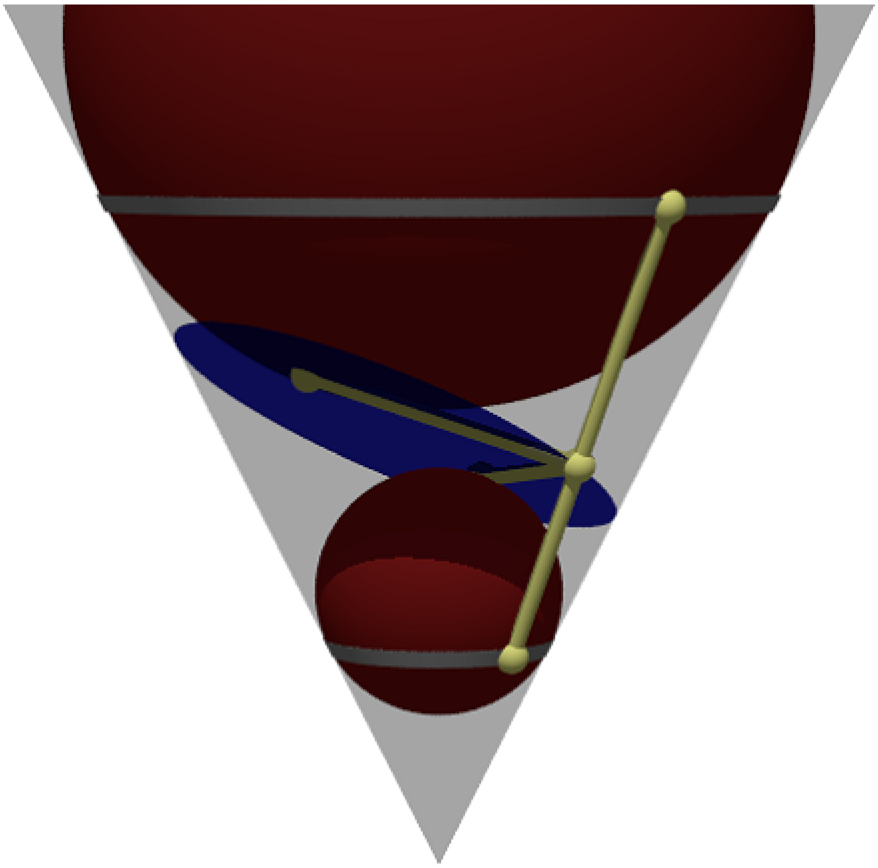
Mulai program Povray.

>povend();

Untuk mendapatkan Anaglyph ini, kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali nanti.

>function scene () ...

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
```



Gambar 6.47 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-160.png

```
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda memerlukan kacamata merah/cyan untuk menghargai efek berikut.

>povanaglyph(“scene”,zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);

6.16 Contoh 8: Geometri Bumi

Dalam buku catatan ini, kami ingin melakukan beberapa perhitungan sferis. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam berkas “spherical.e” di folder contoh. Kami perlu memuat berkas tersebut terlebih dahulu.

>load “spherical.e”;

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut ini adalah koordinat untuk Kampus FMIPA UNY.

>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]

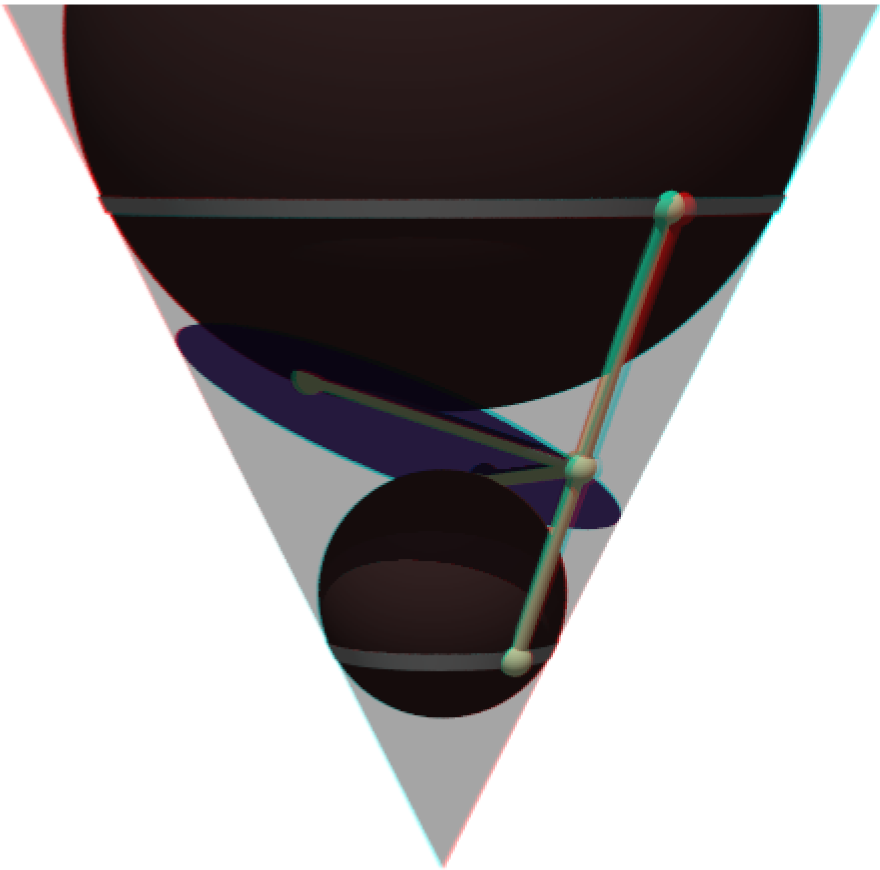
```
[-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bulat).

>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY

```
S 7°46.467’ E 110°23.050’
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.



Gambar 6.48 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-161.png

>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];

>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),

```
S 7°34.333′ E 110°49.683′
S 6°59.050′ E 110°24.533′
```

Pertama, kita hitung vektor dari satu ke yang lain pada bola ideal. Vektor ini adalah [arah, jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo

```
65°20′26.60′′
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang bagus. Rutin berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik lagi. Pada jarak yang pendek, hasilnya hampir sama.

>esdist(FMIPA,Semarang)-> “km” // perkiraan jarak FMIPA-Semarang

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan jarak FMIPA-Semarang (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
esdist(FMIPA,Semarang)-&gt; "km" // perkiraan jarak FMIPA-Semaran ...
                               ^
```

Ada fungsi untuk judul, yang memperhitungkan bentuk elips bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))

```
     65.34°
```

Sudut suatu segitiga melebihi 180° pada bola.

>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo); degprint(asum)

```
180°0′10.77′′
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

>(asum-pi)*rearth(48°)^2->” km^2” // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
(asum-pi)*rearth(48°)^2-&gt;" km^2" // perkiraan luas segitiga FM ...
                                ^
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan lintang rata-rata segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Vektor berisi arah dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan vektor ke posisi, kita menggunakan saddvector.

>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bentuk bola yang ideal. Sama halnya di bumi.

>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita lihat contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];

>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami memperoleh perkiraan yang baik.

>esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
esdist(Tugu,Monas)-&gt;" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Mona ...
                                ^
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth..

>degprint(esdir(Tugu,Monas))

```
294°17'2.85''
```

Akan tetapi, kita tidak lagi memperoleh posisi target yang tepat, jika kita menambahkan arah dan jarak ke posisi awal. Hal ini terjadi karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, tetapi mengambil perkiraan radius bumi di sepanjang lintasan.

>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun, kesalahannya tidak besar.

>sposprint(Monas),

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu saja, kita tidak dapat berlayar dengan arah yang sama dari satu tujuan ke tujuan lain, jika kita ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang ke arah timur laut mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kita jauh dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan arah yang sama selama perjalanan kita.

>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);

Sekarang kita tambahkan 10 dikalikan sepersepuluh jaraknya, dengan memakai arah ke Monas, kita sampai di Tugu.

>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;

Hasilnya sangat jauh.

>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))

```
S 6°11.250' E 106°48.372'
     1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];

Lintasan terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran lintang 30°, tetapi lintasan yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

>sdegprint(esdir(P1,P2))

```
     79.69°
```

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kita menyesuaikannya pada 1/10 dari total jarak.

>p=P1; dist=esdist(P1,P2); ...
> loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;

```
     79.69°
     81.67°
     83.71°
     85.78°
     87.89°
     90.00°
     92.12°
     94.22°
     96.29°
     98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti arah yang sama terlalu lama.

>skmprint(esdist(p,P2))

```
     0.203km
```

Kita memperoleh perkiraan yang baik, jika kita menyesuaikan arah setelah setiap 1/100 jarak total dari Tugu ke Monas.

>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
> loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;

>skmprint(esdist(p,Monas))

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
> loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;

```
S 7°46.998′ E 110°21.966′
S 7°37.422′ E 110°0.573′
S 7°27.829′ E 109°39.196′
S 7°18.219′ E 109°17.834′
S 7°8.592′ E 108°56.488′
S 6°58.948′ E 108°35.157′
S 6°49.289′ E 108°13.841′
S 6°39.614′ E 107°52.539′
S 6°29.924′ E 107°31.251′
S 6°20.219′ E 107°9.977′
S 6°10.500′ E 106°48.717′
```

Kita menulis suatu fungsi yang memplot bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

>function testplot ...

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

Sekarang rencanakan semuanya.

>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):

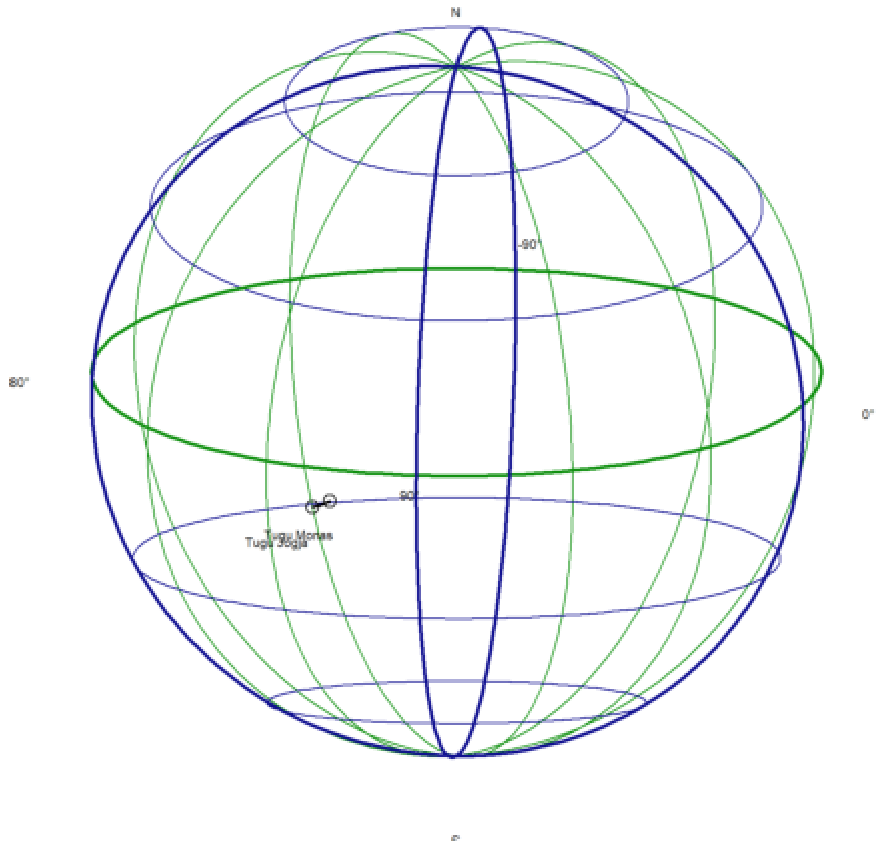
Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglifnya. Ini tampak sangat bagus dengan kaca mata merah/biru kehijauan.

>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):

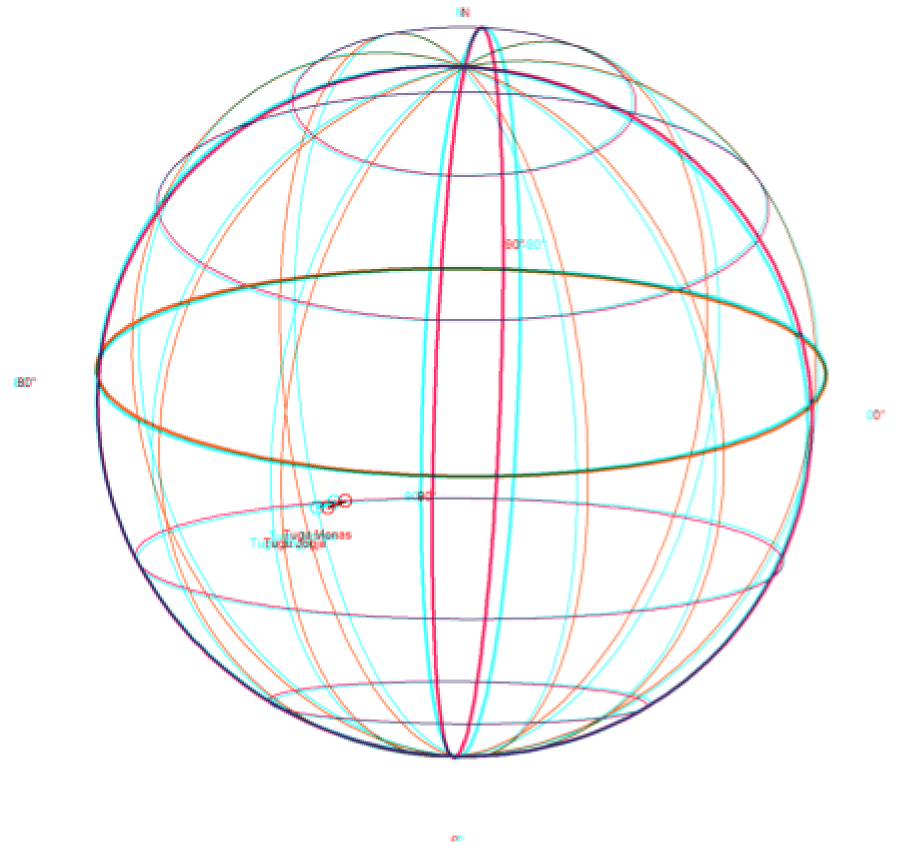
Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, danjarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jarilingkaran luar segi-n), r. Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah (360/n).



Gambar 6.49 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-162.png



Gambar 6.50 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-163.png

- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:

- Misalkan persamaan parabolanya y= ax^2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.
   - Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung (sisinya-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).
   - Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.
   - Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.
   - Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.
4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).
5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

>load geometry

```
Numerical and symbolic geometry.
```

>&remvalue();

Jawab:

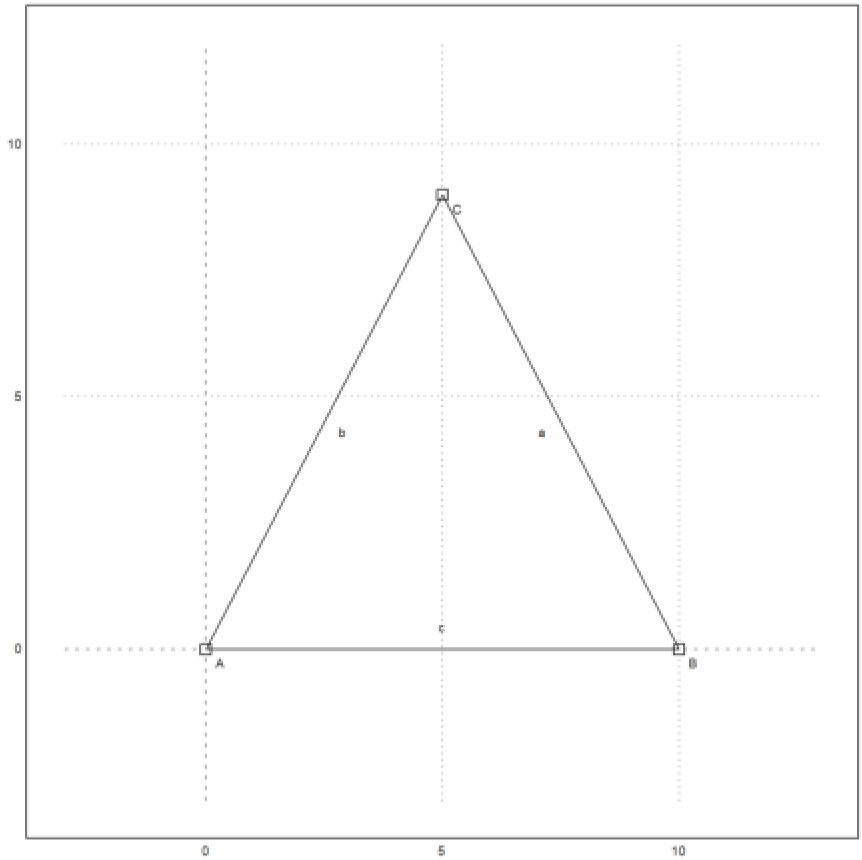
1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, danjarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jarilingkaran luar segi-n), r. Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah (360/n).
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

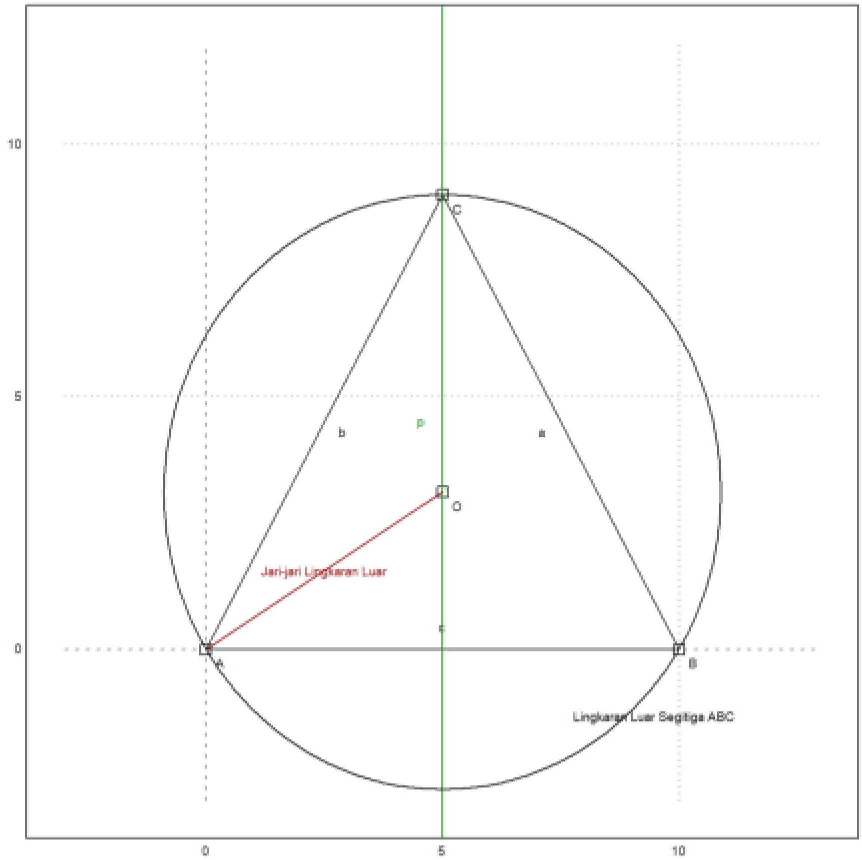
```
>setPlotRange(-3,13,-3,12);
>A=[0,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[10,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[5,9]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(C,A,"b");
>aspect(1):
>c = circleThrough(A,B,C);
>R = getCircleRadius(c);
>O = getCircleCenter(c);
>plotPoint(O,"O");
>l = angleBisector(A,C,B);
>color(3); plotLine(l); color(1);
>plotSegment(O, A, "Jari-jari Lingkaran Luar",color(2));
>color(1);
>plotCircle(c, "Lingkaran Luar Segitiga ABC"):
```

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

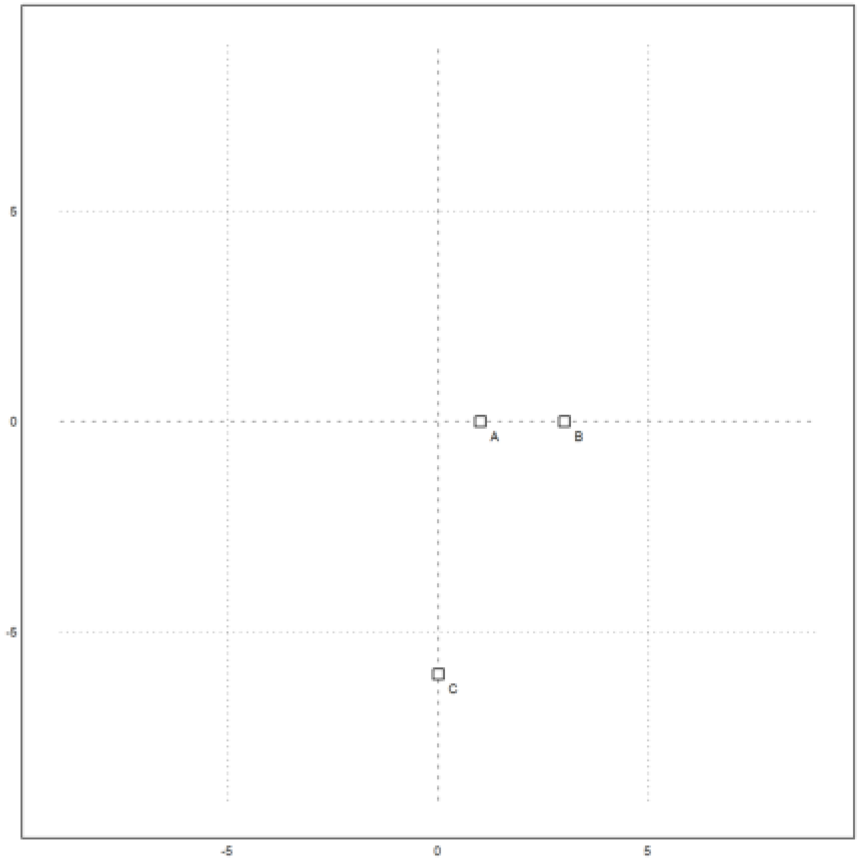
Petunjuk:



Gambar 6.51 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-164.png



Gambar 6.52 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-165.png



Gambar 6.53 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-166.png

- Misalkan persamaan parabolanya y= ax^2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

>setPlotRange(9);

>A=[1,0]; B=[3,0]; C=[0,-6]; // 3 titik yang diketahui

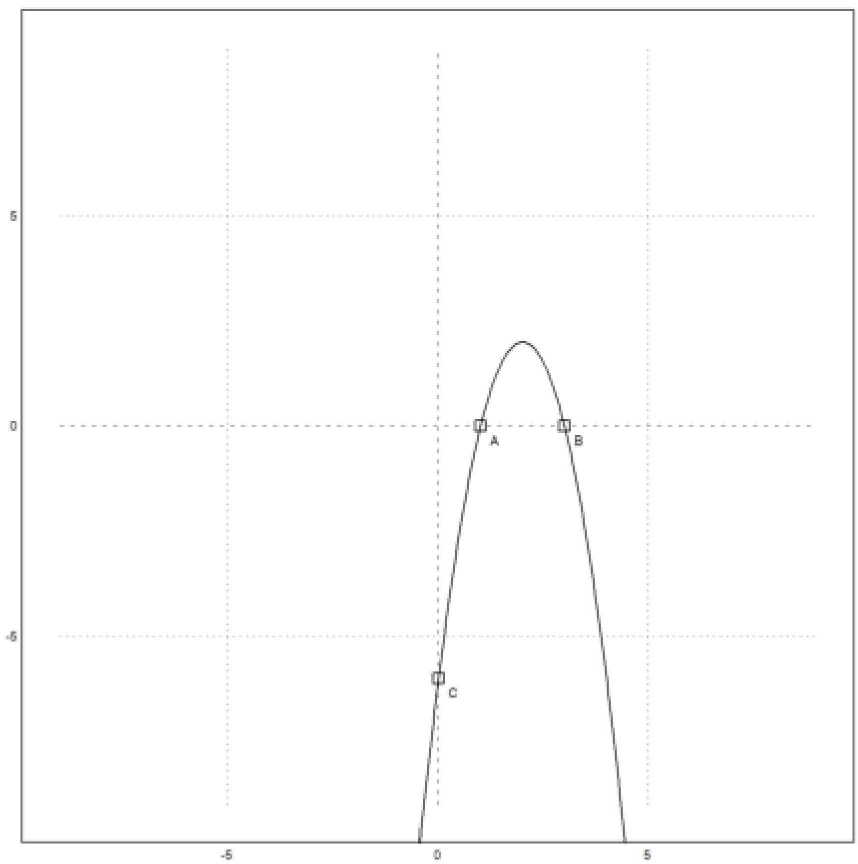
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"): // posisi 3 titik yang diketahui

>sol &= solve([a+b+c=0,9*a+3*b+c=0,0*a+0*b+c=-6],[a,b,c]) // menghitung nilai a,b,c

```
[[a = - 2, b = 8, c = - 6]]
```

>function y &= a*x^2+b*x+c; function y &= -2*x^2+8*x-6

```
                    2
               - 2 x  + 8 x - 6
```



Gambar 6.54 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-167.png

>plot2d(“-2*x^2+8*x-6”,contourcolor=6,add=1): //menambahkan parabola ke grafik

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

   - Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung (sisinya-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).
   - Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.
   - Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.
   - Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

>setPlotRange(1,6,0,5);

>A=[2,1]; plotPoint(A,“A”);

>B=[5,1]; plotPoint(B,“B”);

>C=[5,4]; plotPoint(C,“C”);

>D=[2,4]; plotPoint(D,“D”);

>plotSegment(A,B,“ “);

>plotSegment(B,C,“ “);

>plotSegment(C,D,“ “);

>plotSegment(A,D,“ “):

>l=angleBisector(A,B,C); //garis bagi sudut <ABC

>m=angleBisector(B,C,D); //garis bagi sudut <BCD

>P=lineIntersection(l,m);

>color(3); plotLine(l); plotLine(m); color(1);

>plotPoint(P,“P”):

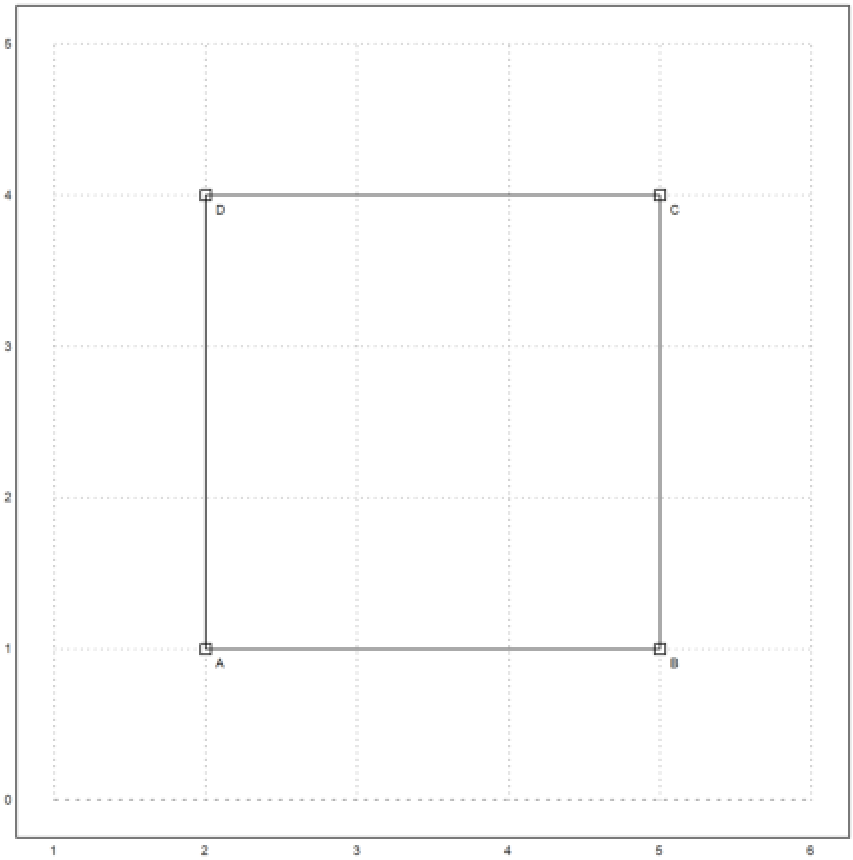
Berdasarkan gambar diatas, keempat garis bagi sudut segiempat bertemu di satu titik yaitu titik P.

>r = norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)));

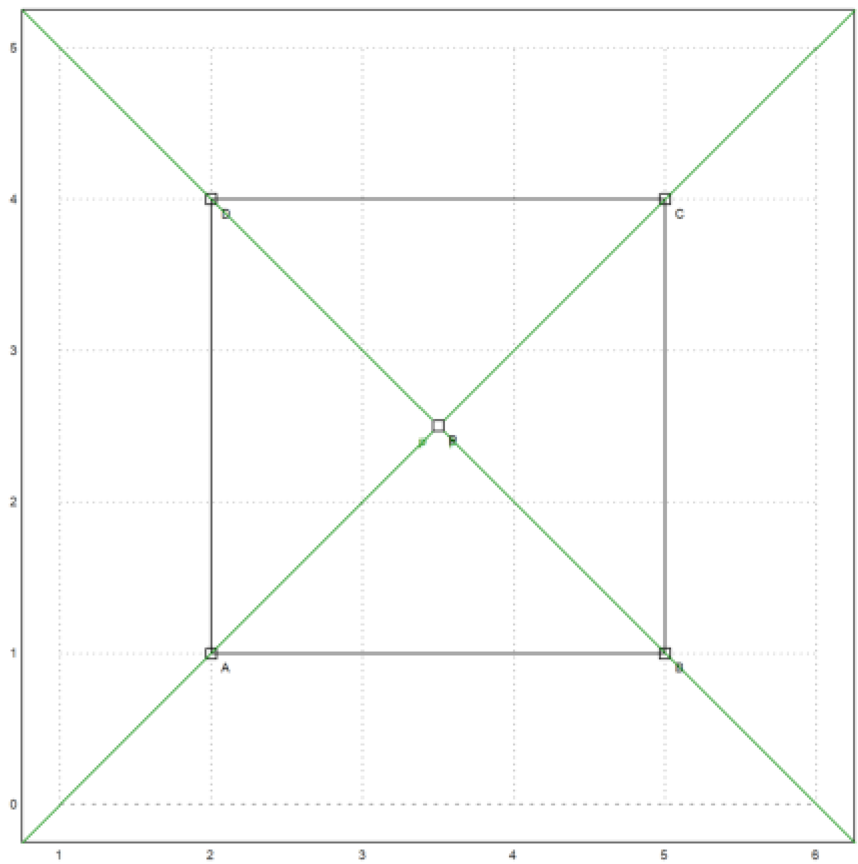
>plotCircle(circleWithCenter(P,r), “Lingkaran dalam segiempat ABCD”):

Dari gambar diatas, terlihat bahwa sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segiempat.

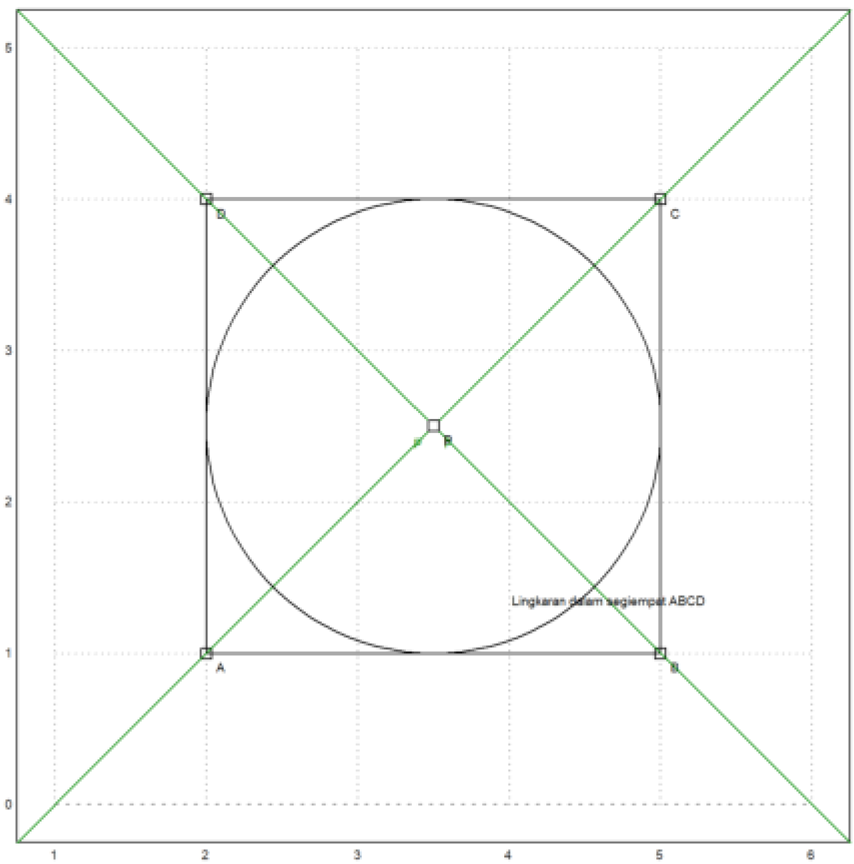
Akan ditunjukkan hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.



Gambar 6.55 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-168.png



Gambar 6.56 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-169.png



Gambar 6.57 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-170.png

Sisi AB berhadapan dengan sisi CD

>AB=norm(A-B), CD=norm(C-D) //panjang sisi AB dan CD

```
3
3
```

>AB.CD //kalikan panjang sisi yang berhadapan

```
9
```

Sisi AD berhadapan dengan sisi BC

>AD=norm(A-D), BC=norm(B-C) //panjang sisi AD dan BC

```
3
3
```

>AD.BC //kalikan panjang sisi yang berhadapan

```
9
```

Berdasarkan hasil perhitungan diatas, terbukti bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan dari segiempat diatas adalah sama, yaitu 9.

Jadi dapat disimpulkan bahwa segiempat dengan titik sudut (2,1),(5,1),(5,4), dan(2,4) merupakan segiempat garis singgung.

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

>P = [-2, 3]; Q = [2, -7];

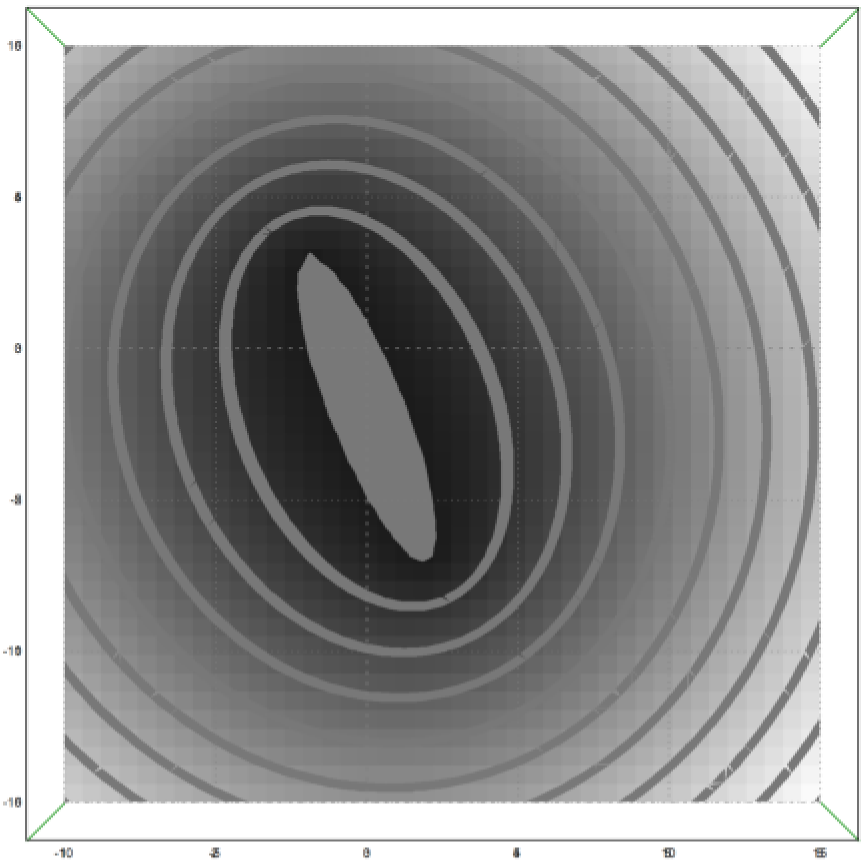
>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])$^{2+(y-p[2])}$2)

>function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])$^{2+(y-P[2])}$2)+sqrt((x-Q[1])$^{2+(y-Q[2])}$2)

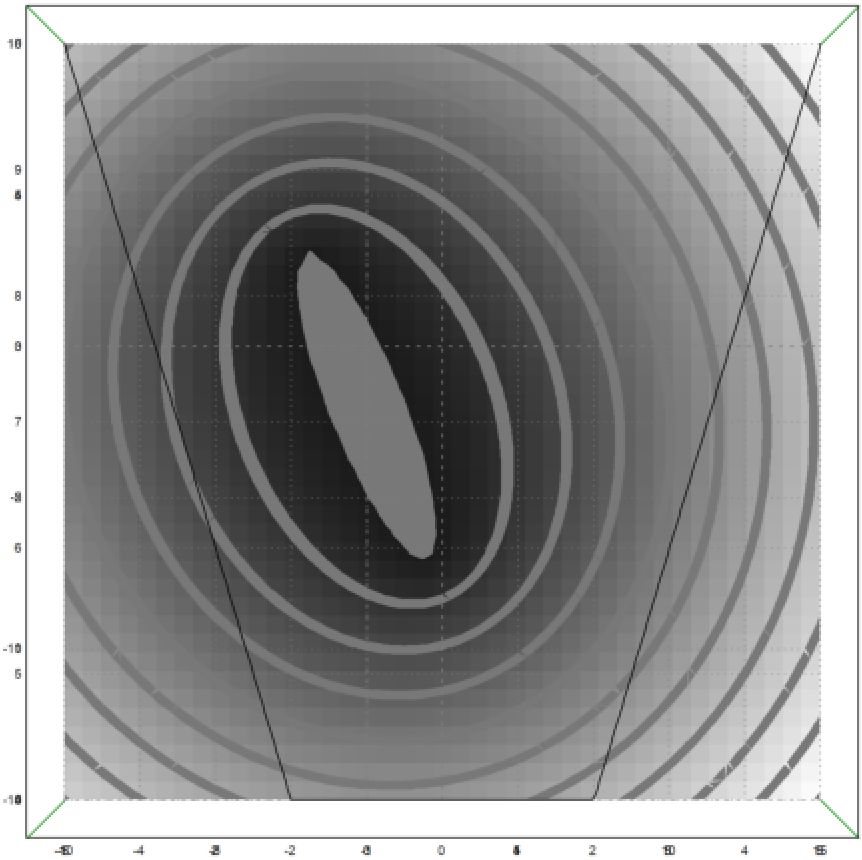
>fcontour(“d2”,xmin=-10,xmax=15,ymin=-15,ymax=10,hue=1):

5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

>plot2d(“abs(x+2)+abs(x-2)”,xmin=-5,xmax=5):



Gambar 6.58 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-171.png



Gambar 6.59 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT%20Geometry-172.png

BAB VII

EMT UNTUK STATISTIKA

Dalam buku catatan ini, kami menunjukkan plot, pengujian, dan distribusi statistik utama dalam Euler.

Mari kita mulai dengan beberapa statistik deskriptif. Ini bukan pengantar statistik. Jadi, Anda mungkin memerlukan beberapa latar belakang untuk memahami detailnya.

Asumsikan pengukuran berikut. Kami ingin menghitung nilai rata-rata dan simpangan baku yang diukur.

>M=[1000,1004,998,997,1002,1001,998,1004,998,997]; ...
> median(M), mean(M), dev(M),

```
999
999.9
2.72641400622
```

Kita dapat membuat diagram kotak dan kumis untuk data tersebut. Dalam kasus kita, tidak ada outlier.

>aspect(1.75); boxplot(M):

Kami menghitung probabilitas bahwa suatu nilai lebih besar dari 1005, dengan asumsi nilai terukur dari distribusi normal.

Semua fungsi untuk distribusi dalam Euler diakhiri dengan ...dis dan menghitung distribusi probabilitas kumulatif (CPF).

$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2}\ dt.$$

Kami mencetak hasil dalam % dengan akurasi 2 digit menggunakan fungsi cetak.

>print((1-normaldis(1005,mean(M),dev(M)))*100,2,unit=" %")

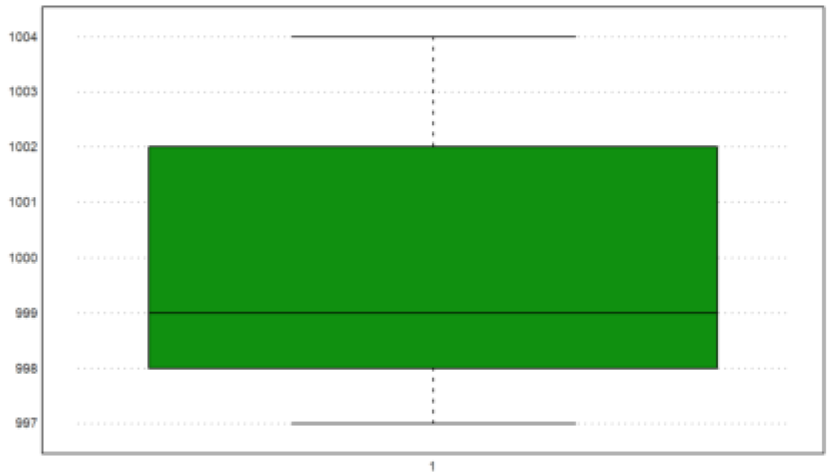
```
      3.07 %
```

Untuk contoh berikutnya, kami mengasumsikan jumlah pria berikut dalam rentang ukuran tertentu.

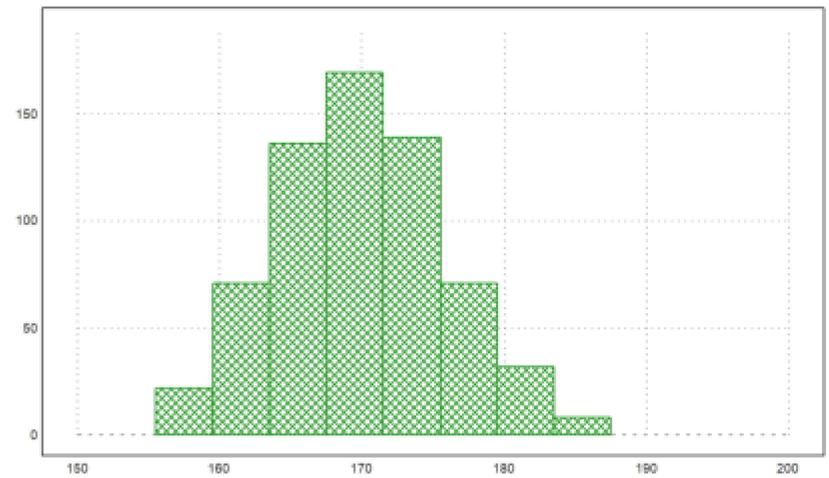
>r=155.5:4:187.5; v=[22,71,136,169,139,71,32,8];

Berikut adalah plot distribusinya.

>plot2d(r,v,a=150,b=200,c=0,d=190,bar=1,style="\/"):



Gambar 7.1 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-001.png



Gambar 7.2 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-003.png

Kita dapat memasukkan data mentah tersebut ke dalam tabel.

Tabel adalah metode untuk menyimpan data statistik. Tabel kita harus berisi tiga kolom: Awal rentang, akhir rentang, jumlah orang dalam rentang.

Tabel dapat dicetak dengan tajuk. Kita menggunakan vektor string untuk mengatur header.

>T:=r[1:8]' | r[2:9]' | v'; writetable(T,labc=["BB","BA","Frek"])

```
      BB        BA      Frek
   155.5     159.5        22
   159.5     163.5        71
   163.5     167.5       136
   167.5     171.5       169
   171.5     175.5       139
   175.5     179.5        71
   179.5     183.5        32
   183.5     187.5         8
```

Jika kita memerlukan nilai rata-rata dan statistik ukuran lainnya, kita perlu menghitung titik tengah rentang. Kita dapat menggunakan dua kolom pertama tabel kita untuk ini.

Simbol "|" digunakan untuk memisahkan kolom, fungsi "writetable" digunakan untuk menulis tabel, dengan opsi "labc" untuk menentukan header kolom.

>(T[,1]+T[,2])/2 // the midpoint of each interval

```
        157.5
        161.5
        165.5
        169.5
        173.5
        177.5
        181.5
        185.5
```

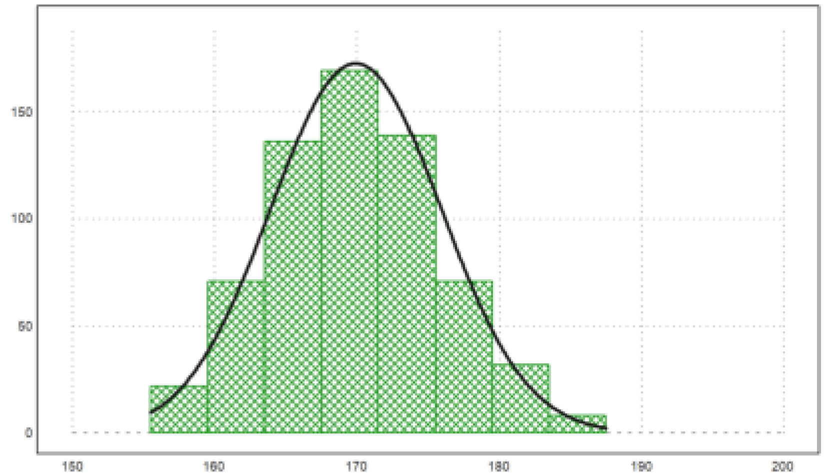
Namun lebih mudah untuk melipat rentang dengan vektor [1/2,1/2].

>M=fold(r,[0.5,0.5])

```
[157.5,  161.5,  165.5,  169.5,  173.5,  177.5,  181.5,  185.5]
```

Sekarang kita dapat menghitung rata-rata dan deviasi sampel dengan frekuensi yang diberikan.

>{m,d}=meandev(M,v); m, d,



Gambar 7.3 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-005.png

```
169.901234568
5.98912964449
```

Mari kita tambahkan distribusi normal nilai-nilai tersebut ke diagram batang di atas. Rumus untuk distribusi normal dengan rata-rata m dan simpangan baku d adalah:

$$y = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2d^2}}.$$

Karena nilainya berada di antara 0 dan 1, untuk memplotnya pada diagram batang, nilainya harus dikalikan dengan 4 kali jumlah total data.

>plot2d("qnormal(x,m,d)*sum(v)*4", ...
> xmin=min(r),xmax=max(r),thickness=3,add=1):

7.1 Tables

Dalam direktori buku catatan ini Anda akan menemukan berkas dengan tabel. Data tersebut merupakan hasil survei. Berikut adalah empat baris pertama berkas tersebut. Data tersebut berasal dari buku daring Jerman "Einführung in die Statistik mit R" karya A. Handl.

>printfile("table.dat",4);

```
Person Sex Age Titanic Evaluation Tip Problem
1 m 30 n . 1.80 n
2 f 23 y g 1.80 n
3 f 26 y g 1.80 y
```

Tabel berisi 7 kolom angka atau token (string). Kita ingin membaca tabel dari file. Pertama, kita menggunakan terjemahan kita sendiri untuk token.

Untuk ini, kita mendefinisikan set token. Fungsi strtokens() mendapatkan vektor string token dari string yang diberikan.

>mf:=["m","f"]; yn:=["y","n"]; ev:=strtokens("g vg m b vb");

Sekarang kita baca tabel dengan terjemahan ini.

Argumen tok2, tok4, dst. adalah terjemahan kolom-kolom tabel. Argumen ini tidak ada dalam daftar parameter readtable(), jadi Anda perlu menyediakannya dengan ":=".

>{MT,hd}=readtable("table.dat",tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);

>load over statistics;

Untuk mencetak, kita perlu menentukan set token yang sama. Kita cetak empat baris pertama saja.

>writetable(MT[1:10],labc=hd,wc=5,tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);

```
 Person   Sex   Age Titanic Evaluation   Tip Problem
      1     m    30       n          .   1.8       n
      2     f    23       y          g   1.8       n
      3     f    26       y          g   1.8       y
      4     m    33       n          .   2.8       n
      5     m    37       n          .   1.8       n
      6     m    28       y          g   2.8       y
      7     f    31       y         vg   2.8       n
      8     m    23       n          .   0.8       n
      9     f    24       y         vg   1.8       y
     10     m    26       n          .   1.8       n
```

Titik "." mewakili nilai yang tidak tersedia.

Jika kita tidak ingin menentukan token untuk penerjemahan terlebih dahulu, kita hanya perlu menentukan kolom mana yang berisi token dan bukan angka.

>ctok=[2,4,5,7]; {MT,hd,tok}=readtable("table.dat",ctok=ctok);

Fungsi readtable() sekarang mengembalikan serangkaian token.

>tok

```
m
n
f
y
g
vg
```

Tabel berisi entri dari berkas dengan token yang diterjemahkan ke angka.

String khusus NA="." ditafsirkan sebagai "Tidak Tersedia", dan mendapatkan NAN (bukan angka) dalam tabel. Terjemahan ini dapat diubah dengan parameter NA, dan NAval.

>MT[1]

```
[1,  1,  30,  2,  NAN,  1.8,  2]
```

Berikut ini adalah isi tabel dengan angka yang belum diterjemahkan.

>writetable(MT,wc=5)

```
    1    1   30    2    .  1.8    2
    2    3   23    4    5  1.8    2
    3    3   26    4    5  1.8    4
    4    1   33    2    .  2.8    2
    5    1   37    2    .  1.8    2
    6    1   28    4    5  2.8    4
    7    3   31    4    6  2.8    2
    8    1   23    2    .  0.8    2
    9    3   24    4    6  1.8    4
   10    1   26    2    .  1.8    2
   11    3   23    4    6  1.8    4
   12    1   32    4    5  1.8    2
   13    1   29    4    6  1.8    4
   14    3   25    4    5  1.8    4
   15    3   31    4    5  0.8    2
   16    1   26    4    5  2.8    2
   17    1   37    2    .  3.8    2
   18    1   38    4    5    .    2
   19    3   29    2    .  3.8    2
   20    3   28    4    6  1.8    2
   21    3   28    4    1  2.8    4
   22    3   28    4    6  1.8    4
   23    3   38    4    5  2.8    2
   24    3   27    4    1  1.8    4
   25    1   27    2    .  2.8    4
```

Demi kenyamanan, Anda dapat memasukkan output readtable() ke dalam daftar.

>Table={{readtable("table.dat",ctok=ctok)}};

Dengan menggunakan kolom token yang sama dan token yang dibaca dari berkas, kita dapat mencetak tabel. Kita dapat menentukan ctok, tok, dll. atau menggunakan daftar Tabel.

>writetable(Table,ctok=ctok,wc=5);

```
 Person  Sex  Age Titanic Evaluation  Tip Problem
```

1	m	30	n	.	1.8	n
2	f	23	y	g	1.8	n
3	f	26	y	g	1.8	y
4	m	33	n	.	2.8	n
5	m	37	n	.	1.8	n
6	m	28	y	g	2.8	y
7	f	31	y	vg	2.8	n
8	m	23	n	.	0.8	n
9	f	24	y	vg	1.8	y
10	m	26	n	.	1.8	n
11	f	23	y	vg	1.8	y
12	m	32	y	g	1.8	n
13	m	29	y	vg	1.8	y
14	f	25	y	g	1.8	y
15	f	31	y	g	0.8	n
16	m	26	y	g	2.8	n
17	m	37	n	.	3.8	n
18	m	38	y	g	.	n
19	f	29	n	.	3.8	n
20	f	28	y	vg	1.8	n
21	f	28	y	m	2.8	y
22	f	28	y	vg	1.8	y
23	f	38	y	g	2.8	n
24	f	27	y	m	1.8	y
25	m	27	n	.	2.8	y

Fungsi tablecol() mengembalikan nilai kolom tabel, melewati baris mana pun dengan nilai NAN(“.” dalam file), dan indeks kolom, yang berisi nilai-nilai ini.

>{c,i}=tablecol(MT,[5,6]);

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak kolom dari tabel untuk tabel baru.

>j=[1,5,6]; writetable(MT[i,j],labc=hd[j],ctok=[2],tok=tok)

Person	Evaluation	Tip
2	g	1.8
3	g	1.8
6	g	2.8
7	vg	2.8
9	vg	1.8
11	vg	1.8
12	g	1.8
13	vg	1.8
14	g	1.8
15	g	0.8
16	g	2.8
20	vg	1.8

```
      21           m        2.8
      22          vg        1.8
      23           g        2.8
      24           m        1.8
```

Tentu saja, kita perlu mengekstrak tabel itu sendiri dari daftar Table dalam kasus ini.

>MT=Table[1];

Tentu saja, kita juga dapat menggunakannya untuk menentukan nilai rata-rata kolom atau nilai statistik lainnya.

>mean(tablecol(MT,6))

```
2.175
```

Fungsi getstatistics() mengembalikan elemen dalam vektor dan jumlahnya. Kita menerapkannya pada nilai "m" dan "f" di kolom kedua tabel kita.

>{xu,count}=getstatistics(tablecol(MT,2)); xu, count,

```
[1,  3]
[12,  13]
```

Kita dapat mencetak hasilnya di tabel baru.

>writetable(count',labr=tok[xu])

```
       m        12
       f        13
```

Fungsi selecttable() mengembalikan tabel baru dengan nilai-nilai dalam satu kolom yang dipilih dari vektor indeks. Pertama-tama kita mencari indeks dari dua nilai kita di tabel token.

>v:=indexof(tok,["g","vg"])

```
[5,  6]
```

Sekarang kita dapat memilih baris tabel, yang memiliki salah satu nilai dalam v di baris ke-5.

>MT1:=MT[selectrows(MT,5,v)]; i:=sortedrows(MT1,5);

Sekarang kita dapat mencetak tabel, dengan nilai yang diekstraksi dan diurutkan di kolom ke-5.

>writetable(MT1[i],labc=hd,ctok=ctok,tok=tok,wc=7);

Person	Sex	Age	Titanic	Evaluation	Tip	Problem
2	f	23	y	g	1.8	n
3	f	26	y	g	1.8	y
6	m	28	y	g	2.8	y
18	m	38	y	g	.	n
16	m	26	y	g	2.8	n
15	f	31	y	g	0.8	n
12	m	32	y	g	1.8	n
23	f	38	y	g	2.8	n
14	f	25	y	g	1.8	y
9	f	24	y	vg	1.8	y
7	f	31	y	vg	2.8	n
20	f	28	y	vg	1.8	n
22	f	28	y	vg	1.8	y
13	m	29	y	vg	1.8	y
11	f	23	y	vg	1.8	y

Untuk statistik berikutnya, kita ingin menghubungkan dua kolom tabel. Jadi, kita mengekstrak kolom 2 dan 4 dan mengurutkan tabel.

```
>i=sortedrows(MT,[2,4]); ...
> writetable(tablecol(MT[i],[2,4])',ctok=[1,2],tok=tok)
```

m	n
m	n
m	n
m	n
m	n
m	n
m	n
m	y
m	y
m	y
m	y
m	y
f	n
f	y
f	y
f	y
f	y
f	y
f	y
f	y
f	y
f	y
f	y
f	y
f	y

Dengan getstatistics(), kita juga dapat menghubungkan jumlah pada dua kolom tabel satu sama lain.

>MT24=tablecol(MT,[2,4]); ...
> {xu1,xu2,count}=getstatistics(MT24[1],MT24[2]); ...
> writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2])

```
              n          y
m             7          5
f             1         12
```

Suatu tabel dapat ditulis ke dalam suatu berkas.

>filename="test.dat"; ...
> writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2],file=filename);

Lalu kita dapat membaca tabel dari berkas tersebut.

>{MT2,hd,tok2,hdr}=readtable(filename,>clabs,>rlabs); ...
> writetable(MT2,labr=hdr,labc=hd)

```
              n          y
m             7          5
f             1         12
```

Dan hapus berkasnya.

>fileremove(filename);

7.2 Distribusi

Dengan plot2d, ada metode yang sangat mudah untuk memplot distribusi data eksperimen.

>p=normal(1,1000); //1000 random normal-distributed sample p

>plot2d(p,distribution=20,style="\/"); // plot the random sample p

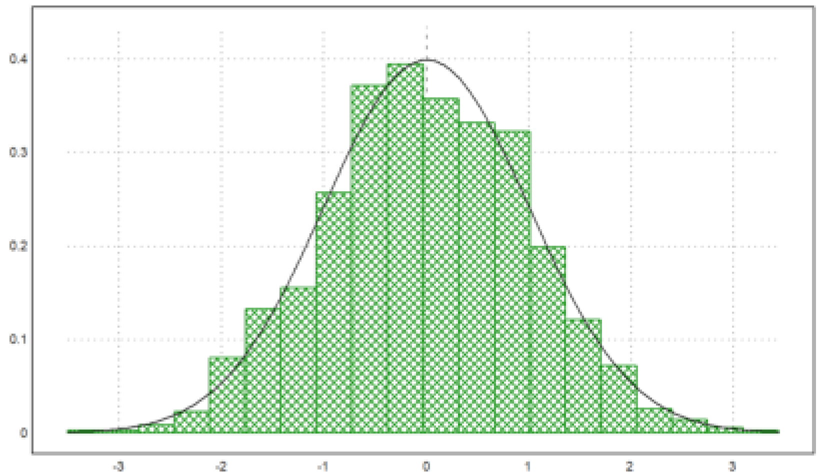
>plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1): // add the standard normal distribution plot

Harap perhatikan perbedaan antara diagram batang (sampel) dan kurva normal (distribusi riil). Masukkan kembali ketiga perintah tersebut untuk melihat hasil sampel lainnya.

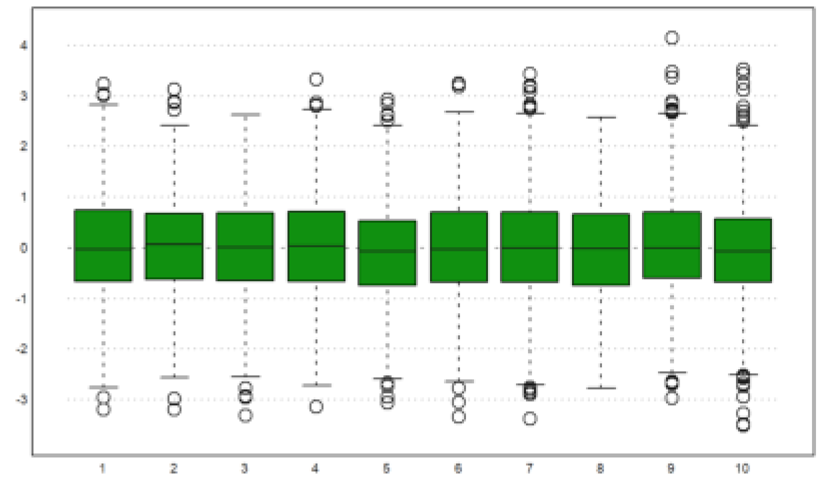
Berikut ini adalah perbandingan 10 simulasi dari 1000 nilai yang didistribusikan secara normal menggunakan apa yang disebut diagram kotak. Diagram ini menunjukkan median, kuartil 25% dan 75%, nilai minimal dan maksimal, dan outlier.

>p=normal(10,1000); boxplot(p):

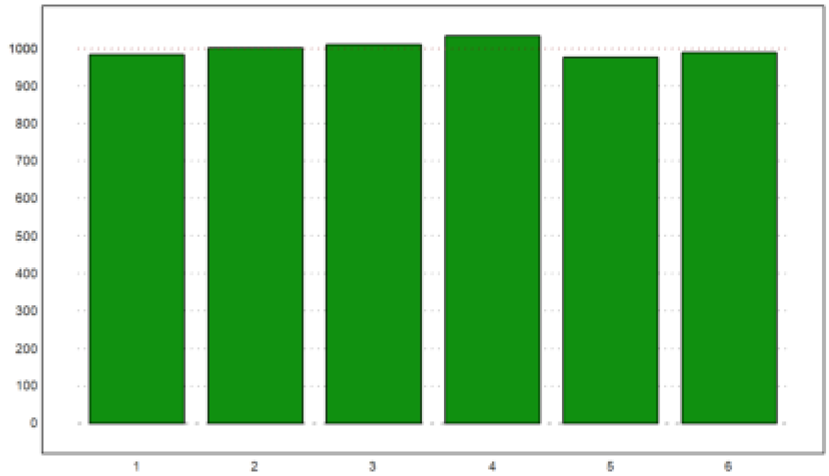
Untuk menghasilkan bilangan bulat acak, Euler memiliki inrandom. Mari kita simulasikan lemparan dadu dan plot distribusinya.



Gambar 7.4 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-006.png



Gambar 7.5 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-007.png



Gambar 7.6 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-008.png

Kita menggunakan fungsi getmultiplicities(v,x), yang menghitung seberapa sering elemen v muncul di x. Kemudian kita plot hasilnya menggunakan columnsplot().

>k=intrandom(1,6000,6); ...
> columnsplot(getmultiplicities(1:6,k)); ...
> ygrid(1000,color=red):

Sementara intrandom(n,m,k) mengembalikan bilangan bulat yang terdistribusi seragam dari 1 hingga k, dimungkinkan untuk menggunakan distribusi bilangan bulat lain yang diberikan dengan randpint().

Dalam contoh berikut, probabilitas untuk 1,2,3 masing-masing adalah 0,4,0,1,0,5.

>randpint(1,1000,[0.4,0.1,0.5]); getmultiplicities(1:3,%)

```
[378,  102,  520]
```

Euler dapat menghasilkan nilai acak dari lebih banyak distribusi. Lihat referensinya.

Misalnya, kita coba distribusi eksponensial. Variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi eksponensial, jika PDF-nya diberikan oleh

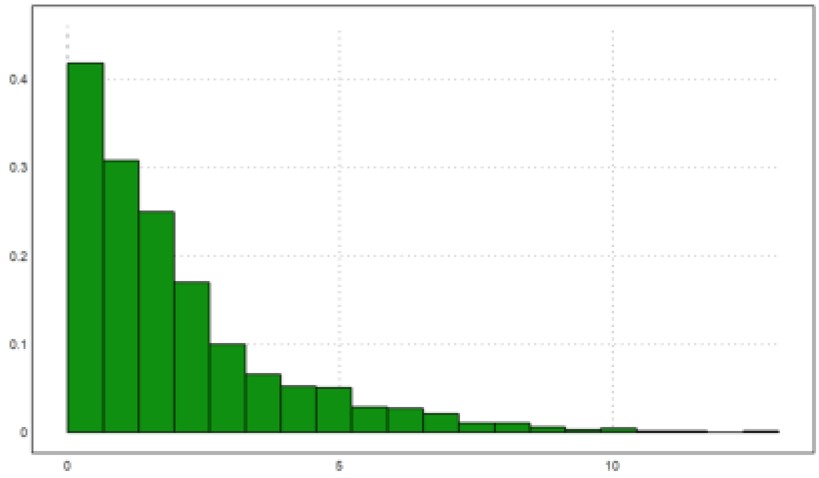
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

dengan parameter

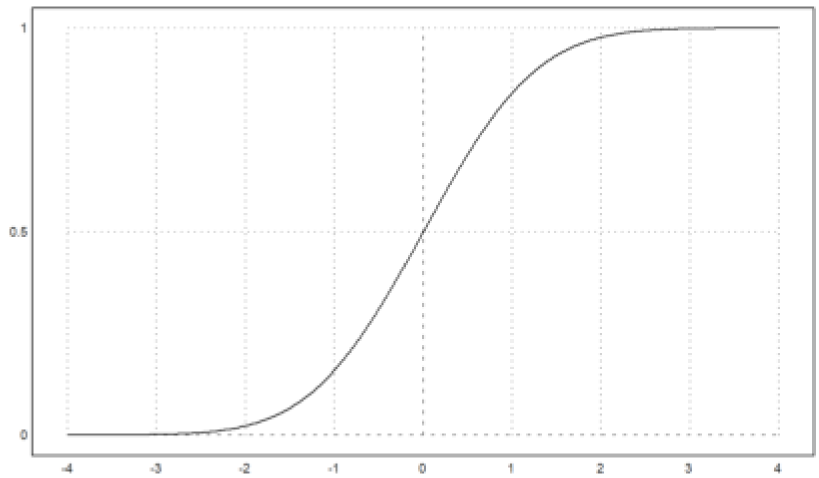
$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \text{ adalah mean, dan dilambangkan dengan } X \sim \text{Eksponensial}(\lambda).$$

>plot2d(randexponential(1,1000,2),>distribution):

Untuk banyak distribusi, Euler dapat menghitung fungsi distribusi dan inversnya.



Gambar 7.7 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-011.png



Gambar 7.8 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-012.png

>plot2d("normaldis",-4,4):

Berikut ini adalah salah satu cara untuk memplot kuantil.

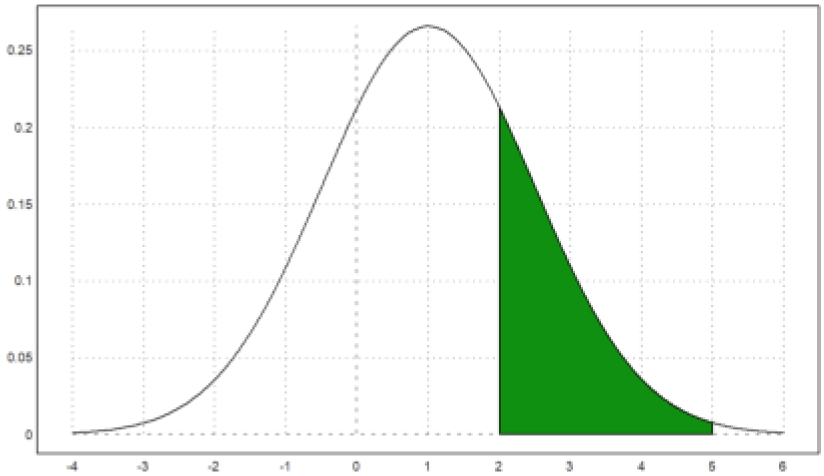
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",-4,6); . . .
> plot2d("qnormal(x,1,1.5)",a=2,b=5,>add,>filled):

$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2}\ dt.$$

Peluang untuk berada di area hijau adalah sebagai berikut.

>normaldis(5,1,1.5)-normaldis(2,1,1.5)

```
0.248662156979
```



Gambar 7.9 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-013.png

Hal ini dapat dihitung secara numerik dengan integral berikut.

$$\int_2^5 \frac{1}{1.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-1}{1.5})^2}\ dx.$$

>gauss("qnormal(x,1,1.5)",2,5)

```
0.248662156979
```

Mari kita bandingkan distribusi binomial dengan distribusi normal dengan nilai rata-rata dan deviasi yang sama. Fungsi invbindis() menyelesaikan interpolasi linier antara nilai integer.

>invbindis(0.95,1000,0.5), invnormaldis(0.95,500,0.5*sqrt(1000))

```
525.516721219
526.007419394
```

Fungsi qdis() adalah kerapatan distribusi chi-kuadrat. Seperti biasa, Euler memetakan vektor ke fungsi ini. Dengan demikian, kita memperoleh plot semua distribusi chi-kuadrat dengan derajat 5 hingga 30 dengan mudah dengan cara berikut.

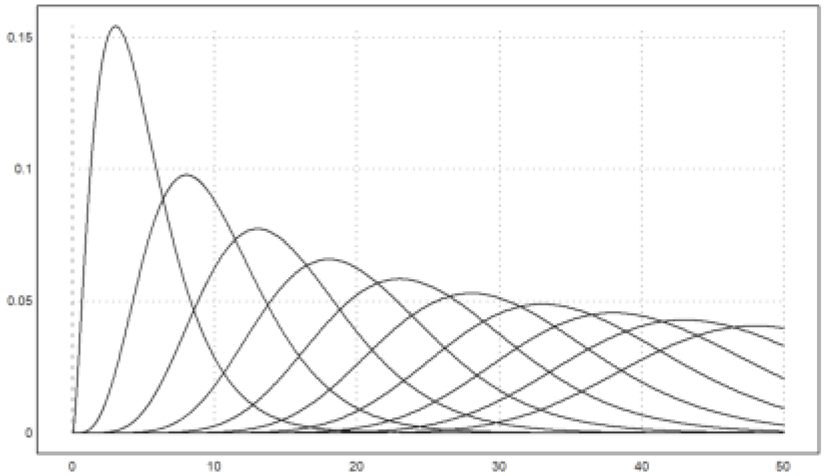
>plot2d("qchidis(x,(5:5:50)')",0,50):

Euler memiliki fungsi yang akurat untuk mengevaluasi distribusi. Mari kita periksa chidis() dengan integral.

Penamaannya mencoba agar konsisten. Misalnya, - distribusi chi-kuadrat adalah chidis(), - fungsi inversnya adalah invchidis(), - densitasnya adalah qchidis().

Komplemen distribusi (upper tail) adalah chicdis().

>chidis(1.5,2), integrate("qchidis(x,2)",0,1.5)



Gambar 7.10 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-016.png

```
0.527633447259
0.527633447259
```

7.3 Distribusi Diskrit

Untuk menentukan distribusi diskrit Anda sendiri, Anda dapat menggunakan metode berikut.

Pertama, kita tetapkan fungsi distribusi.

>wd = 0|((1:6)+[-0.01,0.01,0,0,0,0])/6

```
[0,  0.165,  0.335,  0.5,  0.666667,  0.833333,  1]
```

Artinya adalah bahwa dengan probabilitas wd[i+1]-wd[i] kita menghasilkan nilai acak i.

Ini hampir merupakan distribusi seragam. Mari kita definisikan generator angka acak untuk ini. Fungsi find(v,x) menemukan nilai x dalam vektor v. Fungsi ini juga berfungsi untuk vektor x.

>function wrongdice (n,m) := find(wd,random(n,m))

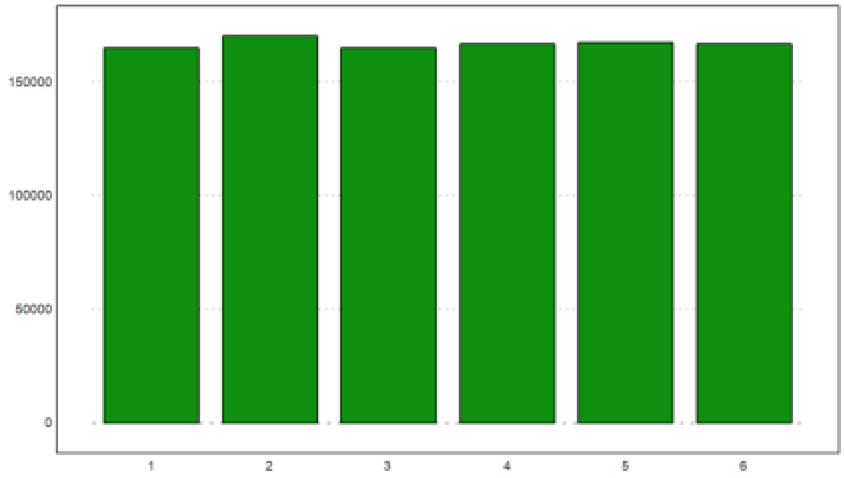
Kesalahannya begitu halus sehingga kita hanya melihatnya pada pengulangan yang sangat banyak.

>columnsplot(getmultiplicities(1:6,wrongdice(1,1000000))):

Berikut ini adalah fungsi sederhana untuk memeriksa distribusi seragam nilai 1…K dalam v. Kita terima hasilnya, jika untuk semua frekuensi

$$\left| f_i - \frac{1}{K} \right| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

>function checkrandom (v, delta=1) …



Gambar 7.11 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-017.png

```
K=max(v); n=cols(v);
fr=getfrequencies(v,1:K);
return max(fr/n-1/K)<delta/sqrt(n);
endfunction
```

Memang fungsi tersebut menolak distribusi seragam.

>checkrandom(wrongdice(1,1000000))

```
0
```

Dan menerima generator acak bawaan.

>checkrandom(intrandom(1,1000000,6))

```
1
```

Kita dapat menghitung distribusi binomial. Pertama ada binomialsum(), yang mengembalikan probabilitas i atau kurang dari n kali percobaan.

>bindis(410,1000,0.4)

```
0.751401349654
```

Fungsi Beta terbalik digunakan untuk menghitung interval kepercayaan Clopper-Pearson untuk parameter p. Level default adalah alpha.

Arti dari interval ini adalah jika p berada di luar interval, hasil yang diamati sebesar 410 dalam 1000 adalah langka.

>clopperpearson(410,1000)

```
[0.37932,  0.441212]
```

Perintah berikut adalah cara langsung untuk mendapatkan hasil di atas. Namun untuk n yang besar, penjumlahan langsung tidak akurat dan lambat.

>p=0.4; i=0:410; n=1000; sum(bin(n,i)*p$^{i*(1-p)}$(n-i))

```
0.751401349655
```

By the way, invbinsum() menghitung kebalikan dari binomialsum().

>invbindis(0.75,1000,0.4)

```
409.932733047
```

Dalam Bridge, kita mengasumsikan 5 kartu yang beredar (dari 52) dalam dua tangan (26 kartu). Mari kita hitung probabilitas distribusi yang lebih buruk dari 3:2 (misalnya 0:5, 1:4, 4:1 atau 5:0).

>2*hypergeomsum(1,5,13,26)

```
0.321739130435
```

Ada juga simulasi distribusi multinomial.

>randmultinomial(10,1000,[0.4,0.1,0.5])

```
        381         100         519
        376          91         533
        417          80         503
        440          94         466
        406         112         482
        408          94         498
        395         107         498
        399          96         505
        428          87         485
        400          99         501
```

7.4 Plotting Data

Untuk merencanakan data, kami mencoba hasil pemilu Jerman sejak 1990, yang diukur dalam jumlah kursi.

>BW := [. . .
> 1990,662,319,239,79,8,17; . . .

> 1994,672,294,252,47,49,30; . . .
> 1998,669,245,298,43,47,36; . . .
> 2002,603,248,251,47,55,2; . . .
> 2005,614,226,222,61,51,54; . . .
> 2009,622,239,146,93,68,76; . . .
> 2013,631,311,193,0,63,64];

Untuk para pihak, kami menggunakan serangkaian nama.

>P:=[“CDU/CSU”,“SPD”,“FDP”,“Gr”,“Li”];

Mari kita cetak persentasenya dengan baik.

Pertama-tama kita ekstrak kolom-kolom yang diperlukan. Kolom 3 hingga 7 adalah kursi masing-masing partai, dan kolom 2 adalah jumlah total kursi. Kolom 3 adalah tahun pemilihan.

>BT:=BW[,3:7]; BT:=BT/sum(BT); YT:=BW[,1]’;

Kemudian kami mencetak statistik dalam bentuk tabel. Kami menggunakan nama sebagai tajuk kolom, dan tahun sebagai tajuk untuk baris. Lebar default untuk kolom adalah wc=10, tetapi kami lebih suka keluaran yang lebih padat. Kolom akan diperluas untuk label kolom, jika perlu.

>writetable(BT*100,wc=6,dc=0,>fixed,labc=P,labr=YT)

```
      CDU/CSU   SPD   FDP    Gr    Li
1990       48    36    12     1     3
1994       44    38     7     7     4
1998       37    45     6     7     5
2002       41    42     8     9     0
2005       37    36    10     8     9
2009       38    23    15    11    12
2013       49    31     0    10    10
```

Perkalian matriks berikut ini mengekstrak jumlah persentase dari dua partai besar yang menunjukkan bahwa partai-partai kecil telah memperoleh dukungan di parlemen hingga tahun 2009.

>BT1:=(BT.[1;1;0;0;0])’*100

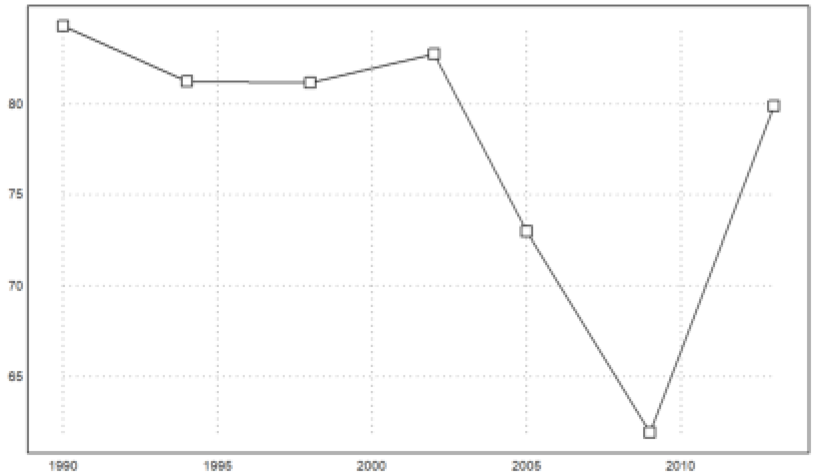
```
[84.29,  81.25,  81.1659,  82.7529,  72.9642,  61.8971,  79.8732]
```

Ada juga plot statistik sederhana. Kita menggunakannya untuk menampilkan garis dan titik secara bersamaan. Alternatifnya adalah memanggil plot2d dua kali dengan >add.

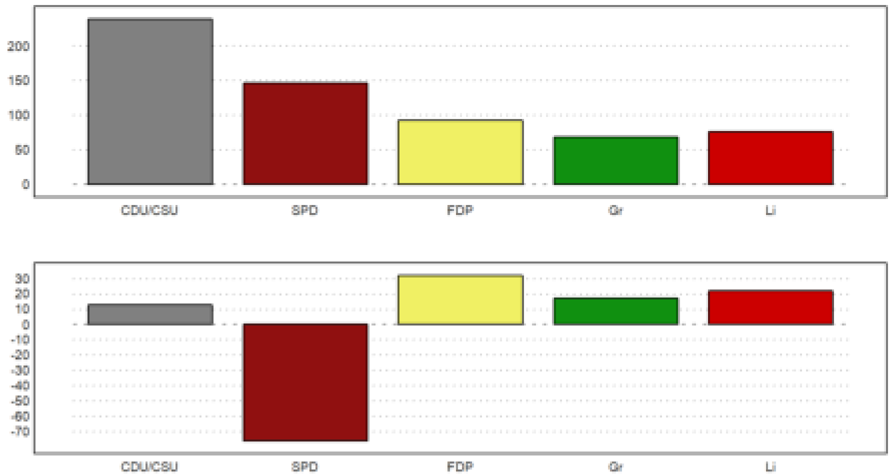
>statplot(YT,BT1,“b”):

Tentukan beberapa warna untuk setiap pihak.

>CP:=[rgb(0.5,0.5,0.5),red,yellow,green,rgb(0.8,0,0)];



Gambar 7.12 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-019.png



Gambar 7.13 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-020.png

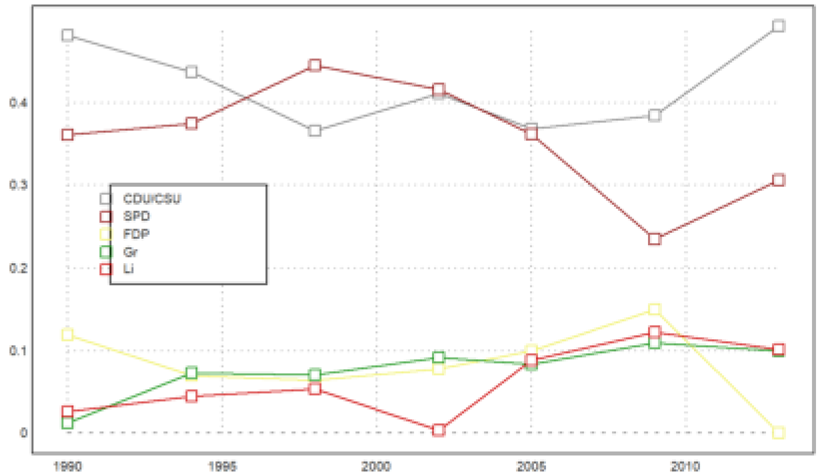
Sekarang kita dapat memetakan hasil pemilu 2009 dan perubahannya ke dalam satu plot menggunakan gambar. Kita dapat menambahkan vektor kolom ke setiap plot.

>figure(2,1); . . .
> figure(1); columnsplot(BW[6,3:7],P,color=CP); . . .
> figure(2); columnsplot(BW[6,3:7]-BW[5,3:7],P,color=CP); . . .
> figure(0):

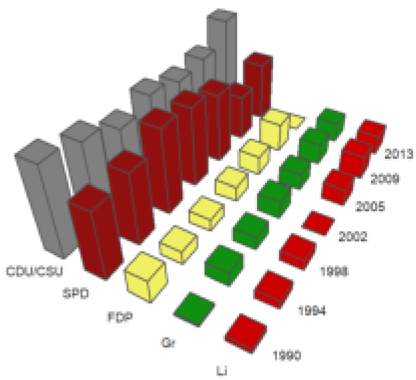
Plot data menggabungkan baris-baris data statistik dalam satu plot.

>J:=BW[,1]‘; DP:=BW[,3:7]’; . . .
> dataplot(YT,BT’,color=CP); . . .
> labelbox(P,colors=CP,styles="[]",>points,w=0.2,x=0.3,y=0.4):

Plot kolom 3D menunjukkan baris data statistik dalam bentuk kolom. Kami memberikan label untuk baris dan kolom. Angle adalah sudut pandang.



Gambar 7.14 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-021.png



Gambar 7.15 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-022.png

>columnsplot3d(BT,scols=P,srows=YT, . . .
> angle=30°,ccols=CP):

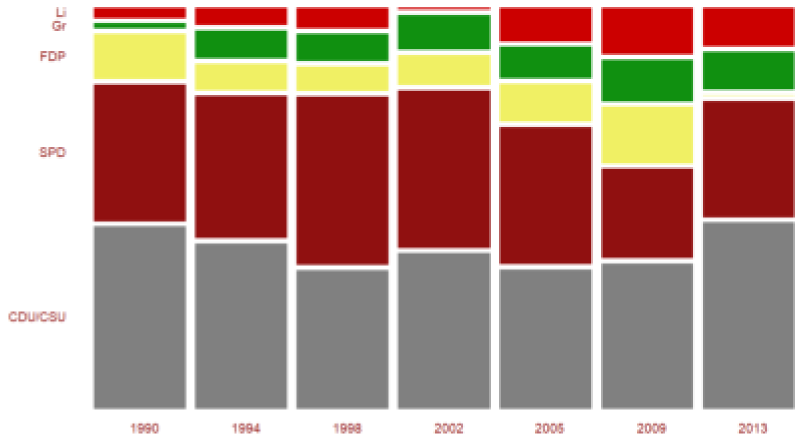
Representasi lainnya adalah plot mosaik. Perhatikan bahwa kolom-kolom plot mewakili kolom-kolom matriks di sini. Karena panjang label CDU/CSU, kami mengambil jendela yang lebih kecil dari biasanya.

>shrinkwindow(>smaller); . . .
> mosaicplot(BT',srows=YT,scols=P,color=CP,style="#"); . . .
> shrinkwindow():

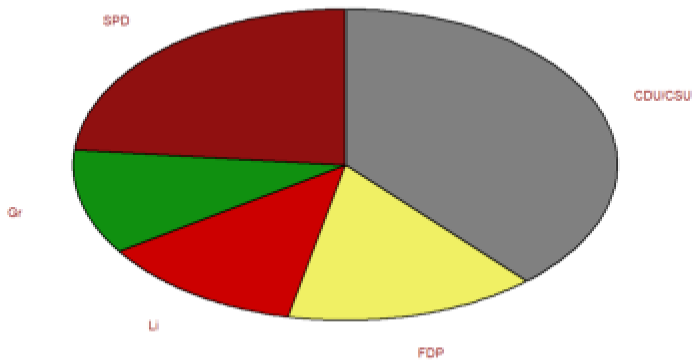
Kita juga bisa membuat diagram lingkaran. Karena hitam dan kuning membentuk koalisi, kita susun ulang unsur-unsurnya.

>i=[1,3,5,4,2]; piechart(BW[6,3:7][i],color=CP[i],lab=P[i]):

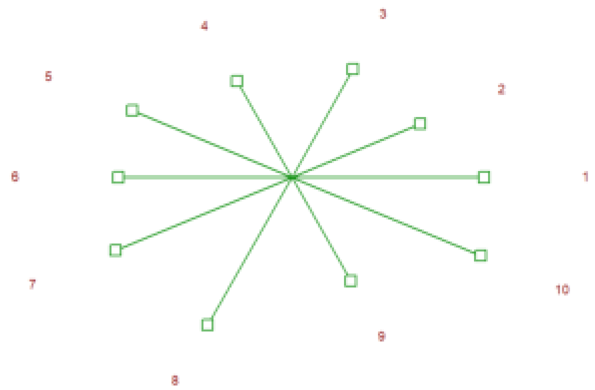
Berikut adalah jenis plot yang lain.



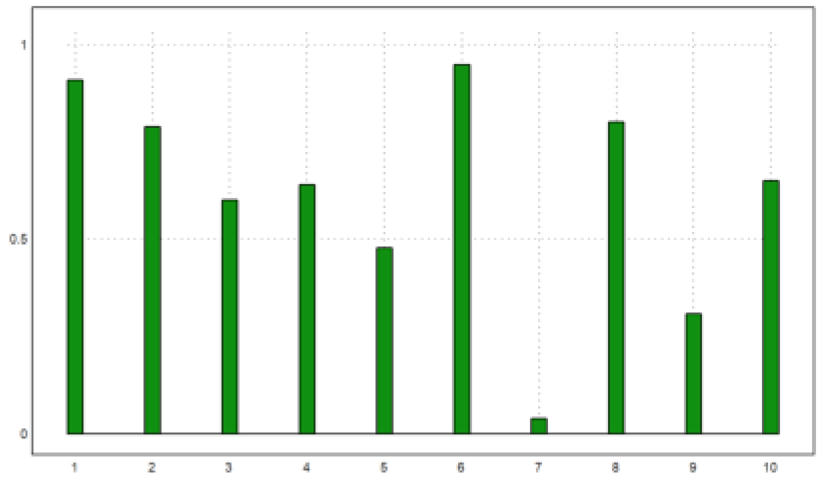
Gambar 7.16 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-023.png



Gambar 7.17 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-024.png



Gambar 7.18 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-025.png



Gambar 7.19 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-026.png

>starplot(normal(1,10)+4,lab=1:10,>rays):

Beberapa plot dalam plot2d bagus untuk statika. Berikut adalah plot impuls data acak, yang didistribusikan secara seragam dalam [0,1].

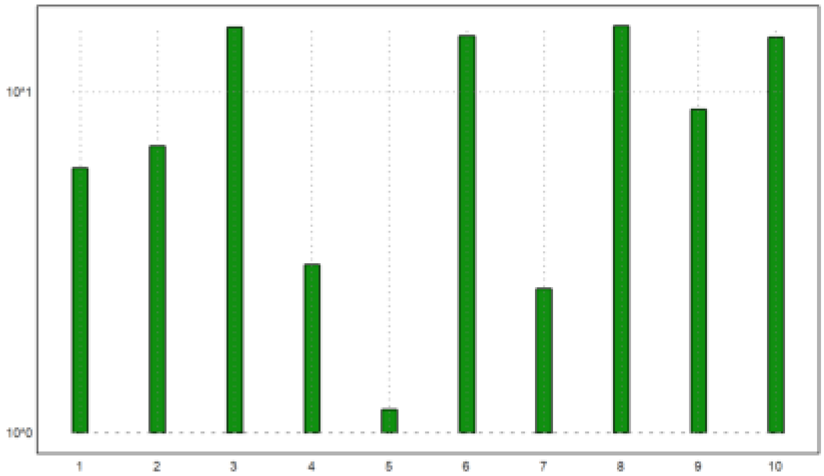
>plot2d(makeimpulse(1:10,random(1,10)),>bar):

Namun untuk data yang terdistribusi secara eksponensial, kita mungkin memerlukan plot logaritmik.

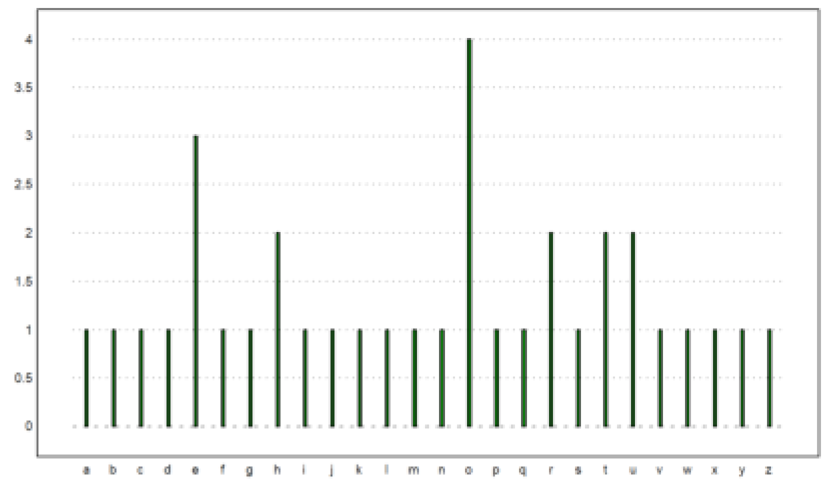
>logimpulseplot(1:10,-log(random(1,10))*10):

Fungsi columnsplot() lebih mudah digunakan, karena hanya memerlukan vektor nilai. Selain itu, fungsi ini dapat mengatur labelnya sesuai keinginan kita, kami telah menunjukkannya dalam tutorial ini.

Berikut adalah aplikasi lain, tempat kita menghitung karakter dalam kalimat dan memplot statistik.



Gambar 7.20 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-027.png



Gambar 7.21 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-028.png

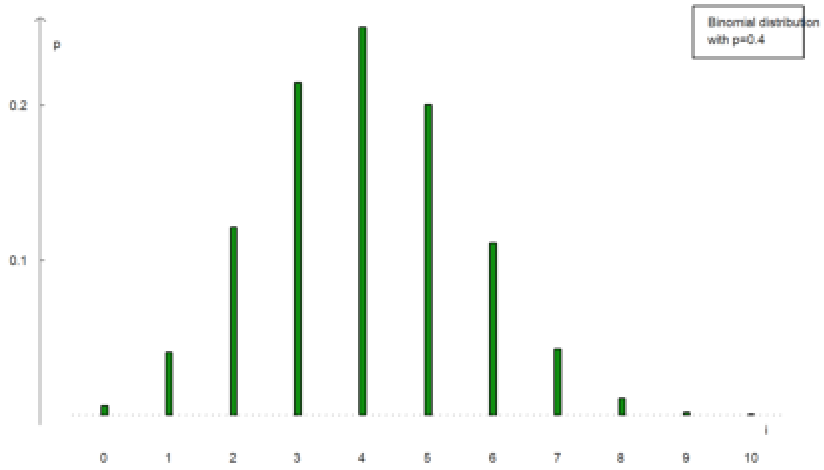
>v=strtochar("the quick brown fox jumps over the lazy dog"); ...
> w=ascii("a"):ascii("z"); x=getmultiplicities(w,v); ...
> cw=[]; for k=w; cw=cw|char(k); end; ...
> columnsplot(x,lab=cw,width=0.05):

Anda juga dapat mengatur sumbu secara manual.

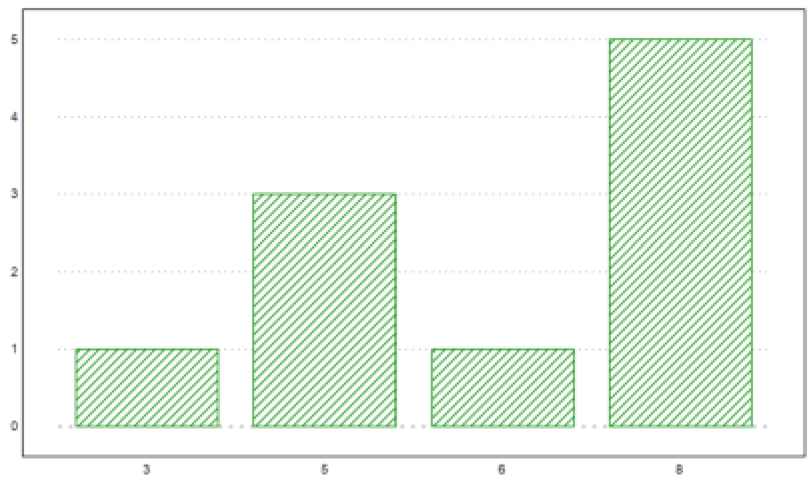
>n=10; p=0.4; i=0:n; x=bin(n,i)*$p^{i*(1-p)}$(n-i); ...
> columnsplot(x,lab=i,width=0.05,<frame,<grid); ...
> yaxis(0,0:0.1:1,style="->",>left); xaxis(0,style="."); ...
> label("p",0,0.25), label("i",11,0); ...
> textbox(["Binomial distribution","with p=0.4"]):

Berikut ini adalah cara untuk memetakan frekuensi angka dalam sebuah vektor.

Kita buat sebuah vektor bilangan acak integer 1 hingga 6.



Gambar 7.22 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-029.png



Gambar 7.23 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-030.png

>v:=intrandom(1,10,10)

```
[8,  5,  8,  8,  6,  8,  8,  3,  5,  5]
```

Lalu ekstrak angka-angka unik dalam v.

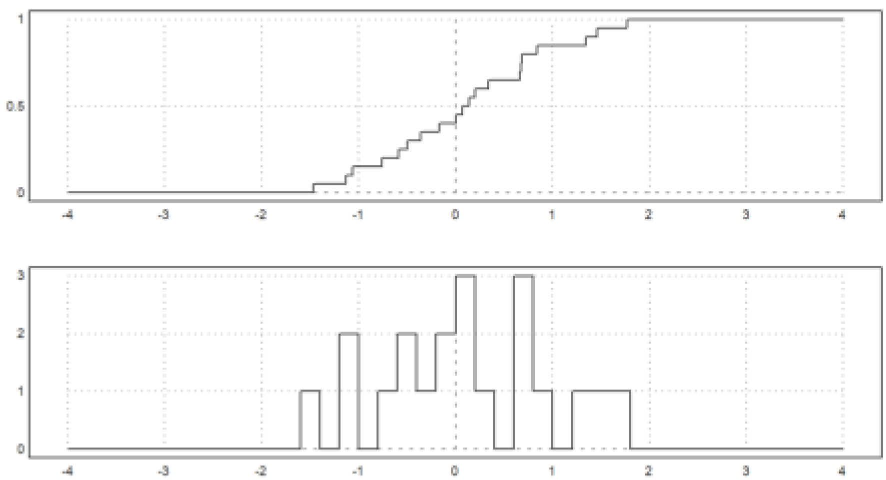
>vu:=unique(v)

```
[3,  5,  6,  8]
```

Dan plot frekuensi pada kolom plot.

>columnsplot(getmultiplicities(vu,v),lab=vu,style="/"):

Kami ingin menunjukkan fungsi untuk distribusi nilai empiris.



Gambar 7.24 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-031.png

>x=normal(1,20);

Fungsi empdist(x,vs) memerlukan array nilai yang diurutkan. Jadi, kita harus mengurutkan x sebelum dapat menggunakannya.

>xs=sort(x);

Kemudian kami memetakan distribusi empiris dan beberapa batang kepadatan ke dalam satu petak. Alih-alih menggunakan petak batang untuk distribusi, kali ini kami menggunakan sawtooth plot.

>figure(2,1); ...
> figure(1); plot2d("empdist",-4,4;xs); ...
> figure(2); plot2d(histo(x,v=-4:0.2:4,<bar)); ...
> figure(0):

Plot sebaran mudah dibuat di Euler dengan plot titik biasa. Grafik berikut menunjukkan bahwa X dan X+Y jelas berkorelasi positif.

>x=normal(1,100); plot2d(x,x+rotright(x),>points,style=".."):

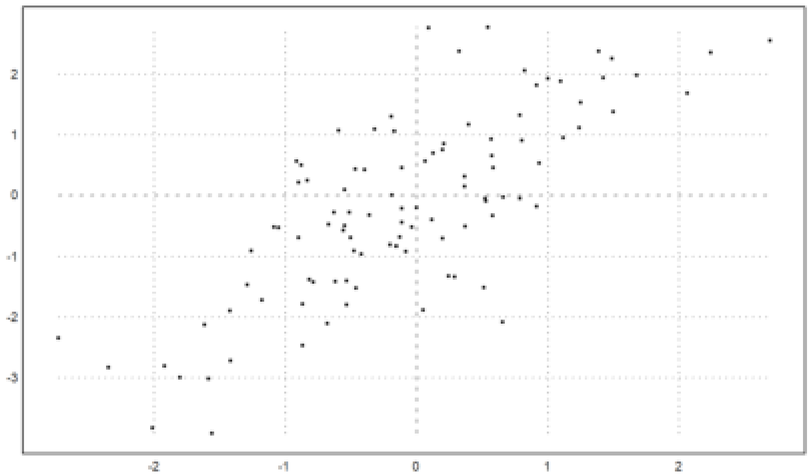
Sering kali, kita ingin membandingkan dua sampel dengan distribusi yang berbeda. Hal ini dapat dilakukan dengan plot kuantil-kuantil.

Untuk pengujian, kita mencoba distribusi t-student dan distribusi eksponensial.

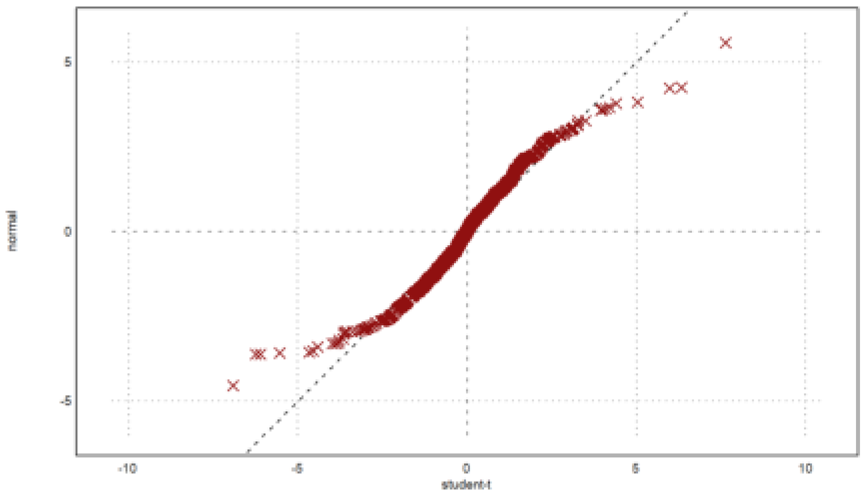
>x=randt(1,1000,5); y=randnormal(1,1000,mean(x),dev(x)); ...
> plot2d("x",r=6,style="–",yl="normal",xl="student-t",>vertical); ...
> plot2d(sort(x),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):

Plot tersebut dengan jelas menunjukkan bahwa nilai-nilai yang terdistribusi normal cenderung lebih kecil di ujung-ujung ekstrem.

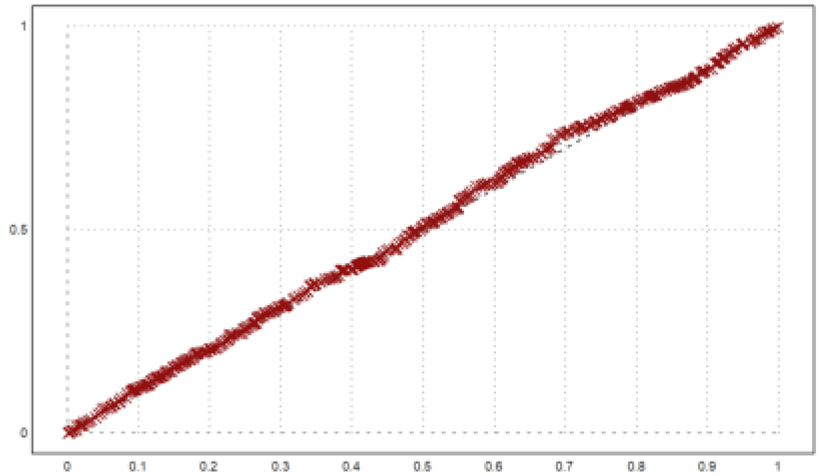
Jika kita memiliki dua distribusi dengan ukuran yang berbeda, kita dapat memperluas yang lebih kecil atau mengecilkan yang lebih besar. Fungsi berikut ini bagus untuk keduanya. Fungsi ini mengambil



Gambar 7.25 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-032.png



Gambar 7.26 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-033.png



Gambar 7.27 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-034.png

nilai median dengan persentase antara 0 dan 1.

>function medianexpand (x,n) := median(x,p=linspace(0,1,n-1));

Mari kita bandingkan dua distribusi yang sama.

>x=random(1000); y=random(400); . . .
> plot2d("x",0,1,style="–"); . . .
> plot2d(sort(medianexpand(x,400)),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):

7.5 Regresi dan Korelasi

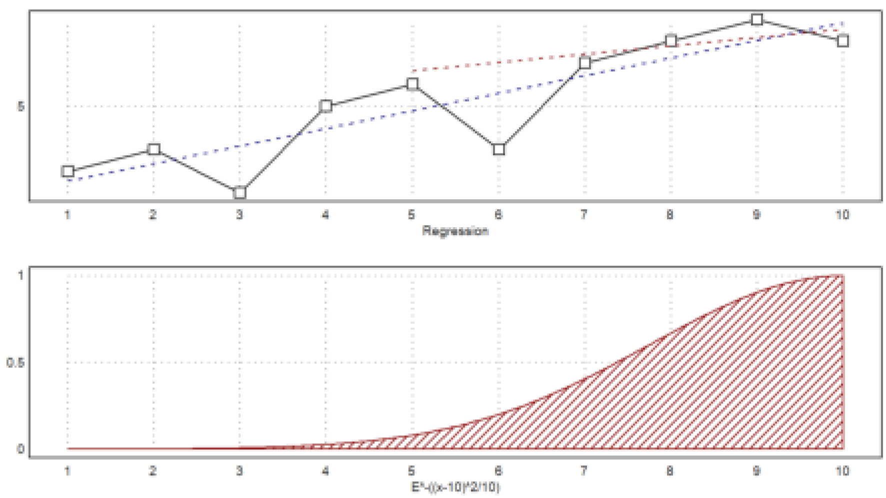
Regresi linier dapat dilakukan dengan fungsi polyfit() atau berbagai fungsi fit.

Sebagai permulaan, kita mencari garis regresi untuk data univariat dengan polyfit(x,y,1).

>x=1:10; y=[2,3,1,5,6,3,7,8,9,8]; writetable(x'|y',labc=["x","y"])

x	y
1	2
2	3
3	1
4	5
5	6
6	3
7	7
8	8
9	9
10	8

Kami ingin membandingkan kecocokan yang tidak tertimbang dan tertimbang. Pertama, koefisien kecocokan linier.



Gambar 7.28 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-035.png

>p=polyfit(x,y,1)

```
[0.733333,  0.812121]
```

Sekarang koefisien dengan bobot yang menekankan nilai terakhir.

>w &= "exp(-(x-10)^2/10)"; pw=polyfit(x,y,1,w=w(x))

```
[4.71566,  0.38319]
```

Kami memasukkan semuanya ke dalam satu plot untuk titik dan garis regresi, dan untuk bobot yang digunakan.

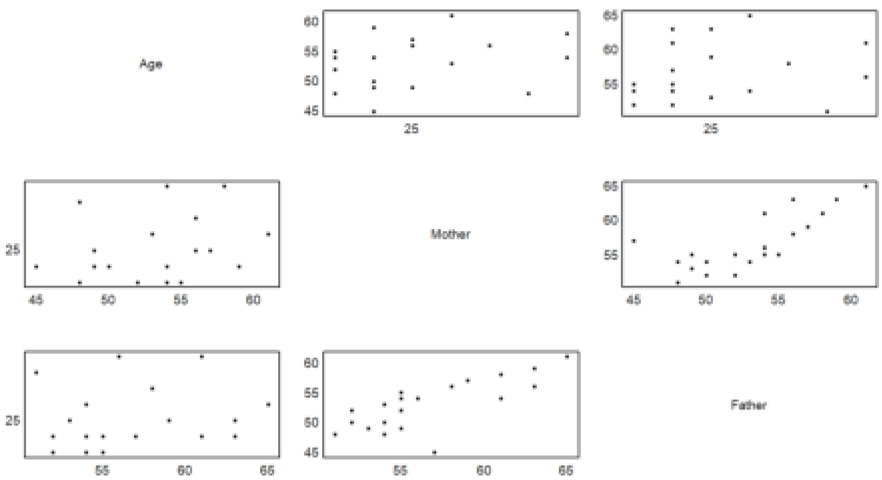
>figure(2,1); ...
> figure(1); statplot(x,y,"b",xl="Regression"); ...
> plot2d("evalpoly(x,p)",>add,color=blue,style="–"); ...
> plot2d("evalpoly(x,pw)",5,10,>add,color=red,style="–"); ...
> figure(2); plot2d(w,1,10,>filled,style="/",fillcolor=red,xl=w); ...
> figure(0):

Untuk contoh lain, kami membaca survei siswa, usia mereka, usia orang tua mereka, dan jumlah saudara kandung dari sebuah berkas.

Tabel ini berisi "m" dan "f" di kolom kedua. Kami menggunakan variabel tok2 untuk mengatur terjemahan yang tepat alih-alih membiarkan readtable() mengumpulkan terjemahan.

>{MS,hd}:=readtable("table1.dat",tok2:=["m","f"]); ...
> writetable(MS,labc=hd,tok2:=["m","f"]);

```
    Person       Sex       Age    Mother    Father  Siblings
```



Gambar 7.29 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-036.png

1	m	29	58	61	1
2	f	26	53	54	2
3	m	24	49	55	1
4	f	25	56	63	3
5	f	25	49	53	0
6	f	23	55	55	2
7	m	23	48	54	2
8	m	27	56	58	1
9	m	25	57	59	1
10	m	24	50	54	1
11	f	26	61	65	1
12	m	24	50	52	1
13	m	29	54	56	1
14	m	28	48	51	2
15	f	23	52	52	1
16	m	24	45	57	1
17	f	24	59	63	0
18	f	23	52	55	1
19	m	24	54	61	2
20	f	23	54	55	1

Bagaimana usia saling bergantung? Kesan pertama datang dari diagram sebaran berpasangan.

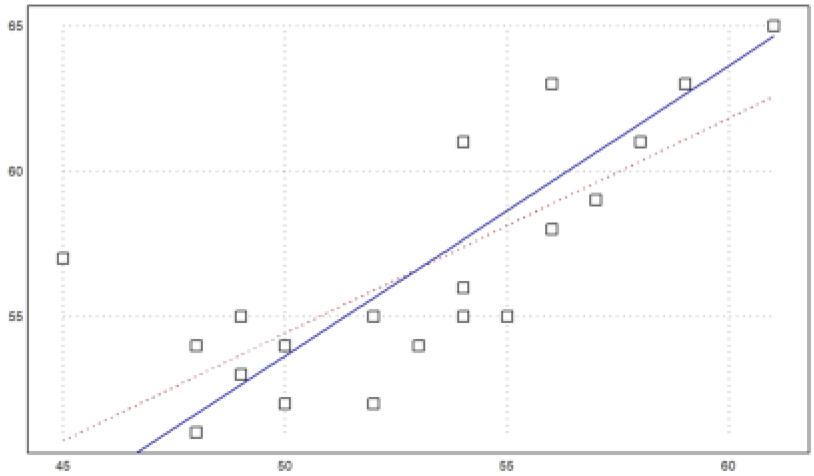
>scatterplots(tablecol(MS,3:5),hd[3:5]):

Jelas bahwa usia ayah dan ibu saling bergantung. Mari kita tentukan dan gambarkan garis regresinya.

>cs:=MS[,4:5]'; ps:=polyfit(cs[1],cs[2],1)

```
[17.3789,  0.740964]
```

Ini jelas model yang salah. Garis regresi adalah s=17+0,74t, di mana t adalah usia ibu dan s adalah



Gambar 7.30 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-037.png

usia ayah. Perbedaan usia mungkin sedikit bergantung pada usia, tetapi tidak terlalu banyak.

Sebaliknya, kami menduga fungsi seperti s=a+t. Maka a adalah rata-rata s-t. Itu adalah perbedaan usia rata-rata antara ayah dan ibu.

>da:=mean(cs[2]-cs[1])

```
3.65
```

Mari kita gambarkan ini menjadi satu diagram sebar.

>plot2d(cs[1],cs[2],>points); ...
> plot2d("evalpoly(x,ps)",color=red,style=".",>add); ...
> plot2d("x+da",color=blue,>add):

Berikut ini adalah diagram kotak dari dua zaman tersebut. Ini hanya menunjukkan bahwa zamannya berbeda.

>boxplot(cs,["mothers","fathers"]):

Menariknya bahwa perbedaan median tidak sebesar perbedaan mean.

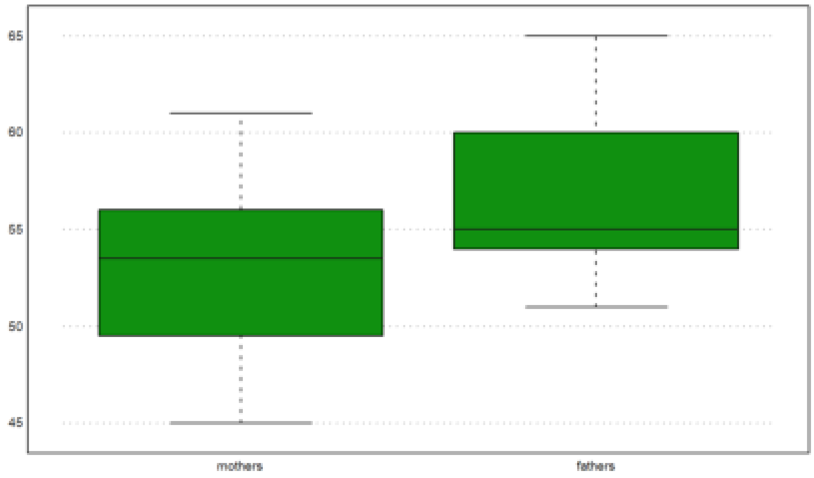
>median(cs[2])-median(cs[1])

```
1.5
```

Koefisien korelasi menunjukkan korelasi positif.

>correl(cs[1],cs[2])

```
0.7588307236
```



Gambar 7.31 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-038.png

Korelasi peringkat adalah ukuran untuk urutan yang sama di kedua vektor. Korelasi ini juga cukup positif.

>rankcorrel(cs[1],cs[2])

```
0.758925292358
```

7.6 Membuat Fungsi baru

Tentu saja, bahasa EMT dapat digunakan untuk memprogram fungsi baru. Misalnya, kita mendefinisikan fungsi kemiringan.

$$\mathrm{sk}(x) = \frac{\sqrt{n}\sum_i (x_i - m)^3}{\left(\sum_i (x_i - m)^2\right)^{3/2}}$$

di mana m adalah rata-rata x.

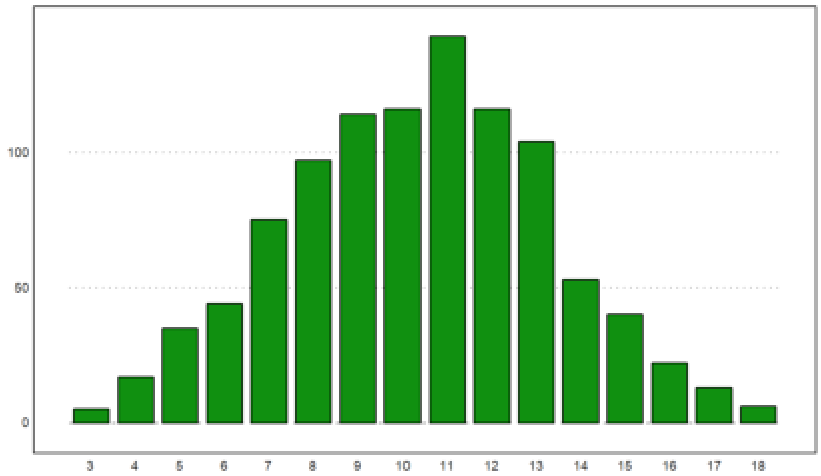
>function skew (x:vector) ...

```
m=mean(x);
return sqrt(cols(x))*sum((x-m)^3)/(sum((x-m)^2))^(3/2);
endfunction
```

Seperti yang Anda lihat, kita dapat dengan mudah menggunakan bahasa matriks untuk mendapatkan implementasi yang sangat singkat dan efisien. Mari kita coba fungsi ini.

>data=normal(20); skew(normal(10))

```
-0.198710316203
```



Gambar 7.32 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-040.png

Berikut adalah fungsi lainnya, yang disebut koefisien kemiringan Pearson.

>function skew1 (x) := 3*(mean(x)-median(x))/dev(x)

>skew1(data)

```
-0.0801873249135
```

7.7 Simulasi Monte Carlo

Euler dapat digunakan untuk mensimulasikan kejadian acak. Kita telah melihat contoh sederhana di atas. Berikut ini contoh lain, yang mensimulasikan 1000 kali lemparan 3 dadu, dan menanyakan distribusi jumlahnya.

>ds:=sum(intrandom(1000,3,6))'; fs=getmultiplicities(3:18,ds)

```
[5,  17,  35,  44,  75,  97,  114,  116,  143,  116,  104,  53,  40,
22,  13,  6]
```

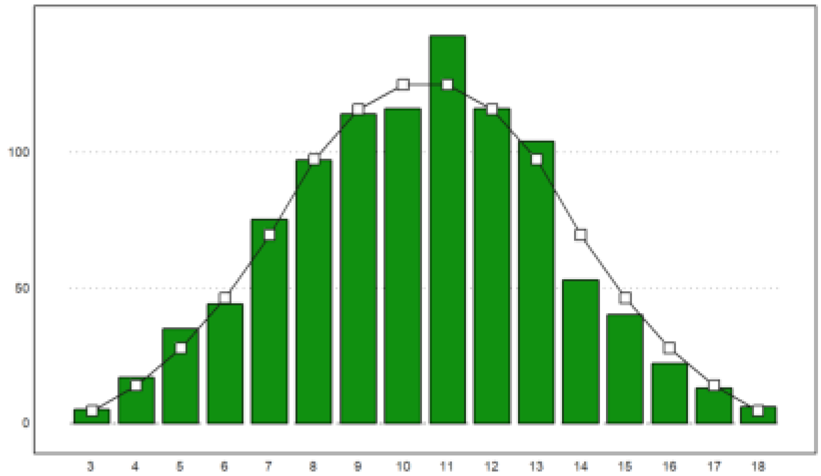
Kita dapat memplotkan sekarang.

>columnsplot(fs,lab=3:18):

Menentukan distribusi yang diharapkan tidaklah mudah. ??Kami menggunakan rekursi tingkat lanjut untuk ini.

Fungsi berikut menghitung jumlah cara bilangan k dapat direpresentasikan sebagai jumlah n bilangan dalam rentang 1 hingga m. Fungsi ini bekerja secara rekursif dengan cara yang jelas.

>function map countways (k; n, m) ...



Gambar 7.33 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-041.png

```
  if n==1 then return k>=1 && k<=m
  else
    sum=0;
    loop 1 to m; sum=sum+countways(k-#,n-1,m); end;
    return sum;
  end;
endfunction
```

Berikut ini hasil dari tiga kali lemparan dadu.

>countways(5:25,5,5)

```
[1,  5,  15,  35,  70,  121,  185,  255,  320,  365,  381,  365,  320,
255,  185,  121,  70,  35,  15,  5,  1]
```

>cw=countways(3:18,3,6)

```
[1,  3,  6,  10,  15,  21,  25,  27,  27,  25,  21,  15,  10,  6,  3,
1]
```

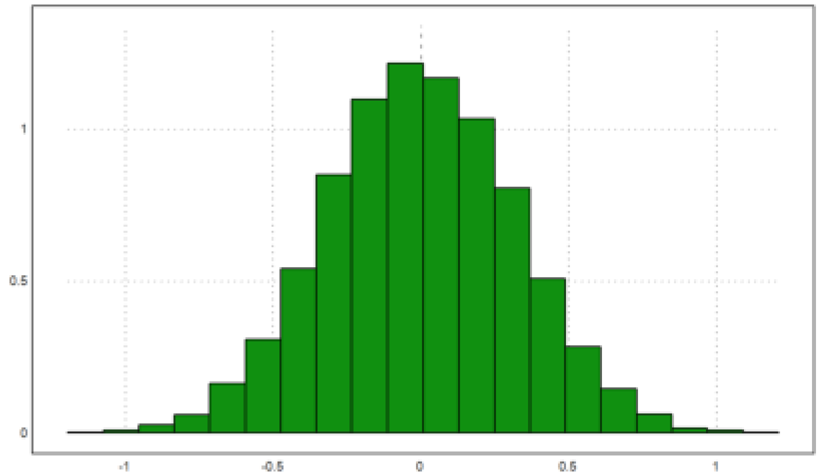
Kami menambahkan nilai yang diharapkan ke plot.

>plot2d(cw/6^3*1000,>add); plot2d(cw/6^3*1000,>points,>add):

Untuk simulasi lain, deviasi nilai rata-rata dari n variabel acak berdistribusi normal 0-1 adalah 1/akar(n).

>longformat; 1/sqrt(10)

```
0.316227766017
```



Gambar 7.34 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-042.png

Mari kita periksa ini dengan simulasi. Kita hasilkan 10000 kali 10 vektor acak.

>M=normal(10000,10); dev(mean(M)')

```
0.319493614817
```

>plot2d(mean(M)',>distribution):

Median dari 10 bilangan acak berdistribusi normal 0-1 memiliki deviasi yang lebih besar.

>dev(median(M)')

```
0.374460271535
```

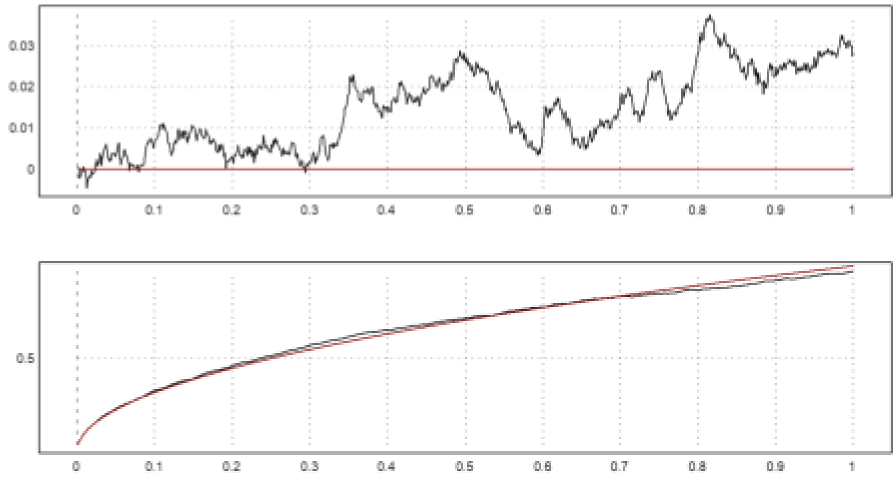
Karena kita dapat dengan mudah menghasilkan lintasan acak, kita dapat mensimulasikan proses Wiener. Kita mengambil 1000 langkah dari 1000 proses. Kemudian kita memetakan deviasi standar dan rata-rata langkah ke-n dari proses ini bersama dengan nilai yang diharapkan dalam warna merah.

>n=1000; m=1000; M=cumsum(normal(n,m)/sqrt(m)); ...
> t=(1:n)/n; figure(2,1); ...
> figure(1); plot2d(t,mean(M')'); plot2d(t,0,color=red,>add); ...
> figure(2); plot2d(t,dev(M')'); plot2d(t,sqrt(t),color=red,>add); ...
> figure(0):

7.8 Pengujian

Pengujian merupakan alat penting dalam statistik. Dalam Euler, banyak pengujian yang diterapkan. Semua pengujian ini menghasilkan galat yang kita terima jika kita menolak hipotesis nol.

Sebagai contoh, kita menguji lemparan dadu untuk distribusi seragam. Pada 600 lemparan, kita memperoleh nilai berikut, yang kita masukkan ke dalam uji chi-kuadrat.



Gambar 7.35 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-043.png

>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(100,6)')

```
0.498830517952
```

Uji chi-square juga memiliki modus, yang menggunakan simulasi Monte Carlo untuk menguji statistik. Hasilnya harus hampir sama. Parameter >p menginterpretasikan vektor y sebagai vektor probabilitas.

>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(1/6,6)',>p,>montecarlo)

```
0.526
```

Kesalahan ini terlalu besar. Jadi kita tidak dapat menolak distribusi seragam. Ini tidak membuktikan bahwa dadu kita adil. Namun, kita tidak dapat menolak hipotesis kita.

Selanjutnya, kita menghasilkan 1000 lemparan dadu menggunakan generator angka acak, dan melakukan pengujian yang sama.

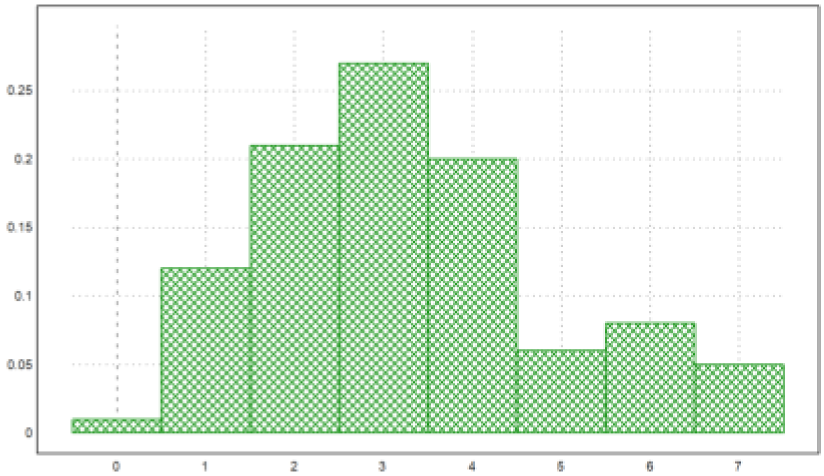
>n=1000; t=random([1,n*6]); chitest(count(t*6,6),dup(n,6)')

```
0.528028118442
```

Mari kita uji nilai rata-rata 100 dengan uji-t.

>s=200+normal([1,100])*10; . . .
> ttest(mean(s),dev(s),100,200)

```
0.0218365848476
```



Gambar 7.36 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-044.png

Fungsi ttest() memerlukan nilai rata-rata, deviasi, jumlah data, dan nilai rata-rata yang akan diuji.

Sekarang mari kita periksa dua pengukuran untuk nilai rata-rata yang sama. Kita tolak hipotesis bahwa keduanya memiliki nilai rata-rata yang sama, jika hasilnya <0,05..

>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10))

```
0.38722000942
```

Jika kita menambahkan bias pada satu distribusi, kita akan mendapatkan lebih banyak penolakan. Ulangi simulasi ini beberapa kali untuk melihat efeknya.

>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10)+2)

```
5.60009101758e-07
```

Pada contoh berikutnya, kita buat 20 lemparan dadu acak sebanyak 100 kali dan hitung angka-angka yang ada di dalamnya. Rata-rata harus ada 20/6=3,3 angka.

>R=random(100,20); R=sum(R*6<=1)'; mean(R)

```
3.28
```

Sekarang kita bandingkan jumlah angka satu dengan distribusi binomial. Pertama kita gambarkan distribusi angka satu.

>plot2d(R,distribution=max(R)+1,even=1,style="\/"):

>t=count(R,21);

Lalu kami hitung nilai yang diharapkan.

>n=0:20; b=bin(20,n)*(1/6)$^{n*(5/6)}$(20-n)*100;

Kita harus mengumpulkan beberapa angka untuk mendapatkan kategori yang cukup besar.

>t1=sum(t[1:2])|t[3:7]|sum(t[8:21]); . . .
> b1=sum(b[1:2])|b[3:7]|sum(b[8:21]);

Uji chi-kuadrat menolak hipotesis bahwa distribusi kami adalah distribusi binomial, jika hasilnya < 0,05.

>chitest(t1,b1)

```
0.53921579764
```

Contoh berikut berisi hasil dari dua kelompok orang (misalnya pria dan wanita) yang memilih satu dari enam partai.

>A=[23,37,43,52,64,74;27,39,41,49,63,76]; . . .
> writetable(A,wc=6,labr=["m","f"],labc=1:6)

```
         1     2     3     4     5     6
m       23    37    43    52    64    74
f       27    39    41    49    63    76
```

Kami ingin menguji independensi suara dari jenis kelamin. Uji tabel chi^2 melakukan hal ini. Hasilnya terlalu besar untuk menolak independensi. Jadi, kami tidak dapat mengatakan, apakah pemungutan suara bergantung pada jenis kelamin dari data ini.

>tabletest(A)

```
0.990701632326
```

Berikut ini adalah tabel yang diharapkan, jika kita mengasumsikan frekuensi pemungutan suara yang diamati.

>writetable(expectedtable(A),wc=6,dc=1,labr=["m","f"],labc=1:6)

```
         1     2     3     4     5     6
m     24.9  37.9  41.9  50.3  63.3  74.7
f     25.1  38.1  42.1  50.7  63.7  75.3
```

Kita dapat menghitung koefisien kontingensi yang dikoreksi. Karena sangat mendekati 0, kita simpulkan bahwa pemungutan suara tidak bergantung pada jenis kelamin.

>contingency(A)

```
0.0427225484717
```

7.9 Beberapa Pengujian Lainnya

Selanjutnya, kami menggunakan analisis varians (uji F) untuk menguji tiga sampel data berdistribusi normal untuk nilai rata-rata yang sama. Metode ini disebut ANOVA (analisis varians). Dalam Euler, fungsi varanalysis() digunakan.

>x1=[109,111,98,119,91,118,109,99,115,109,94]; mean(x1),

```
106.545454545
```

>x2=[120,124,115,139,114,110,113,120,117]; mean(x2),

```
119.111111111
```

>x3=[120,112,115,110,105,134,105,130,121,111]; mean(x3)

```
116.3
```

>varanalysis(x1,x2,x3)

```
0.0138048221371
```

Artinya, kita menolak hipotesis nilai rata-rata yang sama. Kita melakukan ini dengan probabilitas kesalahan sebesar 1,3%.

Ada juga uji median, yang menolak sampel data dengan distribusi rata-rata yang berbeda dengan menguji median sampel gabungan.

>a=[56,66,68,49,61,53,45,58,54];

>b=[72,81,51,73,69,78,59,67,65,71,68,71];

>mediantest(a,b)

```
0.0241724220052
```

Uji kesetaraan lainnya adalah uji peringkat. Uji peringkat jauh lebih tajam daripada uji median.

>ranktest(a,b)

```
0.00199969612469
```

Dalam contoh berikut, kedua distribusi memiliki rata-rata yang sama.

>ranktest(random(1,100),random(1,50)*3-1)

```
0.129608141484
```

Sekarang, mari kita coba simulasikan dua perawatan a dan b yang diterapkan pada orang yang berbeda.

>a=[8.0,7.4,5.9,9.4,8.6,8.2,7.6,8.1,6.2,8.9];

>b=[6.8,7.1,6.8,8.3,7.9,7.2,7.4,6.8,6.8,8.1];

Uji signum memutuskan, apakah a lebih baik dari b.

>signtest(a,b)

```
0.0546875
```

Ini adalah kesalahan yang sangat besar. Kita tidak dapat menolak bahwa a sama baiknya dengan b.

Uji Wilcoxon lebih tajam daripada uji ini, tetapi bergantung pada nilai kuantitatif perbedaannya.

>wilcoxon(a,b)

```
0.0296680599405
```

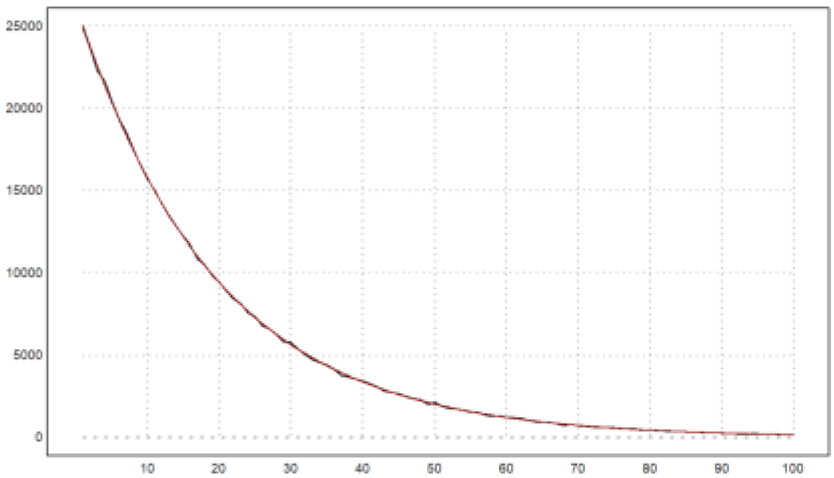
Mari kita coba dua pengujian lagi menggunakan seri yang dihasilkan.

>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20)-1)

```
0.0068706451766
```

>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20))

```
0.275145971064
```



Gambar 7.37 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-045.png

7.10 Angka Acak

Berikut ini adalah pengujian untuk generator angka acak. Euler menggunakan generator yang sangat bagus, jadi kita tidak perlu mengharapkan masalah apa pun.

Pertama-tama kita menghasilkan sepuluh juta angka acak dalam [0,1].

>n:=10000000; r:=random(1,n);

Berikutnya kita hitung jarak antara dua angka kurang dari 0,05.

>a:=0.05; d:=differences(nonzeros(r<a));

Terakhir, kami memplot berapa kali setiap jarak terjadi, dan membandingkannya dengan nilai yang diharapkan.

>m=getmultiplicities(1:100,d); plot2d(m); . . .
> plot2d(“n*(1-a)$^{(x-1)*a}$2”,color=red,>add):

Bersihkan data.

>remvalue n;

7.11 Pendahuluan bagi Pengguna Proyek R

Jelas, EMT tidak bersaing dengan R sebagai paket statistik. Akan tetapi, ada banyak prosedur dan fungsi statistik yang tersedia di EMT juga. Jadi, EMT dapat memenuhi kebutuhan dasar. Lagi pula, EMT dilengkapi dengan paket numerik dan sistem aljabar komputer.

Buku catatan ini ditujukan bagi Anda yang sudah familier dengan R, tetapi perlu mengetahui perbedaan sintaksis EMT dan R. Kami mencoba memberikan gambaran umum tentang hal-hal yang jelas dan kurang jelas yang perlu Anda ketahui.

Selain itu, kami melihat cara untuk bertukar data antara kedua sistem.

Harap dicatat bahwa ini adalah pekerjaan yang masih dalam tahap pengerjaan.

7.12 Sintaksis Dasar

Hal pertama yang Anda pelajari di R adalah membuat vektor. Dalam EMT, perbedaan utamanya adalah operator : dapat mengambil ukuran langkah. Selain itu, operator ini memiliki daya pengikatan yang rendah.

>n=10; 0:n/20:n-1

```
[0,  0.5,  1,  1.5,  2,  2.5,  3,  3.5,  4,  4.5,  5,  5.5,  6,  6.5,
7,  7.5,  8,  8.5,  9]
```

Fungsi c() tidak ada. Dimungkinkan untuk menggunakan vektor guna menggabungkan berbagai hal.

Contoh berikut ini, seperti banyak contoh lainnya, berasal dari "Interoduction to R" yang disertakan dalam proyek R. Jika Anda membaca PDF ini, Anda akan menemukan bahwa saya mengikuti alurnya dalam tutorial ini.

>x=[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]; [x,0,x]

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7,  0,  10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Operator titik dua dengan ukuran langkah EMT digantikan oleh fungsi seq() di R. Kita dapat menulis fungsi ini dalam EMT.

>function seq(a,b,c) := a:b:c; ...
> seq(0,-0.1,-1)

```
[0,  -0.1,  -0.2,  -0.3,  -0.4,  -0.5,  -0.6,  -0.7,  -0.8,  -0.9,  -1]
```

Fungsi rep() dari R tidak ada dalam EMT. Untuk input vektor, dapat ditulis sebagai berikut.

>function rep(x:vector,n:index) := flatten(dup(x,n)); ...
> rep(x,2)

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7,  10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Perhatikan bahwa "=" atau ":=" digunakan untuk penugasan. Operator "->" digunakan untuk unit dalam EMT.

>125km -> " miles"

```
77.6713990297 miles
```

Operator “<-” untuk penugasan menyesatkan dan bukan ide yang baik untuk R. Berikut ini akan membandingkan a dan -4 dalam EMT.

>a=2; a<-4

```
0
```

Dalam R, “a<-4<3” berfungsi, tetapi “a<-4<-3” tidak. Saya juga mengalami ambiguitas serupa dalam EMT, tetapi mencoba menghilangkannya sedikit demi sedikit.

EMT dan R memiliki vektor bertipe boolean. Namun dalam EMT, angka 0 dan 1 digunakan untuk mewakili false dan true. Dalam R, nilai true dan false tetap dapat digunakan dalam aritmatika biasa seperti dalam EMT.

>x<5, %*x

```
[0,  0,  1,  0,  0]
[0,  0,  3.1,  0,  0]
```

EMT memunculkan kesalahan atau menghasilkan NAN, tergantung pada tanda “kesalahan”.

>errors off; 0/0, isNAN(sqrt(-1)), errors on;

```
NAN
1
```

String sama di R dan EMT. Keduanya berada di lokal saat ini, bukan di Unicode.

Di R ada paket untuk Unicode. Di EMT, string dapat berupa string Unicode. String unicode dapat diterjemahkan ke pengodean lokal dan sebaliknya. Selain itu, u”. . . ” dapat berisi entitas HTML.

>u”© Ren&eacut; Grothmann”

```
© René Grothmann
```

Berikut ini mungkin atau mungkin tidak ditampilkan dengan benar pada sistem Anda sebagai A dengan titik dan garis di atasnya. Hal ini bergantung pada font yang Anda gunakan.

>chartoutf([480])

Penggabungan string dilakukan dengan “+” atau “|”. String dapat menyertakan angka, yang akan dicetak dalam format saat ini.

>“pi =”+pi

```
pi = 3.14159265359
```

7.13 Pengindeksan

Sering kali, ini akan berfungsi seperti di R.

Namun EMT akan menginterpretasikan indeks negatif dari belakang vektor, sementara R menginterpretasikan x[n] sebagai x tanpa elemen ke-n.

>x, x[1:3], x[-2]

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
[10.4,  5.6,  3.1]
6.4
```

Perilaku R dapat dicapai dalam EMT dengan drop().

>drop(x,2)

```
[10.4,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Vektor logika tidak diperlakukan secara berbeda sebagai indeks dalam EMT, berbeda dengan R. Anda perlu mengekstrak elemen bukan nol terlebih dahulu dalam EMT.

>x, x>5, x[nonzeros(x>5)]

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
[1,  1,  0,  1,  1]
[10.4,  5.6,  6.4,  21.7]
```

Sama seperti di R, vektor indeks dapat berisi pengulangan.

```
[10.4,  5.6,  5.6,  10.4]
```

Namun, nama untuk indeks tidak dimungkinkan dalam EMT. Untuk paket statistik, hal ini mungkin sering diperlukan untuk memudahkan akses ke elemen vektor.

Untuk meniru perilaku ini, kita dapat mendefinisikan fungsi sebagai berikut.

>function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; . . .
> s=[“first”,“second”,“third”,“fourth”]; sel(x,[“first”,“third”],s)

```
Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
                ^
```

```
Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
                ^
[10.4,  3.1]
```

7.14 Tipe Data

EMT memiliki lebih banyak tipe data tetap daripada R. Jelas, di R terdapat vektor yang terus bertambah. Anda dapat menetapkan vektor numerik kosong v dan menetapkan nilai ke elemen v[17]. Hal ini tidak mungkin dilakukan di EMT.

Berikut ini agak tidak efisien.

>v=[]; for i=1 to 10000; v=v|i; end;

EMT sekarang akan membuat vektor dengan v dan i yang ditambahkan pada tumpukan dan menyalin vektor itu kembali ke variabel global v.

Yang lebih efisien mendefinisikan vektor terlebih dahulu.

>v=zeros(10000); for i=1 to 10000; v[i]=i; end;

Untuk mengubah jenis tanggal di EMT, Anda dapat menggunakan fungsi seperti complex().

>complex(1:4)

```
[ 1+0i ,  2+0i ,  3+0i ,  4+0i  ]
```

Konversi ke string hanya dimungkinkan untuk tipe data dasar. Format saat ini digunakan untuk penggabungan string sederhana. Namun, ada fungsi seperti print() atau frac().

Untuk vektor, Anda dapat dengan mudah menulis fungsi Anda sendiri.

>function tostr (v) ...

```
s="[";
loop 1 to length(v);
   s=s+print(v[#],2,0);
   if #<length(v) then s=s+","; endif;
end;
return s+"]";
endfunction
```

>tostr(linspace(0,1,10))

```
[0.00,0.10,0.20,0.30,0.40,0.50,0.60,0.70,0.80,0.90,1.00]
```

Untuk komunikasi dengan Maxima, terdapat fungsi convertmxm(), yang juga dapat digunakan untuk memformat vektor untuk keluaran.

>convertmxm(1:10)

```
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
```

Untuk Latex perintah tex dapat digunakan untuk mendapatkan perintah Latex.

>tex(&[1,2,3])

```
\left[ 1 , 2 , 3 \right]
```

7.15 Faktor dan Tabel

Dalam pengantar R terdapat contoh dengan apa yang disebut faktor.

Berikut ini adalah daftar wilayah dari 30 negara bagian.

>austates = [“tas”, “sa”, “qld”, “nsw”, “nsw”, “nt”, “wa”, “wa”, ...
> “qld”, “vic”, “nsw”, “vic”, “qld”, “qld”, “sa”, “tas”, ...
> “sa”, “nt”, “wa”, “vic”, “qld”, “nsw”, “nsw”, “wa”, ...
> “sa”, “act”, “nsw”, “vic”, “vic”, “act”];

Asumsikan, kita memiliki pendapatan yang sesuai di setiap negara bagian.

>incomes = [60, 49, 40, 61, 64, 60, 59, 54, 62, 69, 70, 42, 56, ...
> 61, 61, 61, 58, 51, 48, 65, 49, 49, 41, 48, 52, 46, ...
> 59, 46, 58, 43];

Sekarang, kita ingin menghitung rata-rata pendapatan di wilayah tersebut. Sebagai program statistik, R memiliki factor() dan tappy() untuk ini.

EMT dapat melakukan ini dengan menemukan indeks wilayah dalam daftar wilayah yang unik.

>auterr=sort(unique(austates)); f=indexofsorted(auterr,austates)

```
[6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Pada titik tersebut, kita dapat menulis fungsi loop kita sendiri untuk melakukan sesuatu hanya untuk satu faktor.

Atau kita dapat meniru fungsi tapply() dengan cara berikut.

>function map tappl (i; f$:call, cat, x) ...

```
u=sort(unique(cat));
f=indexof(u,cat);
return f$(x[nonzeros(f==indexof(u,i))]);
endfunction
```

Agak tidak efisien, karena menghitung wilayah unik untuk setiap i, tetapi berhasil.

>tappl(auterr,“mean”,austates,incomes)

```
[44.5,  57.3333333333,  55.5,  53.6,  55,  60.5,  56,  52.25]
```

Perhatikan bahwa ini berfungsi untuk setiap vektor wilayah.

>tappl([“act”,“nsw”],“mean”,austates,incomes)

```
[44.5,  57.3333333333]
```

Sekarang, paket statistik EMT mendefinisikan tabel seperti di R. Fungsi readtable() dan writetable() dapat digunakan untuk input dan output.

Jadi kita dapat mencetak pendapatan negara rata-rata di wilayah dengan cara yang mudah.

>writetable(tappl(auterr,“mean”,austates,incomes),labc=auterr,wc=7)

```
    act    nsw     nt    qld     sa    tas    vic     wa
   44.5  57.33   55.5   53.6     55   60.5     56  52.25
```

Kita juga dapat mencoba meniru perilaku R sepenuhnya.

Faktor-faktor tersebut harus disimpan dalam suatu koleksi dengan jenis dan kategori (negara bagian dan teritori dalam contoh kita). Untuk EMT, kita tambahkan indeks yang telah dihitung sebelumnya.

>function makef (t) ...

```
## Factor data
## Returns a collection with data t, unique data, indices.
## See: tapply
u=sort(unique(t));
return {{t,u,indexofsorted(u,t)}};
endfunction
```

>statef=makef(austates);

Sekarang elemen ketiga dari koleksi akan berisi indeks.

>statef[3]

```
[6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Sekarang kita dapat meniru tapply() dengan cara berikut. Fungsi ini akan mengembalikan tabel sebagai kumpulan data tabel dan judul kolom.

>function tapply (t:vector,tf,f$:call) ...

```
## Makes a table of data and factors
## tf : output of makef()
## See: makef
uf=tf[2]; f=tf[3]; x=zeros(length(uf));
for i=1 to length(uf);
   ind=nonzeros(f==i);
   if length(ind)==0 then x[i]=NAN;
   else x[i]=f$(t[ind]);
   endif;
end;
return {{x,uf}};
endfunction
```

Kami tidak menambahkan banyak pemeriksaan tipe di sini. Satu-satunya tindakan pencegahan menyangkut kategori (faktor) tanpa data. Namun, seseorang harus memeriksa panjang t yang benar dan kebenaran koleksi tf.

Tabel ini dapat dicetak sebagai tabel dengan writetable().

>writetable(tapply(incomes,statef,“mean”),wc=7)

```
    act    nsw     nt    qld     sa    tas    vic     wa
   44.5  57.33   55.5   53.6     55   60.5     56  52.25
```

7.16 Array

EMT hanya memiliki dua dimensi untuk array. Tipe data ini disebut matriks. Akan mudah untuk menulis fungsi untuk dimensi yang lebih tinggi atau pustaka C untuk ini.

R memiliki lebih dari dua dimensi. Dalam R, array adalah vektor dengan bidang dimensi.

Dalam EMT, vektor adalah matriks dengan satu baris. Vektor dapat dibuat menjadi matriks dengan redim().

>shortformat; X=redim(1:20,4,5)

```
         1           2           3           4           5
         6           7           8           9          10
        11          12          13          14          15
        16          17          18          19          20
```

Ekstraksi baris dan kolom, atau sub-matriks, sangat mirip di R.

>X[,2:3]

```
         2           3
         7           8
        12          13
        17          18
```

Namun, dalam R dimungkinkan untuk menetapkan daftar indeks vektor tertentu ke suatu nilai. Hal yang sama dimungkinkan dalam EMT hanya dengan loop.

>function setmatrixvalue (M, i, j, v) ...

```
loop 1 to max(length(i),length(j),length(v))
   M[i{#},j{#}] = v{#};
end;
endfunction
```

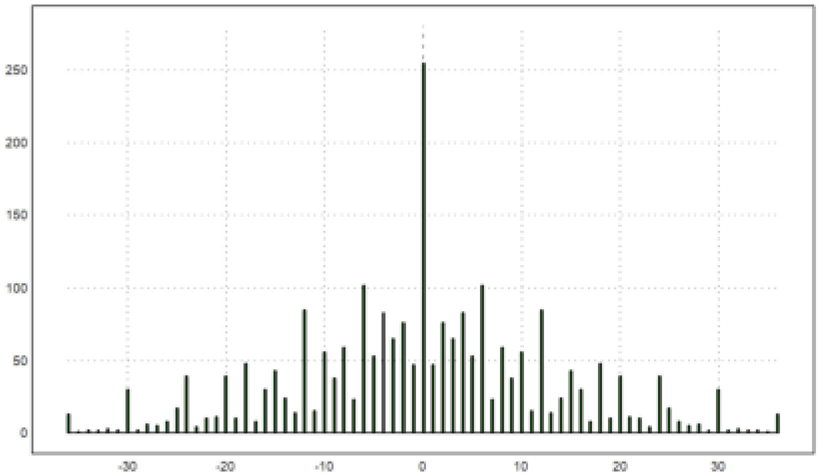
Kami mendemonstrasikan ini untuk menunjukkan bahwa matriks dilewatkan dengan referensi dalam EMT. Jika Anda tidak ingin mengubah matriks asli M, Anda perlu menyalinnya dalam fungsi tersebut.

>setmatrixvalue(X,1:3,3:-1:1,0); X,

```
         1           2           0           4           5
         6           0           8           9          10
         0          12          13          14          15
        16          17          18          19          20
```

Produk luar dalam EMT hanya dapat dilakukan antara vektor. Hal ini dilakukan secara otomatis karena bahasa matriks. Satu vektor harus berupa vektor kolom dan yang lainnya berupa vektor baris.

>(1:5)*(1:5)'



Gambar 7.38 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-046.png

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Dalam pengantar PDF untuk R terdapat sebuah contoh, yang menghitung distribusi ab-cd untuk a,b,c,d yang dipilih secara acak dari 0 hingga n. Solusi dalam R adalah membentuk matriks 4 dimensi dan menjalankan table() di atasnya.

Tentu saja, ini dapat dicapai dengan loop. Namun, loop tidak efektif dalam EMT atau R. Dalam EMT, kita dapat menulis loop dalam C dan itu akan menjadi solusi tercepat.

Namun, kita ingin meniru perilaku R. Untuk ini, kita perlu meratakan perkalian ab dan membuat matriks ab-cd.

>a=0:6; b=a'; p=flatten(a*b); q=flatten(p-p'); ...
> u=sort(unique(q)); f=getmultiplicities(u,q); ...
> statplot(u,f,"h"):

Selain multiplisitas yang tepat, EMT dapat menghitung frekuensi dalam vektor.

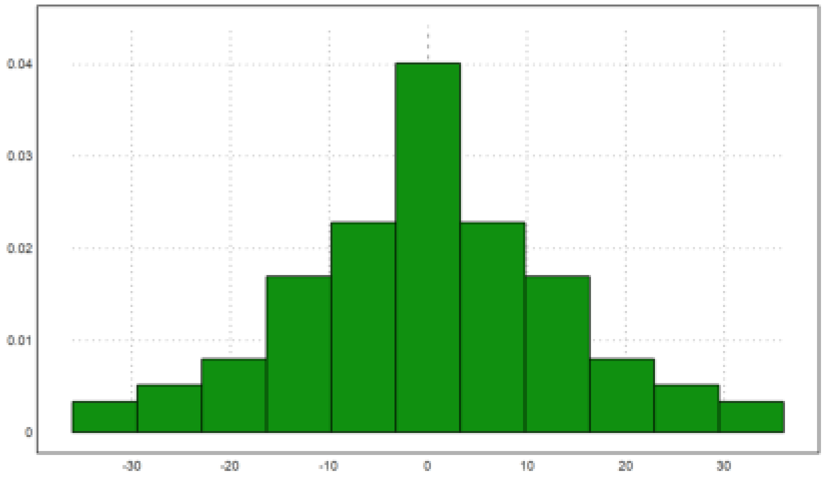
>getfrequencies(q,-50:10:50)

```
[0,  23,  132,  316,  602,  801,  333,  141,  53,  0]
```

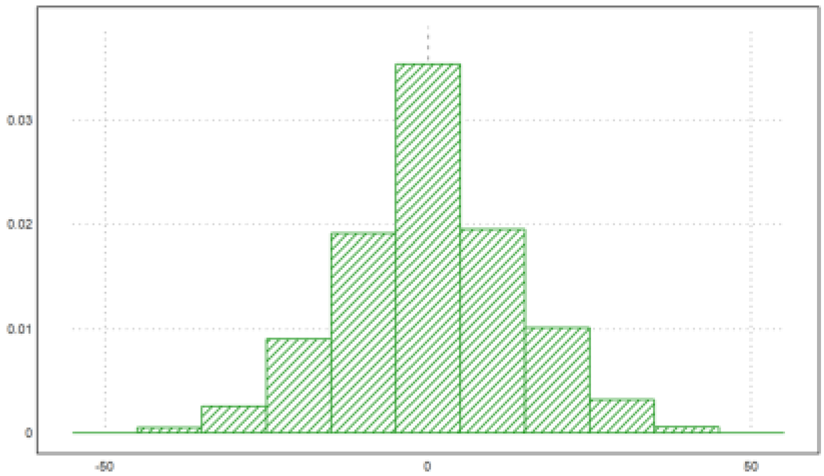
Cara termudah untuk memplot ini sebagai distribusi adalah sebagai berikut.

>plot2d(q,distribution=11):

Namun, Anda juga dapat menghitung terlebih dahulu jumlah dalam interval yang dipilih. Tentu saja, berikut ini menggunakan getfrequencies() secara internal.



Gambar 7.39 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-047.png



Gambar 7.40 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-048.png

Karena fungsi histo() mengembalikan frekuensi, kita perlu menskalakannya sehingga integral di bawah grafik batang adalah 1.

>{x,y}=histo(q,v=-55:10:55); y=y/sum(y)/differences(x); ...
> plot2d(x,y,>bar,style="/"):

7.17 List

EMT memiliki dua jenis daftar. Satu adalah daftar global yang dapat diubah, dan yang lainnya adalah jenis daftar yang tidak dapat diubah. Kami tidak peduli dengan daftar global di sini.

Jenis daftar yang tidak dapat diubah disebut koleksi dalam EMT. Ia berperilaku seperti struktur dalam C, tetapi elemennya hanya diberi nomor dan tidak diberi nama.

>L={{"Fred","Flintstone",40,[1990,1992]}}

```
Fred
Flintstone
40
[1990,  1992]
```

Saat ini unsur-unsur tersebut tidak memiliki nama, meskipun nama dapat ditetapkan untuk tujuan khusus. Unsur-unsur tersebut diakses dengan angka.

>(L[4])[2]

```
1992
```

7.18 Input dan Output File (Membaca dan Menulis Data)

Anda sering kali ingin mengimpor matriks data dari sumber lain ke EMT. Tutorial ini memberi tahu Anda tentang berbagai cara untuk mencapainya. Fungsi sederhana adalah writematrix() dan readmatrix().

Mari kita tunjukkan cara membaca dan menulis vektor bilangan real ke dalam file.

>a=random(1,100); mean(a), dev(a),

```
0.49815
0.28037
```

Untuk menulis data ke dalam berkas, kami menggunakan fungsi writematrix().

Karena pengantar ini kemungkinan besar berada di dalam direktori, tempat pengguna tidak memiliki akses tulis, kami menulis data ke direktori beranda pengguna. Untuk buku catatan sendiri, ini tidak diperlukan, karena berkas data akan ditulis ke dalam direktori yang sama.

>filename="test.dat";

Sekarang kita tulis vektor kolom a' ke dalam berkas. Ini menghasilkan satu angka di setiap baris berkas.

>writematrix(a',filename);

Untuk membaca data, kita menggunakan readmatrix().

>a=readmatrix(filename)';

Dan hapus berkasnya.

>fileremove(filename);

>mean(a), dev(a),

```
0.49815
0.28037
```

Fungsi writematrix() atau writetable() dapat dikonfigurasi untuk bahasa lain.

Misalnya, jika Anda memiliki sistem bahasa Indonesia (titik desimal dengan koma), Excel Anda memerlukan nilai dengan koma desimal yang dipisahkan oleh titik koma dalam file csv (nilai default dipisahkan dengan koma). File berikut "test.csv" akan muncul di folder Anda saat ini.

>filename="test.csv"; ...
> writematrix(random(5,3),file=filename,separator=",");

Anda sekarang dapat membuka berkas ini langsung dengan Excel Indonesia.

>fileremove(filename);

Terkadang kita memiliki string dengan token seperti berikut.

>s1:="f m m f m m m f f f m m f"; ...
> s2:="f f f m m f f";

Untuk menokenisasi ini, kami mendefinisikan vektor token.

>tok:=["f","m"]

```
f
m
```

Lalu kita dapat menghitung berapa kali setiap token muncul dalam string, dan memasukkan hasilnya ke dalam tabel.

>M:=getmultiplicities(tok,strtokens(s1))_ ...
> getmultiplicities(tok,strtokens(s2));

Tulis tabel dengan header token.

>writetable(M,labc=tok,labr=1:2,wc=8)

```
               f         m
      1        6         7
      2        5         2
```

Untuk statika, EMT dapat membaca dan menulis tabel.

>file="test.dat"; open(file,"w"); ...
> writeln("A,B,C"); writematrix(random(3,3)); ...
> close();

Berkasnya tampak seperti ini.

>printfile(file)

```
A,B,C
0.7003664386138074,0.1875530821001213,0.3262339279660414
0.5926249243193858,0.1522927283984059,0.368140583062521
0.8065535209872989,0.7265910840408142,0.7332619844597152
```

Fungsi readtable() dalam bentuk yang paling sederhana dapat membacanya dan mengembalikan kumpulan nilai dan baris judul.

>L=readtable(file,>list);

Koleksi ini dapat dicetak dengan writetable() ke buku catatan, atau ke berkas.

>writetable(L,wc=10,dc=5)

```
         A         B         C
   0.70037   0.18755   0.32623
   0.59262   0.15229   0.36814
   0.80655   0.72659   0.73326
```

Matriks nilai adalah elemen pertama L. Perhatikan bahwa mean() dalam EMT menghitung nilai rata-rata baris matriks.

>mean(L[1])

```
  0.40472
  0.37102
  0.75547
```

7.19 File CSV

Pertama, mari kita tulis matriks ke dalam file. Untuk output, kita buat file di direktori kerja saat ini.

>file="test.csv"; ...
> M=random(3,3); writematrix(M,file);

Berikut ini isi file tersebut.

>printfile(file)

```
0.8221197733097619,0.821531098722547,0.7771240608094004
0.8482947121863489,0.3237767724883862,0.6501422353377985
0.1482301827518109,0.3297459716109594,0.6261901074210923
```

CVS ini dapat dibuka pada sistem bahasa Inggris ke Excel dengan mengklik dua kali. Jika Anda mendapatkan berkas tersebut pada sistem bahasa Jerman, Anda perlu mengimpor data ke Excel dengan memperhatikan titik desimal.

Namun, titik desimal juga merupakan format default untuk EMT. Anda dapat membaca matriks dari file dengan readmatrix().

>readmatrix(file)

```
  0.82212   0.82153   0.77712
  0.84829   0.32378   0.65014
  0.14823   0.32975   0.62619
```

Dimungkinkan untuk menulis beberapa matriks ke dalam satu berkas. Perintah open() dapat membuka berkas untuk ditulis dengan parameter “w”. Nilai default untuk membaca adalah “r”.

>open(file,“w”); writematrix(M); writematrix(M’); close();

Matriks dipisahkan oleh baris kosong. Untuk membaca matriks, buka berkas dan panggil readmatrix() beberapa kali.

>open(file); A=readmatrix(); B=readmatrix(); A==B, close();

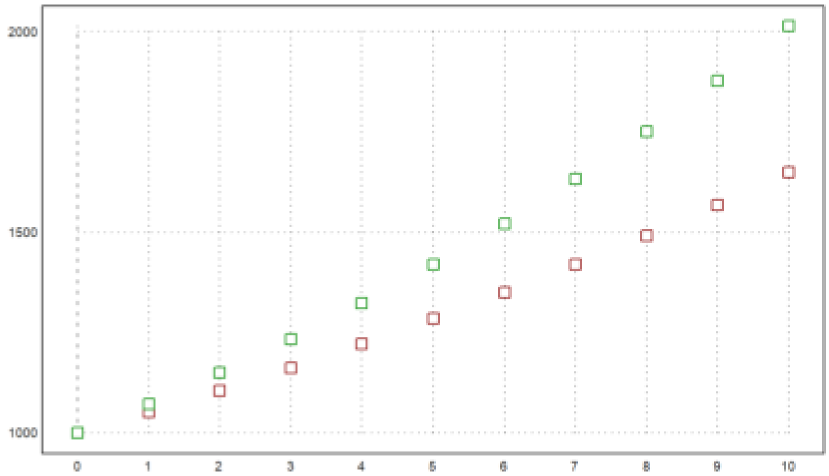
```
        1         0         0
        0         1         0
        0         0         1
```

Di Excel atau lembar kerja serupa, Anda dapat mengekspor matriks sebagai CSV (nilai yang dipisahkan koma). Di Excel 2007, gunakan “simpan sebagai” dan “format lain”, lalu pilih “CSV”. Pastikan, tabel saat ini hanya berisi data yang ingin Anda ekspor.

Berikut ini contohnya.

>printfile(“excel-data.csv”)

```
0;1000;1000
1;1051,271096;1072,508181
2;1105,170918;1150,273799
3;1161,834243;1233,67806
4;1221,402758;1323,129812
5;1284,025417;1419,067549
6;1349,858808;1521,961556
7;1419,067549;1632,31622
8;1491,824698;1750,6725
9;1568,312185;1877,610579
10;1648,721271;2013,752707
```



Gambar 7.41 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-049.png

Seperti yang Anda lihat, sistem Jerman saya menggunakan titik koma sebagai pemisah dan koma desimal. Anda dapat mengubahnya di pengaturan sistem atau di Excel, tetapi tidak diperlukan untuk membaca matriks ke EMT.

Cara termudah untuk membaca ini ke Euler adalah readmatrix(). Semua koma diganti dengan titik dengan parameter >comma. Untuk CSV bahasa Inggris, cukup abaikan parameter ini.

>M=readmatrix("excel-data.csv",>comma)

```
         0      1000      1000
         1    1051.3    1072.5
         2    1105.2    1150.3
         3    1161.8    1233.7
         4    1221.4    1323.1
         5      1284    1419.1
         6    1349.9      1522
         7    1419.1    1632.3
         8    1491.8    1750.7
         9    1568.3    1877.6
        10    1648.7    2013.8
```

Mari kita plot ini.

>plot2d(M'[1],M'[2:3],>points,color=[red,green]'):

Ada cara yang lebih mendasar untuk membaca data dari sebuah berkas. Anda dapat membuka berkas dan membaca angka baris demi baris. Fungsi getvectorline() akan membaca angka dari sebaris data. Secara default, fungsi ini mengharapkan titik desimal. Namun, fungsi ini juga dapat menggunakan koma desimal, jika Anda memanggil setdecimaldot(",") sebelum menggunakan fungsi ini.

Fungsi berikut adalah contohnya. Fungsi ini akan berhenti di akhir berkas atau baris kosong.

>function myload (file) ...

```
open(file);
M=[];
repeat
   until eof();
   v=getvectorline(3);
   if length(v)>0 then M=M_v; else break; endif;
end;
return M;
close(file);
endfunction
```

>myload(file)

```
  0.82212   0.82153   0.77712
  0.84829   0.32378   0.65014
  0.14823   0.32975   0.62619
```

Semua angka dalam berkas itu juga dapat dibaca dengan getvector().

>open(file); v=getvector(10000); close(); redim(v[1:9],3,3)

```
  0.82212   0.82153   0.77712
  0.84829   0.32378   0.65014
  0.14823   0.32975   0.62619
```

Jadi sangat mudah untuk menyimpan vektor nilai, satu nilai di setiap baris dan membaca kembali vektor ini.

>v=random(1000); mean(v)

```
0.50303
```

>writematrix(v',file); mean(readmatrix(file)')

```
0.50303
```

7.20 Menggunakan Tabel

Tabel dapat digunakan untuk membaca atau menulis data numerik. Misalnya, kita menulis tabel dengan tajuk baris dan kolom ke dalam sebuah berkas.

>file="test.tab"; M=random(3,3); . . .
> open(file,"w"); . . .
> writetable(M,separator=",",labc=["one","two","three"]); . . .
> close(); . . .
> printfile(file)

```
one,two,three
      0.09,      0.39,      0.86
      0.39,      0.86,      0.71
       0.2,      0.02,      0.83
```

Ini dapat diimpor ke Excel.

Untuk membaca file di EMT, kami menggunakan readtable().

>{M,headings}=readtable(file,>clabs); ...
> writetable(M,labc=headings)

```
       one        two     three
      0.09       0.39      0.86
      0.39       0.86      0.71
       0.2       0.02      0.83
```

7.21 Menganalisis Garis

Anda bahkan dapat mengevaluasi setiap garis secara manual. Misalkan, kita memiliki garis dengan format berikut.

>line="2020-11-03,Tue,1'114.05"

```
2020-11-03,Tue,1'114.05
```

Pertama, kita dapat membuat token pada baris tersebut.

>vt=strtokens(line)

```
2020-11-03
Tue
1'114.05
```

Kemudian kita dapat mengevaluasi setiap elemen garis menggunakan evaluasi yang tepat.

>day(vt[1]), ...
> indexof(["mon","tue","wed","thu","fri","sat","sun"],tolower(vt[2])), ...
> strrepl(vt[3],"'","")()

```
7.3816e+05
2
1114
```

Dengan menggunakan ekspresi reguler, dimungkinkan untuk mengekstrak hampir semua informasi dari sebaris data.

Asumsikan kita memiliki baris berikut sebagai dokumen HTML.

>line="<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>"

```
&lt;tr&gt;&lt;td&gt;1145.45&lt;/td&gt;&lt;td&gt;5.6&lt;/td&gt;&lt;td&gt;-4.
```

Untuk mengekstraknya, kami menggunakan ekspresi reguler, yang mencari

- tanda kurung tutup >,
- string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung dengan sub-kecocokan "(…)",
- tanda kurung buka dan tutup menggunakan solusi terpendek,
- lagi-lagi string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung,
- dan tanda kurung buka <.

Ekspresi reguler agak sulit dipelajari tetapi sangat ampuh.

>{pos,s,vt}=strxfind(line,">([^<\>]+)<.+?>([^<\>]+)<");

Hasilnya adalah posisi kecocokan, string yang cocok, dan vektor string untuk sub-kecocokan.

>for k=1:length(vt); vtk, end;

```
1145.5
5.6
```

Berikut adalah fungsi yang membaca semua item numerik antara <td> dan </td>.

>function readtd (line) …

```
v=[]; cp=0;
repeat
   {pos,s,vt}=strxfind(line,"<td.*?>(.+?)</td>",cp);
   until pos==0;
   if length(vt)>0 then v=v|vt[1]; endif;
   cp=pos+strlen(s);
end;
return v;
endfunction
```

>readtd(line+“<td>non-numerical</td>”)

```
1145.45
5.6
-4.5
non-numerical
```

7.22 Membaca dari Web

Situs web atau berkas dengan URL dapat dibuka di EMT dan dapat dibaca baris demi baris.

Dalam contoh ini, kami membaca versi terkini dari situs EMT. Kami menggunakan ekspresi reguler untuk memindai “Versi . . . ” dalam judul.

>function readversion () . . .

```
urlopen("http://www.euler-math-toolbox.de/Programs/Changes.html");
repeat
  until urleof();
  s=urlgetline();
  k=strfind(s,"Version ",1);
  if k>0 then substring(s,k,strfind(s,"<",k)-1), break; endif;
end;
urlclose();
endfunction
```

>readversion

```
Version 2024-01-12
```

7.23 Input dan Output Variabel

Anda dapat menulis variabel dalam bentuk definisi Euler ke dalam file atau ke baris perintah.

>writevar(pi,“mypi”);

```
mypi = 3.141592653589793;
```

Untuk pengujian, kami membuat file Euler di direktori kerja EMT.

>file=“test.e”; . . .
> writevar(random(2,2),“M”,file); . . .
> printfile(file,3)

```
M = [ ..
0.5991820585590205, 0.7960280262224293;
0.5167243983231363, 0.2996684599070898];
```

Sekarang kita dapat memuat file tersebut. File tersebut akan mendefinisikan matriks M.

>load(file); show M,

```
M =
  0.59918   0.79603
  0.51672   0.29967
```

Ngomong-ngomong, jika writevar() digunakan pada suatu variabel, ia akan mencetak definisi variabel dengan nama variabel ini.

>writevar(M); writevar(inch$)

```
M = [ ..
0.5991820585590205, 0.7960280262224293;
0.5167243983231363, 0.2996684599070898];
inch$ = 0.0254;
```

Kita juga dapat membuka file baru atau menambahkannya ke file yang sudah ada. Dalam contoh ini, kita menambahkannya ke file yang dibuat sebelumnya.

>open(file,"a"); ...
> writevar(random(2,2),"M1"); ...
> writevar(random(3,1),"M2"); ...
> close();

>load(file); show M1; show M2;

```
M1 =
  0.30287   0.15372
   0.7504   0.75401
M2 =
  0.27213
 0.053211
  0.70249
```

Untuk menghapus file apa pun gunakan fileremove().

>fileremove(file);

Vektor baris dalam sebuah file tidak memerlukan koma, jika setiap angka berada di baris baru. Mari kita buat file seperti itu, tulis setiap baris satu per satu dengan writeln().

>open(file,“w”); writeln(“M = [”); . . .
> for i=1 to 5; writeln(” ”+random()); end; . . .
> writeln(”];”); close(); . . .
> printfile(file)

```
M = [
0.344851384551
0.0807510017715
0.876519562911
0.754157709472
0.688392638934
];
```

>load(file); M

```
[0.34485,  0.080751,  0.87652,  0.75416,  0.68839]
```

Latihan Soal

1. Tentukan mean dan median dari data berikut serta buatkan boxplotnya

A = 12, 93, 62, 93, 56, 28, 90, 15, 46, 83, 25, 33, 74, 84, 29, 61, 74, 94, 50, 66

>A=[12, 93, 62, 93, 56, 28, 90, 15, 46, 83, 25, 33, 74, 84, 29, 61, 74, 94, 50, 66]; . . .
> mean(A), median(A),

```
58.4
61.5
```

>aspect(1.5); boxplot(A):

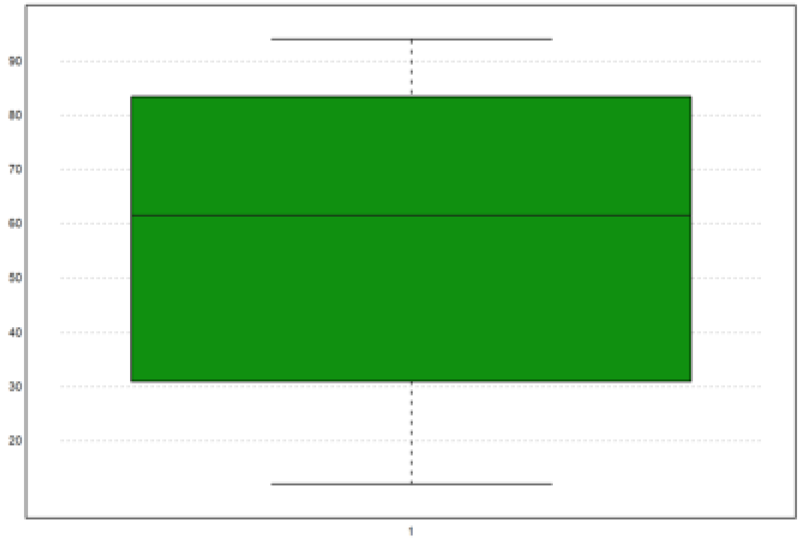
2. Diberikan file latsol-2.csv

a. Buatkan plot point dari data tersebut

b. Tentukan mean dari kolom kedua

c. Tentukan median dari kolom kedua dan ketiga

>printfile(“latsol-2.csv”)



Gambar 7.42 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-050.png

```
0;100;101
1;102,37;113,27
2;113,56;116,84
3;118,94;121,56
4;126,48;134,92
5;134,11;137,14
6;138,79;142,83
7;146,23;165,72
```

>C=readmatrix("latsol-2.csv",>comma)

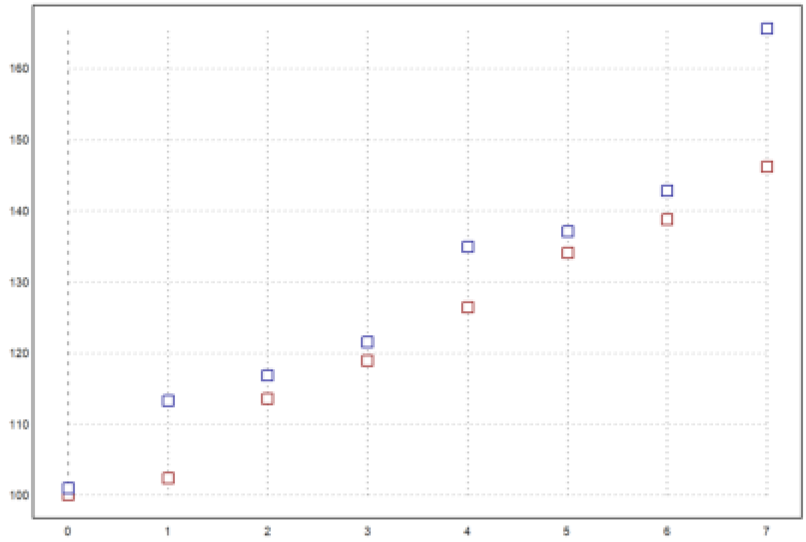
```
        0       100       101
        1    102.37    113.27
        2    113.56    116.84
        3    118.94    121.56
        4    126.48    134.92
        5    134.11    137.14
        6    138.79    142.83
        7    146.23    165.72
```

a. Buatkan plot dari data tersebut

>plot2d(C'[1],C'[2:3],>points,color=[red,blue]'):

b. Tentukan mean dari kolom kedua

>mean(C'[2])



Gambar 7.43 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-051.png

```
122.56
```

c. Tentukan median dari kolom kedua dan ketiga

>median(C’[2:3])

```
122.71
128.24
```

3. Diberikan data sd-mentereng.csv yang berisi data jumlah siswa kelas 1 sampai kelas 3 di suatu SD dari 2015-2023. Buatkan grafik rata rata jumlah siswa setiap tahunnya

>printfile(“sd-mentereng.csv”)

```
2015;395;408;410
2016;454;393;407
2017;405;453;393
2018;500;400;452
2019;490;500;399
2020;500;479;486
2021;467;470;473
2022;461;459;469
2023;479;460;459
```

>D=readmatrix(“sd-mentereng.csv”,>comma)

```
2015        395        408        410
2016        454        393        407
2017        405        453        393
2018        500        400        452
2019        490        500        399
2020        500        479        486
2021        467        470        473
2022        461        459        469
2023        479        460        459
```

```
>E:=[“1”,“2”,“3”];
```

```
>F:=D[,2:4]; G:=D[,1];
```

```
>writetable(F,wc=6,dc=0,>fixed,labc=E,labr=G)
```

```
           1     2     3
 2015    395   408   410
 2016    454   393   407
 2017    405   453   393
 2018    500   400   452
 2019    490   500   399
 2020    500   479   486
 2021    467   470   473
 2022    461   459   469
 2023    479   460   459
```

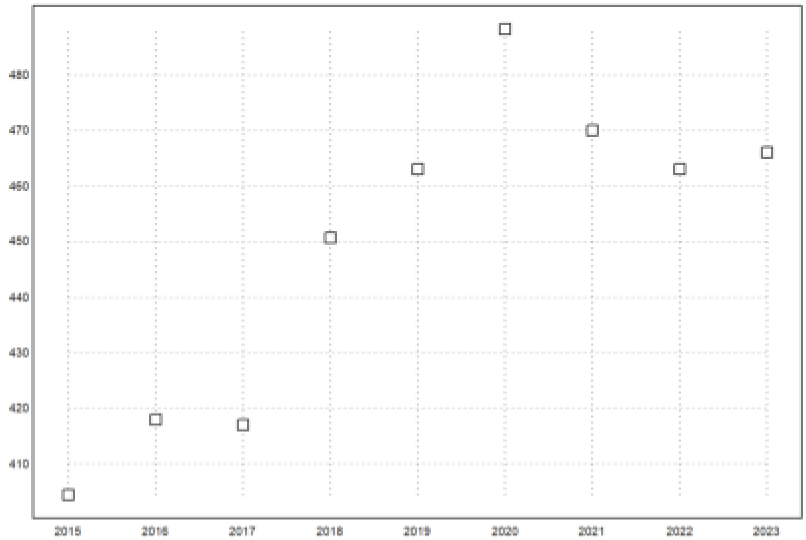
```
>ME=((D[,2]+D[,3]+D[,4])/3) //menghitung rata rata siswa setiap tahun
```

```
  404.33
     418
     417
  450.67
     463
  488.33
     470
     463
     466
```

```
>H:=(ME)’ //mentranspose nilai rata rata
```

```
[404.33,  418,  417,  450.67,  463,  488.33,  470,  463,  466]
```

```
>statplot(G,ME):
```



Gambar 7.44 images/Alfi%20Nur%20Azumah_23030630002_EMT4Statistika-052.png